



# **Universidad de Navarra**

Programa de Doctorado:

## **Inestabilidades en Sistemas Disipativos**

**Flujo de medios granulares en la descarga de silos bajo la acción de la gravedad**

**Cristian Pablo Mankoc**

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra

ISBN 978-84-8081-372-3





# Universidad de Navarra

Programa de Doctorado:

## Inestabilidades en Sistemas Disipativos

### Flujo de medios granulares en la descarga de silos bajo la acción de la gravedad

Memoria presentada por **D. Cristian Pablo Mankoc** dentro del Periodo de Investigación del Programa de Doctorado

El presente trabajo ha sido realizado bajo mi supervisión y estimo que puede ser presentado en calidad de “**Memoria de investigación**”.

Pamplona, 5 de junio de 2007

Dr. Angel Garcimartín Montero



Declaración:

Por la presente yo, **D. Cristian Pablo Mankoc**, declaro que esta memoria es fruto de mi propio trabajo y que en mi conocimiento, no contiene ni material previamente publicado o escrito por otra persona, ni material que sustancialmente haya formado parte de los requerimientos para obtener cualquier otro título en cualquier centro de educación superior, excepto en los lugares del texto en los que se ha hecho referencia explícita a la fuente de la información.

De igual manera, autorizo al Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, la distribución de esta memoria y, si procede, de la “fe de erratas” correspondiente por cualquier medio, sin perjuicio de los derechos de propiedad intelectual que me corresponden.

Pamplona, 5 de junio de 2007

D. Cristian Pablo Mankoc

© Cristian Pablo Mankoc

Derechos de edición, divulgación y publicación:

© Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra



# Agradecimientos

En primer lugar debo agradecer a Ángel Garcimartin y Diego Maza por toda la ayuda y la confianza que han tenido en mi durante la elaboración de este trabajo y la enorme paciencia que tuvieron cuando las cosas no funcionaban como debían.

Asimismo debo mencionar a todos los miembros del departamento: Héctor Mancini, Pilar Ayucar, Roberto Arévalo, Sergio Ardanza, Jean Bragard, Javier Burguete, Maria Jesús Chasco, Emilio Díaz, Pedro Elizalde, Jorge Elorza, Maxi Giuliani, Wenceslao González, Alvaro Janda, Iván Martínez, Montserrat Miranda, Carmen Palacios, Martín Pastor, Antonio Peláez, Alberto de la Torre, Gerard Vidal e Iker Zuriguel, por la gran recepción y el apoyo que me brindaron en estos tiempos, realmente hicieron que no me sintiera tan lejos de casa.

A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra agradezco las becas que me han concedido durante los cursos 2004-2005, 2005-2006 y durante el presente 2006-2007.

Debo mencionar también a mis amigos, los que están cerca y los que están lejos, y muy especialmente a Alberto y Beatriz, que me aguantaron, escucharon e hicieron que siguiera adelante en los momentos mas difíciles; gracias de nuevo. Debo dar las gracias también a Paola, que aunque el sol ya no esté, que hizo arriesgarme a dejar todo atrás y comenzar este trabajo.

Finalmente debo agradecer a toda mi familia, especialmente a mis hermanos, Andrés y Luciano que, pese a todas las peleas, cuando están lejos se los extraña y a mi abuela Vilma, a quien le dí un beso al comenzar este trabajo, sin saber que ese iba a ser el último.

Por último, quiero dedicar este trabajo a mis padres por todo el cariño, aliento y apoyo que me dieron aún en los planes mas locos.





# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>3</b>
1.1. Flujo en la descarga de un silo . . . . .	4
1.2. Ley de Beverloo . . . . .	5
1.2.1. Validez de la ley de Beverloo . . . . .	9
<b>2. Sistema experimental</b>	<b>11</b>
2.1. Dispositivo experimental . . . . .	11
2.1.1. Silo . . . . .	12
2.1.2. Orificios de salida . . . . .	12
2.1.3. Ruptura de atascos . . . . .	12
2.2. Instrumentación . . . . .	13
2.3. Material granular . . . . .	14
2.4. Procedimiento de medida . . . . .	14
2.4.1. Correlación entre duración y tamaño de las avalanchas . . . . .	16
2.4.2. Medida de velocidades de salida de las partículas . . . . .	16
2.4.3. Medida en la boca del silo . . . . .	17
2.4.4. Medida en la parte superior del silo . . . . .	18
<b>3. Resultados</b>	<b>19</b>
3.1. Una nueva ley para el flujo . . . . .	22
3.1.1. Diferencia entre la ley de Beverloo y los datos experimentales	22
3.1.2. Expresión de la nueva ley . . . . .	23
3.1.3. Flujo en silos bidimensionales . . . . .	26
3.1.4. Significado físico del factor de saturación exponencial . . . . .	27
3.2. Estimación de la densidad del material en la salida del silo . . . . .	28
<b>4. Conclusiones</b>	<b>31</b>



# Capítulo 1

## Introducción

Un medio granular es un aglomerado formado por sólidos macroscópicos en contacto entre sí la mayor parte del tiempo. El manejo de materiales granulares presenta una gran importancia en la industria actual. Según P. Richards [1], es el segundo tipo de material ms manipulado en la industria, luego del agua. La mayor parte de la producción agropecuaria, la práctica totalidad de la minería y la industria farmacéutica, por citar algunos ejemplos, implica el procesamiento de materiales granulares. Las interacciones entre las partículas individuales en un medio granular son conocidas y relativamente sencillas, pero el elevado número de objetos que interviene, y de choques entre ellos hace que la complejidad del problema aumente notablemente. Por ello, el comportamiento de los medios granulares no se conoce con una profundidad similar a la que se tiene, por ejemplo en la mecánica de fluidos. Otro motivo de esto es que los trabajos realizados sobre el comportamiento de los medios granulares se hallaban limitados al objetivo de obtener soluciones tecnológicas para su manejo y tratamiento en la industria. Pero no se profundizaba en los motivos básicos que generan tales tipos de comportamiento.

El almacenamiento de material granular se realiza habitualmente en silos. Un silo es un recipiente (generalmente de forma cilíndrica) con un orificio en la parte inferior o lateral por donde se descarga el material. El tamaño de los silos puede variar enormemente, desde algunos que contienen sólo unos pocos gramos (por ejemplo un salero) hasta silos capaces de almacenar cientos de toneladas.

El flujo del material granular a la salida de un silo es uno de los problemas que aún presentan interrogantes y en los que la industria se halla interesada, según muestra una encuesta realizada entre industrias que se dedican a la fabricación de silos [2].

Los estudios realizados sobre el flujo, en general, se limitan a condiciones que resultan de interés para la industria. Por ejemplo, si el tamaño del orificio de descarga de un silo es menor que un cierto radio, se produce el fenómeno de *jamming* o formación de atascos [3] que interrumpen la descarga del silo. Tales atascos provocan inconvenientes en la industria. Por ello la solución utilizada generalmente es diseñar los silos con un orificio de salida de gran tamaño comparado con el de las partículas del material.

Sin embargo, el estudio del flujo para pequeños orificios de salida presenta interés para algunas aplicaciones. Por ejemplo, la dosificación con precisión de pequeñas cantidades de material en la industria farmacéutica no puede realizarse con orificios grandes.

El presente trabajo tiene como objetivo el estudio del comportamiento del flujo de material granular a través de orificios para un amplio rango de tamaños de los mismos.

Para ello se expondrá el trabajo realizado del siguiente modo. En primer lugar se hará una breve descripción de los resultados conocidos para el flujo de los medios granulares hasta el momento. En segundo lugar se explicará el dispositivo experimental utilizado, y de los parámetros elegidos en su diseño. Posteriormente se expondrán los resultados obtenidos para finalmente explicar las conclusiones obtenidas y posibles continuaciones del trabajo.

## 1.1. Flujo en la descarga de un silo

El *flujo* de un medio granular  $W$  se define como la masa del material granular que atraviesa el orificio por unidad de tiempo. Algunos autores utilizan actualmente otra definición de flujo: el número de partículas por unidad de tiempo que atraviesan el orificio; que es en realidad una frecuencia del paso de partículas, pero suele ser denominada también flujo, y para diferenciarlas, se utilizará la notación  $\Phi$  cuando se haga referencia a este último.

Si las partículas que forman el medio poseen masas similares, la cantidad de masa total que pasa por el orificio en un tiempo determinado es proporcional al número de partículas que lo atraviesan. Podemos por lo tanto relacionar a ambos mediante la ecuación  $W = \Phi m$ , donde  $m$  es la masa de una partícula individual. Una ventaja de utilizar esta definición es que permite comparar el flujo obtenido para diferentes materiales.

A fin de explicitar los parámetros relevantes en el comportamiento del silo en la figura 1.1 se muestra un esquema simple de un silo. El silo posee un radio  $D$  y se halla lleno hasta una altura  $H$  de material granular. Las partículas poseen un radio  $d$  y salen por un orificio de radio  $D_o$  en la base del silo.

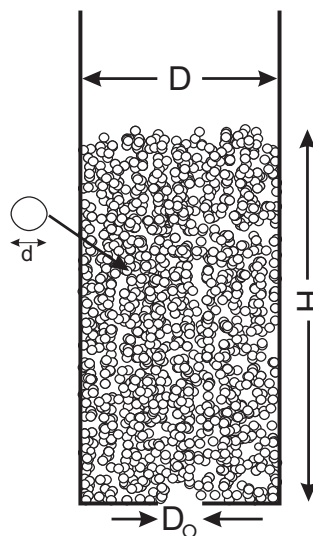


Figura 1.1: Esquema de un silo y definición de los símbolos utilizados

### Primeros resultados experimentales

Para hacerse una idea de la situación de los primeros estudios del flujo, es de utilidad mencionar un trabajo presentado por R. Fowler y L. Glastonbury en 1959 [4] en el que se repasa la literatura disponible hasta ese momento. Los resultados presentados son numerosos; un par de ejemplos son los siguientes: Newton y colaboradores [5] hallaron la siguiente expresión para el flujo:

$$W = 213D_o^{2,96}H^{0,04} \text{ lb/min} \quad (1.1)$$

la cuál fue obtenida midiendo el flujo de pellets de catalizador (con un diámetro que oscilaba entre los 2,5 y los 5 milímetros), los que se descargaban de un silo para alimentar una planta de procesamiento de hidrocarburos. Asimismo hallaron que el resultado solo era válido si el diámetro del orificio ( $D_o$ ) era superior a seis veces el tamaño de las partículas.

F. C. Franklin y L. N. Johanson [6] hallan una relación de la forma

$$W = \frac{1847\rho D_o^{2,93}}{(6,288\mu + 23,16)(0,394d + 1,889) - 44,90} \text{ g/min} \quad (1.2)$$

en donde, tal y como fue expresado anteriormente,  $H$  corresponde a la altura del material granular en el recipiente y  $D_o$  es el diámetro del orificio de la base del silo, mientras que  $\rho$  corresponde a la densidad del material que forma los granos y  $\mu$  es el coeficiente de fricción entre las partículas. Los resultados fueron obtenidos para silos con orificios circulares y utilizando partículas de diámetros entre 0.08 y 5 milímetros, aproximadamente. De igual manera que con los resultados de Newton ya expresados, no se realizaron medidas para diámetros del orificio inferiores al 5 veces el diámetro de las partículas debido a la formación de atascos.

Debe notarse que el factor  $\mu$  en las ecuaciones no se puede obtener de manera simple y parecería ser una caracterización de otras propiedades físicas tales como la forma de la partícula, su rugosidad o su tamaño efectivo.

Estas ecuaciones presentan algunas características dignas de notar. En primer lugar es posible observar que ambas tienen una dependencia del tamaño del orificio elevado a una potencia cercana a 3 y que prácticamente no dependen de la altura del material. También se debe recalcar el carácter empírico de estas leyes, lo que se manifiesta particularmente en el gran número de parámetros de ajuste de la ecuación 1.2.

## 1.2. Ley de Beverloo

En 1961 W. A. Beverloo [7] plantea una ecuación para el flujo de descarga de material granular en un silo de base plana. El razonamiento llevado a cabo por Beverloo es el siguiente: las variables que razonablemente influyen en el flujo de masa a través del orificio deben ser la densidad aparente del material  $\rho_b$ , la aceleración de la gravedad  $g$ , el diámetro del orificio  $D_0$  y el coeficiente de fricción entre las partículas  $\mu$ . Es posible relacionar la densidad aparente del material  $\rho_b$  con la densidad de las partículas a través de la *fracción de compactación*, un parámetro que relaciona el volumen ocupado por el medio con el volumen ocupado por los granos individuales. Se

define como el cociente entre el espacio ocupado por las partículas individualmente y el volumen aparente del material como un conjunto:

$$\varphi = \frac{\text{Volumen de los granos}}{\text{Volumen total ocupado}}$$

por lo tanto es posible escribir:  $\rho_b = \varphi \rho$

Observaciones llevadas a cabo por Nedderman y colaboradores en 1982 [8] permiten descartar otros dos parámetros que podrían influir en el flujo:

- la altura  $H$  del material granular no modifica el flujo a través del orificio, siempre que se cumpla que dicha altura sea mayor que 2,5 veces el diámetro del silo ( $H > 2,5D$ ). La justificación de esta condición radica en el efecto Janssen [9] ; si el material granular alcanza una altura suficiente, todo el peso de las partículas que se encuentran por encima es transferido hacia las paredes del silo por lo que los granos que se hallan en la zona cercana a la base no se ven afectados por la altura  $H$ .
- El flujo es independiente del diámetro del silo si se cumplen las siguientes condiciones: que el diámetro del silo sea mayor que 2,5 veces el tamaño del orificio ( $D > 2,5D_o$ ) y que el diámetro del silo sea mayor que treinta veces el diámetro de las partículas más el diámetro del orificio ( $D > D_o + 30d$ ).

Para valores de  $D$  dentro de los límites expresados, el efecto de las condiciones de contorno son despreciables, mientras que en el caso contrario el comportamiento del flujo se verá afectado.

Por tanto las variables relevantes para la predicción del flujo son: el diámetro del orificio ( $D$ ), la densidad aparente ( $\rho_b$ ), la aceleración de la gravedad ( $g$ ) y el coeficiente de fricción entre partículas ( $\mu$ ). Podemos entonces expresar el flujo  $W$  como función de estas variables:

$$W = f(D_o, \rho_b, g, \mu) \quad (1.3)$$

Si suponemos que la función es el producto de potencias de las variables podemos escribir:

$$W = C(\mu) D_o^\alpha \rho_b^\beta g^\gamma \quad (1.4)$$

$C$  es una constante adimensional de proporcionalidad, dentro de la cuál podemos incluir el factor de fricción  $\mu$ , dado que es también una magnitud adimensional.

Reemplazando en la ecuación anterior las variables por las unidades correspondientes a cada magnitud se obtiene:

$$MT^{-1} = L^\alpha (ML^{-3})^\beta (LT^{-2})^\gamma = L^{\alpha-3\beta+\gamma} M^\beta T^{-2\gamma} \quad (1.5)$$

Para que la ecuación anterior sea coherente en cuanto a sus dimensiones se debe cumplir que:

$$\alpha - 3\beta + \gamma = 0 \quad (1.6)$$

$$\beta = 1 \quad (1.7)$$

$$-2\gamma = -1 \quad (1.8)$$

La única solución del sistema de ecuaciones es:

$$\alpha = 5/2 \quad (1.9)$$

$$\beta = 1 \quad (1.10)$$

$$\gamma = 1/2 \quad (1.11)$$

con lo que la ecuación 1.4 queda:

$$W = C(\mu) \rho_b \sqrt{g} D_o^{\frac{5}{2}} \quad (1.12)$$

En la figura 1.2 se muestra una representación de los datos experimentales obtenidos en una gráfica de  $W^{2/5}$  en función de  $D_o$ . Como es de esperar, los datos se ubican sobre una línea recta. Pero se observa que su intersección con el eje  $x$  no se produce en cero, como era de esperar, sino en un cierto valor  $z$ . A fin de resolver este inconveniente,

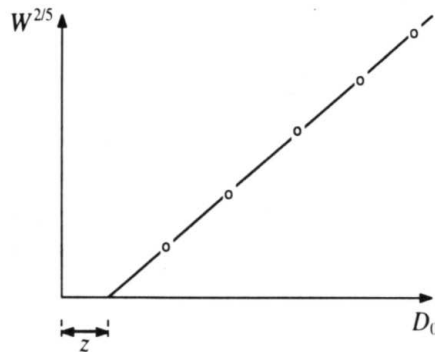


Figura 1.2: Representación de los datos experimentales propuesto por Beverloo. Obtenido de [8]

niente, se introduce en la ecuación 1.12 un nuevo término empírico, que depende del diámetro  $d$  de las partículas. La aparente justificación para la introducción del nuevo término se basa en el concepto de “anillo vacío” propuesto por Brown y Richards [10]: en la descarga de material granular en un silo de 2 dimensiones parecería existir una zona en cercana al borde del orificio en el que el número de partículas sería estadísticamente menor que en la región central. El anillo vacío produciría entonces una reducción del diámetro efectivo del orificio de salida en un cierto factor  $kd$ . Así la ecuación 1.12 queda:

$$W = C \rho_b \sqrt{g} (D_o - kd)^{5/2} \quad (1.13)$$

Esta ecuación se la conoce habitualmente como *ley de Beverloo*. La constante  $C$  toma valores típicos de 0,58 subiendo hasta 0,64 para partículas esféricas de vidrio muy pulidas. La constante  $C$  prácticamente no depende de  $\mu$ . El parámetro  $k$  es independiente del tamaño de la partícula [11], y toma valores en el rango  $1 < k < 3$  dependiendo de su forma.

No hay ningún requerimiento físico que exija la introducción del término  $-kd$  en la ecuación del flujo, salvo el permitir que la ley ajuste de manera correcta los datos experimentales obtenidos. También es discutible la justificación propuesta para la introducción mediante el concepto de anillo vacío, ya que los experimentos de Brown



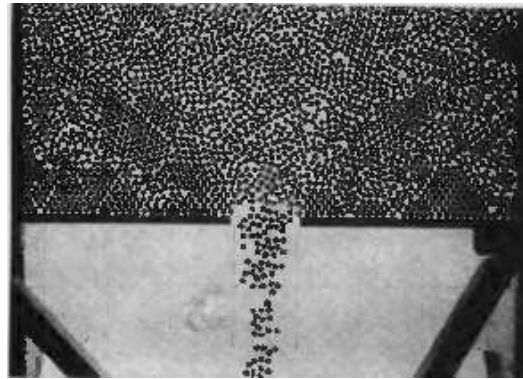


Figura 1.3: Fotografía del experimento de Brown y Richards [10], en donde creyeron observar el “anillo vacío”.

y Richards no fueron hechos con un silo vertical, sino con una monocapa de esferas sobre una placa inclinada unos pocos grados, lo cual podría no ser aplicable a silos. Zhang y Rudolph [12] argumentan que el único valor razonable de  $k$  es 1, y proponen una ley alternativa en donde se introduce un nuevo término  $c_\tau$ . El valor de  $c_\tau$  depende del diámetro del orificio y representa el efecto de la fricción de corte en el borde del orificio.

Es posible obtener una expresión similar a la ecuación 1.13 para  $\Phi$  dividiendo por la masa de cada partícula:

$$\Phi = C(\mu)\rho_b\sqrt{g}(D_o - kd)^{\frac{5}{2}}\frac{1}{\frac{4}{3}\pi d^3\rho} \quad (1.14)$$

$$= C'\rho_b\sqrt{g}(R - k)^{\frac{5}{2}} \quad (1.15)$$

en donde  $R$  es el *radio adimensional* del orificio de salida, dado por el cociente

$$R = \frac{D_o}{d}$$

y la constante  $C'$  se define como

$$C' = \frac{3 C(\mu)}{4 \pi \sqrt{d} \rho}$$

### Arco de caída libre

Existe otra forma de obtener la relación de la proporcionalidad entre el flujo y el diámetro de las partículas ( $W \propto D_o^{5/2}$ ): suponer que las partículas caen desde un “arco de caída libre”, una bóveda semiesférica que abarca todo el orificio de salida y representa la superficie inferior del material compactado. Por encima de dicha bóveda las partículas se hallan en contacto unas con otras, existiendo fuerzas de contacto entre ellas. Por debajo de ella las partículas pierden el contacto entre sí y se aceleran únicamente bajo la acción de la gravedad. La existencia del arco de caída libre fue mostrada experimentalmente por Brown y Richards utilizando un silo bidimensional [13].

El caudal es proporcional al área  $A$  del orificio y a la velocidad vertical de las partículas que lo atraviesan  $v_z$ , de modo que:

$$W \propto Av_z \quad (1.16)$$

El area del orificio de salida es proporcional al diámetro del orificio ( $A \propto D_o^2$ ) y teniendo en cuenta la suposición de la existencia del arco de caída libre es posible deducir que la velocidad de salida de las partículas del orificio es proporcional a la raíz cuadrada del diámetro (las partículas caen bajo la acción de la gravedad desde una altura proporcional al diámetro  $D_o$  del orificio y con velocidad inicial igual a cero):

$$v_z \propto \sqrt{D_o} \quad (1.17)$$

Se puede concluir entonces que:

$$W \propto D_o^{5/2} \quad (1.18)$$

arribando nuevamente a la relación de proporcionalidad entre  $W$  y  $D_o$  obtenida por Beverloo.

### Ley de Beverloo en 2 dimensiones

Para la descarga de silos en dos dimensiones es posible hacer un razonamiento similar al efectuado en la sección anterior. En tal caso, el área del orificio es proporcional a su diámetro ( $A \propto D_o$ ). Manteniendo la suposición del arco de caída libre, se llega a una expresión del flujo en dos dimensiones dada por la ecuación:

$$W = C(\mu)\sqrt{g}(D_o - kd)^{3/2} \quad (1.19)$$

Esta relación fue observada por Hirshfeld y colaboradores [14], quienes realizaron simulaciones numéricas mediante dinámica molecular sobre la descarga de un silo bidimensional, hallando que el flujo efectivamente sigue una relación de proporcionalidad del tipo:

$$\Phi \propto D_o^{3/2} \quad (1.20)$$

#### 1.2.1. Validez de la ley de Beverloo

Uno de los puntos a considerar en la ley de Beverloo es el rango de valores del diámetro del orificio para los cuales la ecuación 1.13 es capaz de predecir el flujo. Hirshfeld y colaboradores [15] realizaron una comprobación de la ley de Beverloo mediante simulaciones de dinámica molecular en tres dimensiones, hallando que el resultado teórico no coincide con los resultados experimentales para valores del diámetro del orificio  $D_o$  menor que 10 veces  $d$ ; y para  $D_o < 5d$  no se obtuvieron medidas del flujo dado que se producían atascos en la boca del orificio y lo interrumpían.

Estas limitaciones de la ley de Beverloo no causan inconvenientes en la industria, ya que generalmente es conveniente hacer el diseño de un silo de tal manera que no se produzcan atascos. Lo que lleva a que la práctica totalidad de las mediciones experimentales del flujo se hayan realizado para orificios de grandes dimensiones comparados con el tamaño de las partículas.

La ley de Beverloo necesita de la inclusión de una densidad para tener consistencia en el análisis dimensional. Beverloo en su trabajo original coloca en la ecuación 1.13 la densidad aparente inicial del material  $\rho_b$  tal y como se logra a través del proceso de llenado. Esta hipótesis resulta poco creíble, ya que se ha observado (a través de observaciones con rayos X [16] y transmisión de luz a través de silos delgados) que el material presenta claras variaciones en su fracción de compactación tanto al iniciarse el flujo como entre diferentes puntos del mismo silo.

Asimismo Huntington y Rooney [17] mostraron que el empaquetamiento del material granular tiene poco efecto sobre el comportamiento del flujo. Lo que contradice una de las suposiciones hechas para obtener la ley de Beverloo, ya que el término  $\rho_b$  depende de forma explícita de la fracción de compactación del material. Tal aparente contradicción puede explicarse suponiendo que cuando las partículas comienzan a fluir el material se dilata hasta alcanzar una densidad compatible con el flujo de partículas.

Habitualmente se coloca directamente el valor de la densidad aparente del material (aunque no sea el valor correcto) y se ajustan entonces los datos experimentales alterando el valor de  $C$ . Este método permite aprovechar los resultados obtenidos de modelos a escala para utilizarlo en aplicaciones industriales. Sin embargo ésta metodología disminuye el valor predictivo de la ley de Beverloo.

Los inconvenientes de la ley de Beverloo planteados en los párrafos anteriores hacen pensar que, aunque esta ley pueda ser aplicable en las condiciones estudiadas, es posible que deje de tener validez al considerar un rango amplio de tamaños del orificio.

# Capítulo 2

## Sistema experimental

### 2.1. Dispositivo experimental

Para efectuar mediciones del flujo se utilizó un silo a escala de base plana. El silo se llena con material granular, descargándose a través de un orificio en la base. En las figuras 2.1 a y 2.1 b se puede observar un esquema y una fotografía del dispositivo experimental.

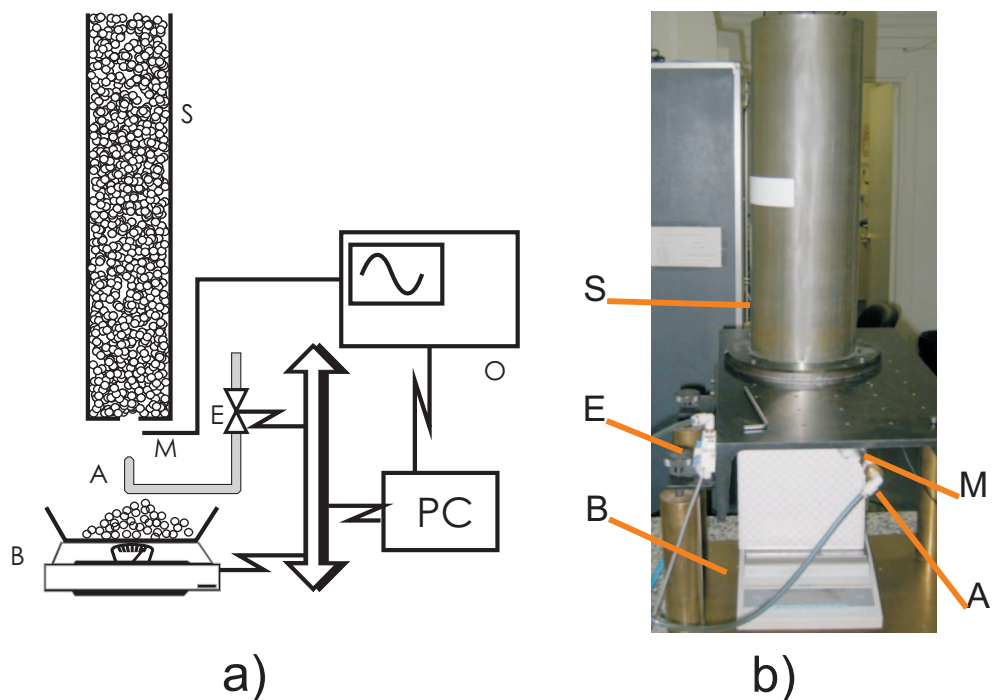


Figura 2.1: Esquema (a) y fotografía (b) del dispositivo experimental. S, silo; M, micrófono; A, soplador de aire; B, balanza; E, electroválvula; O, osciloscopio; PC, ordenador.

### 2.1.1. Silo

Los silos utilizados difieren tanto en sus diámetros (140 y 150 mm), como en el material del que están fabricados (acero inoxidable y vidrio). La mayoría de las mediciones se llevaron a cabo con silos de acero, ya que presentan la ventaja de posibilitar la descarga de la electricidad estática generada, especialmente, durante la carga del silo. En las situaciones en las que es necesario efectuar observaciones del comportamiento del material granular durante la descarga del silo, se utilizó un silo de vidrio. El uso de diferentes materiales en la construcción de los silos no presenta efectos sobre el comportamiento del flujo de material granular. Asimismo los diferentes diámetros de los silos no influyen en el experimento ya que las relaciones entre el diámetros de las partículas y el diámetro de los silos satisfacen las condiciones expresadas en la sección 1.2 ( $D > 2,5D_o$ ,  $D > D_o + 30d$  y  $H > 2,5D$ ), por lo que no afectan los resultados [8, 18].

La base del silo es una pieza plana de hierro anodizado, soportada por cuatro pies de latón. El material granular se descarga a través de un orificio en la base del silo y se almacena en una caja que se halla sobre una balanza, a fin de poder pesar la cantidad de material granular que ha caído. Para evitar las vibraciones que puedan provenir del suelo, todo el dispositivo se halla colocado sobre una mesa antivibratoria.

### 2.1.2. Orificios de salida

Para poder variar de manera simple el diámetro del orificio de salida se utilizan unos discos circulares de 10 cm de diámetro, que encajan en la base. Se muestra en la figura 2.2 un esquema de los mismos. Los discos están fabricados en acero inoxidable y latón; y dado que se ha observado que el material no afecta las mediciones [18] se utilizaron preferentemente los discos de latón, ya que al ser de un material más blando resultaban más fáciles de maquinar.

El orificio de salida del silo se ha perforado de forma cónica con un diámetro menor en la parte superior, a fin de que únicamente puedan formarse atascos en la parte superior del orificio.

### 2.1.3. Ruptura de atascos

Para radios menores que un cierto radio crítico  $R_c$  el flujo del medio granular se interrumpe debido a la formación de atascos en la salida [18]. Tras la formación de un atasco se debe esperar un tiempo prudencial (de aproximadamente el mismo tiempo de la duración de la avalancha) para restablecer el flujo, rompiendo los arcos que se forman. Para ello se utiliza aire a presión a través de un dispositivo como el mostrado en la figura 2.2(a). En él, el aire es llevado a través de un tubo de acero inoxidable hasta la parte inferior del orificio, en donde se descarga hacia arriba a través de una boquilla de delrin. El flujo de aire es controlado mediante de una electroválvula SMC SY-5120 la cual es manejada a través de la salida analógica de un multímetro Hewlett Packard HP 34970A conectado a un ordenador.

Este método de ruptura de arcos es ventajoso en comparación con otros (como por ejemplo producir una vibración en la base del silo) ya que no produce cambios en la fracción de compactación del medio granular. Otra de las ventajas es que es

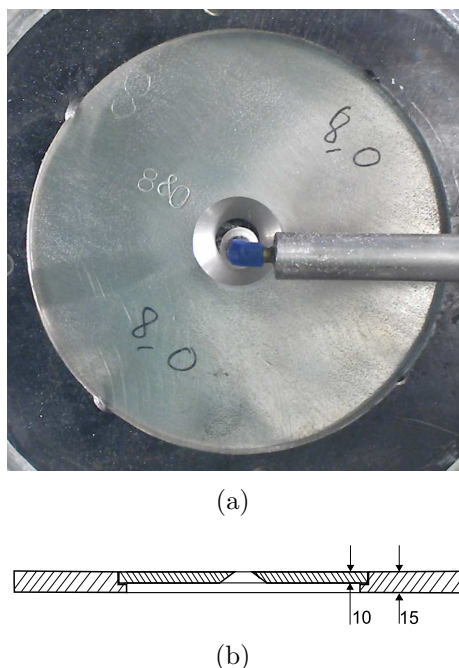


Figura 2.2: a) Fotografía de la base del silo, en ella se puede observar el soplador utilizado en la ruptura de atascos. b) corte transversal de la base del silo.

fácilmente reproducible. Dos factores a tener en cuenta en el sistema de ruptura de arcos usado son el tiempo de soplado y la presión utilizada. Es posible observar [18] que, dentro de ciertos límites, ni uno ni otro afectan al resultado de las mediciones. En los experimentos se ha utilizado una presión de  $4 \pm 0,5$  bares y una duración del tiempo de soplado de  $0,4 \pm 0,1$  s. El error relativo en el tiempo de soplado es bastante alto, debido a que la electroválvula usada posee un tiempo de respuesta propio considerable.

## 2.2. Instrumentación

A fin de simplificar el proceso de medición se automatizó la obtención de datos todo lo posible. Para ello todos los instrumentos se hallan conectados a través de un bus GPIB o un bus RS-232 a un ordenador, que sirve asimismo para almacenar los datos obtenidos. La única operación manual del experimento es la recarga con el material granular que se ha descargado a través del orificio.

A fin de determinar el flujo  $W$  se deben conocer dos magnitudes, la masa de los granos que atraviesan el orificio y el tiempo que tardan en atravesarlo. Para determinar la masa se utilizó una balanza *Sartorius GP4102*, controlada a través del puerto RS-232 del ordenador. El fondo de escala de la balanza es de 4100 g, con una resolución de 0,01 g. Como el material granular es almacenado en una caja de cartón que se coloca sobre la balanza, el peso máximo de material granular que es posible pesar se reduce a aproximadamente 3600 gramos. La balanza utilizada tiene la ventaja de que su resolución permite discriminar partículas individuales.

A fin de determinar el tiempo durante el cual el material granular cae por el

orificio, se utilizó un micrófono *Valpey-Fisher VP-1093 Pinducer*, en contacto con el tubo de aire comprimido (figura 2.2(a)), y detecta los impactos de los granos al golpear contra la boquilla del soplador. La señal es amplificada y registrada en un osciloscopio *Hewlett Packard HP54510A* siendo a continuación enviada al ordenador, donde es procesada para obtener el tiempo total de la avalancha, midiendo el tiempo durante el que la señal proveniente del micrófono supera un cierto umbral.

Conjuntamente y a fin de verificar las condiciones ambientales durante los experimentos, se tomaron datos de humedad y temperatura a través de un sensor comercial *Rotronic Hydropalm 2*.

### 2.3. Material granular

El material granular utilizado consistió principalmente en esferas de vidrio, con diámetros que van desde los 0,5 mm hasta los 3 mm. No se utilizaron materiales granulares de tamaño menor dado que para esas partículas las fuerzas debidas a la carga electrostática que se genera y las fuerzas cohesivas debidas a la humedad ambiente dejan de ser despreciables. Asimismo no se realizaron mediciones con diámetros mayores que 3 mm debido a que las condiciones sobre las dimensiones del silo enunciadas en la sección 1.2 dejan de cumplirse y pueden influir en el comportamiento del flujo.

A fin de comprobar la independencia del flujo  $\Phi$  respecto de otros parámetros tales como la densidad, coeficiente de restitución y de rozamiento, se realizaron pruebas con distintos tipos de materiales, cuyas propiedades se resumen en la siguiente tabla:

Material	d (mm)	Masa (mg)	$\rho$ ( $g/cm^3$ )	$\theta_i$	e
vidrio	$0,42 \pm 0,05$	$0,16 \pm 0,05$	$2,2 \pm 0,1$	$26 \pm 1^\circ$	
vidrio	$1,04 \pm 0,01$	$1,3 \pm 0,4$	$2,4 \pm 0,1$	$26 \pm 1^\circ$	$0,97 \pm 0,03$
vidrio	$2,06 \pm 0,02$	$10,1 \pm 0,3$	$2,2 \pm 0,1$	$26 \pm 1^\circ$	$0,97 \pm 0,03$
vidrio	$3,04 \pm 0,02$	$34,7 \pm 0,4$	$2,4 \pm 0,1$	$27 \pm 1^\circ$	$0,97 \pm 0,03$
plomo	$1,98 \pm 0,06$	$46,0 \pm 3,8$	$11,4 \pm 0,5$	$25 \pm 1^\circ$	$0,49 \pm 0,1$
plomo	$3,0 \pm 0,1$	$150 \pm 14$	$10,9 \pm 0,5$	$27 \pm 1^\circ$	$0,49 \pm 0,09$
Delrin	$3,00 \pm 0,02$	$18,9 \pm 0,3$	$1,34 \pm 0,05$	$29 \pm 1^\circ$	$0,92 \pm 0,02$

donde  $\rho$  es la densidad del material,  $e$  el coeficiente de restitución de las partículas y  $\theta_i$  el ángulo de reposo para el material granular. El ángulo de reposo se define como el máximo ángulo con la horizontal que puede tener la superficie de una pila de material granular en equilibrio. Existe una relación directa entre el ángulo de reposo y el coeficiente de fricción entre las partículas. Tal hecho, junto a que la medida del ángulo de reposo es relativamente simple de realizar hace que se utilice para representar el coeficiente de fricción entre partículas.

### 2.4. Procedimiento de medida

La formación de atascos en la salida del silo hace que deban utilizarse diferentes métodos para la obtención de las mediciones.

## Medidas del flujo para radios menores que el radio crítico

Si el tamaño del orificio de salida es lo suficientemente pequeño se forman atascos; por ello el método utilizado para obtener el flujo de partículas consiste en los siguientes pasos

1. Se mide el peso del material granular que se halla depositado inicialmente en la balanza.
2. Se desatasca el orificio de salida, soplando a través de la boquilla.
3. Se inicia la adquisición de datos del micrófono en el osciloscopio. El tiempo durante el cuál se efectúa tal adquisición debe determinarse de manera empírica, ya que la masa y la duración de la avalancha cambian con el radio del orificio. Por tanto se debe elegir un tiempo de adquisición que sea lo suficientemente largo como para detectar toda la duración de la avalancha. Sin embargo, tiempos de adquisición mucho mas largos que el tiempo máximo de la avalancha ralentizan el proceso de medida.
4. Una vez transcurrido el tiempo en el que el osciloscopio adquiere los datos, se transfieren al ordenador y allí se procesa la señal a fin de obtener la duración de la avalancha.
5. Se obtiene el peso del material granular que se ha depositado en la caja, y se resta dicho valor del peso adquirido en el punto 1, a fin de determinar la masa de material granular que se ha descargado en la avalancha.
6. Se repite el proceso a partir del punto 1.

El flujo de partículas  $\Phi$  se calcula tomando el valor medio de una cierta cantidad de mediciones del flujo.

## Medidas del flujo para radios mayores que el radio crítico

En el caso en que no se formen atascos se sigue un procedimiento diferente: se indica a la balanza que registre los valores de peso de manera continua y a intervalos regulares, enviando los datos al ordenador, registrándose asimismo el tiempo en el que se han efectuado dichas mediciones. Esta información es almacenada en un archivo para luego efectuar una regresión lineal de los datos sobre la gráfica de  $m$  frente a  $t$ , obteniéndose la pendiente del ajuste lineal realizado, que corresponde al flujo del material granular.

Para algunos radios inferiores al radio crítico es posible utilizar ambos métodos, ya que la duración de la avalancha es lo suficientemente corta como para poder ser medida utilizando el osciloscopio, pero lo suficientemente larga como para registrar la masa respecto del tiempo utilizando la balanza. Para estos casos, se realizaron medidas utilizando los dos métodos descritos, hallando que los valores del flujo obtenidas en ambos casos son idénticos.



### 2.4.1. Correlación entre duración y tamaño de las avalanchas

El método de medida del flujo para radios menores que el radio crítico se basa en obtener los tiempos y las masas de cada avalancha individual. En la figura 2.3 se representa la duración de una avalancha ( $t$ ) respecto del número de partículas que caen en la misma ( $S$ ) para dos radios diferentes. En ella puede observarse que la correlación entre el tamaño de avalancha y el tiempo no es buena para radios adimensionales pequeños. Una primera explicación para ello reside en el hecho que la medición del tamaño de la avalancha para radios pequeños posee un error relativo mucho mayor que para radios mayores. La falta de resolución en las medidas para

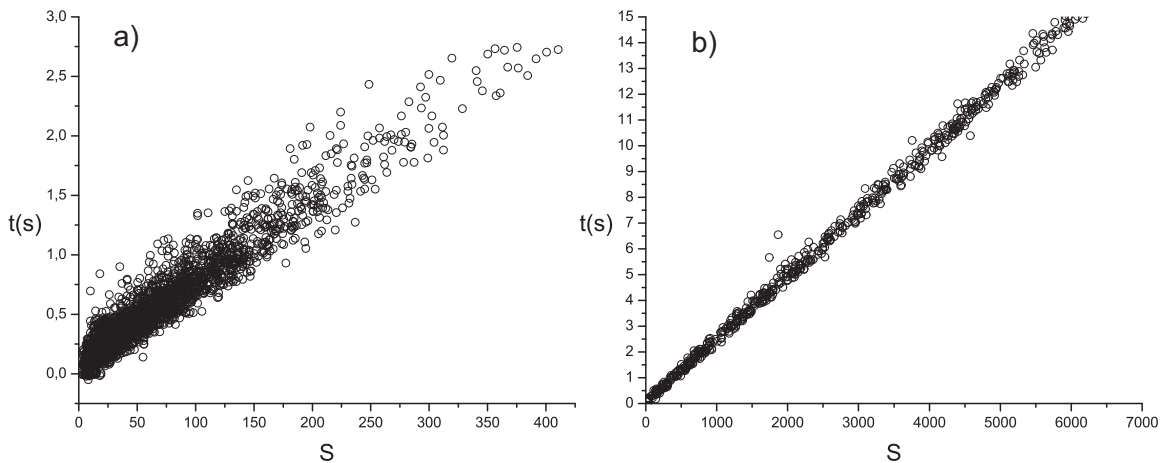


Figura 2.3: Representación de la duración de una avalancha ( $t$ ) en segundos, respecto del número de partículas ( $s$ ) en la misma, para radios adimensionales  $R = 3,05$  (a) y  $R = 4$  (b). Es posible observar el aumento en la correlación entre el tamaño de la avalancha y su duración al incrementarse el radio adimensional.

radios pequeños no es el único motivo para este fenómeno, ya que la dispersión en los datos de la figura 2.3 a) es mayor que la resolución de los instrumentos. La otra causa se halla en las fluctuaciones en el flujo [10, 19] por la formación de atascos parciales. Consisten en la formación de puentes que obstruyen el orificio, interrumpiendo el flujo; pero no son lo suficientemente estables como para soportar el peso del material que se halla por encima y colapsan. Otra posibilidad de formación de atascos parciales es la formación de arcos que no abarcan la totalidad del orificio, limitando el flujo. La formación de atascos también explica la aparición de puntos que se apartan del valor esperado en la figura 2.3 b); para tales puntos se produjeron atascos parciales, los que hicieron que el tiempo medido de la avalancha fuera mayor que el que se hallaban efectivamente cayendo partículas.

### 2.4.2. Medida de velocidades de salida de las partículas

Debido a motivos que se explicarán en el siguiente capítulo, se efectuaron medidas de la velocidad con la que desciende el nivel del material, junto con la velocidad de salida de las partículas a través de la boca del silo; para ello se utilizarán los métodos que se describen a continuación.

### 2.4.3. Medida en la boca del silo

Para determinar la velocidad de salida de las partículas por el orificio de salida, se realizaron filmaciones mediante una cámara de alta velocidad Photron 1024PCI 100k de la caída de los granos tras atravesar la boca del silo. Estos vídeos fueron procesados para obtener diagramas espaciotemporales sobre una línea vertical de los fotogramas. Dado que las partículas caen bajo la acción de la gravedad, sus trayectorias en el diagrama espacio-tiempo son parábolas, como se puede observar en la figura 2.4.

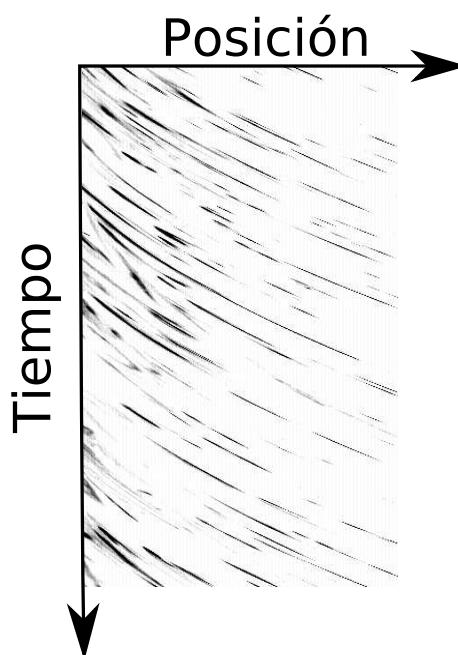


Figura 2.4: Diagrama espacio-tiempo obtenido en la boca del silo.

Es conveniente que las trazas de las partículas en el diagrama espaciotemporal se hallen separadas entre sí. Por lo tanto se ajustó la iluminación disponible a fin de obtener un reflejos puntuales en las esferas de vidrio, y se modificó posteriormente el brillo y contraste utilizando un programa de procesamiento de vídeo. Cómo la resolución con la que es posible trabajar con la cámara depende de la frecuencia con que se obtienen las imágenes, se decidió utilizar una frecuencia de 3000 fotogramas por segundo, que permite obtener una resolución suficiente para obtener trazas de una longitud adecuada.

La posición vertical en función del tiempo de las partículas se obtiene a partir del centroide de la traza de la partícula para cada tiempo determinado. Dado que las partículas no siempre son detectadas en el momento de salir por la boca del silo, se extrapola la velocidad de las partículas en el momento de atravesar la el orificio de salida. Se hace un ajuste sobre los datos de  $y$  respecto de  $t$  a una ecuación parabólica. En ella se fija el coeficiente cuadrático al valor de la aceleración de la gravedad. De los ajustes obtenidos se descartan todos los que presenten un parámetro de correlación inferior a un valor de 0,99.

#### 2.4.4. Medida en la parte superior del silo

Como la velocidad de descenso del material granular en la parte superior del silo es lenta, no es necesaria la utilización de una cámara de alta velocidad para realizar la captura del movimiento. Por ello se usó una cámara CCD Hamamatsu 5405, conectada a una tarjeta de adquisición de imágenes en un ordenador. Se obtuvieron diagramas espaciotemporales similares al que se muestra en en la figura 2.5.

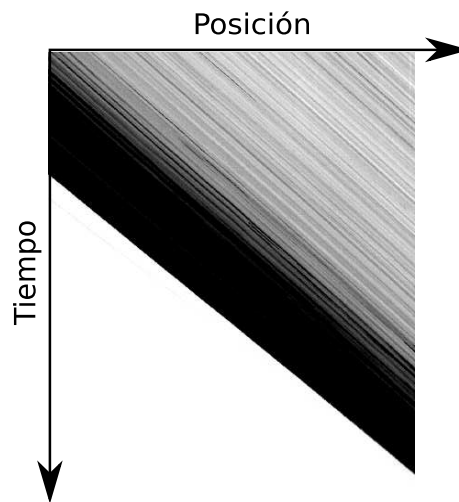


Figura 2.5: Diagrama espacio-tiempo del movimiento del material granular en la parte superior del silo

El movimiento de las partículas en la parte superior del silo está altamente correlacionada. Las trayectorias en el diagrama espaciotemporal para la parte superior del silo son líneas rectas paralelas, como puede verse en la figura 2.5. La obtención de la velocidad es entonces inmediata.

# Capítulo 3

## Resultados

Una primera cuestión a dilucidar es si las propiedades del material que forma las partículas del medio granular afecta el comportamiento del flujo. Para ello, en la figura 3.1 se representa el flujo de partículas  $\Phi$  en función del radio adimensional, para diferentes materiales. Como primer resultado de importancia, cabe destacar que ni el material ni el diámetro de las partículas parecen tener una influencia notable sobre el flujo de las partículas. Por tanto el flujo de partículas  $\Phi$  es una cantidad mas interesante de estudiar que el flujo másico, ya que permite hacer comparaciones entre materiales diferentes.

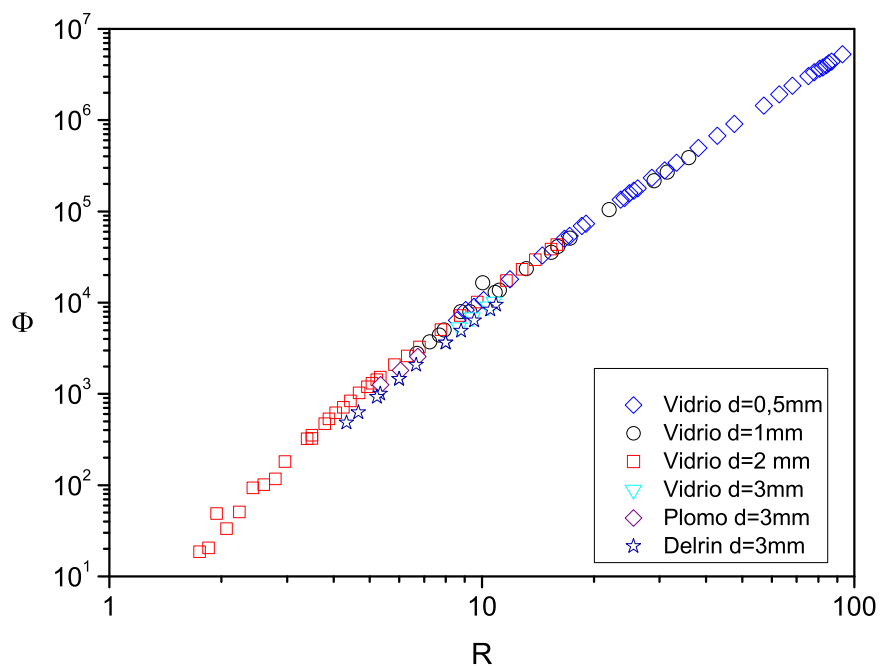


Figura 3.1: Flujo de partículas  $\Phi$  en función del radio adimensional. Puede observarse que ni el tamaño ni el material que forma las partículas influye significativamente en  $\Phi$ .

A fin de verificar la validez de la ley de Beverloo, en la figura 3.2 se muestra el

ajuste a los datos obtenidos de la ecuación 1.14:

$$\Phi = C (R - k)^{\frac{5}{2}} \quad (3.1)$$

Los parámetros que producen el mejor ajuste son  $C = 50,5$  y  $k = 1,16$ . En el recuadro de la figura 3.2 se muestra una ampliación de la región de radios grandes. Es claro que el ajuste obtenido mediante la utilización de la ley de Beverloo no es adecuado, ya que para radios grandes se subestima a  $\Phi$  en el orden de  $1,5 \times 10^6$  partículas por segundo. Pese a esto es posible elegir adecuadamente los valores de los parámetros de tal manera que la ecuación ajuste correctamente en una región limitada de la gráfica. La posibilidad de ajustar una zona arbitraria de la curva es lo que hizo que se considerara como correcta la ley de Beverloo, ya que los trabajos previos realizados se limitaban a un pequeño intervalo de  $R$ . En nuestro caso, se ha medido el flujo de material granular en prácticamente dos décadas de  $R$ , y en tal caso se hace manifiesto el problema en la forma funcional planteada por la ley de Beverloo.

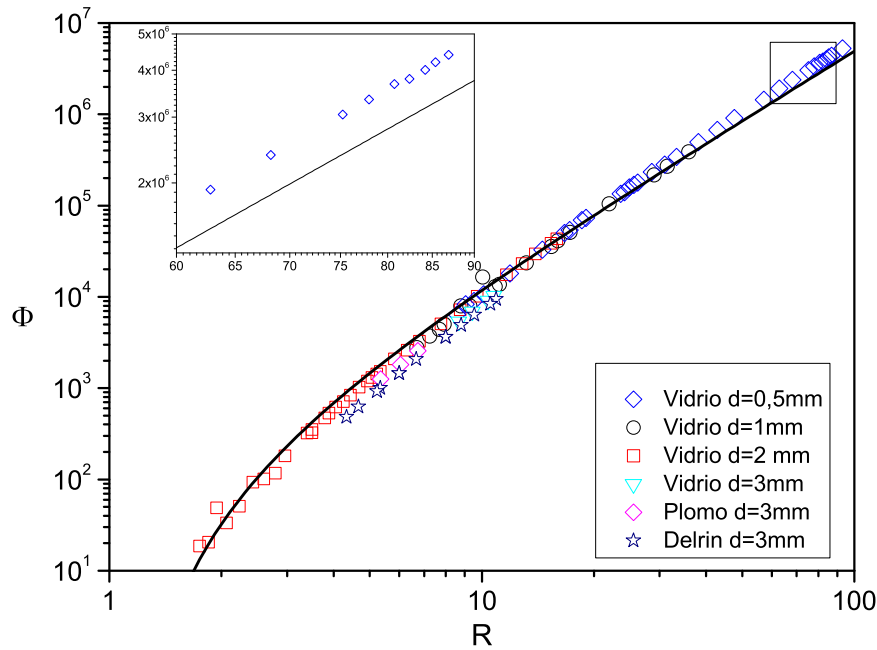


Figura 3.2: Ajuste de la ley de Beverloo (ec. 1.13) a los datos experimentales. Recuadro: ampliación de en la region  $60 < R < 90$ . Es posible observar que la ley de Beverloo (ecuacion 1.13 no ajusta correctamente los datos experimentales para el rango de parámetros medidos.

Sin embargo, la ley de Beverloo no debe ser descartada completamente. Si se consideran los radios adimensionales grandes, la ley de Beverloo parece cumplirse. Al ajustar la ecuación 3.1 en un pequeño rango de radios y dejando como parámetro de ajuste el exponente del radio, se halla que dicho exponente toma un valor superior a  $5/2$  para valores pequeños del radio. Conforme se aumenta el radio adimensional, va aproximándose paulatinamente al valor que corresponde a la ley de Beverloo.

Como las mediciones no se hallan distribuidas uniformemente respecto de los radios adimensionales, se eligió considerar un intervalo de radios que abarcara 7 puntos consecutivos para cada ajuste. Si se considera al exponente de  $R$  como variable ( $\gamma$ ) es posible realizar un ajuste de la ecuación resultante:

$$\Phi = C (R - k)^\gamma \quad (3.2)$$

en la figura 3.3, se muestran los exponentes obtenidos de  $\gamma$  para los diferentes radios adimensionales.

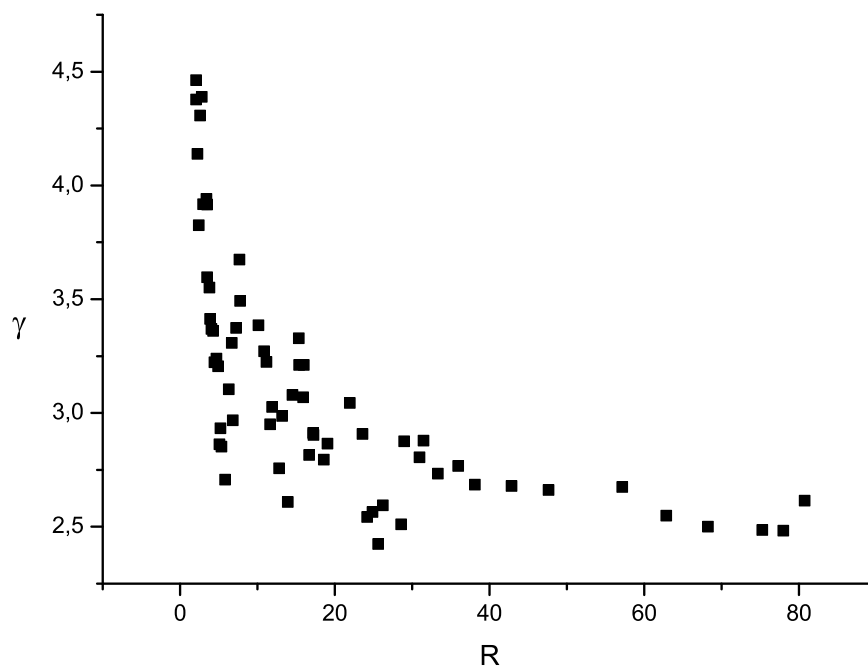


Figura 3.3: Exponente  $\gamma$  de la ecuación 3.2 en función del radio adimensional ( $R$ ), obtenido al ajustar un pequeño intervalo de radios (Ver texto). El valor de el exponente  $\gamma$  tiende al valor 2,5 (valor correspondiente a la ley de Beverloo) para radios adimensionales grandes.

Por tanto es posible plantear la hipótesis que la ley de Beverloo (en particular la dependencia del flujo con el radio elevado a  $5/2$ ) puede verse como límite asintótico al que tiende el flujo cuando el radio es muy grande. En la figura 3.4 se muestra el ajuste de la ley de Beverloo a los datos experimentales con radios adimensionales mayores que 60. El valor de  $k$  ha sido fijado en  $k = 1$ . El parámetro  $k$  fué originalmente incluido de manera arbitraria a fin de permitir el ajuste de la ecuación de Beverloo a los datos experimentales obtenidos. Dado que el rango de radios adimensionales  $R$  que se midieron previamente era pequeño, tal modificación permitía que la ley de Beverloo predijera el flujo correctamente en tales medidas. Sin embargo, el único valor que es realmente razonable de considerar es  $k = 1$  (para que el flujo se haga cero cuando el diámetro del orificio sea igual al de las partículas). Supuestas tales

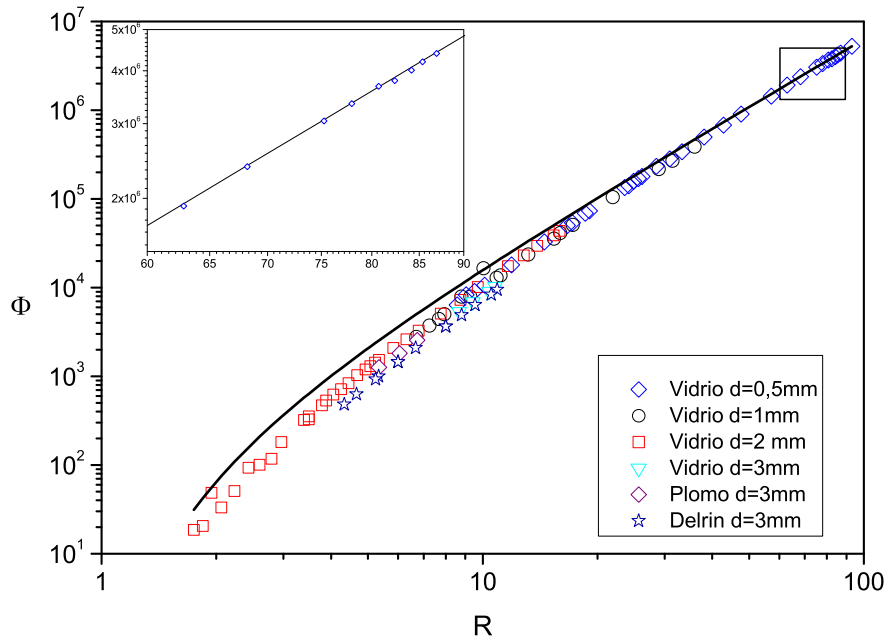


Figura 3.4: Ajuste de la ley de Beverloo a los datos experimentales fijando  $k = 1$ . Recuadro: ampliación de la region  $60 < R < 90$

condiciones, el único parámetro de ajuste es la constante  $C$ . La ecuación obtenida para este caso es  $\Phi = 64,59 (R - 1)^{5/2}$ .

En la figura se observa que la ley de Beverloo sobreestima los valores medidos para radios pequeños, mientras que predice correctamente los valores para radios grandes, tal como se muestra en el recuadro. Por tanto parece razonable suponer que el flujo depende del radio adimensional elevado a  $5/2$  cuando el radio del orificio se hace muy grande.

### 3.1. Una nueva ley para el flujo

#### 3.1.1. Diferencia entre la ley de Beverloo y los datos experimentales

A fin de describir en detalle la discrepancia entre la ley de Beverloo y los datos medidos e intentar determinar la forma funcional de la ley que rige el flujo, en la figura 3.5 se representa el cociente entre los datos medidos ( $\phi$ ) y el valor predicho por el ajuste de la figura 3.4 ( $W_{Bev}$ ):

$$\Delta = \Phi/W_{Bev} \quad (3.3)$$

Puede observarse que  $\Delta$  sigue la forma de una saturación no lineal. Y, como es de esperarse,  $\Delta \rightarrow 1$  cuando  $R \rightarrow \infty$ , lo que implica que  $\Phi = W_{Bev}$  para radios grandes. A fin de hallar la forma funcional que sigue  $\Delta$ , en la figura 3.6 se representa  $1 - \Delta$

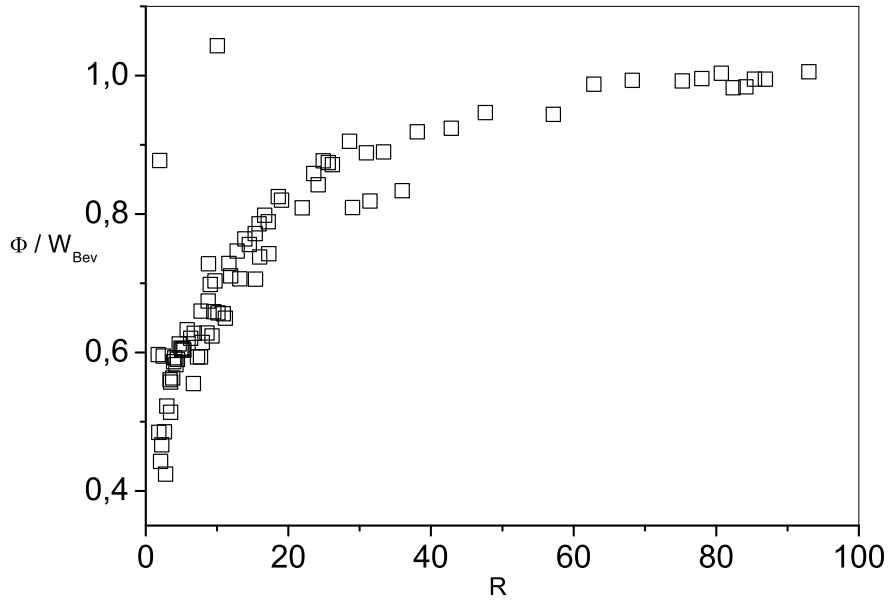


Figura 3.5: Razón entre los datos medidos y los datos predichos por la ley de Beverloo suponiendo  $k = 1$ .

en escala logarítmica en función de  $R - 1$ . Se observa que los puntos caen sobre una línea recta. Por lo que es posible afirmar que la ecuación que representa a  $\Delta$  será:

$$\Delta = 1 - \frac{1}{2} e^{-b(R-1)} \quad (3.4)$$

La línea continua es un ajuste hecho utilizando la ecuación 3.4. El valor del parámetro  $b$  obtenido es  $b = 0,051$ .

### 3.1.2. Expresión de la nueva ley

La expresión de  $\Delta$  implica, por definición:

$$\frac{\Phi}{W_{Bev}} = 1 - \frac{1}{2} e^{-b(R-1)} \quad (3.5)$$

como  $W_{Bev}$  es la la expresión de la ley de Beverloo (ec. 3.1) con  $k = 1$ , se tiene que:

$$\Phi = C' \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-b(R-1)} \right) (R-1)^{5/2} \quad (3.6)$$

en donde se agruparon los factores  $C(\mu)$ ,  $\sqrt{g}$  y  $\rho_b$  de la ecuación 1.13 en la constante  $C'$ .

En la figura 3.7 se muestra el ajuste de la ecuación 3.6 a los datos experimentales. Los parámetros del ajuste son  $C' = 64,6$  y  $b = 0,051$ . La concordancia entre los valores predichos por la ecuación 3.6 y los resultados experimentales resultan adecuados



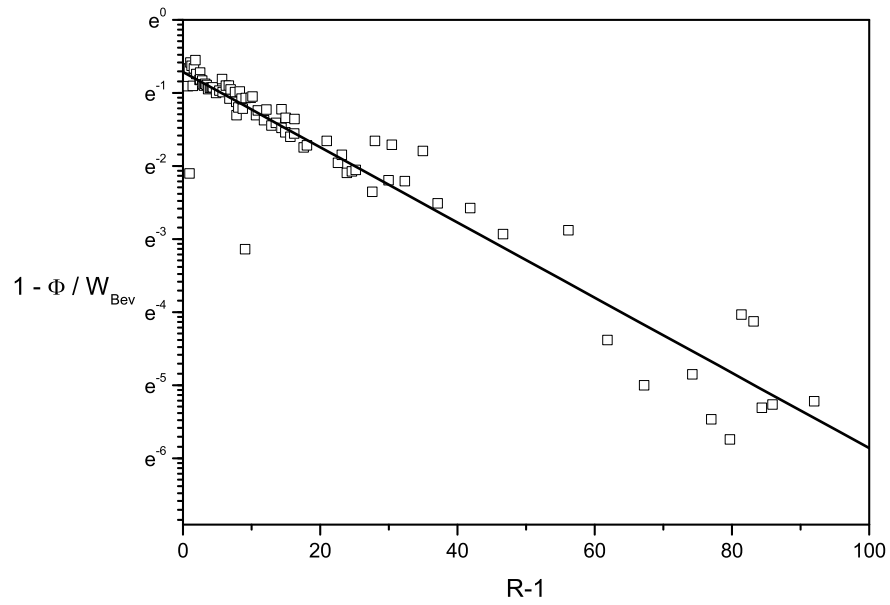


Figura 3.6:  $1 - \frac{\Phi}{W_{Bev}}$  en función de  $R - 1$ . La línea es un ajuste lineal sobre los datos experimentales.

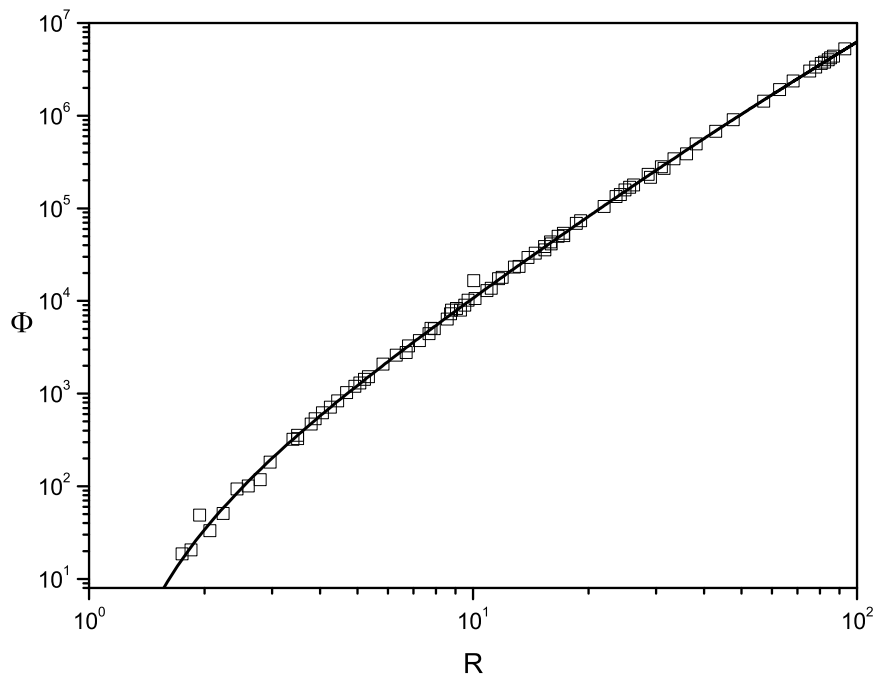


Figura 3.7: Ajuste de la ecuación 3.6 a los datos experimentales

para todo el rango de valores de  $R$  estudiados. Inclusive para radios adimensionales pequeños, en los que se producen atascos.

A fin de mostrar la mejora del ajuste a los datos experimentales de la nueva ley con respecto a la ley de Beverloo, en la figura 3.8 se muestran la diferencia entre el logaritmo del flujo medido y el logaritmo del valor predicho por el mejor ajuste de la ecuación 1.13 (círculos) y la nueva forma funcional propuesta (eq 3.6) (cuadrados). Es de notar que para grandes tamaños del orificio, la diferencia entre el valor medido y el valor predicho por el mejor ajuste de la ley de Beverloo es del orden del millón y medio de partículas por segundo, mientras que la diferencia entre los valores medidos y los obtenidos a través de la ecuación 3.6 es de aproximadamente  $5 \times 10^4$  partículas por segundo.

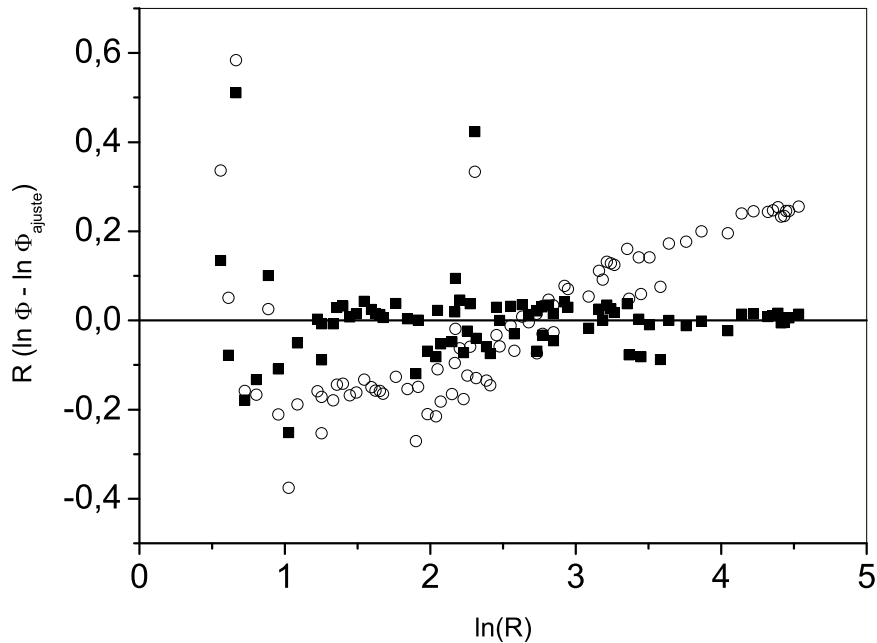


Figura 3.8: Residuos del ajuste del logaritmo del flujo medido a la ley de Beverloo (círculos) y la ley propuesta (cuadrados)

La introducción de esta nueva ecuación puede ser objetada argumentando que con ella sólo se reemplaza el parámetro  $k$  por uno nuevo  $b$ . La expresión del flujo propuesta, sin embargo, presenta un comportamiento satisfactorio para todos los valores de  $R$  medidos, lo que no sucede al utilizar la ecuación 1.13. Debe recordarse que la introducción del término  $kd$  en la ecuación 1.13 se realizó para corregir su comportamiento para orificios de salida pequeños. Representando los datos experimentales obtenidos en función de  $\Phi^{2/5}$  es posible obtener el valor de  $k$  de la intersección del ajuste con el eje de las abscisas. Dependiendo del rango de radios sobre los que se realiza el ajuste el valor obtenido va desde  $R = 1$  hasta  $R \approx 3$ . En la figura 3.9 se representa  $\Phi^{2/5}$  en función de  $R$  en la región de radios pequeños. La línea de a trazos es un ajuste lineal de los datos con  $R > 50$  y la línea continua es la expresión obtenida mediante la ecuación 3.6. El ajuste lineal para  $R > 50$  predice un valor  $k \approx 3$ . En tal caso,

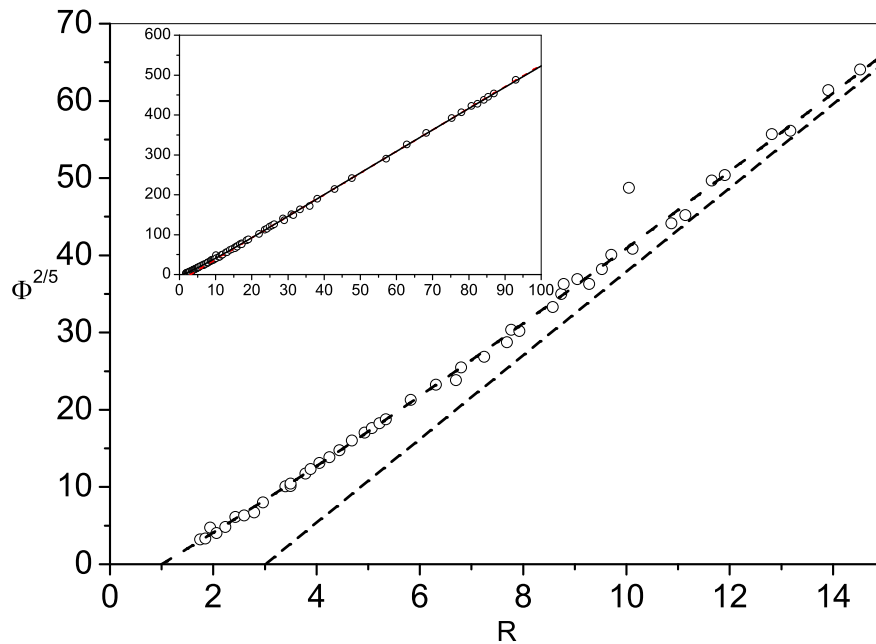


Figura 3.9:  $\Phi^{2/5}$  respecto de  $R$ . La línea continua es el ajuste hecho mediante la nueva ecuación del flujo y la línea discontinua el mejor ajuste de la ley de Beverloo. El recuadro muestra la misma figura para todo el rango de radios adimensionales medidos. Como puede verse, la ley de Beverloo debe tener un término  $k$  en torno a 3, pese a que se han medido flujos en diámetros inferiores.

si se cumpliera la hipótesis del “anillo vacío” no existiría flujo para radios menores que aproximadamente 3. Esto se debe a que el término  $-kd$  resulta en una reducción efectiva del diámetro del orificio y para  $D_o < kd$  no podría existir flujo. Sin embargo, no hemos observado que el flujo cese totalmente, incluso para orificios muy cercanos a  $R = 1$ , lo que parece invalidar la hipótesis del anillo vacío.

### 3.1.3. Flujo en silos bidimensionales

La nueva ley propuesta se puede aplicar también a silos bidimensionales. En la figura 3.10 se muestran resultados obtenidos para silos bidimensionales, en simulaciones de dinámica molecular (cuadrados) realizadas por R. Arévalo [20] y experimentos realizados en un silo en dos dimensiones (círculos) [21]. En línea continua se muestra el ajuste realizado utilizando la expresión en dos dimensiones de la expresión propuesta para el flujo:

$$\Phi = C' \left( 1 - \frac{1}{2} e^{-b(R-1)} \right) (R-1)^{3/2} \quad (3.7)$$

Los parámetros obtenidos en el ajuste son  $C' = 99$  y  $b = 0,437$ . Como es lógico el valor numérico de los parámetros de ajuste debe cambiar con respecto al caso tridimensional. Sin embargo el ajuste obtenido es correcto, por lo que la nueva ley no

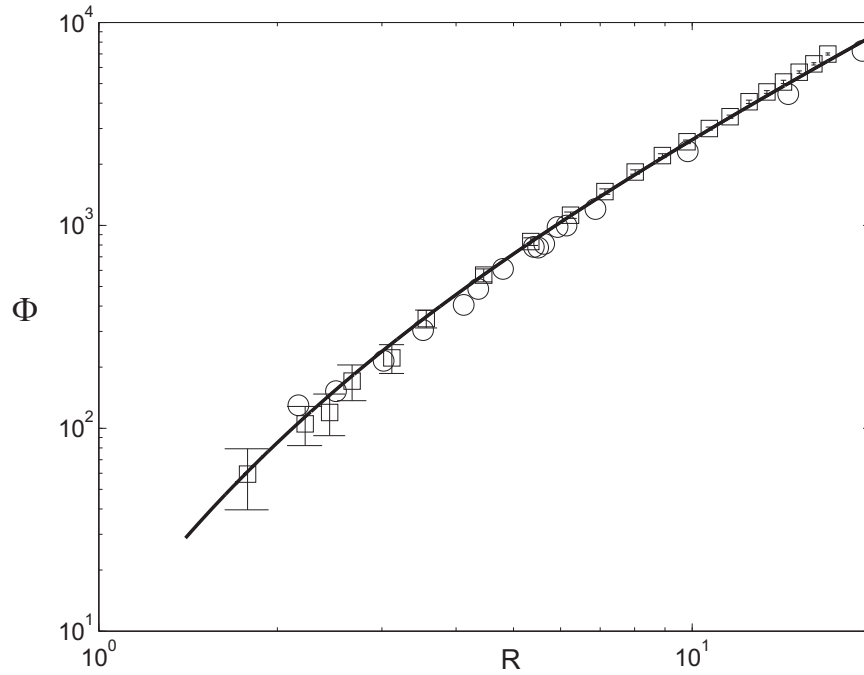


Figura 3.10: Flujo en función del radio adimensional para un silo bidimensional. Se presentan resultados experimentales (círculos) y mediante simulaciones (cuadrados) [20, 21]. En ella puede verse que el flujo de descarga de silos bidimensionales puede ser predicho de manera correcta con la ley propuesta (ec. 3.7)

tiene su origen en las características del experimento (ya que las simulaciones también obedecen la nueva ley).

### 3.1.4. Significado físico del factor de saturación exponencial

Se plantea ahora el problema de explicar el motivo de la aparición del factor de saturación exponencial introducido en la ecuación 3.6. Una hipótesis plausible es considerar al factor  $\rho_b \left(1 - \frac{1}{2} e^{-b(R-1)}\right)$  como la expresión de la densidad aparente del material en la zona próxima al orificio de salida y que denotaremos con  $\rho'_b$ :

$$\rho'_b = \rho_b \left(1 - \frac{1}{2} e^{-b(R-1)}\right) \quad (3.8)$$

esto permite solventar una de las críticas que es posible hacer a la ley de Beverloo, mencionada en la sección 1.2.1: según Beverloo, la densidad aparente del material se considera constante en todo el volumen del silo y para todos los diámetros del orificio de salida, lo cual como se ha dicho está en contradicción con las observaciones experimentales [16]. Si se supone que la densidad cerca del orificio de salida está dada por la ecuación 3.8, ahora la densidad cerca del orificio variará con el radio adimensional del orificio.

### 3.2. Estimación de la densidad del material en la salida del silo

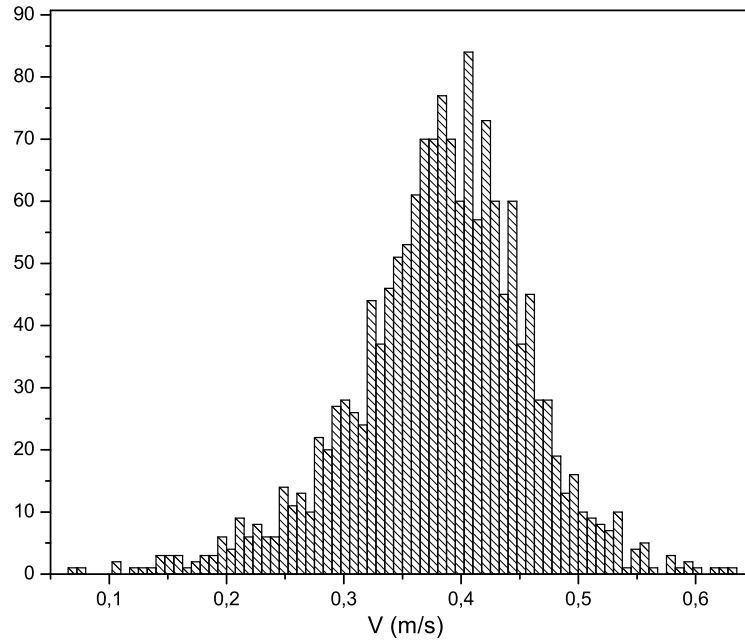


Figura 3.11: Histograma de la velocidad de salida de las partículas en la boca del silo para un radio adimensional  $R = 5, 13$

Para comprobar la hipótesis expresada en la sección anterior, se realizaron medidas a fin de estimar la densidad en la zona próxima al orificio. Si se supone que el flujo de material granular está en un estado estacionario (por lo que la densidad aparente del material en una región del material debe mantenerse constante); y, teniendo en cuenta que la masa debe conservarse, el flujo a través de cualquier sección horizontal del silo deberá tener el mismo valor. Por lo tanto, la ecuación de continuidad debe ser válida:

$$\rho A v = \rho' A' v' \quad (3.9)$$

Para obtener un valor del cambio en la densidad en la boca del silo es necesario entonces medir las velocidades  $v$  y  $v'$ . La medida de  $v'$  no presenta mayores inconvenientes, ya que las trazas de las partículas en el diagrama espaciotemporal son líneas rectas, como pudo verse en la figura 2.5.

En la parte inferior del silo, la determinación de las velocidades de salida de las partículas es más complicada, pues presentan una dispersión apreciable, agudizada por el hecho de que, como el orificio de salida es circular, el material granular sale formando un cono, por lo que las trazas en el diagrama espaciotemporal son proyecciones de la trayectoria de partículas que caen con diferentes ángulos.

En la figura 3.11 se muestra un histograma de las velocidades de salida de las partículas, correspondientes a un radio adimensional  $R = 5, 13$ , en donde se observa la dispersión en las medidas mencionada anteriormente. El error introducido por esta

dispersión es el único de importancia para el cálculo del error, dado que las otras magnitudes medidas (el área del orificio,  $A'$ , el área del silo,  $A$ , y la velocidad en la parte superior  $v$ ) pueden ser fácilmente determinadas.

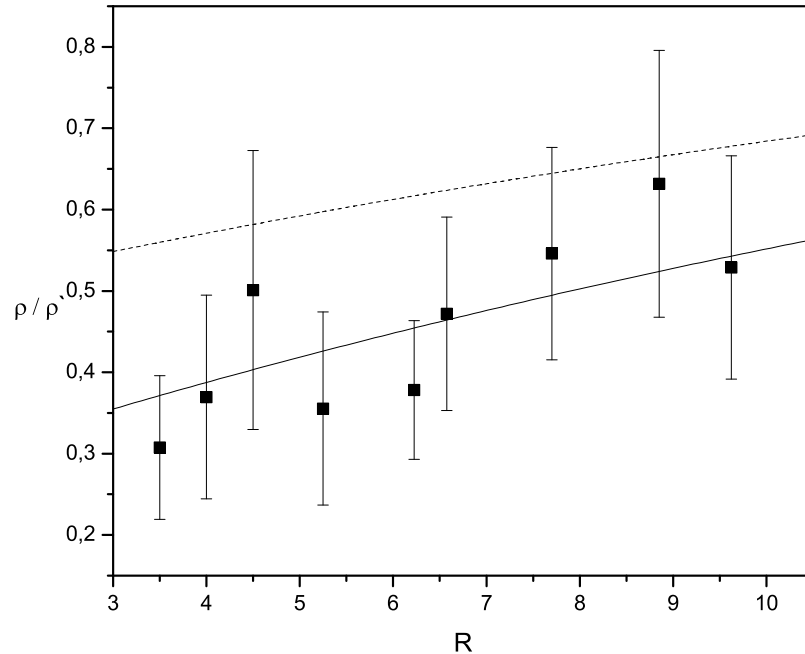


Figura 3.12: Cambio en la densidad del material granular entre la parte superior del silo y la región del orificio de salida. La línea continua es el ajuste de los datos experimentales a la ecuación  $(1 - a e^{-b(r-1)})$ . La línea discontinua representa la forma funcional de  $\Delta$  (ec. 3.4) a los datos experimentales del flujo.

En la figura 3.12 se muestra los valores obtenidos de  $\rho'/\rho$  obtenidos a partir de las mediciones de la velocidad. En línea continua se representa el mejor ajuste obtenido utilizando la ecuación  $(1 - a e^{-b(r-1)})$ , donde se obtuvieron los siguientes valores de los parámetros de ajuste:  $a = 0,715$  y  $b = 0,05199$ . En línea discontinua se representa  $\Delta$  con los valores del parámetro  $b = 0,051$ , obtenido del ajuste de la ecuación propuesta para el flujo (ec. 3.6) a los datos experimentales. Resulta claro que la densidad estimada mediante este método no se corresponden con la ecuación de  $\Delta$ . Sin embargo, ambas ecuaciones presentan valores similares del parámetro  $b$ . Por tanto la variación de la densidad respecto del radio adimensional será el mismo en ambos casos. Esto refuerza la hipótesis de que el factor introducido se debe a cambios en la densidad aparente del material en la zona próxima al orificio de salida del silo.



# Capítulo 4

## Conclusiones

En la presente sección se resumirán las conclusiones ya expresadas de manera parcial.

En primer lugar, se ha comprobado que el flujo de partículas depende sólo muy ligeramente del material del que están hechas y que el único parámetro relevante para su estudio es el radio adimensional del orificio de salida. Esto permite hacer una comparación entre las medidas de flujo obtenidas para partículas de diferentes materiales.

Se ha hallado que la ley de Beverloo (ecuación 1.13) deja de ser válida cuando se considera un amplio rango de tamaños del orificio. La ecuación 1.13 permite ajustar una región pequeña de radios adimensionales variando el valor de la constante  $k$ , dado que el intervalo de radios considerado es pequeño. Al aumentar el rango de radios considerados, se observa que la forma funcional planteada por la ecuación 1.13 no es la correcta. No es posible encontrar un conjunto de parámetros de ajuste que hagan que la ley sea válida para todos los tamaños del orificio.

El exponente  $5/2$  al que se eleva el radio del orificio en la ecuación de Beverloo es el límite al que tienden los exponentes cuando se incrementa el radio adimensional. En base a ello se propuso una nueva ecuación para expresar el flujo en función de los parámetros del silo (ecuación 3.6). La forma funcional propuesta para esta ecuación permite predecir el flujo de manera correcta para todos los radios estudiados. La nueva ecuación se hace innecesaria la introducción del término  $-kd$  en la expresión del diámetro del orificio. Dicho término había sido utilizado de manera arbitraria para permitir el ajuste de la ecuación de Beverloo a los datos experimentales. La desaparición del término  $-kd$  hace inútil la hipótesis del “anillo vacío”, la cual es incompatible con el hecho de la existencia de flujo en radios del orificio para valores de  $k$  obtenidos previamente.

Se propuso una posible explicación a la introducción del nuevo factor en la ecuación del flujo. El origen de dicho término parece estar en el cambio de la densidad aparente del material granular en la zona próxima al orificio y que depende del radio adimensional. Este hecho se ha validado haciendo mediciones indirectas de la relación entre las densidades en la parte superior y en la boca del silo (sección 3.2). Los resultados obtenidos muestran que el cambio de la densidad como función del radio adimensional sigue el mismo comportamiento en ambos casos. Lo cual parece validar la hipótesis formulada sobre la influencia de la densidad en la zona del orificio de salida en el comportamiento del flujo de descarga de un silo.



De las posibles continuaciones de la investigación, uno de los siguientes trabajos a realizar es el estudio del flujo de descarga de silos cuando se utilizan partículas de formas no esféricas y el comportamiento del flujo al utilizar orificios de descargas de formas distintas a la circular. Otra de las posibles continuaciones al trabajo es el estudio de el flujo cuando el silo es sometido a vibraciones. En este caso las partículas poseerán una “temperatura granular” (la desviación típica de la media de las velocidades de las partículas) distinta de cero y es de esperarse que el comportamiento del flujo varíe.

# Referencias

- [1] P. Richards, M. Nicodemi, R. Delannay, P. Ribiere, and D. Bideau, “Slow relaxation and compaction of granular systems,” *Nature Materials*, **4**, pp. 121–128, 2005.
- [2] C. J. Brown and J. Nielsen, eds., *Silos.*, Routledge, 1998.
- [3] I. Zuriguel, A. Garcimartin, D. Maza, L. Pagnaloni, and M. Pastor, “Jamming during the discharge of granular matter from a silo,” *Physical Review E*, **71**, p. 05130, 2005.
- [4] R. T. Fowler and J. R. Glastonbury, “The flow of granular solids through orifices,” *Chemical Engineering Science*, **10**, p. 150, 1959.
- [5] R. H. Newton, G. S. Dunham, and T. P. Simpson *Transactions of the American Institute of Chemical Engineers*, **41**, p. 215, 1945.
- [6] F. C. Franklin and L. N. Johanson, “Flow of granular material through a circular orifice,” *Chemical Engineering Science*, **4**, p. 119, 1955.
- [7] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. V. de Velde, “The flow of granular solids through orifices,” *Chemical engineering science*, **15**, p. 260, 1961.
- [8] R. M. Nedderman, U. Tüzün, S. B. Savage, and G. T. Houlsby, “The flow of granular materials - 1,” *Chemical Engineering Science*, **37**, (11), p. 1597, 1982.
- [9] H. A. Jannsen, “Tests on grain pressure silos,” *Z. Vereins Deutsch Ing.*, **39**, p. 1045, 1895.
- [10] R. L. Brown and J. C. Richards, “Profile of flow of granulates through apertures,” *Trans. Inst. Chem. Engrs*, **38**, p. 243, 1960.
- [11] R. M. Nedderman and C. Laohakul, “The thickness of the shear zone of flowing granular media,” *Powder Technol.*, **25**, pp. 91–100, 1980.
- [12] J. Y. Zhang and V. Rudolph, “Effect of shear friction on solid flow through an orifice,” *Ind. Eng. Chem. Res.*, **30**, pp. 1977–1981, 1991.
- [13] R. L. Brown and J. C. Richards, *Principles of Powder Mechanics*, Pergamon, Oxford, 1966.
- [14] D. Hirshfeld, Y. Radzyner, and D. C. Rapaport, “Molecular dynamics studies of granular flow through an aperture,” *Phys. Rev. E*, **56**, (4), pp. 4404–4415, 1997.

- 
- [15] D. Hirshfeld and D. Rapaport, “Granular flow from a silo: Discrete-particle simulations in three dimensions,” *The European Physical Journal E*, **4**, p. 193, 2001.
- [16] J. Bosley, C. Schofield, and C. A. Shook *Trans. Inst. Chem. Engrs.*, **47**, p. 147, 1969.
- [17] A. P. Huntington and N. M. Rooney *Chemical Engineering*, 1971.
- [18] I. Zuriguel, *Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de silos*. PhD thesis, Universidad de Navarra, 2005.
- [19] E. Longhi, N. Easwar, and N. Menon, “Large force fluctuations in a flowing granular medium,” *Phys. Rev. Lett.*, **89**, (045501), 2002.
- [20] R. Arévalo, “Dinámica molecular de medios granulares,” 2007.
- [21] C. P. Mankoc, A. Janda, R. Arévalo, J. M. Pastor, I. Zuriguel, A. Garcimartin, and D. Maza, “The flow rate of granular materials through an orifice,” *Granular Matter*. Enviado a publicar.