



# **Universidad de Navarra**

Programa de Doctorado:

## **Inestabilidades en Sistemas Disipativos**

### **Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de un silo bidimensional**

Álvaro Janda Galán

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra

ISBN 978-84-8081-371-6





# **Universidad de Navarra**

Programa de Doctorado:

**Inestabilidades en Sistemas Disipativos**

## **Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de un silo bidimensional**

Memoria presentada por **D. Álvaro Janda Galán** dentro del Periodo de Investigación del Programa de Doctorado

El presente trabajo ha sido realizado bajo mi supervisión y estimo que puede ser presentado en calidad de **“Memoria de investigación”**.

Pamplona, 1 de febrero de 2008

Dr. Diego Maza Ozcoidi



Declaración:

Por la presente yo, **D. Álvaro Janda Galán**, declaro que esta memoria es fruto de mi propio trabajo y que en mi conocimiento, no contiene ni material previamente publicado o escrito por otra persona, ni material que sustancialmente haya formado parte de los requerimientos para obtener cualquier otro título en cualquier centro de educación superior, excepto en los lugares del texto en los que se ha hecho referencia explícita a la fuente de la información.

De igual manera, autorizo al Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, la distribución de esta memoria y, si procede, de la “fe de erratas” correspondiente por cualquier medio, sin perjuicio de los derechos de propiedad intelectual que me corresponden.

Pamplona, 1 de febrero de 2008

D. Álvaro Janda Galán

© Álvaro Janda Galán

Derechos de edición, divulgación y publicación:

© Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra



# Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a Diego Maza y Ángel Garcimartin toda su ayuda y confianza en la realización de este trabajo. Al primero le debo el haber despertado mi interés por la física, y al segundo toda la paciencia que ha tenido y su gran interés por hacerme mejorar. También agradezco a todos mis compañeros “granulares” su compañerismo y ayuda en el día a día.

Asimismo debo mencionar a todos los miembros del departamento: Pilar Ayucar, Roberto Arévalo, Sergio Ardanza, Jean Bragard, Javier Burguete, Maria Jesús Chasco, Pedro Elizalde, Jorge Elorza, Maxi Giuliani, Wenceslao González, Héctor Mancini, Cristian Mankoc, Iván Martínez, Montserrat Miranda, Carmen Palacios, Martín Pastor, Antonio Peláez, Alberto de la Torre, Gerard Vidal e Iker Zuriguel.

A la Fundación Ramón Areces le agradezco las becas que me han concedido durante los años 2006, 2007 y durante el presente año 2008.

Deseo agradecer también al grupo de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes de la ESPCI de París por su grata acogida durante mis estancia en su laboratorio. Especialmente me gustaría a agradecer a Eric Clément, Evelyne Kolb, Rim Haric, Pierre Cixous y Antoine Fourriere que hicieron que el tiempo que estuve allí fuese más agradable.

Debo mencionar a mis amigos de Santo Domingo y Pamplona, que aunque directamente no hayan influido en este trabajo, sí que lo han hecho valiosamente de manera indirecta. Una mención especial se merecen mis padres y mi hermana que siempre me han apoyado y se han sentido orgullosos de mí, aunque en ocasiones piensen que soy un “bicho raro”. Por último me gustaría recordar a mis abuelos Lucía y Paco, que aunque ya no estén presentes sé que si estuvieran se alegrarían por su nieto.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Reseña histórica de la física de los medios granulares . . . . .	2
1.2. Fracción de compactación . . . . .	3
1.3. Presión ejercida por un medio granular . . . . .	4
1.4. Probabilidad de atasco . . . . .	5
1.5. Flujo a través de un orificio . . . . .	9
1.5.1. Fluctuaciones en el flujo . . . . .	11
1.6. Objetivos de este estudio . . . . .	12
<b>2. Sistema Experimental</b>	<b>13</b>
2.1. Silo . . . . .	13
2.2. Medio granular . . . . .	14
2.3. Instrumentación . . . . .	16
2.3.1. Balanza . . . . .	16
2.3.2. Medición de la duración de avalancha . . . . .	16
2.3.3. Sistema para restablecer el flujo . . . . .	18
2.4. Procedimiento experimental . . . . .	19
<b>3. Resultados</b>	<b>21</b>
3.1. Tamaños de avalancha . . . . .	21
3.1.1. Distribución de los tamaños de las avalanchas . . . . .	22
3.1.2. Tamaño característico de avalancha . . . . .	26
3.2. Diámetro crítico . . . . .	27
3.3. Probabilidad de atasco . . . . .	28
3.4. Flujo . . . . .	32
<b>4. Conclusiones</b>	<b>35</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>37</b>

# Capítulo 1

## Introducción

Un medio granular es un conjunto de partículas similares, cuyo comportamiento colectivo es muy diferente al de sus elementos por separado. La principal característica de estos materiales es que disipan rápidamente la energía, debido al gran número de colisiones que se producen (especialmente en medios granulares densos). El tamaño de las partículas que los componen puede abarcar varios órdenes de magnitud: desde milímetros (granos de arena y trigo) hasta metros (coches y rocas). Cuando las partículas son de tamaño menor que 0,3 mm se les denomina “polvos”, los cuales tienen propiedades específicas debido a que algunas fuerzas de contacto comienzan a ser de magnitud comparable al peso de los granos. Por otro lado, en el límite superior no se suelen considerar como medios granulares sistemas de partículas de más de varios metros, ya que sería complicado reunir suficientes elementos como para observar fenómenos colectivos. Sin embargo, en la naturaleza se dan algunas de estas agrupaciones (los anillos de los planetas).

Dependiendo de las condiciones experimentales, un medio granular puede comportarse de manera similar a un sólido, un líquido o un gas. En cambio, en ninguno de los casos su dinámica puede ser descrita rigurosamente mediante las leyes conocidas para esos tres estados de la materia. Esto es debido a que los granos contienen tal número de grados de libertad, que sus interacciones son en general irreversibles y además fuertemente no lineales. Por ello, a pesar del gran número de investigaciones realizadas, aún muchos de sus comportamientos son enigmáticos.

Uno de los fenómenos más peculiares de los medios granulares es la formación de atascos o *jamming* en inglés. En nuestra vida cotidiana experimentamos que las cosas se atascan: embotellamientos de tráfico, la sal obstruyendo los orificios de un salero, la gente intentando salir de un concierto por puertas que no son capaces de absorber un gran flujo de personas, . . . Pero además, existen otros sistemas que experimentan atascos (emulsiones, suspensiones coloidales, estructuras vítreas, formación de espumas, . . .). Todos estos sistemas presentan similitudes físicas, de manera que se ha llegado a definir la transición por atasco (o *jamming transition*) como una transición de fase [1], y a estos sistemas se les engloba en una clase de materiales conocidos como materia frágil (*fragile matter*) [2, 3].

Por otro lado, la materia granular es empleada en muchos procesos industriales (de la construcción, alimenticia, farmacéutica, del plástico, etc.). Un dato que demuestra la importancia de los materiales finamente divididos en la industria, es que un 10 % de toda la energía producida en el planeta se consume en el procesamiento de materias primas en forma de granulados [4]. En muchas ocasiones, estos materiales son almacenados en silos, de manera que posteriormente son descargados a través de un orificio. Para poder controlar la cantidad dosificada es necesario conocer el flujo de descarga. Este aspecto ha sido ampliamente estudiado por ingenieros en el caso de orificios de tamaño grande comparado con el de las partículas del medio granular. En cambio, para orificios de tamaño comparable al de los granos, no se ha realizado un estudio tan exhaustivo debido a la formación de atascos que interrumpen el flujo.

En este trabajo se ha estudiado el flujo y la probabilidad de atasco durante la descarga de un medio granular en un silo bidimensional con paredes transparentes. Esta geometría permite el seguimiento del movimiento de las partículas en el interior del silo, aspecto que se piensa que se encuentra relacionado con el flujo de descarga. Además, los resultados obtenidos son comparados con los correspondientes a estudios ya realizados tanto en sistemas experimentales bidimensionales, como tridimensionales.

En esta introducción, tras un resumen de la evolución histórica de la física de los medios granulares, se comentarán algunas propiedades necesarias para comprender el trabajo realizado: el flujo y los atascos en la descarga de un silo bidimensional.

## 1.1. Reseña histórica de la física de los medios granulares

La primera observación científica sobre los medios granulares fue quizá la realizada por Lucrecio hacia el año 55 A.C., asemejando el flujo de semillas de adormidera con un fluido. Posteriormente, Leonardo da Vinci en el Renacimiento y Coulomb en el siglo XVIII, realizaron estudios sobre la fricción seca entre sólidos. Este último se interesó por la estabilidad de estructuras arquitectónicas, y propuso las llamadas leyes de Coulomb de la fricción seca entre sólidos [5].

Otro aspecto que suscitó interés en algunos investigadores fue el comportamiento de los materiales granulares vibrados. Así en 1780, E. Chladni observó diferentes comportamientos entre granos ligeros y pesados al ser vibrados. Sus observaciones dieron lugar a lo que hoy día se conocen como figuras complementarias de Chladni. Más tarde, M. Faraday estudió la formación de pilas de arena inducidas por vibración [6].

Un fenómeno que ha sido objeto de estudio es la distribución de fuerzas en un material granular almacenado en un silo. I. Roberts observó que la presión en la base de

un silo satura cuando la altura de la capa granular es superior a dos veces su anchura [7]. Pocos años después H. Janssen explicó esta saturación mediante un modelo basado en un coeficiente, en el cual se describe el redireccionamiento de las fuerzas hacia las paredes [8]. En 1885, O. Reynolds también realizó una aportación importante a la física de los medios granulares, enunciando el que hoy se conoce como *Principio de dilatación de Reynolds* [9], en el cual se dice que para que un medio granular fluya, tiene que dilatarse.

Durante el siglo XX, el número de físicos e ingenieros que se han interesado por la física de estos materiales tan peculiares ha ido en aumento; cabe destacar los nombres de R.A. Bagnold [10], con su estudio sobre la formación de dunas en el desierto, y R.L. Brown & J.C. Richards [11], sobre el flujo de descarga de silos.

## 1.2. Fracción de compactación

Al verter un medio granular dentro de un recipiente las partículas se van acomodando hasta que se llega a una configuración estática en la cual quedan huecos, por ello el volumen ocupado es superior a la suma de los volúmenes individuales de cada grano. El parámetro que relaciona estos dos volúmenes se denomina *fracción de compactación*, y se define como el cociente entre la suma de los volúmenes de las partículas individuales  $V_r$  y el volumen aparente  $V_a$  (volumen total incluyendo los huecos entre los granos):  $\phi = \frac{V_r}{V_a}$ .

En dos dimensiones, el empaquetamiento más denso posible para discos es  $\phi = 0,907$ , que corresponde a una red triangular. Esta fracción de compactación se consigue colocando los discos ordenadamente uno a uno. Colocando las partículas de forma aleatoria, la mayor fracción de compactación que se puede alcanzar es  $\phi \simeq 0,82$ , que normalmente se denomina *random close packing* [12]. Por otro lado, el empaquetamiento menos denso al azar (*random loose packing*) es más difícil de definir, pero de los trabajos teóricos parece deducirse un valor cercano a 0,78 [13]. Entre otros aspectos, la fracción de compactación de un medio granular depende de la forma en que se depositen las partículas. Si se hace rápidamente, los granos no tienen tiempo para ordenarse, por lo que se forman arcos que dejan huecos en su interior, y como resultado se obtiene una fracción de compactación baja. En cambio, si se depositan lentamente, las partículas se ordenan de manera que los arcos que se forman constan de menor número de partículas, dejando huecos más pequeños, y por tanto se obtiene un mayor empaquetamiento.

El cambio en la fracción de compactación es el origen de un fenómeno que se produce en los medios granulares, formulado en el principio de dilatación de Reynolds [9]: “un medio granular altamente compactado en el interior de un envoltorio flexible incrementa su volumen cuando el envoltorio es deformado. Si el envoltorio es inextensible pero deformable, la configuración del medio granular no se puede alterar a no ser que se rompa el envoltorio o se fracture el medio granular”. Es decir, un medio granular para fluir o reacomodarse debe dilatarse, disminuyendo así su fracción de

compactación.

Un ejemplo de este fenómeno se puede observar al pasear por la orilla del mar. Cuando caminamos sobre la arena mojada, la zona de alrededor de nuestras pisadas sorprendentemente queda seca. Esto es debido a la presión ejercida por nuestros pies, la cual hace disminuir la fracción de compactación de la arena, aumentando el tamaño de los huecos entre las partículas. Estos huecos son ocupados por el agua de la superficie. Cuando cesa la presión, los granos se relajan, aumenta la fracción de compactación y el agua vuelve a mojar la superficie.

Un parámetro equivalente a la fracción de compactación es la densidad aparente ( $\rho_a$ ), que se obtiene al dividir la masa del medio granular entre el volumen total que ocupa ( $V_a$ ). La densidad aparente se relaciona con la fracción de compactación,  $\phi$ , en función de la densidad del material,  $\rho$ , mediante la siguiente ecuación:

$$\rho_a = \phi \rho \quad (1.1)$$

### 1.3. Presión ejercida por un medio granular

Al aplicar una fuerza sobre un medio granular, ésta no se propaga homogéneamente por todo el medio. La presión se transmite a través de las partículas en contacto, definiéndose unos caminos que se denominan “cadenas de fuerza”.

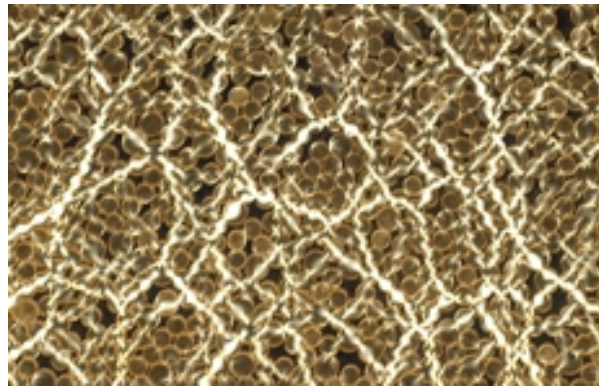


Figura 1.1: En la figura se muestra como una fuerza no se propaga homogéneamente en un medio granular. Debido a la birrefringencia inducida por la presión, se observan brillantes las partículas que sufren un mayor esfuerzo. Imagen obtenida por I. Zuriguel.

Cuando se aplica una presión vertical ( $P_v$ ) sobre un medio granular, se genera una presión horizontal ( $P_h$ ) sobre las paredes. Se asume que estas dos presiones se encuentran relacionadas por una constante de proporcionalidad  $K$ , que depende de las características del material [14].

$$P_h = K P_v \quad (1.2)$$

Como consecuencia de esta relación, la presión en un medio granular no es de tipo hidrostático. El “efecto Janssen” describe esta propiedad [8]: “un medio granular en el interior de un recipiente ejerce una presión en la base que satura cuando el nivel de partículas alcanza una determinada altura”.

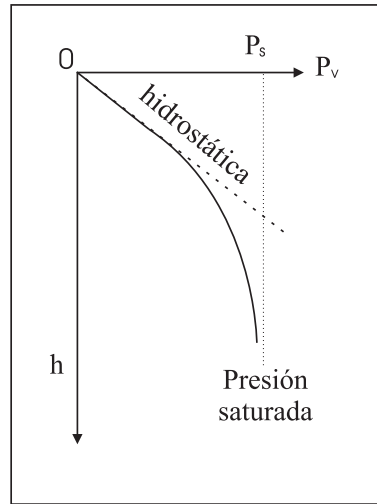


Figura 1.2: Presión vertical en función de la altura de la capa granular. La línea discontinua vertical indica la presión límite,  $P_s$ , mientras que la línea de trazos representa la presión que ejercería un fluido. Figura obtenida de [4].

La altura del medio granular por encima de la cual la presión vertical satura depende de la anchura de la base del silo, de la constante de distribución de fuerzas  $K$ , y del coeficiente de fricción estático del material granular  $\mu_s$ . Hay que señalar que el coeficiente de fricción estático del medio granular es distinto al que normalmente se utiliza para la fricción entre dos cuerpos. En este último caso, el coeficiente  $\mu_s$  depende de las propiedades de la superficie de los materiales. En cambio, en el caso de los medios granulares, el coeficiente de fricción estático depende, además, de su forma y de su tamaño.

## 1.4. Probabilidad de atasco

Una de las principales características de los medios granulares es su capacidad para formar arcos, también llamados puentes o bóvedas. Se puede definir arco como una estructura espacial de partículas que se sostienen entre sí. Los distintos granos del arco se estabilizan mutuamente compensando las fuerzas. Si se elimina una partícula del arco, éste se desmorona debido a la acción de la gravedad.

La formación de puentes condiciona la configuración del medio granular, y son responsables de muchas de sus propiedades. La cantidad y tamaño de los arcos influye en la fracción de compactación, y en la propagación no homogénea de fuerzas. A su

vez, son los causantes de uno de los problemas más importantes en la descarga de silos: los atascos.

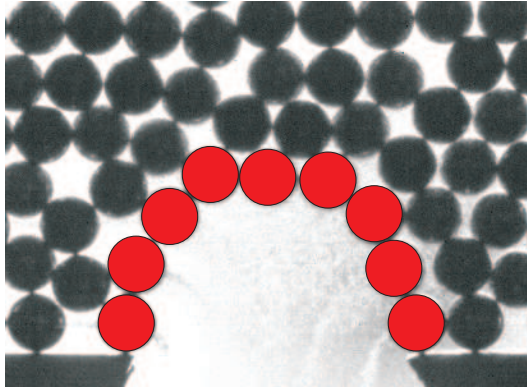


Figura 1.3: Fotografía de un arco en el orificio de descarga del silo. En color rojo se han marcado las partículas que forman parte del arco, el cual ha provocado un atasco.

### Trabajos experimentales en sistemas bidimensionales

Dentro de los trabajos experimentales realizados sobre la formación de arcos, hay que destacar los realizados por K. To y sus colaboradores [15, 16, 17, 18]. En su primer trabajo midieron la probabilidad de atasco al descargar, a través de un orificio, unos discos contenidos en una tolva bidimensional. El parámetro estudiado fue  $J(D)$ , que es la probabilidad de que se produzca un atasco antes de que hayan caído los  $M$  discos contenidos en la tolva. En sus experiencias emplearon como máximo 700 discos. El parámetro de control de este experimento es  $D$ , la relación entre el tamaño del orificio ( $D_o$ ) y el diámetro de los discos ( $d_p$ ):

$$D = D_o/d_p \quad (1.3)$$

Su primer resultado importante es que la probabilidad de atasco ( $J(D)$ ) decrece al aumentar  $D$ . A su vez, los autores también muestran que para un mismo  $D$ , la probabilidad de atasco aumenta con el número de discos ( $M$ ) contenidos en la tolva. Pero lo realmente novedoso es el modelo que proponen para definir la forma del arco que obstruye el orificio. Afirman que la línea que une los centros de los discos que forman el arco, sigue un camino al azar con las restricciones de que el arco sea cóncavo, y su tamaño sea igual o superior al tamaño del orificio.

En un trabajo publicado por K. To en 2005 [18], se obtienen los histogramas de los tamaños de avalancha para diferentes  $D$ . El tamaño de avalancha se define como el número de partículas que atraviesan el orificio antes de que se produzca un atasco. A partir de estos histogramas se obtiene una función de distribución  $F(n)$ , la cual representa la fracción de avalanchas con tamaño mayor o igual que  $n$ . Esta función, que decae de manera exponencial con  $n$ , es relacionada con la probabilidad de atasco ( $J(D)$ ), considerando el paso de estado “no atascado” a “atascado” como un proceso



de Markov. Así, K. To propone la siguiente función para ajustar la probabilidad de atasco:

$$J(D) = 1 - e^{-(M-n_o)Ae^{-BD^2}} \quad (1.4)$$

donde  $A$  y  $B$  son parámetros del ajuste,  $M$  es el número de discos contenidos en la tolva y  $n_o$  es el número de discos que caen antes de que se alcance un flujo denso estable de partículas.

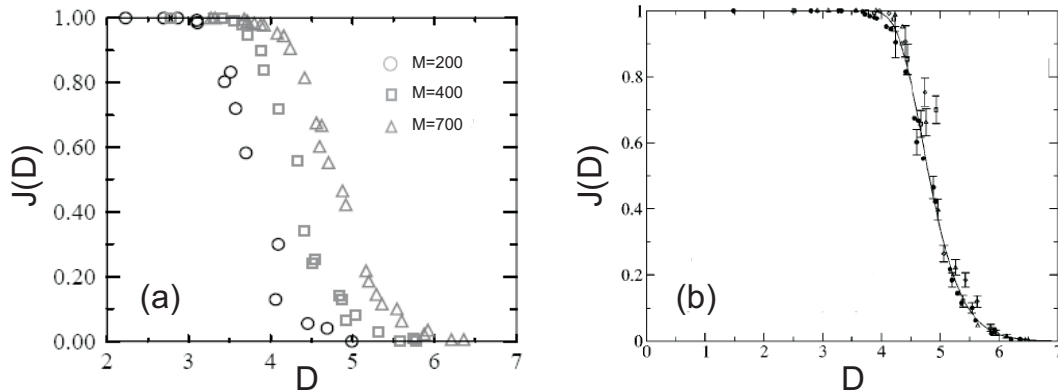


Figura 1.4: Probabilidad de atasco en función de  $D$ . (a) Los diferentes símbolos representan distinto número de discos  $M$  empleados en las experiencias. (b) Los puntos representan los datos experimentales y la línea continua el ajuste con la ecuación 1.4. Figuras obtenidas de K. To [17, 18].

### Trabajos experimentales en sistemas tridimensionales

El estudio de la formación de arcos en sistemas tridimensionales es mucho más complejo. A pesar de ello, existen trabajos en sistemas tridimensionales en los cuales se ha estudiado la estadística de los tamaños de avalancha. I. Zuriguel *et al.* [19, 20], estudiaron la estadística de los tamaños de avalancha en la descarga de un silo cilíndrico de base plana. Al igual que en el caso de K. To, el parámetro de control es  $D$ , la relación de tamaños del orificio y el diámetro de las partículas. Realizando típicamente 3000 experiencias para cada  $D$ , obtuvieron las distribuciones de los tamaños de avalancha. Un aspecto importante que se concluye es que para avalanchas mayores que el tamaño de avalancha más probable, las distribuciones siguen un decaimiento exponencial (figura 1.5).

Este comportamiento lo reproducen basándose en un modelo de percolación unidimensional. Para ello definen  $p_D$  como la probabilidad que un grano atravesase un orificio de tamaño  $D$ , y por tanto  $(1 - p_D)$  la probabilidad de que lo atasque. A su vez, asumen el paso de las partículas por el orificio como una sucesión de eventos independientes, y que  $p_D$  permanece constante para los diferentes granos. Así, la probabilidad de obtener una avalancha de tamaño  $s$  es el resultado de multiplicar  $s$  veces

la probabilidad de que un grano pase el orificio y una vez la probabilidad de que el grano atasque el orificio. Por tanto, la distribución de tamaños de las avalanchas,  $n_D(s)$  viene dada por:

$$n_D(s) = (1 - p_D)p_D^s \quad (1.5)$$

Aplicando logaritmos a ambos miembros de la ecuación anterior:

$$\log(n_D(s)) = s \log(p) + \log(1 - p) \quad (1.6)$$

Como se puede observar la ecuación 1.5 reproduce perfectamente el decrecimiento exponencial de la distribución de los tamaños de avalancha, empleando como único parámetro  $p_D$ .

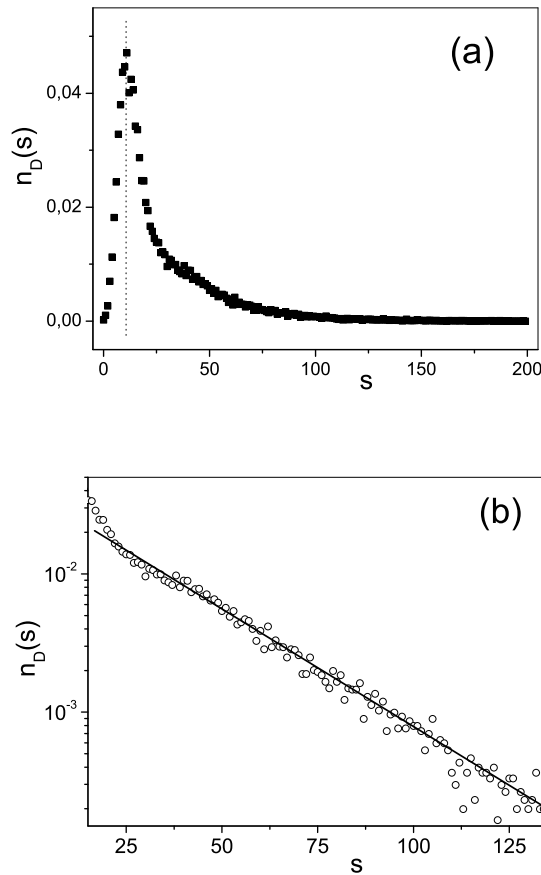


Figura 1.5: (a) Distribución de tamaños de avalancha  $s$  para  $D = 3$ . La línea punteada marca el tamaño de avalancha más probable. (b) Igual que (a) pero en escala semilogarítmica. La línea continua es una guía para observar el decaimiento exponencial de la distribución [20].

Otros resultados importantes de los trabajos realizados por I. Zuriguel *et al.* son la caracterización de los histogramas de los tamaños de avalancha a partir de la avalancha media, así como la existencia de un tamaño crítico de orificio  $D_c$  por encima del cual no se producen atascos. En relación con este último hecho, se muestra como la avalancha media diverge de forma potencial a medida que  $D$  se aproxima a  $D_c$ . Concretamente la expresión que se propone es:

$$\langle s \rangle = \frac{A}{(D_c - D)^\gamma} \quad (1.7)$$

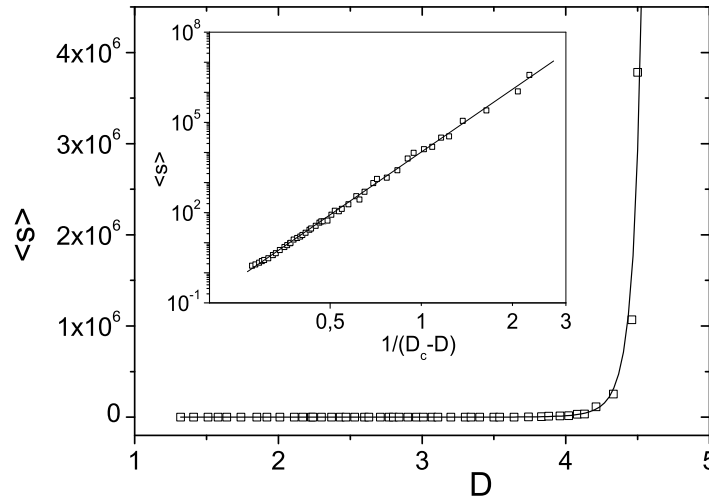


Figura 1.6: Divergencia de la avalancha media  $\langle s \rangle$  con  $D$ . Los símbolos  $\square$  representan los puntos experimentales y la línea continua es el ajuste con la ecuación 1.7. En la figura insertada se representa en escala logarítmica  $\langle s \rangle$  vs  $1/(D_c - D)$  [20].

## 1.5. Flujo a través de un orificio

El flujo de descarga en silos ha sido investigado ampliamente debido a sus numerosas aplicaciones en la industria. Dentro del silo, las partículas descienden hacia el orificio de salida debido a la acción de la gravedad. El caudal de descarga ( $W$ ) se define como la cantidad de masa que atraviesa el orificio por unidad de tiempo. Habitualmente se utiliza como magnitud análoga el número de partículas que atraviesan el orificio ( $W_b$ ) por unidad de tiempo.

El flujo de descarga ha sido estudiado principalmente por ingenieros. Así, en 1961, Beverloo y sus colaboradores [21] establecieron que el flujo medio de descarga a través de un orificio debe ser proporcional a  $D$  elevado a 2,5. Esta relación es fácil de justificar: el caudal de descarga tiene que ser proporcional al área del orificio ( $A$ ), y a la

velocidad media vertical de las partículas cuando atraviesan el orificio ( $v_z$ ):  $W \propto Av_z$ .

Los autores suponen que las partículas caen libremente, partiendo del reposo, desde una altura  $H$  marcada por una bóveda circular del mismo diámetro que el orificio. Por tanto, en el orificio  $v_z$  tiene que ser proporcional a  $D^{1/2}$ . Teniendo en cuenta además que  $A \propto D^2$ , se obtiene la “ley de Beverloo”, cuya expresión completa para el caudal en gramos por minuto es:

$$W = C\rho_a(D_o - kd_p)^{2,5}\sqrt{g} \quad (1.8)$$

donde es  $\rho_a$  es la densidad aparente del material,  $D_o$  y  $d_p$  son los diámetros del orificio y de las partículas, y  $C$  y  $k$  son coeficientes empíricos que dependen respectivamente del coeficiente de fricción y de la forma de las partículas. Es de reseñar que en la ecuación 1.8 aparece  $D_o - kd_p$  en lugar de  $d_o$ . Esto se debería a la existencia de una zona contigua a los límites del orificio, por la cual no fluyen partículas. A partir de algunas observaciones experimentales, R.L. Brown & J.C. Richards [11] propusieron que un anillo contiguo al borde del orificio permanece constantemente atascado (“empty annulus”). Según estos autores, el diámetro efectivo del orificio sería inferior a  $D_o$ .

Posteriormente, la relación encontrada por Beverloo entre  $W$  y  $D$ , también fue obtenida por Al-Din y Gunn [22] mediante un análisis dimensional. En 1997, Hirshfeld y sus colaboradores [23, 24] comprobaron numéricamente la “ley de Beverloo” para un silo bidimensional. Obtuvieron que  $W_b$  es proporcional a  $D^{1,5}$ , lo cual coincide con la ecuación propuesta por Beverloo para sistemas bidimensionales, puesto que en este caso  $A \propto D$ .

$$W_b \propto D^{1,5} \quad (1.9)$$

En los trabajos citados anteriormente, hay que señalar que los autores hacen notar que el ajuste teórico no corresponde con los resultados experimentales para  $D < 10$ . Además, para  $D < 5$  no se realizaron mediciones debido a que el flujo se interrumpía por la formación de arcos que atascaban el orificio.

Otro importante estudio experimental sobre el flujo de descarga de un medio granular a través de un orificio, fue realizado por Nedderman y sus colaboradores en 1982 [25]. Basándose en observaciones empíricas, obtuvieron las siguientes conclusiones:

- El caudal  $W$  es independiente de la altura de la capa granular  $h$ , siempre y cuando  $h > 2,5 \varphi$ , donde  $\varphi$  es el diámetro del silo. Este resultado es esperable teniendo en cuenta, que según el “efecto Janssen” la presión en la base del silo satura.
- El flujo de descarga es independiente de  $\varphi$  si se cumple que  $\varphi > 2,5 D_o$  y  $\varphi > D_o + 30 d_p$ . Esto significa que si la anchura del silo cumple las condiciones indicadas, el caudal es independiente de las condiciones de borde.

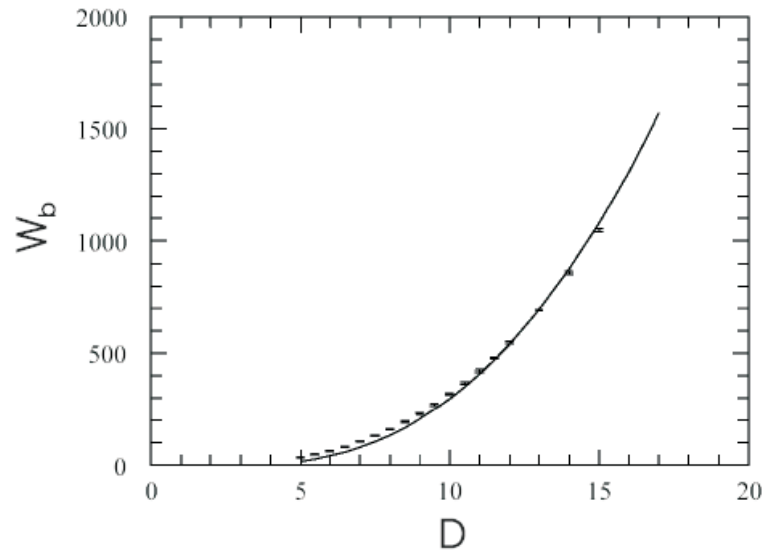


Figura 1.7: Flujo (en número de partículas por unidad de tiempo) en función de diámetro del orificio de salida. Los puntos son resultados obtenidos de simulaciones y la línea es un ajuste de la ley de Beverloo para tres dimensiones. Figura obtenida de [24].

### 1.5.1. Fluctuaciones en el flujo

Es posible que el flujo de un medio granular a través de un orificio se encuentre condicionado por la formación de atascos parciales. Se piensa que estos sucesos tienen lugar debido a la formación de arcos que no son lo suficientemente estables para aguantar el peso de los granos superiores, o por la formación de puentes que bloquean sólo una región del orificio. Por tanto, cuando se forma un atasco parcial, el flujo se detiene momentáneamente, o bien únicamente se interrumpe en una zona del orificio.

Como consecuencia de la formación de atascos parciales, aparecen oscilaciones en el flujo, tal y como observaron A. Medina y sus colaboradores en la descarga de un silo bidimensional [26]. Anteriormente la existencia de oscilaciones en el flujo ya había sido descrita por D.C. Hong [27] en simulaciones y por R.L. Brown & J.C. Richards [11] en experimentos.

En un trabajo realizado por E. Longhi y N. Easwar [28], se estudió la presión en las paredes laterales al descargar un tolva bidimensional. Encontraron que al acercarse a valores de  $D$  para los que se producen atascos, las distribuciones de probabilidad de la presión en la pared lateral de la tolva tienden asintóticamente a una ley de potencias en  $D$ . A su vez observaron, que aunque no se interrumpa el flujo, existen cadenas de fuerza desde la paredes hacia el centro. Estas cadenas de fuerza podrían considerarse atascos parciales, puesto que ralentizan el flujo de descarga.

## 1.6. Objetivos de este estudio

A continuación se exponen las razones de construir un silo bidimensional, así como los aspectos que se han estudiado, y los que quedan para un futuro próximo.

La principal razón de construir un silo bidimensional estriba en que debido a la geometría del experimento, se tiene acceso visual al movimiento de las partículas durante la descarga. De esta manera, se pueden implementar distintos sistemas de adquisición de imágenes, que nos permiten obtener una gran cantidad de información sobre el proceso. En el caso de silos tridimensionales, únicamente se pueden observar las partículas en las paredes o en la superficie. Para poder realizar mediciones del movimiento en el interior del silo, son necesarias técnicas complejas y de alto coste (microtomografía de rayos X [29] o tomografía de positrones).

Las mediciones básicas que se han realizado han sido: tamaño de avalancha (número de partículas que caen entre dos atascos consecutivos) y duración de avalancha (tiempo durante el que han caído partículas). Además de estas mediciones, también se han llevado a cabo filmaciones de las partículas durante la descarga. A partir de las mediciones obtenidas se han estudiado los siguientes aspectos:

- Estadística de los tamaños de avalancha: Estudio y caracterización de la distribución de tamaños de avalancha. Probabilidad de atasco.
- Existencia o no de un tamaño crítico de orificio (por encima del cual no se producen atascos).
- Flujo de descarga resuelto en el tiempo: Estudio del flujo estacionario (flujo medio de diferentes avalanchas en función de  $D$ ). Estudio de las fluctuaciones del flujo dentro de una misma avalancha.
- Fluctuaciones de la densidad del material granular durante la descarga.
- Difusión de las partículas en el interior del silo.

# Capítulo 2

## Sistema Experimental

Como se mencionó anteriormente, el objetivo del experimento es estudiar el flujo y los atascos en la descarga de un medio granular a través de un orificio. Para ello se ha construido un silo bidimensional con un orificio de tamaño variable en su base. Esta geometría nos permite tener acceso visual al movimiento de las partículas durante la descarga. Las mediciones básicas que se han realizado son el tamaño y duración de las avalanchas, entendiendo por avalancha la descarga de material que se produce entre dos atascos consecutivos. Como parámetro de control se ha empleado  $D$ , el tamaño del orificio  $D_o$  de la base del silo escalado con el diámetro de las partículas  $d_p$ .

$$D = \frac{D_o}{d_p} \quad (2.1)$$

El material granular empleado son partículas esféricas idénticas de acero inoxidable, las cuales se descargan del silo a través de la abertura de la base. Las partículas que caen se recogen en una caja situada debajo de la salida, sobre una balanza. Si el tamaño de  $D$  no es lo suficientemente grande, el flujo se interrumpe debido a la formación de un arco en el orificio. Este arco sostiene el peso del resto de material granular, produciendo un atasco. Pasado un tiempo prudencial, se restablece el flujo de descarga aplicando en el orificio un chorro de aire a presión.

A continuación se describe el montaje del sistema experimental, así como la instrumentación empleada y el protocolo de medida que se ha seguido para realizar las diferentes mediciones.

### 2.1. Silo

La base del silo es un placa de hierro anonizado, en la cual se ha maquinado una guía donde se colocan enfrentadas dos piezas de acero inoxidable que conforman la base del silo (figura 2.1). El hueco que delimitan las dos piezas tiene forma de cuchilla, de manera que la distancia entre los cantos define el tamaño del orificio  $D_o$ . Esta forma de las piezas se ha elegido para que las partículas sólo se puedan atascar en la parte superior del orificio. Estas dos piezas se pueden desplazar a lo largo de la guía de manera que se puede variar la distancia entre ellas y por tanto  $D$ . Una vez

elegido el tamaño de orificio las piezas quedan fijadas mediante dos tornillos roscados por debajo de la base del silo.

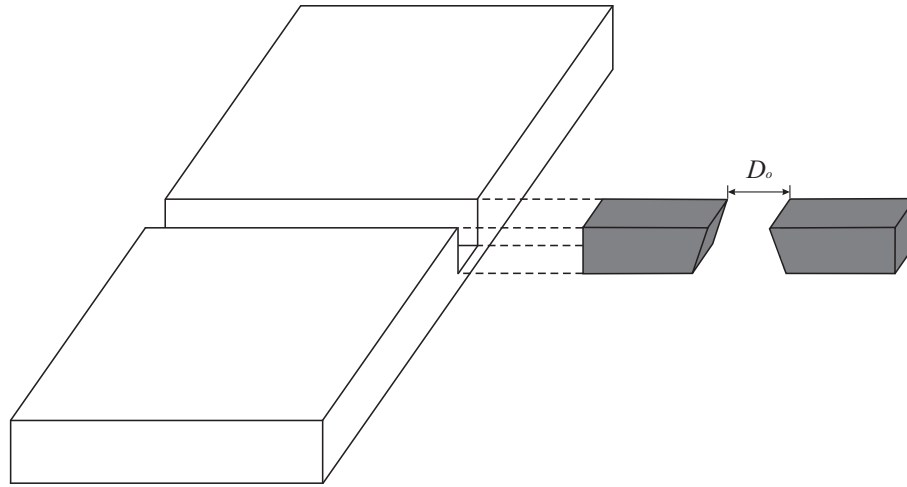


Figura 2.1: Base del silo con la guía donde se colocan las piezas que definen el orificio de salida.  $D_o$  es el tamaño del orificio.

Sobre la base se apoyan dos vidrios idénticos de dimensiones  $800 \times 350$  mm. Estos vidrios se encuentran enfrentados y separados entre sí por dos galgas de acero inoxidable de espesor  $1,10 \pm 0,01$  mm. Las galgas forman las paredes laterales del silo, de manera que la separación entre ellas define su anchura. En todas las experiencias la anchura del silo ha sido 20,0 cm, con el fin de que el flujo de descarga sea independiente de las condiciones de borde [25]. Uno de los vidrios se encuentra fijado a la base mediante dos escuadras de hierro. Para fijar el otro vidrio se emplean pinzas de presión, de manera que atrapan a los dos cristales.

Para introducir de una forma sencilla el material granular en el silo, y agilizar en la medida de lo posible el proceso de recarga, se emplea una tolva de acero inoxidable. La tolva se encuentra acoplada a la parte superior de los vidrios, de manera que la abertura de la tolva coincide con el espacio que queda entre los vidrios. En la figura 2.2 se muestra una fotografía del silo. Un aspecto necesario de aclarar es que se habla de silo en el sentido estricto, en ningún caso se ha trabajado con tolvas. En el caso de una tolva, la base sobre la que se sustenta el material granular no es plana, sino que las paredes contiguas al orificio de salida tienen un ángulo determinado con la horizontal distinto de cero. Por lo tanto, se podría definir un silo como una tolva en la cual el ángulo respecto a la horizontal es cero.

## 2.2. Medio granular

Como medio granular se han empleado esferas de acero inoxidable *INOX 420*, de  $1,00 \pm 0,01$  mm de diámetro y  $4,00 \pm 0,01$  mg de masa. Si tenemos en cuenta que la separación entre los vidrios es  $1,10 \pm 0,01$  mm, el espesor de la capa granular dentro



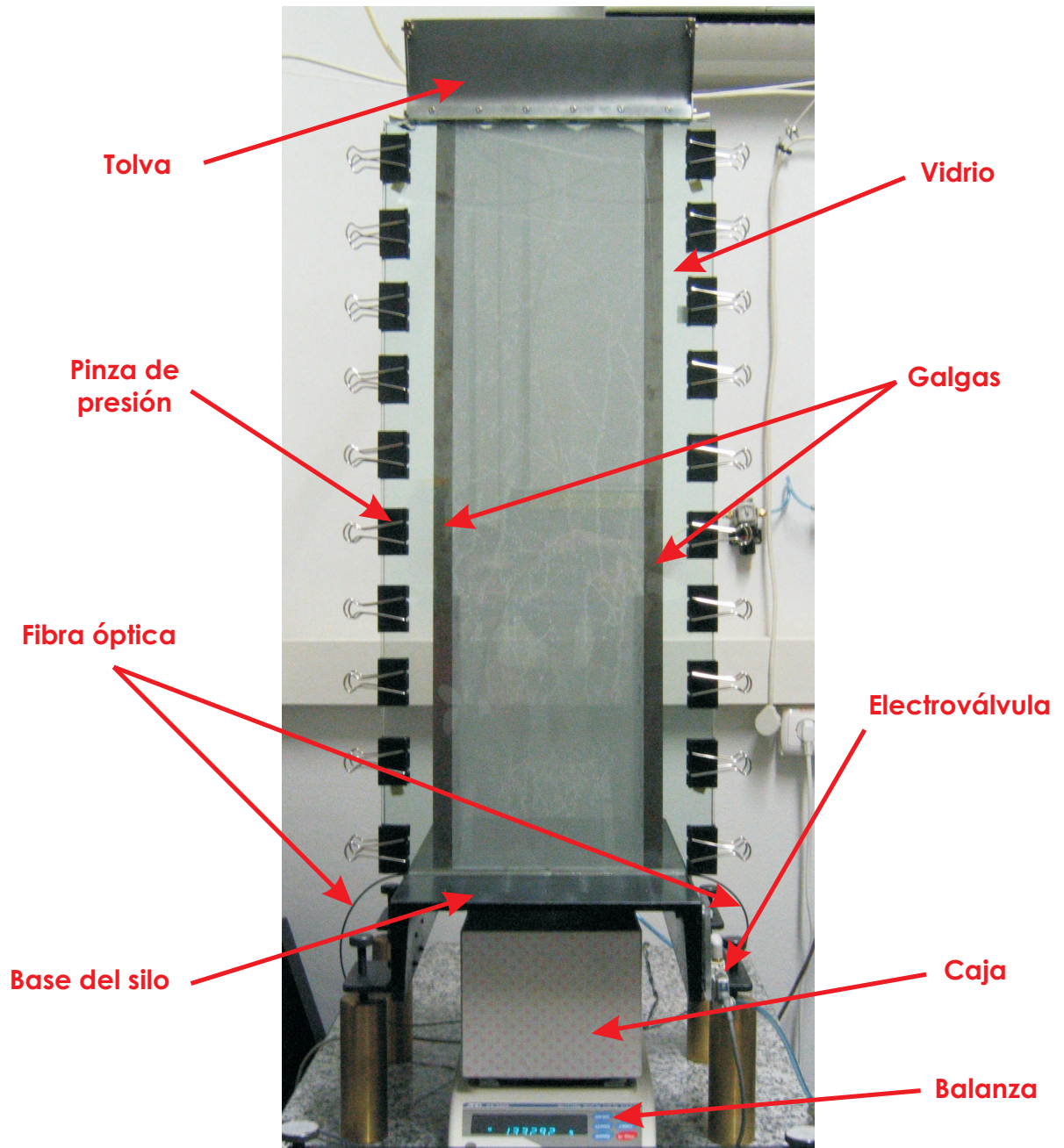


Figura 2.2: Fotografía del sistema experimental

del silo es un 10% superior al diámetro de partícula, siendo 0,005 mm la máxima superposición vertical entre dos partículas. Por tanto, es razonable asumir que el silo es bidimensional.

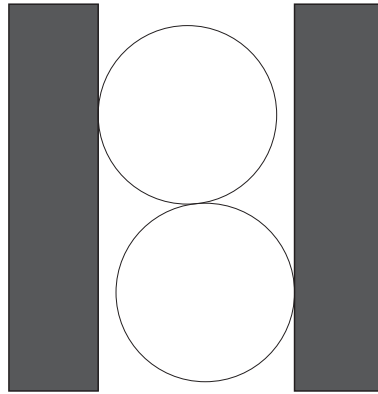


Figura 2.3: Esquema de la superposición entre dos partículas en el interior del silo.

## 2.3. Instrumentación

A continuación se describen brevemente los instrumentos utilizados para automatizar la adquisición de datos. Todos los instrumentos son controlados mediante un ordenador, en el que también se almacenan los datos.

### 2.3.1. Balanza

Para la medición de la masa de partículas descargadas se han empleado dos balanzas diferentes. En el caso de orificios de pequeño tamaño, se ha empleado una balanza *AND GX-400*, con una capacidad de 410 g y una resolución de  $\pm 0,001$  g. Esta resolución permite mantener un error relativo aceptable para avalanchas de pequeño tamaño, las cuales son más frecuentes en aberturas pequeñas. Para tamaños de orificio grandes, se ha empleado una balanza *AND GX-4000*, de 4100 g de rango y  $\pm 0,01$  g de resolución. Esta elección se debe a que en el caso de orificios suficientemente grandes, el tamaño de avalancha puede llegar a superar los 400 g, y por tanto es necesario una balanza con mayor fondo de escala.

### 2.3.2. Medición de la duración de avalancha

Para medir la duración de las avalanchas se ha empleado un fotodetector *Omron E3S-X3 CB4* y fibra óptica *E32-TC200*. Atravesando las piezas que conforman la base del silo, se disponen enfrentadas dos fibras ópticas (figura 2.4). De una de ellas sale un haz de luz que es recogido por la otra fibra óptica, y conducido hasta el fotodetector. Cuando una partícula atraviesa el orificio, el haz de luz es interrumpido y no alcanza la fibra conectada al fotodetector. Eso queda registrado en la señal de salida del fotodetector. Debido al pequeño tamaño de las partículas, para ser capaces

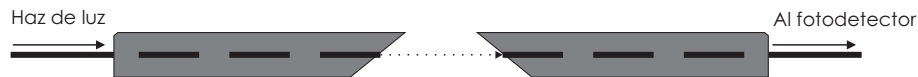


Figura 2.4: Esquema de la posición de las fibras ópticas en las piezas que definen el orificio del silo.

de detectar su paso a través del orificio se tuvo que achicar el haz de luz de salida de la fibra óptica. Para ello en los orificios de la base del silo, por los cuales asoman las fibras ópticas, se pegaron dos láminas de papel de cobre. A dichas láminas se les realizó un pequeño agujero de manera que quedasen alineados, y que así el haz de luz que atraviesa justo por debajo del orificio del silo, fuese lo suficientemente estrecho como para que el paso de una bola lo interrumpiese por completo. Gracias a esta reducción del haz es posible detectar cuando una partícula atraviesa el orificio.

Se realizan mediciones del voltaje de salida del fotodetector desde antes de iniciarse una avalancha, hasta pasado un tiempo prudencial tras haber finalizado la misma. Para ello se emplea un digitalizador *HP E1326B* con una frecuencia de muestreo de 10 kHz. Finalmente, se localiza el instante en el que ha ocurrido la primera y la última caída de voltaje, de manera que el lapso entre esos dos sucesos define la duración de la avalancha. El tiempo de respuesta del fotodetector empleado es de 1 *ms*, gracias al cual se obtiene una alta resolución en la medición del tiempo.

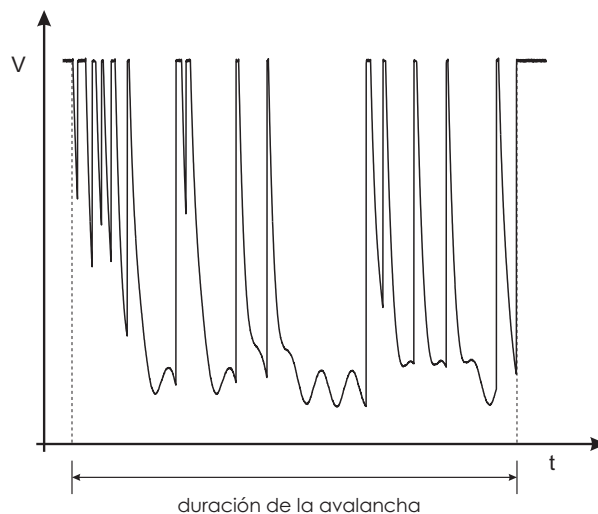


Figura 2.5: Señal del voltaje de salida del fotodetector durante una avalancha. Las caídas de voltaje corresponden a momentos en los cuales hay partículas atravesando el orificio. En línea de trazos se ha señalado el principio y el fin de la avalancha.

En la figura 2.5 se muestra una señal recogida del fotodetector durante una avalancha. Las caídas de voltaje corresponden a momentos en los que hay partículas atravesando el orificio. Como se puede observar, estas caídas de voltaje no tienen la misma duración, ni tienen una frecuencia asociada, siendo una prueba de la existencia

de fluctuaciones en el flujo de descarga durante una avalancha.

### 2.3.3. Sistema para restablecer el flujo

Cuando el tamaño del orificio no es lo suficientemente grande, el flujo se interrumpe debido a la formación de arcos sobre el orificio. Pasado un tiempo prudencial, se deshace el atasco aplicando desde abajo un chorro de aire a presión dirigido hacia el orificio. Así se consigue eliminar el arco, y se restablece el flujo de descarga. Este método ha sido elegido por su alta reproducibilidad y por la escasa perturbación que provoca en el medio granular, pues apenas si altera la fracción de compactación. En la industria se suelen emplear otros métodos para eliminar los atascos, pero tienen el inconveniente de no ser reproducibles (golpe cerca del orificio), o bien alterar la fracción de compactación (vibración)[30].

El aire comprimido se transporta por un tubo de acero por debajo de la base del silo, y es aplicado en el orificio a través de una boquilla de teflón. El tiempo durante el que se aplica el aire se controla mediante la apertura y el cierre de una electroválvula *SMC SY5120-6LOU-01F-Q* gobernada por el ordenador. El tiempo de soplado es de 400 ms y la presión del aire de 4 atm. En un trabajo anterior realizado en un silo cilíndrico se muestra que el tiempo y la presión con las que se aplique el aire, apenas si influye en el proceso de descarga del material [20].

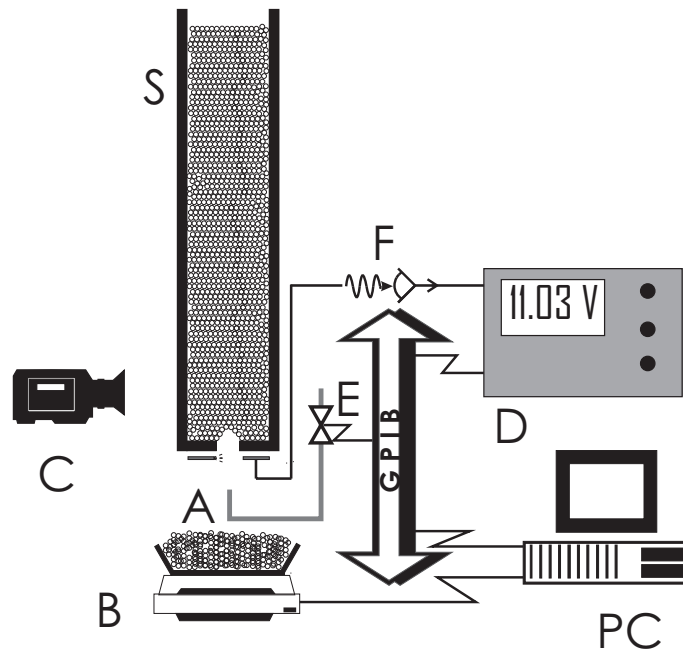


Figura 2.6: Esquema del sistema experimental. S, silo; A, soplador; D, digitalizador; C, cámara de alta velocidad; E, electroválvula; F, fotodetector; B, balanza; PC, ordenador.

## 2.4. Procedimiento experimental

Todos los instrumentos señalados en la sección anterior se conectaron al ordenador mediante puertos serie y GPIB. El objetivo es conseguir automatizar el experimento para poder realizar un gran número de mediciones. A continuación se describe el diagrama de flujo del programa escrito en HP VEE:

- Se elimina el atasco soplando un chorro de aire a presión dirigido desde abajo al centro del orificio. Para ello, con un interruptor del multímetro se abre la electroválvula.
- Una vez cesa el chorro de aire, el digitalizador comienza a recoger mediciones de voltaje de la señal de salida del fotodetector. Para saber cuándo ha finalizado la avalancha se recogen mediciones de la balanza en intervalos de 1,5 s. Cuando tres mediciones consecutivas coinciden, se considera finalizada la avalancha.
- Una vez terminada la avalancha, se descargan al ordenador las mediciones de voltaje y la masa registrada por la balanza. Con estas mediciones se calcula la duración y el tamaño de la avalancha (número de partículas). Estos dos datos se almacenan en un archivo en el ordenador.
- El proceso se repite de nuevo. Cuando la masa de material granular descargado supera un cierto límite, el programa se detiene. Este límite es elegido para que la altura del material no descienda de 3 veces la anchura del silo, o bien para que no se supere el peso máximo permitido por la balanza. En ambos casos, se retira el material caído sobre la balanza y se recarga el silo.

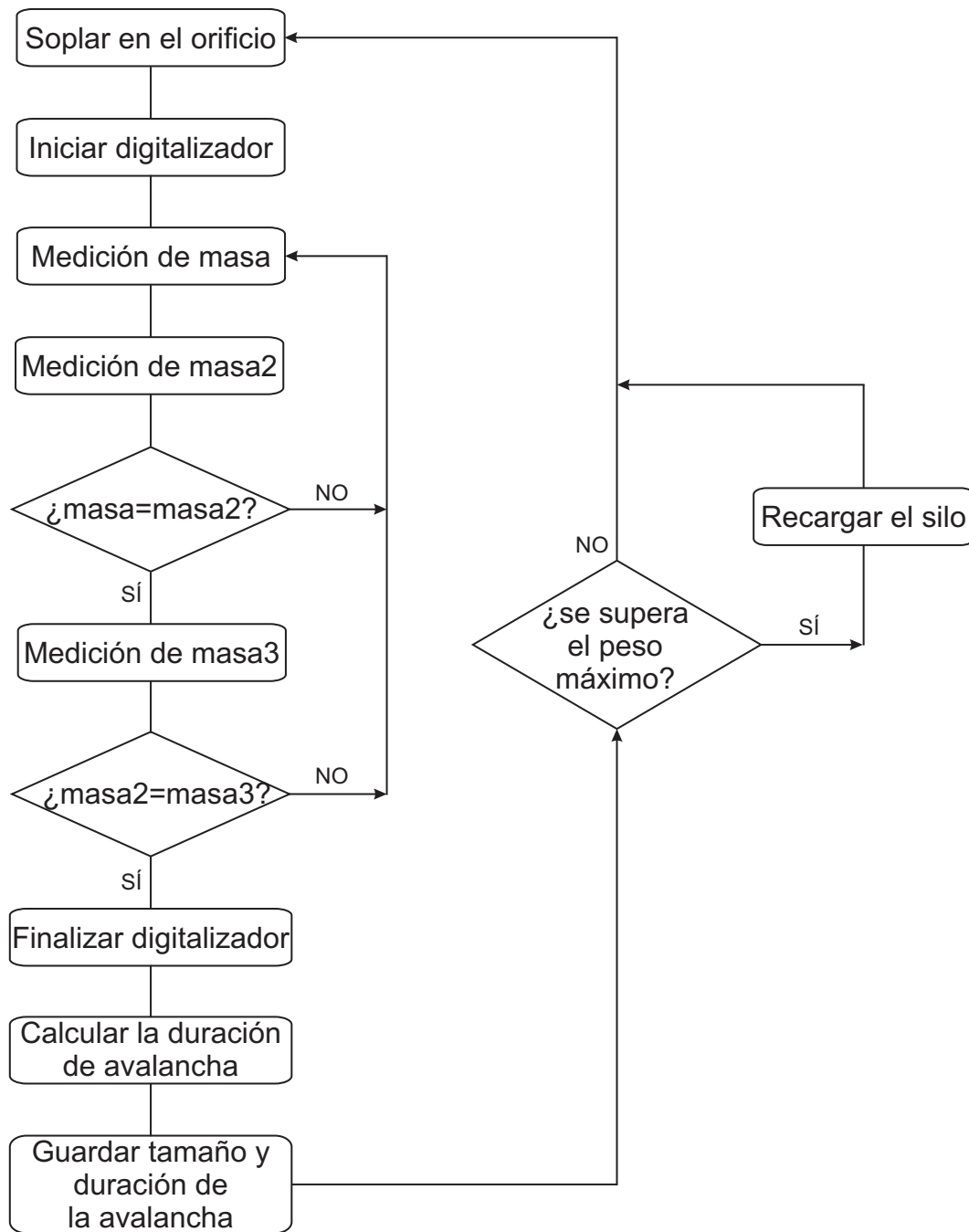


Figura 2.7: Diagrama de flujo del protocolo seguido para la realización de las mediciones.

# Capítulo 3

## Resultados

A continuación se mostrarán los principales resultados obtenidos. En primer lugar se describirá la distribución de los tamaños de avalancha, así como se mostrará la existencia de un tamaño crítico del orificio de salida, por encima del cual el flujo no se interrumpe. Estos mismos datos se expondrán de un modo alternativo empleando la probabilidad de atasco, para la cual se propone un expresión. Finalmente se mostrarán las mediciones del flujo a través del orificio, así como un factor de corrección de la ley de Beverloo para orificios pequeños.

### 3.1. Tamaños de avalancha

En primer lugar, se ha realizado una estadística del tamaño de las avalanchas,  $s$ , definido como el número de partículas que caen del silo entre dos atascos sucesivos. En la figura 3.1 se muestran los diferentes tamaños de las avalanchas sucesivas obtenidas para un determinado valor de  $D$ .

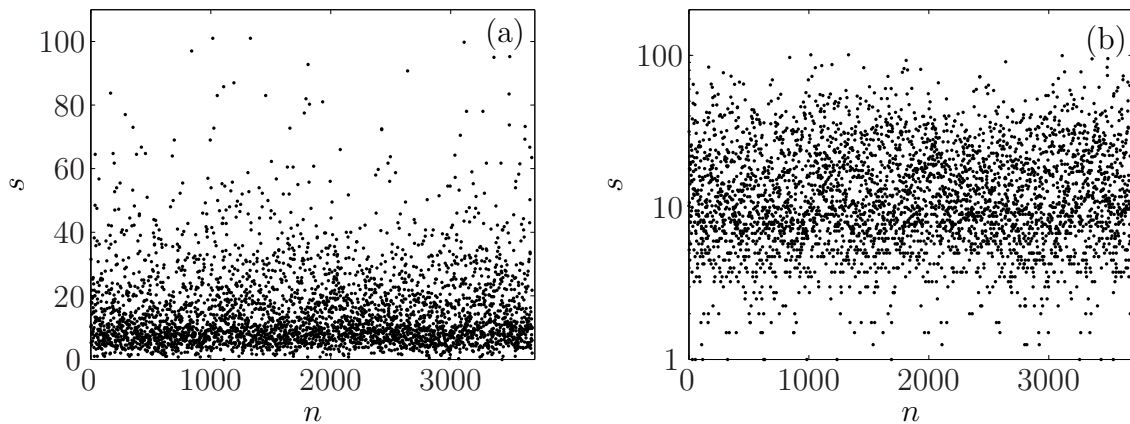


Figura 3.1: (a) Tamaño de las avalanchas sucesivas obtenidas para  $D = 2,51$ . En el eje de abscisas se indica la posición correlativa  $n$  de cada avalancha y en el eje de ordenadas el número  $s$  de partículas que han caído. (b) Los mismos datos en escala semilogarítmica.

Como se puede observar, la distribución de tamaños de avalancha es muy grande,

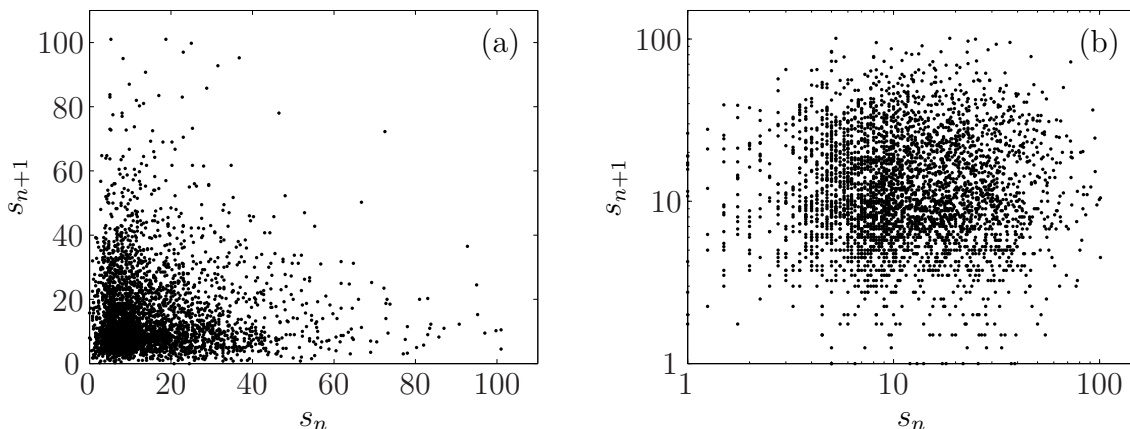


Figura 3.2: Diagrama de primer retorno del tamaño de las avalanchas para  $D = 2,51$ . Se representa el tamaño de una avalancha ( $s_{n+1}$ ) frente a la avalancha anterior ( $s_n$ ). (a) escala lineal. (b) escala logarítmica

llegando a abarcar los valores de  $s$  hasta dos órdenes de magnitud. Es interesante saber si existe alguna correlación entre los diferentes tamaños de avalancha. Para ello, se ha realizado un diagrama de primer retorno (figura 3.2), y se ha calculado la función de autocorrelación (figura 3.3).

En el diagrama de primer retorno se representa el tamaño de una determinada avalancha frente al tamaño de la avalancha inmediatamente anterior. Debido a que las avalanchas pequeñas son mucho más probables que las de tamaño grande, de la gráfica 3.2(a) no es fácil apreciar si existe o no correlación. Por ello, se han representado los mismos datos en escala logarítmica (figura 3.2(b)). En este segundo gráfico se observa una nube de puntos homogéneamente distribuidos, lo cual es un indicador de la ausencia de correlación entre los tamaños de las avalanchas sucesivas.

En la figura 3.3 se ha representado las funciones de autocorrelación ( $R_h$ ) de los tamaños de avalancha (rojo), y de una serie de números aleatorios con distribución logarítmica normal (azul). Como se puede observar, ambas funciones de autocorrelación decrecen de la misma manera, sin aparecer ningún pico indicativo de la existencia de correlación.

### 3.1.1. Distribución de los tamaños de las avalanchas

A continuación se describe la distribución de los tamaños de las avalanchas. Para ello se han realizado histogramas que representan las densidades de probabilidad de  $s$  para cada orificio. Para la realización de cada uno de ellos se han empleado las mediciones de al menos 3000 avalanchas. El número y rango de las barras de los histogramas depende de la avalancha máxima obtenida ( $s_{max}$ ). Si  $s_{max}$  es inferior a 100 partículas, la anchura de las barras es de una partícula. En cambio, si la avalancha más grande supera las 100 partículas, el intervalo es de varias partículas. En estos casos se elige una anchura que corresponda a un número entero de partículas, de ma-



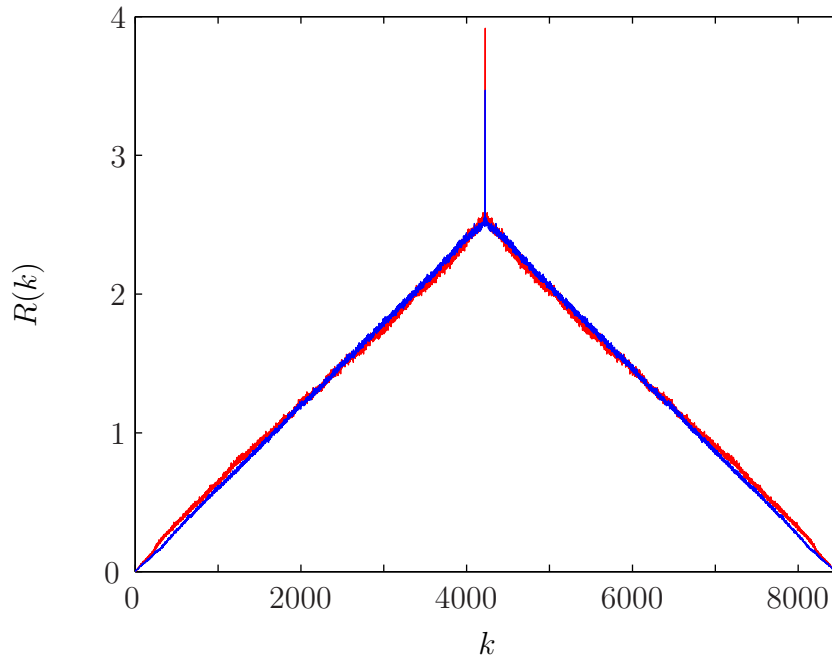


Figura 3.3: Función de autocorrelación de los tamaños de las avalanchas para  $D = 2,51$  (rojo), junto a la correspondiente para un serie de números aleatorios con distribución logarítmica normal (azul).

nera que el número de barras no sea superior a 100. Una vez seleccionada la anchura de las divisiones se cuenta el número de avalanchas registradas en cada intervalo. De esta manera se obtiene un histograma como el de la figura 3.4.

Con el fin de encontrar una función de densidad de probabilidad de los tamaños de avalanchas, se normaliza el histograma (figura 3.5).

En el histograma se pueden diferenciar dos zonas delimitadas por el tamaño de avalancha más probable ( $s_M$ ). Para tamaños de avalancha superiores a  $s_M$ , la probabilidad  $n_D(s)$  disminuye con  $s$ . En cambio, la probabilidad en el intervalo  $[0, s_M]$  aumenta con  $s$ . Este tipo de distribuciones se han observado también en la distribución de fuerzas en un medio granular [31, 32], así como en los tamaños de avalancha de un silo tridimensional [19, 20].

### Decaimiento exponencial

Para avalanchas mayores que la moda, la distribución de avalanchas  $n_D(s)$  parece decrecer de forma exponencial. Este hecho se puede corroborar observando la figura 3.6, en la cual se ha representado el histograma de la figura 3.5 en escala semilogarítmica.

En trazo discontinuo se ha dibujado una línea recta que se ajusta a los puntos del histograma para  $s > s_M$ , lo que nos indica que efectivamente la función de densidad de

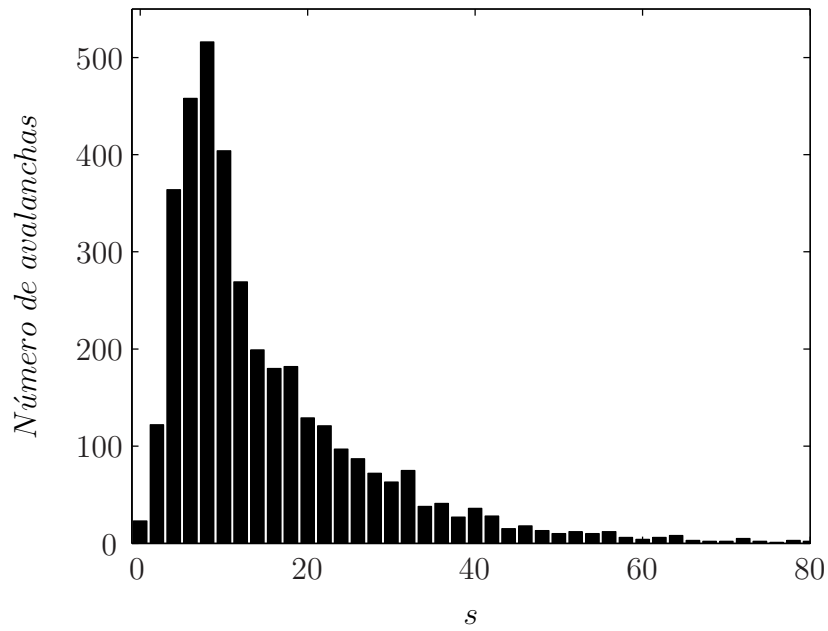


Figura 3.4: Histograma del tamaño de avalanchas para  $D = 2,51$ . En este caso debido a que el mayor tamaño de avalancha es menor que 100, la anchura de las barras es la unidad.

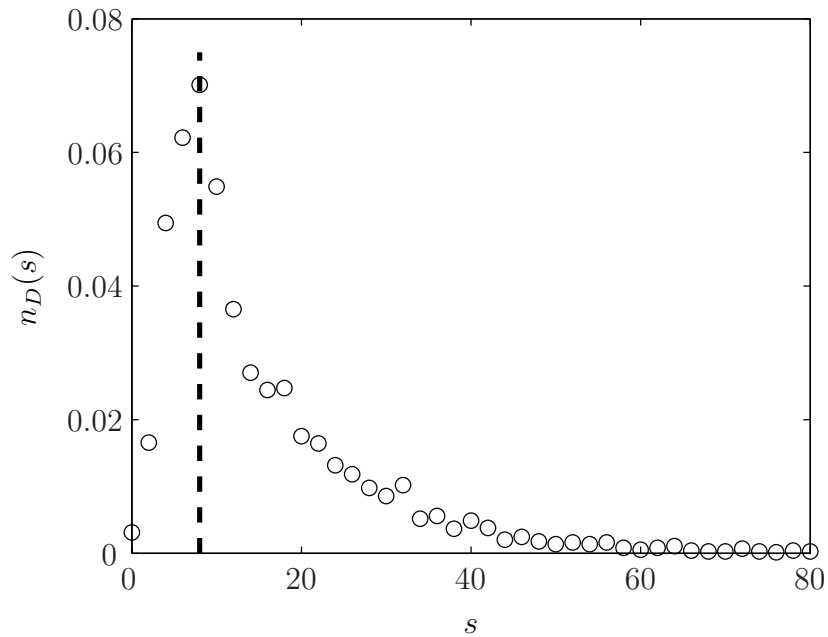


Figura 3.5: Probabilidad de encontrar una avalancha de tamaño  $s$  para  $D = 2,51$ . Este histograma se ha obtenido a partir de la figura 3.4 normalizando el área bajo los puntos a la unidad. La línea de trazos indica el tamaño de avalancha más probable ( $s_M$ ).

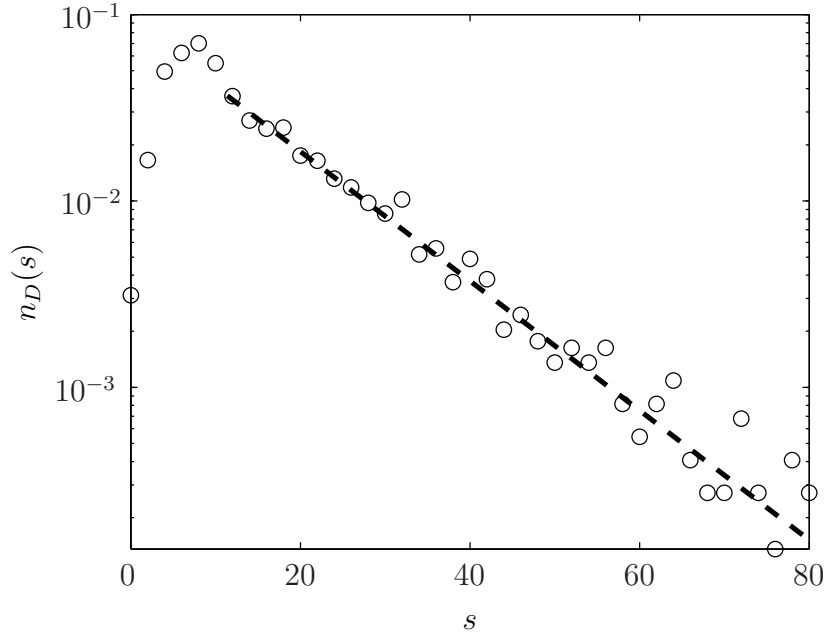


Figura 3.6: Distribución de la densidad de probabilidad de los tamaños de avalancha en escala semilogarítmica para  $D = 2,51$ . La recta de trazos sirve de guía para observar el comportamiento del histograma a partir de  $s_M$ .

probabilidad decae exponencialmente. Este comportamiento se ha observado en todos los histogramas independientemente del tamaño de orificio. Lo único que varía para los diferentes  $D$  es el valor del parámetro característico de la función exponencial. Al aumentar  $D$  el decrecimiento exponencial es menos pronunciado, lo cual es razonable porque cuanto mayor es el orificio más probables son las avalanchas grandes. Este comportamiento también fue observado en los trabajos realizados por I. Zuriguel *et al.* [19, 20]. Como se mencionó en la sección 1.4, en [20] se propone un modelo percolativo unidimensional para explicar esta zona del histograma, empleando como único parámetro  $p_D$ , la probabilidad de que una partícula atreviese un orificio de tamaño  $D$ .

$$n_D(s) = (1 - p_D) p_D^s \quad (3.1)$$

Aplicando logaritmos en ambos miembros de la ecuación 3.7, se observa que el modelo reproduce el decaimiento exponencial siguiendo  $\log(n_D(s))$  una relación lineal con  $s$ , con pendiente  $\log(p_D)$ . Por tanto, podemos concluir que el modelo propuesto es válido tanto para el caso tridimensional como para el bidimensional, variando únicamente el valor  $p_D$  dependiendo de la dimensionalidad del sistema. Este hecho es una evidencia de que los mecanismos físicos que forman los arcos, en tres y dos dimensiones, son los mismos.

### Avalanchas pequeñas

Para avalanchas menores que  $s_M$ , la probabilidad crece con  $s$ . En esta parte del histograma no resulta fácil establecer cuál es el comportamiento de la función de densidad de probabilidad. Esto se debe a que el número de puntos del que se dispone en esta zona no es suficiente para realizar un buen ajuste. Cuando el tamaño de orificio es grande, tal que la moda sea muy superior a cero, el número de avalanchas medidas no es suficiente para que se pueda tomar una anchura de intervalo lo suficientemente pequeña y así tener bastantes puntos en esta primera parte del histograma. Como se comenta en [20], esta parte del histograma es probable que se encuentre influenciada por el método que se emplea para deshacer el atasco. Al soplar en el orificio se genera un estado transitorio en el flujo de partículas, en el cual la densidad es menor que una vez alcanzado el flujo estacionario, y por tanto la probabilidad de que se forme un arco en el orificio es menor.

#### 3.1.2. Tamaño característico de avalancha

Una vez obtenidas las distribuciones de los tamaños de avalanchas para los diferentes  $D$ , es interesante saber si existe un parámetro característico de los histogramas. Lo que se pretende es encontrar una variable con la cual escalen los diferentes histogramas, de manera que todos ellos queden definidos con un solo número. Se ha elegido el tamaño de avalancha media  $\langle s \rangle$ , el cual se define como:

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N_T} s}{N_T} \quad (3.2)$$

siendo  $N_T$  el número de avalanchas registradas para un determinado  $D$ . De este modo, los tamaños de avalancha que llamaremos “reducidos”, se obtienen dividiendo los valores de  $s$  entre la avalancha media de cada histograma. En otros trabajos anteriores ya se había empleado  $\langle s \rangle$  como parámetro característico [19, 20, 31].

Los histogramas reducidos obtenidos para  $D$  desde 1,53 hasta 4,80 se muestran en la figura 3.7. En el caso de orificios pequeños, para  $s < s_M$  se observan diferencias significativas entre los puntos. En cambio, para orificios grandes los histogramas se reducen a uno en todo el rango de valores de  $s$ . Esto se debe a que para  $D$  grandes, la gran mayoría de avalanchas tienen valores de  $s > s_M$ , y por lo tanto, el peso de la región del histograma  $s < s_M$  es mucho menor que el peso de la cola exponencial. En cambio, cuando  $D$  es pequeño el número de avalanchas en ambas zonas del histograma no difiere tanto. En general, se puede considerar que el parámetro característico de las distribuciones es el tamaño de avalancha media  $\langle s \rangle$ .

En resumen, se han diferenciado dos zonas en la función de densidad de probabilidad. Para  $s$  menores que la moda la probabilidad aumenta con el tamaño de avalancha, mientras que para  $s > s_M$  decae exponencialmente con  $s$ . Este comportamiento se ha observado para todos los valores de  $D$ , pudiéndose caracterizar cada histograma

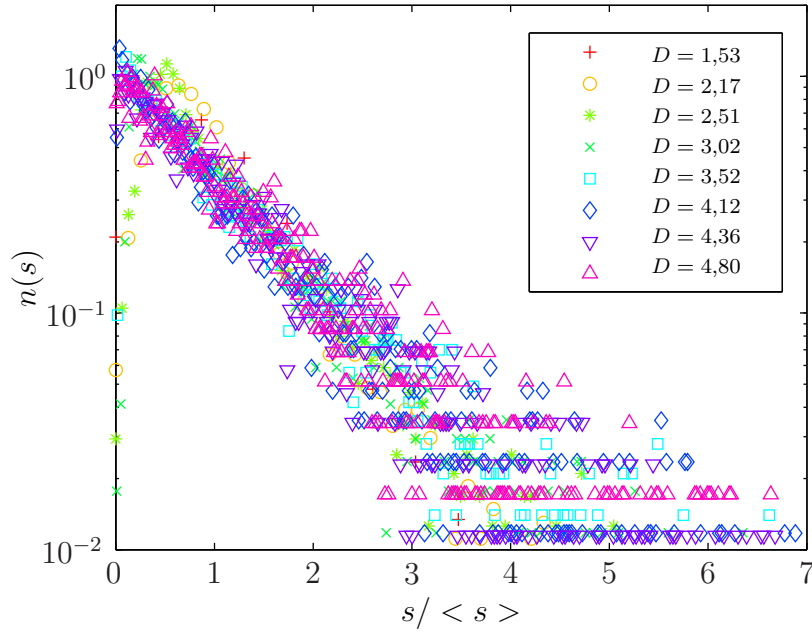


Figura 3.7: Histogramas para diferentes tamaños de orificio, escalados con su correspondiente avalancha media.

mediante el tamaño de avalancha media  $\langle s \rangle$ . A su vez, se ha comprobado que la distribución de probabilidad de los tamaños de avalancha se puede explicar con un modelo percolativo unidimensional [19, 20], propuesto en un trabajo anterior para el caso de un silo tridimensional.

## 3.2. Diámetro crítico

Una cuestión importante es saber si existe un tamaño de orificio por encima del cual no se produzcan atascos. Este hecho puede entenderse en cierta manera como una transición de fase entre un estado “atascado” y un estado “no atascado”, que tiene lugar para una determinada apertura de orificio  $D_c$ . Un indicio de la existencia de tal transición de fase es la divergencia de una magnitud siguiendo una ley de potencias a medida que el parámetro de control se aproxima a su valor crítico. En la figura 3.8 se han representado los valores experimentales de  $\langle s \rangle$  frente  $D$ . Estos puntos se ajustan empleando la siguiente expresión [20]:

$$\langle s \rangle = \frac{C}{(D_c - D)^\gamma} \quad (3.3)$$

Aplicando logaritmos a ambos miembros de la ecuación se obtiene:

$$\log \langle s \rangle = \log C - \gamma \log (D_c - D) \quad (3.4)$$

donde  $C$  es una constante del ajuste,  $D_c$  es el diámetro crítico, y  $\gamma$  es el exponente con el que diverge la ley de potencias. La ecuación 3.4 nos indica que existe una relación lineal entre  $\log \langle s \rangle$  y  $\log(D_c - D)$ . Esta linealidad se puede observar en la

figura 3.9. Realizando el ajuste de los datos experimentales de  $\langle s \rangle$  con dicha ecuación, los valores de los parámetros de ajuste obtenidos son  $C = 1,1 \times 10^{11} \pm 0,1 \times 10^{11}$ ;  $D_c = 8,5 \pm 0,1$  y  $\gamma = 12,7 \pm 0,1$ .

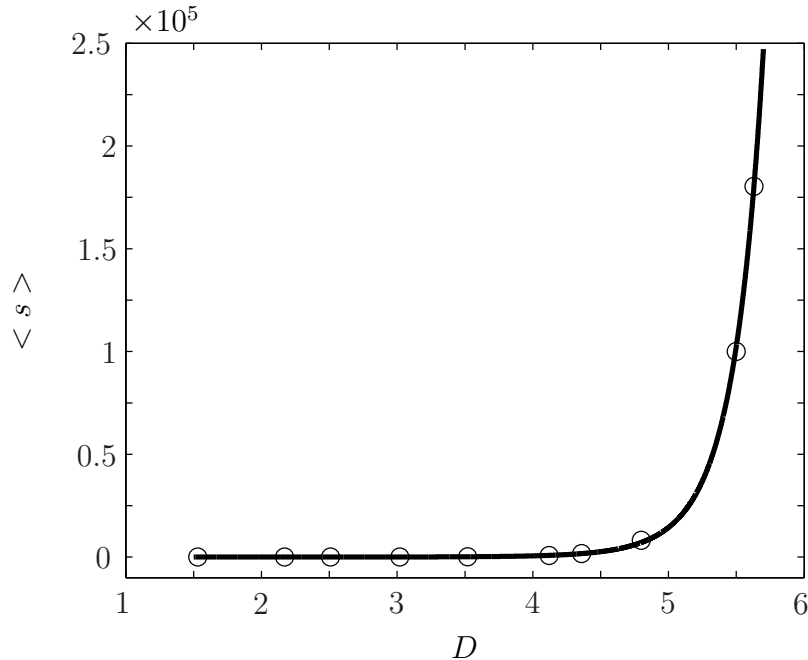


Figura 3.8: Representación de la avalancha media  $\langle s \rangle$  frente a tamaño del orificio  $D$ .

Del ajuste realizado empleando la ecuación 3.3, es de destacar el elevado valor que se obtiene para el exponente  $\gamma$ . En un trabajo experimental realizado por K. To [18], se emplea la misma ecuación para realizar el ajuste obteniéndose  $D_c = 9,09$  y  $\gamma = 11,2$ . Estos valores obtenidos por K. To difieren ligeramente de los obtenidos en este trabajo debido a las diferentes condiciones experimentales: K. To utiliza discos en una tolva bidimensional, mientras que aquí se emplean partículas esféricas en un silo bidimensional.

### 3.3. Probabilidad de atasco

La probabilidad de atasco  $J_N(D)$  se define como la probabilidad de que se produzca un atasco antes de que  $N$  partículas pasen a través de un orificio de tamaño  $D$ . A partir de los datos obtenidos de la estadística de los tamaños de avalancha, se calcula la probabilidad de atasco para un determinado  $N$  y  $D$  como:

$$J_N(D) = \frac{\text{Avalanchas de tamaño } s < N}{\text{Número total de avalanchas}} \quad (3.5)$$

A su vez, a partir de la distribución de tamaños de avalancha  $n_D(s)$ , se puede definir  $J_N(D)$  como:

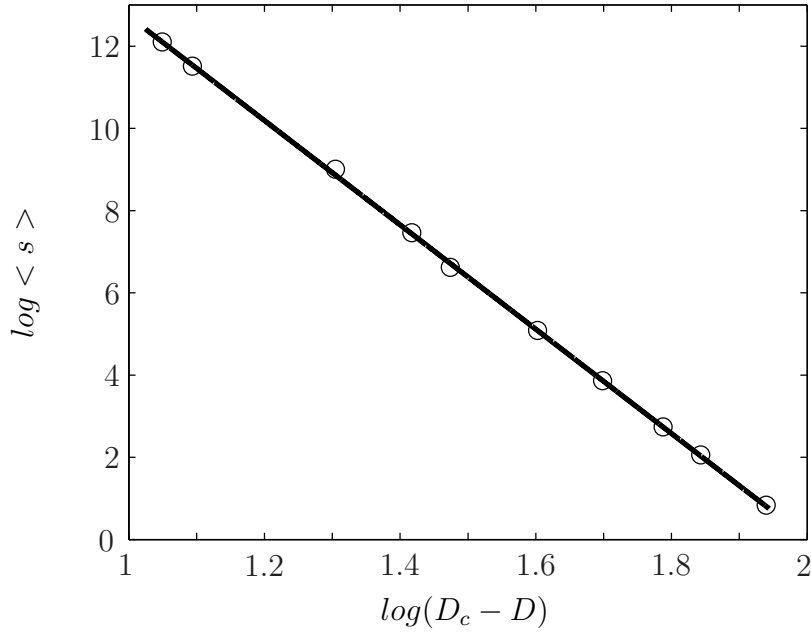


Figura 3.9: Representación de la relación lineal entre  $\log \langle s \rangle$  y  $\log(D_c - D)$

$$J_N(D) = 1 - \sum_{s=N}^{\infty} n_D(s) \quad (3.6)$$

Anteriormente en la sección 3.1.1 se mostró un modelo propuesto por I. Zuriguel [20] que reproduce la distribución de tamaños de avalancha  $n_D(s)$ , empleando como único parámetro la probabilidad de paso de las partículas a través del orificio  $p_D$ . Dicho modelo es válido para valores de  $s$  mayores que la moda ( $s_M$ ), aumentando el rango de valores  $s$  para los que es válido a medida que aumenta  $D$ .

$$n_D(s) = (1 - p_D) p_D^s \quad (3.7)$$

Se puede probar que el momento  $n$ -ésimo de dicha distribución (ecuación 3.7) viene dado por:

$$\langle s^n \rangle = (1 - p_D) \left( p_D \frac{\partial}{\partial p_D} \right)^n (1 - p_D)^{-1} \quad (3.8)$$

y en particular, el primer momento es la avalancha media  $\langle s \rangle$  de la distribución, la cual se relaciona con  $p_D$  como:

$$\langle s \rangle = \frac{p_D}{1 - p_D} \Rightarrow p_D = (1 + \langle s \rangle^{-1})^{-1} \quad (3.9)$$

Sustituyendo el modelo descrito en la ecuación 3.6 se obtiene:

$$J_N(D) = 1 - p_D^N = 1 - e^{-N \ln(1 + \langle s \rangle^{-1})} \rightarrow 1 - e^{-N/\langle s \rangle} \quad (3.10)$$

donde en el último paso se ha supuesto que  $\langle s \rangle$  es mucho mayor que la unidad. Para obtener una expresión de  $J_N(D)$  falta sustituir  $\langle s \rangle$  por la ecuación 3.3, de manera que finalmente se obtiene la siguiente ecuación que predice la probabilidad de atasco en función de  $D$  y  $N$ :

$$J_N(D) = 1 - e^{-N(D_c - D)^\gamma / A} \quad (3.11)$$

En la figura 3.10, se muestra para los diferentes  $D$  la probabilidad de que se produzca un atasco antes de que caigan 1000 partículas. Para orificios pequeños  $J_{1000}$  es cercano a la unidad, lo que quiere decir que casi siempre se produce un atasco antes de que caigan 1000 partículas. En cambio, para  $D$  mayores la probabilidad de atasco comienza a disminuir, llegando a ser prácticamente nula para  $D \geq 5,6$ . En la gráfica 3.11 se han representado las probabilidades de atasco para diferentes  $N$  en función de  $D$ . En línea continua se ha representado la probabilidad de atasco que predice la ecuación 3.11 empleando para los parámetros los valores obtenidos en el ajuste de la sección 3.2.

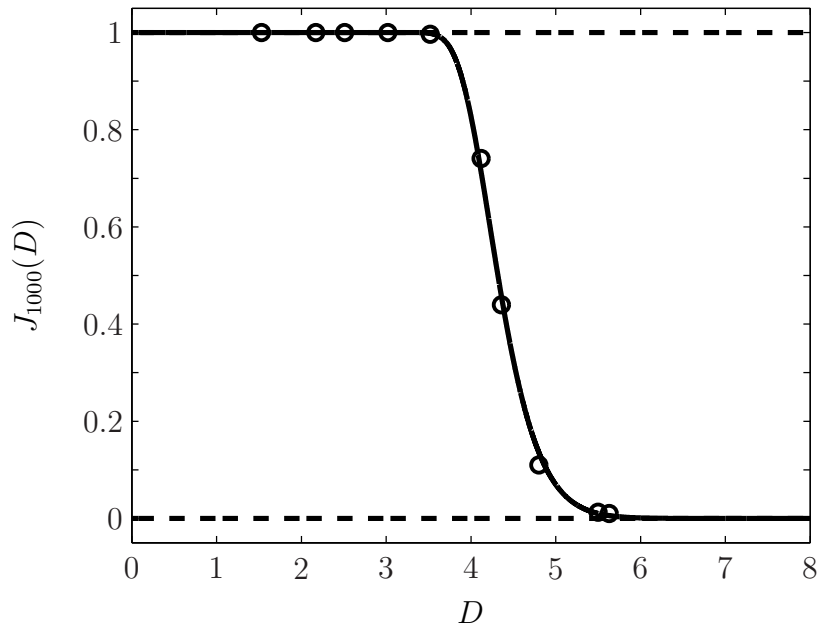


Figura 3.10:  $J_{1000}(D)$ , probabilidad de que se produzca un atasco antes de que caigan 1000 partículas en función de  $D$ . La línea continua representa los valores que predice la ecuación 3.11 con  $A = 1,1 \times 10^{11}$ ,  $\gamma = 12,7$  y  $D_c = 8,5$ .

En la gráfica 3.11 se puede observar como la ecuación 3.11 reproduce correctamente los valores experimentales para los distintos  $N$ , excepto cuando  $N$  es pequeño. Este hecho se debe a que para el caso de  $N$  pequeños nos encontramos en la zona del histograma de valores de  $s$  menores que  $s_M$ , en la cual el modelo 3.7 no reproduce la distribución de tamaños de avalancha. En cambio, a medida que aumenta  $N$  nos vamos desplazando hacia valores de  $s$  mayores, de manera que si  $N > s_M$  nos encontramos en la zona de decaimiento exponencial del histograma donde el modelo



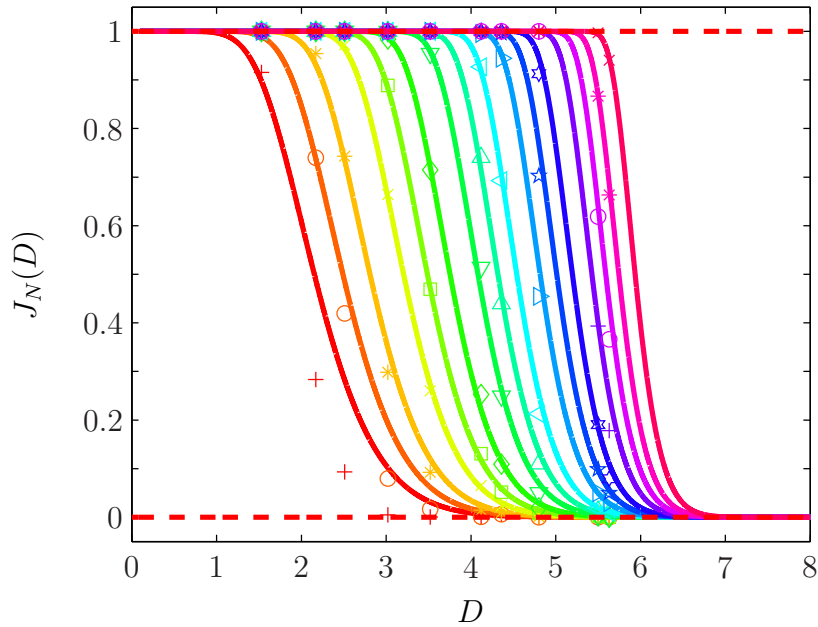


Figura 3.11: Probabilidad de que se produzca un atasco antes de que caigan  $N$  partículas en función de  $D$ . Las distintas curvas corresponden a diferentes  $N$ : de izquierda a derecha  $N = 5, 10, 20, 50, 100, 200, 500, 10^3, 2 \times 10^3, 5 \times 10^3, 10^4, 2 \times 10^4, 5 \times 10^4, 10^5, 2 \times 10^5$  y  $5 \times 10^5$ . En línea continua se representan los valores predichos por la ecuación 3.11 siendo  $A = 1,1 \times 10^{11}$ ,  $\gamma = 12,7$  y  $D_c = 8,5$ .

es válido, y por tanto la ecuación 3.11 predice correctamente la probabilidad de atasco.

En cuanto a la forma de las curvas representadas en la figura 3.11, cabe destacar que todas tienen un comportamiento similar. Un aspecto interesante es que al aumentar el valor de  $N$ , el cambio brusco de la pendiente de la función 3.11 es más pronunciado. Este hecho está de acuerdo con la existencia de un diámetro crítico, de manera que al aumentar  $N$  aumenta la pendiente, llegando a ser infinita en el caso hipotético que  $N = \infty$ : es decir, obtendríamos una función escalón. Para  $D < D_c$  siempre se produciría un atasco antes de que caigan infinitas partículas ( $J_\infty(D) = 1$ ) y para  $D > D_c$  nunca se produciría un atasco ( $J_\infty(D) = 0$ ).

Una consecuencia de la expresión propuesta para predecir  $J_N(D)$ , es que una representación de  $J_N(D)$  frente a la variable escalada  $x \equiv N(D_c - D)^\gamma/A$  para diferentes valores de  $N$  colapsa a una curva universal, concretamente  $1 - e^{-x}$  (figura 3.12).

En la sección 1.4 se comentó que en un trabajo anterior realizado por K. To [18] se proponía la siguiente ecuación para predecir la probabilidad de atasco:

$$J(D) = 1 - e^{-(M-n_o)Ae^{-BD^2}} \quad (3.12)$$

Si se compara esta expresión con la propuesta en este trabajo se puede observar como en el caso de la ecuación que propone K. To,  $J(D)$  es distinta de cero para todo valor finito de  $D$ , siendo nula únicamente cuando  $D \rightarrow \infty$ . Este hecho es contrario

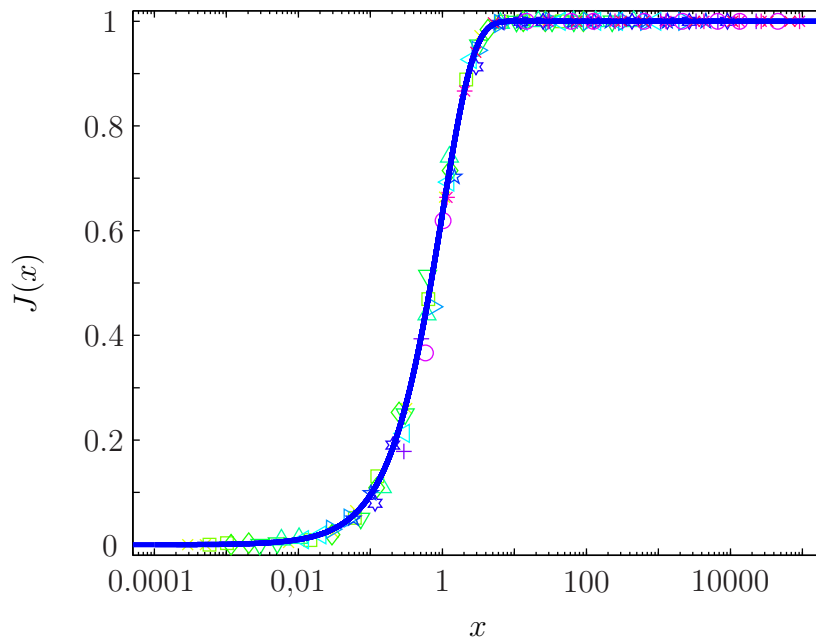


Figura 3.12: Representación de la probabilidad de atasco  $J_N(D)$  frente a la variable escalada  $x \equiv N(D_c - D)^\gamma/A$ , siendo  $A = 1,1 \times 10^{11}$ ,  $\gamma = 12,7$  y  $D_c = 8,5$ . La línea azul continua es el ajuste previsto por la ecuación propuesta en este trabajo. Los símbolos representan los datos experimentales desde  $N = 5$  hasta  $N = 5 \times 10^5$ .

a la existencia de un tamaño crítico de orificio, de manera que independientemente del valor de  $D$  siempre se produciría un atasco en un tiempo finito. Sin embargo, la ecuación propuesta en este trabajo tiene en cuenta la existencia de un  $D_c$  por encima del cual la probabilidad de atasco es nula. A pesar de esta diferencia entre ambas ecuaciones, para el rango de valores de  $D$  que se han estudiado los resultados son cualitativamente similares en ambos casos, existiendo únicamente diferencias cuantitativas debido a las diferentes condiciones experimentales.

### 3.4. Flujo

En esta sección se exponen los resultados obtenidos referentes al flujo de descarga del material granular en función del tamaño de orificio. Como se indicó en la capítulo 2, además del número de partículas que caen también se mide el tiempo que dura la avalancha. Con estas dos mediciones se obtiene el flujo medio de descarga, que no es sino el número de partículas que caen por unidad de tiempo  $\langle W_b \rangle$ . Calculando el flujo para un gran número de avalanchas se obtiene con una alta precisión el flujo medio de descarga para diferentes  $D$ . Con estos datos se trata de obtener una relación entre el flujo de descarga y el tamaño de orificio. En la sección 1.5 se explicó la ley propuesta por Beverloo (ecuación 1.8):

$$W = C\rho_a(D_o - kd_p)^{2,5}\sqrt{g} \quad (3.13)$$

en la cual aparecen dos coeficientes empíricos,  $k$  y  $C$  que se determinan experimentalmente y dependen de las propiedades de los granos y del silo. Esta ley ha sido probada en diversos trabajos, pero en todos los casos el rango de valores explorados de  $D$  no supera una década. Sin embargo, en nuestros experimentos en la descarga de un silo en tres dimensiones [33], se ha obtenido el flujo medio para tamaños de orificio desde 1,5 a 100 veces el diámetro de las partículas. Al ajustar estos datos experimentales con la ecuación 1.8, el ajuste que se obtiene no es satisfactorio para valores grandes de  $D$ .

Como se ha señalado anteriormente, en la ley de Beverloo aparece  $k$  como un parámetro libre sin justificar. El significado y origen de este parámetro ha suscitado mucha controversia, siendo la interpretación de Brown & Richards la más aceptada. Dichos autores afirman que los centros de la partículas no pueden aproximarse al borde del orificio a una distancia menor que  $k d_p/2$ , por lo que los centros de las partículas deben pasar a través de un orificio de diámetro efectivo  $D_o - k d_p$ . En la literatura se le asigna a  $k$  un valor comprendido en un rango de  $1 < k < 3$ , dependiendo de las propiedades de las partículas y del silo. Sin embargo, Zhang y Rudolph [34] afirman que el único valor razonable para  $k$  sería 1. Esta afirmación es coherente debido a que debe existir flujo hasta  $D_o = d_p$ . Así, la ley de Beverloo empleando el diámetro adimensional  $D$  es:

$$W_b = C'(D - 1)^{2,5} \quad (3.14)$$

que en el caso bidimensional, el exponente 2,5 pasa a ser 1,5.

Al ajustar los datos experimentales en tres dimensiones con la ecuación 3.14, se observa que la ley de Beverloo con  $k = 1$  sobreestima el flujo para valores pequeños de  $D$ . Con el fin de estudiar la discrepancia entre el flujo medido experimentalmente  $W_m$  y el predicho por la ley de Beverloo  $W_p$ , se calcula el cociente  $\Delta = W_m/W_p$ , de manera que los datos se ajustan a la siguiente función [33]:

$$\Delta = 1 - \frac{1}{2}e^{-b(D-1)} \quad (3.15)$$

Por tanto, la ley modificada que se propone para el flujo medio de descarga no es sino la ley de Beverloo incluyendo el factor de corrección  $\Delta$ , que en el caso de un silo bidimensional es la siguiente:

$$W_b = C' \left( 1 - \frac{1}{2}e^{-b(D-1)} \right) (D - 1)^{3/2} \quad (3.16)$$

En la figura 3.13 se ha representado el flujo medio en función de  $D$ . Los círculos representan los datos experimentales obtenidos con el sistema que se describe en este trabajo (silo bidimensional), y los cuadrados son datos obtenidos por R. Arévalo mediante simulaciones de dinámica molecular para la descarga de un silo bidimensional [33]. A su vez, se han representado los ajustes empleando las ecuaciones 3.16 (línea continua) y 3.14 (línea de trazos). A pesar de que el intervalo de valores de  $D$  es pequeño, se puede observar como la ley de Beverloo (línea de trazos) sobreestima el

flujo para  $D < 10$ . Para observar una mayor diferencia entre ambas leyes sería necesario estudiar un rango más amplio de  $D$ , lo cual sólo se ha llevado a cabo en un silo tridimensional.

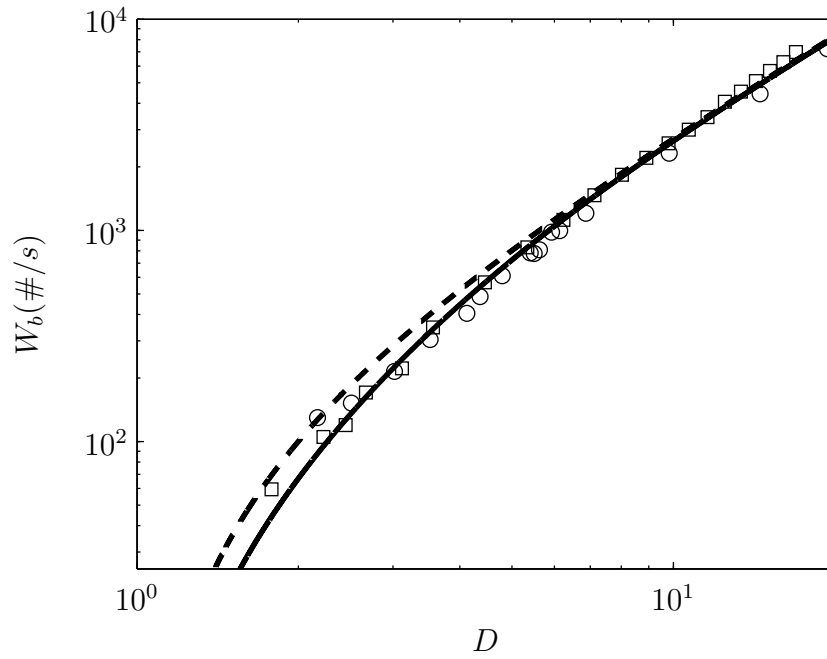


Figura 3.13: Flujo de descarga en función de  $D$  en escala logarítmica. Los círculos son los datos experimentales, los cuadrados son datos obtenidos por R. Arévalo mediante simulaciones de dinámica molecular [33]. La línea continua y la línea de trazos son los ajustes empleando las ecuaciones 3.16 ( $C' = 99,0$  y  $b = 0,437$ ) y 3.14 ( $W_b = 102,2(D - 1)^{3/2}$ ).

# Capítulo 4

## Conclusiones

En este capítulo se van a resumir las conclusiones parciales que se han obtenido del trabajo realizado. A su vez, se propondrán algunos aspectos de interés para futuras investigaciones.

a) El primer resultado reseñable es que en la descarga de un silo bidimensional, el parámetro de control es la relación entre los tamaños del orificio y de las partículas. Este resultado está en acuerdo con los obtenidos en otros trabajos en silos tridimensionales [19, 20].

b) Se ha encontrado que el tamaño de avalanchas sucesivas no se encuentra correlacionado. Este resultado ha sido mostrado mediante la realización de un diagrama de primer retorno, en el cual los puntos aparecen homogéneamente distribuidos, y la ausencia de picos en la función de autocorrelación. Para un mismo tamaño de orificio, los diferentes tamaños de avalancha difieren en gran cuantía.

c) En el histograma o distribución de los tamaños de avalancha se han diferenciado dos regiones con diferente comportamiento. Cuando el tamaño de la avalancha es menor que la moda, la probabilidad crece de un modo que no se ha podido determinar debido a la falta de resolución. En cambio, cuando el tamaño de las avalanchas es mayor que la moda, la probabilidad decrece exponencialmente. Esta parte del histograma se puede explicar mediante un modelo ya propuesto para la descarga de un silo tridimensional [19, 20], basado en que la probabilidad de que un grano pase a través del orificio permanece constante en el tiempo.

d) Si se divide el tamaño de avalancha por el tamaño de avalancha media, todos los histogramas independientemente del tamaño del orificio se reducen a uno. Por tanto se puede afirmar que el parámetro característico de los histogramas es su avalancha media  $\langle s \rangle$ .

e) Estos resultados han sido comparados con un trabajo similar realizado con un silo tridimensional [19, 20]. La forma funcional de los histogramas no cambia en el silo bidimensional, únicamente los valores de las constantes varían con la dimen-

sionalidad del sistema experimental. Este hecho es un indicio de que la formación de arcos se rige por los mismos mecanismos físicos tanto en dos como en tres dimensiones.

f) A partir de las avalanchas medias calculadas para diferentes tamaños de orificio, se ha ajustado una ley de potencias que diverge para un tamaño de orificio  $D_c$ . El valor de  $D_c$  obtenido a partir del ajuste es  $8,5 \pm 0,1$ , de manera que para tamaños de orificio superiores a este valor no se producen atascos. Hay que señalar que sería conveniente realizar mediciones para  $D$  mayores, con el fin de obtener una mejor precisión en el valor de  $D_c$ .

g) La existencia de una divergencia de tipo potencial a medida que el parámetro de control  $D$  se acerca a un valor crítico  $D_c$ , es un indicio fuerte de la posible existencia de una transición de fase de un estado “atascado” a un estado “no atascado”.

h) Se ha calculado la probabilidad de atasco  $J_N(D)$  para diferentes valores de  $D$  y  $N$ . Basándose en el modelo que describe el decaimiento exponencial de la distribución de tamaños de avalancha, y la ecuación potencial que ajusta los datos experimentales de la avalancha media con  $D$ , se ha propuesto una expresión que predice la probabilidad de atasco para  $N \gg 1$ . Además se ha encontrado que todas las curvas se reducen en una sola al representar  $J_N(D)$  frente a la variable escalada  $x \equiv N / \langle s \rangle$ .

i) Se han realizado mediciones del flujo medio de descarga en función del tamaño de orificio. Estos datos experimentales se han comparado con los predichos por la ley de Beverloo, y por una ley propuesta a partir de nuestros experimentos en un silo en tres dimensiones [33]. Para  $D < 7$  se observa una ligera sobreestimación del flujo por parte de la ley de Beverloo, lo cual no ocurre con la ley propuesta en [33]. Debido a que el rango de tamaños de orificio estudiado no es tan grande como en tres dimensiones, lógicamente este desacuerdo es menor. Sería interesante aumentar  $D$  para comprobar este resultado.

Aunque en este trabajo no se han mostrado resultados también se ha trabajado en el desarrollo de programas basados en tratamiento de imágenes con el fin de poder estudiar las fluctuaciones del flujo y de la fracción de compactación del medio granular dentro de una misma avalancha, así como la difusión de las partículas en el interior del silo durante la descarga. Estos aspectos creemos que nos pueden aportar una información muy valiosa para poder llegar a comprender la dinámica de un medio granular en la descarga de un silo.

# Bibliografía

- [1] A. J. Liu and S. R. Nagel, *Jamming is not cool anymore*, Nature **21** (1998), 396.
- [2] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J. P. Bouchaud, and P. Claudin, *Jamming, force chains, and fragile matter*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1841.
- [3] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J. P. Bouchaud, and P. Claudin, *Jamming and stress propagation in particulate matter*, Physica A **263** (1999), 354.
- [4] Jacques Duran, *Sands, Powders and Grains*, 2000.
- [5] C. Coulomb, *Essay on the rules of Maximis and Minimis applied to some problems of equilibrium related to architecture*, Acad. Roy. Sci. Mem. Phys. **7** (1773), 343.
- [6] M. Faraday, *On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces*, Philos. Trans. R. Soc. London **52** (1831), 299–318.
- [7] I. Roberts, *Determination of the vertical and lateral pressures of granular substances*, Proceedings of the Royal Society of London **36** (1884), 225–240.
- [8] H. A. Janssen, *Tests on grain pressure silos*, Z. Vereins Deutsch Ing. **39** (1895), 1045.
- [9] O. Reynolds, *On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations*, Phil. Mag. Ser. 5 **20** (1885), 469.
- [10] R.A. Bagnold, *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*, 1941.
- [11] R. L. Brown and J. C. Richards, *Principles of Powder Mechanics*, 1970.
- [12] J. G. Berryman, *Random close packing of hard spheres and disks*, Phys. Rev. A. **27** (1983), 1053–1061.
- [13] J. Feder E. L. Hinrichsen and T. Jossang, *Random packings of disks in two dimensions*, Phys. Rev. A. **41** (1990), 4199–4209.
- [14] Lord Rayleigh, Phil. Mag. Ser. 6 **11** (1906), 129.
- [15] K. To, P. Y. Lai, and H. K. Pak, *Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper*, Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 71–74.

- [16] K. To and P. Y. Lai, *Jamming pattern in a two-dimensional hopper*, Phys. Rev. E **66** (2002), 011308.
- [17] K. To, P. Y. Lai, and H. K. Pak, *Flow and jam of granular particles in a two-dimensional hopper*, Physica A **315** (2002), 174–180.
- [18] K. To, *Jamming transition in two-dimensional hoppers and silos*, Phys. Rev. E **71** (2005), 060301(R).
- [19] I. Zuriguel, L. A. Pagnaloni, A. Garcimartín, and D. Maza, *Jamming during the discharge of grains from a silo described as a percolating transition*, Phys. Rev. E **68** (2003), 30301(R).
- [20] I. Zuriguel, A. Garcimartín, D. Maza, L. A. Pagnaloni, and J. M. Pastor, *Jamming during the discharge of granular matter from a silo*, Phys. Rev. E **71** (2005), 051303.
- [21] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. van de Velde, *The flow of granular solids through orifices*, Chem. Eng. Sci. **15** (1961), 260–269.
- [22] N. Al-Din and D. J. Gunn, *The flow of non-cohesive solids through orifices*, Chem. Eng. Sci. **39** (1984), 121–127.
- [23] D. Hirshfeld, Y. Radyzner, and D. C. Rapaport, *Molecular dynamics studies of granular flow through an aperture*, Phys. Rev. E **56** (1997), 4404–4415.
- [24] D. Hirshfeld and D. C. Rapaport, *Granular flow from a silo: Discrete-particle simulations in three dimensions*, Eur. Phys. J. E **4** (2001), 193–199.
- [25] R. M. Nedderman, U. Tüzün, S. B. Savage, and G. T. Houlsby, *The flow of granular materials: I. Discharge rates from hoppers*, Chem. Eng. Sci. **37** (1982), 1597–1609.
- [26] A. Medina, J. A. Cordoba, E. Luna, and C. Treviño, *Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2D silo*, Phys. Lett. A **250** (1998), 111–116.
- [27] D. C. Hong and J. A. McLennan, *Molecular dynamics simulations of hard sphere granular particles*, Physica A **187** (1992), 159–171.
- [28] E. Longhi, N. Easwar, and N. Menon, *Large force fluctuations in a flowing granular medium*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 045501.
- [29] G. T. Seidler, G. Martinez, L. H. Seeley, K. H. Kim, E. A. Behne, S. Zaranek, B. D. Chapman, S. M. Heald, and D. L. Brewster, *Granule-by-granule reconstruction of a sandpile from x-ray microtomography data*, Phys. Rev. E **62** (2000), 8175–8181.
- [30] E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel, *Density fluctuations in vibrated granular materials*, Phys. Rev. E **57** (1998), 1971–1982.



- 
- [31] F. Radjai, M. Jean, J. J. Moreau, and S. Roux, *Force distributions in dense two-dimensional granular systems*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 274–277.
- [32] J. H. Snoeijer, M. Van Hecke, E. Somfai, and W. van Saarloos, *Force and weight distributions in granular media: Effects of contact geometry*, Phys. Rev. E **67** (2003), 030302(R).
- [33] C. Mankoc, A. Janda, R. Arévalo, J. M. Pastor, I. Zuriguel, A. Garcimartín, and D. Maza, *The flow rate of granular materials through an orifice*, Granular Matter **9** (2007), 407–414.
- [34] J.-Y.-Zhang and V. Rudolph, *Effect of shear friction on solid flow through an orifice*, Ind. Eng. Chem. Res. **30** (1991), 1977–1981.