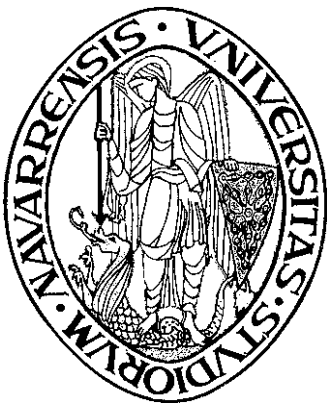


# INESTABILIDADES DE UNA CAPA DE FLUIDO CALENTADA LATERALMENTE

Trabajo presentado por  
Ángel Garcimartín Montero  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Físicas.  
Agosto, 1994.



DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICA  
APLICADA  
FACULTAD DE CIENCIAS

**UNIVERSIDAD DE NAVARRA**

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra

ISBN 84-8081-085-8

---

D. CARLOS PÉREZ GARCÍA, Catedrático del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, y D. HÉCTOR LUIS MANCINI, profesor del mismo Departamento,

CERTIFICAN que la presente Memoria "Estudio experimental sobre la inestabilidad de una capa de fluido calentada lateralmente" ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por D. Ángel Garcimartín Montero, para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos la presente certificación en Pamplona, el dieciocho de agosto de mil novecientos noventa y cuatro.

Fdo.: Carlos Pérez García

Fdo. Héctor L. Mancini

*A mi hermano José*

## *Agradecimientos*

*El que haya sido testigo del trabajo de estos años en nuestro laboratorio, sabrá que es ésta la página más importante de mi tesis. No creo que sea fácil encontrar a personas como Carlos y Héctor, que además de dirigirme en este trabajo me brindaron su amistad.*

*Sacha Ezersky merece una mención especial. A él le corresponde mi reconocimiento por iniciarme en este tema de investigación. Su estancia en Pamplona sólo nos dejó buenos recuerdos.*

*Las mediciones de velocimetría láser-Doppler las hice en el laboratorio del Service de Chimie Générale de la Universidad de Mons-Hainaut (Bélgica), que dirige Jean Karl Platten, con Guy Chavepeyer y Caty de Saedeleer. Me dispensaron una excelente acogida. Marcel Betigny, el técnico, me dedicó mucho tiempo. Fue para mí una gran experiencia.*

*A mis compañeros del laboratorio les debo dar las gracias también por su ayuda. Javier Burguete, por ejemplo, escribió el código de gran parte de los programas de adquisición de imágenes. Diego Maza y Thierry Ondarçuhu siempre estuvieron dispuestos a echarme una mano. Si ellos hubieran realizado este experimento, seguro que lo hubieran hecho mejor.*

*Les agradezco también a mis compañeros del Departamento no sólo su ayuda, sino el ambiente en el que siempre me encontré: Johnny Millán, Henar Herrero, Ricardo López, Ana Mancho, Esperanza Vázquez, Xavier Calbet, Carmen Palacios y Emilio Díaz. Pedro Elizalde, entre otras cosas, hizo la circuitería electrónica que necesitábamos. Y gracias también a M<sup>a</sup> José, la secretaria de nuestro departamento.*

*Tengo un recuerdo muy especial en estos momentos para Gabriel Mindlin y Michael Besthorn, que tanto me enseñaron.*

*Y por último quiero dejar constancia de la ayuda económica que recibí de la Fundación Universitaria de Navarra.*

*Pamplona, agosto de 1994.*

# INDICE

<b>Notación</b> .....	1
<b>1. Introducción</b> .....	3
<b>2. Formulación del problema</b> .....	13
2.1. Planteamiento de las ecuaciones básicas. Solución estacionaria.	
2.2. Números adimensionales. Contribución de la gravedad y del efecto Marangoni a los perfiles de velocidad y temperatura.	
2.3. Análisis de estabilidad.	
2.4. Simulaciones numéricas.	
<b>3. Montaje experimental</b> .....	25
3.1. Técnicas empleadas.	
3.1.1. Ombroscopía.	
3.1.2. Velocimetría láser-Doppler.	
3.1.3. Medición de la temperatura.	
3.1.4. Deflexión de un haz láser.	
3.2. Líquidos.	
3.3. Celdas.	
<b>4. La secuencia de bifurcaciones</b> .....	39
4.1. Fenomenología.	
4.2. $\Delta T$ umbral para los rollos.	
4.3. $\Delta T$ umbral para las ondas.	
4.4. Comparación de la velocidad de las ondas con la velocidad del flujo básico	
4.5. El comportamiento de la frecuencia cerca del umbral.	

<b>5. El flujo básico.....</b>	<b>49</b>
5.1. Mediciones de temperatura.	
5.2. El perfil de velocidades.	
<b>6. La inestabilidad primaria.....</b>	<b>57</b>
6.1. La aparición de la nueva estructura del flujo.	
6.2. El perfil de temperaturas.	
6.3. El campo de velocidades.	
6.4. La pérdida de estabilidad de los rollos.	
<b>7. La estructura espaciotemporal de las ondas.....</b>	<b>67</b>
7.1. El mecanismo de la inestabilidad	
7.2. Particularidades del montaje experimental.	
7.3. Amplitud de las oscilaciones de temperatura.	
7.4. La deflexión de la superficie.	
7.5 Mediciones de velocidad.	
7.6. La forma del frente de onda.	
7.7. La respuesta en frecuencia.	
7.8. Una ecuación modelo de Ginzburg-Landau.	
<b>8. Conclusiones.....</b>	<b>87</b>
<b>Referencias.....</b>	<b>91</b>
<b>Bibliografía adicional.....</b>	<b>95</b>

# NOTACIÓN

$x, y, z$	coordenadas cartesianas
$Z=(2z-h)/h$	coordenada vertical adimensional
$l$	longitud horizontal de la capa de fluido
$h$	altura de la capa de fluido
$\Gamma=l/h$	relación de aspecto
$\bar{g}$	aceleración de la gravedad
$T$	temperatura local
$T_a$	temperatura ambiente
$T_0$	temperatura arbitraria de referencia
$T_1$	temperatura de la pared caliente
$T_2$	temperatura de la pared fría
$\Delta T$	diferencia de temperaturas $T_1-T_2$
$\rho$	densidad
$\rho_0$	densidad a la temperatura de referencia $T_0$
$\alpha$	coeficiente de dilatación térmica
$\sigma$	tensión superficial
$\sigma_0$	tensión superficial a la temperatura de referencia $T_0$
$\bar{u}$	vector velocidad
$v_x, v_y, v_z$	componentes del vector velocidad
$\nabla$	operador nabra: $(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$
$\mu$	viscosidad dinámica
$\nu=\mu/\rho$	viscosidad cinemática
$\kappa$	difusividad térmica
$p$	presión
$\beta$	gradiente térmico
$Pr=\frac{\nu}{\kappa}$	número de Prandtl



$$Ra = \frac{\alpha g \beta h^4}{\nu \kappa} \quad \text{número de Rayleigh}$$

$$Ma = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial T} \beta h^2}{\mu \kappa} \quad \text{número de Marangoni}$$

$$Re = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial T} \beta h^2}{\mu \nu} \quad \text{número de Reynolds}$$

$$Gr = \frac{g \alpha \beta h^4}{\nu^2} \quad \text{número de Grashof}$$

$Bi$	número de Biot
$K$	$Ma/Ra$
$\tau$	tiempo característico
$\chi_a$	conductividad térmica del aire
$\chi_l$	conductividad térmica del líquido
$k$	número de onda adimensional
$\omega$	frecuencia
$\lambda$	longitud de onda
$n$	índice de refracción
$f_0$	frecuencia de excitación
$A$	amplitud lentamente variable

# 1. INTRODUCCIÓN

## El estudio de la complejidad

Las ciencias experimentales han recorrido un largo camino hasta decidirse a abordar los sistemas complejos. Y eso, a pesar de que muchas de las situaciones relevantes con las que han de lidiar la biología, la medicina, la ecología, la economía, la química o la física se resisten a una solución simple. Basta pensar en el esfuerzo que actualmente se dedica a la predicción de los terremotos, a la comprensión de las alteraciones del ritmo cardíaco, o al *charting* de las fluctuaciones aparentemente erráticas de las cotizaciones bursátiles, para darnos cuenta de que -en la vida real- la excepción patológica es la que puede describirse limpiamente con una variable bien comportada.

El concepto mismo de complejidad es difícil de describir en términos matemáticos: su definición es aún motivo de discusión <sup>[1]</sup>. Además, como este campo es todavía joven, el interés se centra más bien en lo que podríamos llamar las etapas intermedias que llevan a lo complejo. Es cierto que ahora se puede emprender, con ciertas garantías de rigor, un análisis de bastantes situaciones consideradas complejas. Son ya de uso común algunas técnicas para caracterizar el caos, como el cálculo de la dimensión del atractor (que puede ser fractal), los exponentes de Liapunov o la entropía de Kolmogorov. La *firma* del caos es fácilmente reconocible: sensibilidad a las condiciones iniciales e imposibilidad de predicción a largo plazo. Pero la génesis de ese resultado final nos puede ayudar a comprender con más profundidad el término del

proceso. Son ya clásicos los primeros trabajos en los que se detallan ciertas rutas hacia el caos, recogidos en un *review* de J.-P- Eckmann <sup>[2]</sup> o en monografías sobre el tema <sup>[3]</sup>: el escenario de Pomeau-Manneville, o de la intermitencia, el de Ruelle-Takens ("período tres implica caos", según la frase de Li y Yorke) y la cascada subarmónica propuesta por Feigenbaum. Los autores hacen hincapié en que los pormenores de cada escenario son universales, es decir, comunes a muchos sistemas.

Para recorrer el camino hacia la turbulencia el punto de partida es, pues, es el estado de equilibrio, en el que no se aporta energía al sistema. Desde esa situación, se le comunica progresivamente más y más energía aumentando un parámetro de control (que puede ser la corriente eléctrica, una diferencia de temperaturas, etc.). El valor del parámetro de control es una medida del apartamiento del equilibrio. Llega un momento en que el sistema se vuelve inestable y cambia de configuración. Si el aporte de energía se compensa con la disipación, se logra un "equilibrio dinámico" que puede dar lugar a la aparición de una estructura, gracias a la cual la disipación es más eficaz. El crecimiento de las perturbaciones, al menos cerca del umbral de la inestabilidad, es exponencial, pero la saturación no lineal puede hacer que la estructura alcance la estabilidad, y en ese sentido se habla de un estado fuera del equilibrio. Matemáticamente, se dice que la solución inicial pierde su estabilidad y sufre una bifurcación hacia otro estado (que a su vez puede llegar a ser estable). Las transiciones que se producen en estas etapas intermedias, en las que el sistema ya abandonó el equilibrio inicial sin que la turbulencia haya llegado aún a desarrollarse totalmente, son análogas a los cambios de fase termodinámicos.

Conforme se va aumentando el parámetro de control, los nuevos estados son más y más complicados. Esta complejidad se manifiesta con un nuevo orden, no tan simple como el reposo inicial pero sin llegar al desorden total de la turbulencia. Las estructuras que aparecen fuera del equilibrio requieren para su caracterización un número cada vez mayor de variables, ya sean espaciales o temporales. En una reciente publicación que precisamente se titula *Pattern formation outside of equilibrium* <sup>[4]</sup>, Cross y Hohenberg pasan revista al ya crecido aporte que en estos últimos años se ha acumulado sobre la descripción, tanto teórica como experimental, de un amplio abanico de tales situaciones, sacadas de la biología, la química y la física.

Los sistemas dinámicos fueron examinados en profundidad por los matemáticos. La reducción a las formas normales permite la restricción de una formulación donde intervienen muchos grados de libertad a un subespacio en el que tiene lugar toda la dinámica no trivial. Basta estudiar un pequeño número de modos (autofunciones, en lenguaje matemático) y su interacción entre ellos para describir todos los aspectos relevantes, puesto que el resto de los modos están "esclavizados", y su evolución sigue adiabáticamente la de esos pocos. Si se consigue obtener (no siempre es fácil) la forma normal, la ecuación que rige la dinámica en el subespacio del cual son base esos modos, el bagaje matemático de que disponemos permite predecir cómo perderá la estabilidad el sistema, o sea, qué tipo de bifurcación sufrirá.

El banco de pruebas preferido por los físicos, si se juzga por el número de estudios realizados, son los fluidos. La razón puede encontrarse en el hecho de que es quizá el paradigma del panorama expuesto. El número de grados de libertad que se necesita para la descripción microscópica es enorme, pero fuera del equilibrio la estructura que adoptan y su comportamiento -al menos para valores no demasiado elevados del parámetro de control- con frecuencia es susceptible de una descripción macroscópica en términos relativamente simples (unos pocos modos suelen bastar). Las no linealidades son muy frecuentes, de manera que podemos encontrar muchos casos de inestabilidades en las que aparecen estructuras espaciales: la de Taylor-Couette, la de Kelvin-Helmholtz, la inestabilidad centrífuga de Goertler, o la excitación paramétrica de ondas capilares. Y la más conocida: la convección de Bénard <sup>[5]</sup>. Los trabajos de R. Krishnamurti <sup>[6-8]</sup> sobre la convección de Rayleigh-Bénard ilustran una sucesión de estados como la que se ha expuesto. Una capa de fluido calentada por debajo pasa, antes de llegar a un régimen turbulento, por varios estados convectivos que se va complicando cada vez más al ir aumentando el parámetro de control: primero aparece una estructura espacial bidimensional, que después se torna tridimensional, y posteriormente se llega a un estado en el que se agrega además una dependencia temporal como preludio de la turbulencia.

### **Objetivo del experimento.**

Hasta aquí el marco en el que se encuadra el tema central de este trabajo. Se

aplicarán toda una serie de técnicas experimentales para caracterizar una de estas sucesiones de estados fuera de equilibrio, de la manera más completa posible. Además, como veremos enseguida, la descripción puramente hidrodinámica del flujo particular que aparezca no carece de importancia, y se le prestará especial atención, además, a los mecanismos físicos responsables de las inestabilidades.

El sistema a estudiar, en el que se van a poner de manifiesto esos fenómenos, es una capa de fluido calentada lateralmente. El parámetro de control va a ser la diferencia de temperaturas entre los extremos. Esta situación es muy frecuente, y las configuraciones en las que se puede presentar son numerosas. De hecho, algunas de las inestabilidades que tienen lugar cuando un líquido se somete a un gradiente de temperatura lateral fueron observadas por primera vez (aunque no descritas) en un experimento de Bénard-Marangoni con calentamiento inhomogéneo <sup>[9]</sup>, que se puede asimilar a la presente situación. Sin embargo, cuando se proyecta un trabajo sistemático y se pretende caracterizar de la manera más exhaustiva posible un fenómeno, se procura simplificar al máximo el diseño. Se intenta que el número de parámetros a controlar sea mínimo. Una ventaja adicional suele consistir en un mayor acercamiento a las aproximaciones, muchas veces drásticas, de los planteamientos teóricos.

La situación más sencilla imaginable es la de un estrato rectangular, calentado desde una pared lateral. Las dimensiones han de ser tales que la capa pueda ser considerada infinita tanto en su dirección transversal (perpendicular al gradiente térmico) como en la dirección longitudinal. Con ello, el flujo puede considerarse bidimensional, al menos en una cierta región alejada de los bordes. Para discernir qué significa que las dimensiones puedan considerarse "infinitas" hay que conocer de antemano alguna longitud característica. En este caso, la profundidad de la capa de fluido es la referencia. Dicho de otra manera, la relación de tamaños, o de aspecto,  $\Gamma$ , definida como el cociente entre la dimensión longitudinal  $l$  y la dimensión vertical  $h$  de la capa, tiene que ser lo más grande posible. Sirva como punto de referencia que en las experiencias de Rayleigh-Bénard una relación de aspecto de 10 suele ser considerada infinita <sup>[10]</sup>.

Para establecer el gradiente lateral, se calienta una pared y se enfría la opuesta

simétricamente respecto a la temperatura ambiente. Las paredes laterales y el fondo se consideran, en primera aproximación, adiabáticas. La superficie superior es libre, de modo que esencialmente se tiene un canal largo y ancho calentado en un extremo y enfriado en el opuesto. Como resultado de esta diferencia de temperatura que se aplica, dos fuerzas actúan sobre el líquido: la gravedad y la tensión superficial. Junto a la pared caliente, el líquido es menos denso y asciende (es el empuje de Arquímedes). Este movimiento comienza tan pronto como se calienta la pared, sin importar lo pequeño que sea el incremento de temperatura: no hay umbral. Lo mismo ocurre cerca del extremo frío: el líquido desciende apenas se enfría la pared. El estado inicial, por consiguiente, no será el reposo. En la superficie, como consecuencia de la variación de la tensión superficial con la temperatura (efecto Marangoni), el líquido se mueve en la dirección del gradiente de temperatura. En primera aproximación, la variación de la tensión superficial con la temperatura responde a la siguiente expresión:

$$\sigma = \sigma_0 + \frac{\partial \sigma}{\partial T} (T - T_0) \quad (1)$$

donde  $\sigma$  es la tensión superficial,  $T$  la temperatura y  $\sigma_0$  la tensión superficial a una temperatura de referencia  $T_0$ . Para la mayoría de los líquidos (una excepción notable son los metales fundidos) la derivada de la tensión superficial con la temperatura es negativa. Por lo tanto, el efecto Marangoni provoca un movimiento desde la pared caliente hacia la fría. Se puede esquematizar así (las flechas representan las fuerzas indicadas):

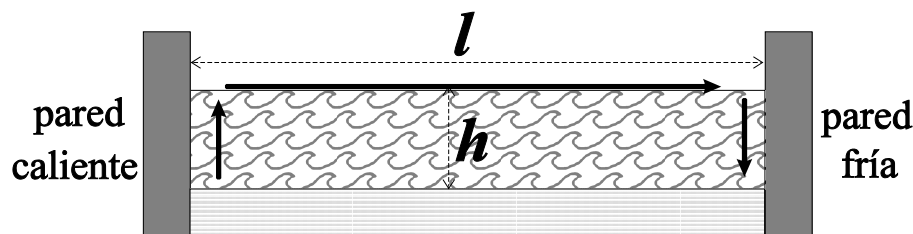


Fig. 1. Esquema de la convección con calentamiento lateral.

De lo dicho se desprende que las variables a controlar serán principalmente la

relación de aspecto  $\Gamma$  y la diferencia de temperaturas entre la pared caliente y la fría:  $\Delta T = T_1 - T_2$ . Obviamente, hay otros parámetros que influyen en el experimento, como la temperatura ambiente  $T_a$  o la viscosidad del fluido, pero la intención es observar la secuencia de acontecimientos que tienen lugar conforme se varía un solo parámetro de control. Para caracterizar la situación determinada, se prestará atención a cuatro aspectos. El primero es la organización general del flujo: si es o no estable, cómo se distribuyen en la celda las líneas de corriente, y -en su caso- la descripción particular de los fenómenos que puedan aparecer, como ondas o rollos convectivos, con las variables adecuadas. En segundo lugar, los perfiles de velocidad, ya sean de la componente horizontal o vertical (la dimensión transversal es irrelevante). La tercera variable es la temperatura del líquido y su distribución en la capa. Y, por último, la curvatura de la superficie libre. Todo ello, junto con la explicación de las técnicas empleadas, se irá exponiendo a lo largo de este trabajo.

Llegados a este punto, es interesante hacer notar que la gravedad y la tensión superficial actúan en el mismo sentido, y no contrarrestándose. Por tanto, puede llegar a ser difícil saber cuál de las dos es responsable de un determinado fenómeno. Sin embargo, es posible tener una idea comparativa de la magnitud de ambas. En efecto, la gravedad es una fuerza volumétrica, mientras que el efecto Marangoni es superficial. Por lo tanto, al aumentar la altura de la capa de líquido la influencia de la gravedad será más importante, comparativamente, que el efecto Marangoni, mientras que la tensión superficial domina para capas muy delgadas.

Aunque la motivación primaria para la realización de este experimento fue el estudio de las inestabilidades en el contexto de la descripción de las sucesivas bifurcaciones que conducen a la turbulencia, y paralelamente la caracterización hidrodinámica del flujo que aparece, hay procesos industriales y otros problemas científicos en los que se encuentra la misma configuración subyacente. Se exponen brevemente a continuación algunos de dichos casos.

## **Relevancia tecnológica y aplicaciones.**

Dada la gran generalidad del experimento, es lógico que se conozcan muchas situaciones a las que se pueden trasladar los resultados obtenidos. Aunque la intención primaria no haya sido resolver un problema concreto, también es cierto que la importancia del estudio se ve reforzada por su aplicabilidad casi directa a algunos procesos industriales o de interés científico. Sólo se resumen brevemente tres casos; dejamos de lado otros, como el secado dinámico de pinturas y recubrimientos <sup>[11]</sup>, o la convección de mezclas binarias con calentamiento lateral <sup>[12-16]</sup>.

### Fabricación de cristales

El sustrato del que se parte para fabricar un *chip* es una fina oblea de silicio. Con las tecnologías actuales VLSI (*Very Large Scale Integration*) se llegan a litografiar transistores de una micra de longitud, y ya se empieza a hablar de ULSI (*Ultra Large Scale Integration*). Cuando se llegan a esos extremos, es crucial controlar los parámetros físicos del sustrato. Pues bien: algunos de esos parámetros, como la movilidad de los electrones y los huecos, dependen de la orientación del cristal, y son muy sensibles a los defectos. Normalmente, se corta el silicio de tal forma que la superficie sea perpendicular al eje  $\langle 1\ 0\ 0 \rangle$  ó al eje  $\langle 1\ 1\ 1 \rangle$  del cristal. Esta orientación influye también en la velocidad de crecimiento del óxido sobre el cristal, una etapa del proceso para fabricar un transistor MOS (metal-óxido-semiconductor). La capa de óxido tiene décimas de micra. Es comprensible, por tanto, que se intente por todos los medios conseguir un monocristal lo más perfecto posible. La manufactura de monocristales de silicio se logra, por lo general, fundiendo el material y haciendo que solidifique sobre la superficie de un cristal de orientación ya conocida, o semilla. Para ello se siguen diversas técnicas, siendo muy comunes el método de Czochralsky (esquemático en la Fig. 2), con diversas variantes <sup>[17]</sup>. Consiste en fundir el silicio en un crisol

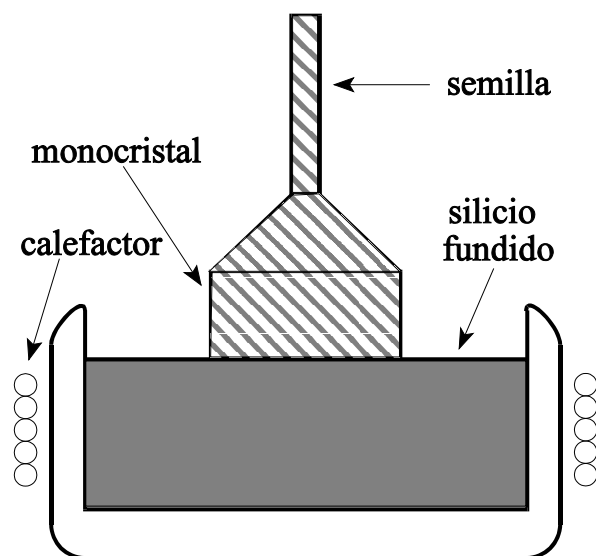


Fig. 2 Esquema del método de Czochralsky



calentado desde los lados. En la superficie superior se coloca la semilla y se extrae poco a poco conforme el cristal va solidificando. En realidad, la situación se complica todavía más, puesto que para evitar inhomogeneidades se suele hacer rotar el cristal y el crisol en sentidos opuestos.

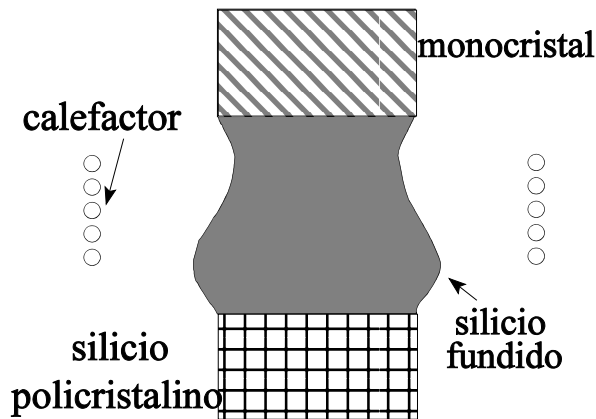


Fig. 3: Método de la zona flotante

El método de la zona flotante (*floating zone*: ver la Fig. 3) se suele emplear para purificar cristales. Se toma una barra de silicio policristalino y se funde localmente, extrayendo por la parte superior, también con una semilla, el monocristal. En este caso, la superficie libre está en las paredes laterales. La fuerza de la gravedad es la responsable de que la capa de silicio fundido se deforme,

adquiriendo forma de ánfora.

En otra variante del método de Bridgman, el calefactor está sumergido y la dirección del gradiente de temperatura es vertical. La estabilidad de los llamados puentes líquidos (que se mantienen así por tensión superficial) ha sido ampliamente estudiada en ausencia de convección [18-19].

En todos estos casos, se produce un movimiento global debido a la convección. Las inestabilidades convectivas, particularmente las oscilaciones, provocan defectos en el monocristal [17] que arruinan el proceso. El control de la convección y la manera de evitar esas inestabilidades reviste, pues, gran importancia.

En su tiempo, se propuso que una manera de evitar esos problemas podría ser la fabricación de monocristales en el espacio [20], donde la ausencia de gravedad reporta además la ventaja de hacer innecesario el crisol, potencial fuente de impurezas. Sin embargo, la variación de tensión superficial sigue provocando un movimiento convectivo. Muchos han sido los trabajos y experimentos realizados, tanto en tierra

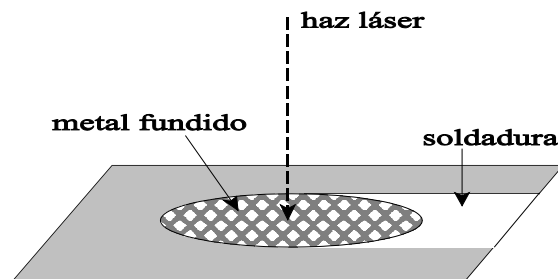
como a bordo de naves espaciales, sobre el particular <sup>[21]</sup>.

Otra solución para la fabricación de cristales sin fundir el metal en un crisol es la llamada fabricación encapsulada, que también se está considerando con vistas a la obtención de vidrios de gran pureza. El líquido fundido se "encapsula" entre dos capas de otros fluidos con los que no se mezcle, uno más denso y otro menos. De esta manera se puede reducir el número de impurezas. Para estudiar la convección con calentamiento lateral en tres capas estratificadas, lo primero es conocer bien lo que ocurre en una sola capa <sup>[22]</sup>.

### Soldadura con láser

Una de las aplicaciones de los láseres es el corte y la soldadura de metales, cuando se requiere gran precisión, o bien la realización de taladros no perpendiculares a la superficie (cosa que suele ser frecuente en las piezas de los motores a reacción, por ejemplo). Un láser puede

concentrar una gran potencia en una zona muy pequeña, y desplazan en esas situaciones a las herramientas tradicionales: los láseres industriales de CO<sub>2</sub> son ya de uso común. Otras ventajas adicionales son la facilidad de automatización y la velocidad de soldadura.



*Fig. 4: Soldadura con láser*

El problema que aparece aquí es que el metal fundido cerca del punto de incidencia del haz láser puede desplazarse debido al efecto Marangoni. Este flujo puede transportar calor rápidamente y hacer que algunas de las ventajas apuntadas se vean mermadas: la velocidad o la precisión espacial, por ejemplo, quedan disminuidas.

El metal fundido puede asimilarse al problema planteado <sup>[23]</sup> (una capa de fluido calentada por el láser, a la que le circunda el metal sin fundir, más frío) aunque la

geometría en este caso sea diferente.

### Las celdas de Hadley en la atmósfera

Un sector de la atmósfera que esté comprendido entre el ecuador y el polo es asimilable a una capa de fluido (en este caso, el aire) calentado por un extremo, el ecuador, y enfriado por el opuesto. Ciertamente, los gases tienen propiedades físicas muy diferentes a las de los líquidos, y además la tensión superficial no influye. Pero ya en 1735, G. Hadley conjeturó la existencia de una circulación global en la dirección de los meridianos. La teoría de Hadley es evidentemente incompleta; por un lado, los vientos están dominados a nivel local por las altas y bajas presiones, y por otro, la rotación de la Tierra induce unos vientos (los alisios) en dirección paralela al Ecuador. Aún así, la idea de Hadley subsiste, con algunas modificaciones. Suponía que esa circulación estaba dividida en tres celdas o rollos convectivos (ver Fig. 5), correspondientes a las tres grandes zonas climáticas del globo: la tropical, la templada y la fría.

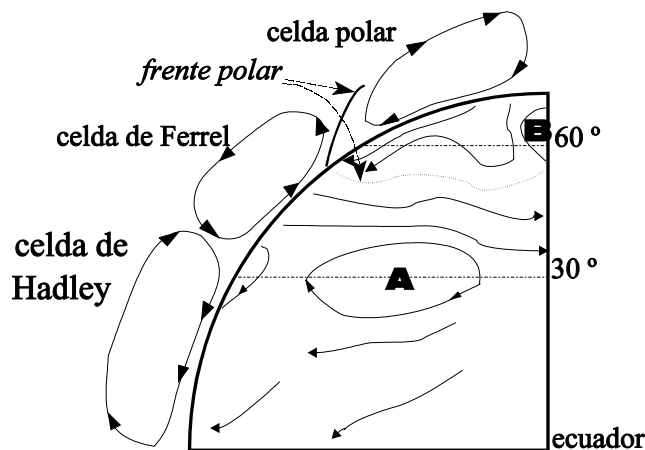


Fig. 5: Celdas de Hadley (adaptado de la *Encyclopaedia Britannica* <sup>[24]</sup>).

Esta circulación es la responsable de que en la zona subtropical, hacia los 30° de latitud, abunden los grandes desiertos, así como de la formación del frente polar en invierno. La división clásica en tres grandes zonas climáticas no es arbitraria, sino que existe un cambio discreto al pasar de una a otra. La celda polar es la más débil de todas, mientras que la de Hadley es la más activa. Al parecer, la primera vez que se utilizó la palabra convección fue en este contexto <sup>[25]</sup>. Como se mostrará, la rotura de la capa en rollos -como ocurre con la atmósfera- es un fenómeno general.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

### 2.1. Planteamiento de las ecuaciones básicas. Solución estacionaria.

El sistema de coordenadas que se utilizará en todo este trabajo, a no ser que se indique otra cosa, es el siguiente. El eje  $x$  es horizontal, paralelo al gradiente de temperatura, y apuntando hacia la pared fría. El eje  $z$  es vertical y hacia arriba, mientras que el eje  $y$  es horizontal y perpendicular al gradiente. Cuando se diga que una magnitud puede considerarse bidimensional, se supone que es la componente transversal y la que es irrelevante.

Consideremos una capa de fluido plana e infinita en la dirección  $y$ , cuya longitud  $l$  según la dirección  $x$  sea muy grande en comparación con su espesor  $h$  (la relación de aspecto  $\Gamma$  tiende a infinito), siendo la superficie inferior ( $z=0$ ) rígida y conductora, y la superficie superior ( $z=h$ ) libre y aislante. Se ha demostrado <sup>[26-28]</sup> que la curvatura de la superficie libre es despreciable si la relación de aspecto es grande, de manera que la supondremos indeformable. Las hipótesis que se hacen sobre las conductividades relativas de la superficie inferior y de la interfaz líquido-aire quedan por comprobar experimentalmente. Se supone válida la aproximación de Boussinesq, es decir, que las propiedades físicas del fluido (tales como la viscosidad  $\mu$ ) son constantes, excepto la densidad y la tensión superficial, que sólo dependen de la temperatura. La dependencia de

la tensión superficial quedó expresada en (1), mientras que para la densidad  $\rho$  se tomará la siguiente relación:

$$\rho = \rho_0 [1 - \alpha(T - T_0)] \quad (2)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica y  $\rho_0$  la densidad a la temperatura de referencia  $T_0$ .

La temperatura de los extremos de la capa  $x=0$  y  $x=l$  es, respectivamente,  $T_1$  y  $T_2$ . Poniendo  $\Delta T = T_1 - T_2$ , las ecuaciones básicas se pueden escribir así:

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (3)$$

$$\partial_t \vec{u} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \vec{u} + [1 - \alpha(T - T_0)] \vec{g} \quad (4)$$

$$\partial_t T + (\vec{u} \cdot \nabla) T = \kappa \Delta T \quad (5)$$

donde  $\vec{u} = (v_x, v_y, v_z) = (v_x, v_y, v_z)$  es el vector velocidad,  $\nabla = (\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ ,  $p$  es la presión,  $\nu$  es la viscosidad cinemática (el cociente entre la viscosidad dinámica  $\mu$  y la densidad),  $\vec{g}$  la aceleración de la gravedad y  $\kappa$  la difusividad térmica. La ecuación (3) es la ecuación de continuidad, (4) es la ecuación de Navier-Stokes y (5) expresa la conservación de la energía térmica.

Las condiciones de contorno que complementan las ecuaciones (3) - (5) son las siguientes. Para la velocidad, en la superficie  $z=0$  se tomará la condición de adherencia, por ser rígida:  $\vec{u}=0$ , mientras que en la superficie superior, como es libre, sólo  $v_z$  se anula, pues hemos supuesto que es indeformable. Igualando el esfuerzo viscoso con el que provoca la tensión superficial se obtiene la condición de contorno para las otras componentes de la velocidad en  $z=h$ :

$$\left. \begin{aligned} \mu \partial_z v_x &= \partial_x \sigma \\ \mu \partial_z v_y &= \partial_y \sigma \end{aligned} \right\}$$

Para la temperatura, las condiciones se derivan automáticamente de las características de la conductividad de las superficies límites <sup>[29]</sup>. En  $z=0$ ,  $T(x)=T_1+\beta x$ , donde  $\beta=\Delta T/l$ , pues la pared se supone conductora, mientras que si en la superficie libre  $z=h$  no hay transferencia de calor, se tiene  $\partial_z T=0$ .

Como la dimensión transversal ( $y$ ) es infinita, se supone que el problema es bidimensional. En una región lo suficientemente alejada de los bordes caliente y frío, buscaremos una solución estacionaria del tipo:

$$\left. \begin{aligned} \vec{u} &= v_x(z) \vec{i} \\ T &= T_1 + \beta x + T_0(z) \\ p &= p(x, z) \end{aligned} \right\}$$

cuya validez debe ser comprobada a posteriori en el experimento. El carácter unidireccional de la velocidad, y su dependencia de  $z$  únicamente, viene sugerido por la ecuación de continuidad. Además, suponemos que en cada sección transversal (según un plano  $x=\text{cte.}$ ) no hay transporte neto de masa. Para la temperatura se busca una única dependencia en  $z$  sumada al gradiente lineal sobre la superficie inferior. Esta es una concesión gratuita. De hecho, se puede razonar de partida que no va a ser así. En efecto, si hay convección, gran parte de la transferencia de calor se realiza cerca de las paredes caliente y fría, por lo cual el gradiente allí será mayor que en el resto del fluido. Más adelante se considerará lo que ocurre cuando  $\beta$  no es constante.

Sustituyendo en las ecuaciones (4) y (5) se obtiene, respectivamente,

$$0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \partial_z^2 v_x(z) \vec{i} - \alpha (\beta x + T_0) \vec{g} \quad (6)$$

$$v_x(z)\beta = \kappa \partial_z^2 T_0(z) \quad (7)$$

donde la presión se toma desde la referencia de la presión hidrostática. La temperatura puede referirse a un origen arbitrario pues, como veremos, en la velocidad sólo influye su derivada. La ecuación (6) se puede separar en sus componentes:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\rho} \partial_x p &= \nu \partial_z^2 v_x \\ \frac{1}{\rho} \partial_z p &= -\alpha(\beta x + T_0)g \end{aligned} \right\}$$

y se despeja la presión derivando la primera ecuación respecto a  $z$  y la segunda respecto a  $x$ , de manera que se obtiene

$$\nu \partial_z^3 v_x = -\alpha \beta g \quad (8)$$

Las ecuaciones (7) y (8) proporcionan la solución buscada. Para la velocidad, de (8) se obtiene:

$$v_x = \frac{\alpha \beta g}{\nu} \left( \frac{z^3}{3!} + C_1 \frac{z^2}{2!} + C_2 z + C_3 \right)$$

Las constantes de integración  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  se determinan a partir de las condiciones de contorno y de la condición de que el transporte de masa en cada sección  $x=\text{cte.}$  es nulo. Además, por comodidad se renormalizará la variable  $z$  para que varíe entre  $-1$  y  $+1$ , con centro en la mitad de la capa:  $Z = \frac{2z-h}{h}$ ; con lo dicho, la velocidad viene expresada así <sup>[30]</sup>:

$$v_x = \frac{\alpha\beta gh^3}{\nu} \left\{ \frac{Z^3}{48} - \frac{(1-12kK)}{64}Z^2 - \frac{(1-4kK)}{32}Z + \frac{(1-12kK)}{192} \right\} \quad (9)$$

donde  $K = \frac{\partial\sigma/\partial T}{\rho\alpha gh^2}$  (su significado preciso se concretará en la próxima sección). La

temperatura  $T_o(z)$  se halla integrando (7), una vez conocida  $v_z$ . Salvo un factor multiplicativo, se puede escribir como <sup>[31]</sup>:

$$T_o(zZ) = \frac{1}{480} [(4xZ^5 - 5xZ^4 - 20xZ^3 + 10xZ^2 + 16xZ - 5) - 20k(3xZ^4 + 4xZ^3 - 6xZ^2 - 4xZ + 3)] \quad (10)$$

Es interesante hacer notar que los polinomios en  $Z$  que aparecen en (9) y (10) no tienen ningún coeficiente que dependa de  $\beta$ . Por lo tanto, las formas del perfil horizontal de la velocidad y del perfil vertical de temperatura no varían más que en un factor multiplicativo al cambiar  $\Delta T$ , pero su aspecto es el mismo. Sí que se modificarán, en cambio, si se comparan diferentes líquidos, o al cambiar la altura de la capa, porque en el coeficiente  $K$  intervienen las propiedades del fluido y  $h$ .

## 2.2. Números adimensionales. Contribución de la gravedad y del efecto Marangoni a los perfiles de velocidad y temperatura.

En la sección precedente no se hizo ningún esfuerzo por renormalizar las variables, en cuyo caso las ecuaciones hubieran resultado mucho más compactas (por ejemplo, tal como aparecen escritas en <sup>[31]</sup>). Con ese cambio de variables, se encuentran de manera natural algunos números adimensionales que ahora se tratan con mayor detenimiento.

Teniendo en cuenta que el gradiente de temperatura es lateral ( $\beta = \Delta T/l$ ), se definen de esta manera los números de Rayleigh y de Marangoni:



$$Ra = \frac{\alpha g \beta h^4}{\nu \kappa} \quad Ma = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial T} \beta h^2}{\mu \kappa}$$

Se puede dar una interpretación física de estas cantidades. El número de Rayleigh es la relación entre las fuerzas de gravedad (el empuje de Arquímedes) y la disipación térmica y viscosa. El número de Marangoni, paralelamente, es la relación entre las fuerzas termocapilares y la disipación. (Se toma  $\frac{\partial \sigma}{\partial T}$  en valor absoluto). El cociente entre esos dos

números da una idea de la razón entre los efectos gravitatorios y los efectos

termocapilares:  $\frac{Ma}{Ra} = \frac{\partial \sigma / \partial T}{\rho \alpha g h^2}$ . Pues bien: esta cantidad no es otra que el parámetro  $K$

definido anteriormente. De esta manera, se puede colegir el efecto que tienen sobre el flujo básico (9) y sobre el campo de temperaturas (10) la gravedad y las fuerzas termocapilares, y comparar su magnitud relativa en una situación determinada. Tal es el tema de un interesante trabajo experimental de D. Villers y J.K. Platten<sup>[30]</sup>. Es destacable la dependencia de  $K$  con el espesor de la capa; para una capa de fluido muy delgada, el efecto Marangoni es el dominante, mientras que en las capas profundas es la gravedad la que influye más. Como la dependencia de  $K$  con  $h$  es cuadrática, una pequeña variación de la profundidad puede permitir despreciar una u otra de las causas del flujo.

Consideremos los dos casos límite  $K \rightarrow 0$  y  $K \rightarrow \infty$ . El primer caso corresponde a  $Ma \rightarrow 0$ , mientras que en el segundo son las fuerzas termocapilares las más relevantes<sup>[30]</sup>:

a)  $K \rightarrow 0$  (flujo básico dominado por el efecto de la gravedad, con la superficie superior libre). En este caso, se obtiene el siguiente perfil de velocidades:

$$v_x = \frac{g \alpha \beta h^3}{\nu} \frac{1}{192} (4Z^3 - 3Z^2 - 6Z + 1) \quad (11)$$

El perfil de temperatura según la vertical  $T_o(z)$  se obtiene de (10) poniendo  $K=0$ : un polinomio de grado 5 en  $Z$ , multiplicado por un factor.

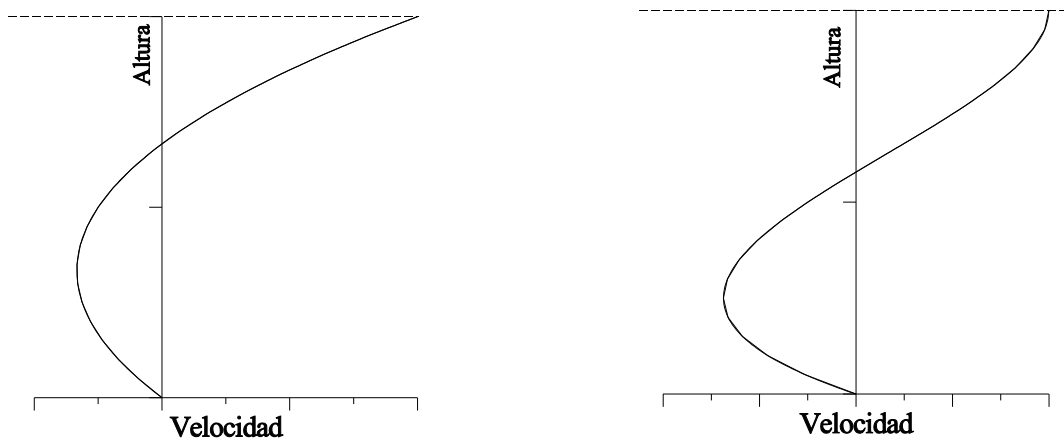
b)  $K \rightarrow \infty$  (el empuje es despreciable frente al efecto Marangoni). El perfil de velocidades es

$$v_x = \frac{\frac{\partial \sigma}{\partial T} \beta h}{\nu \rho} \frac{1}{16} (3Z^2 + 2Z - 1) \quad (12)$$

mientras que el perfil de temperaturas viene descrito por un polinomio de grado 4 en  $Z$ .

La velocidad en la superficie ( $Z=1$ ) es un valor que permite comparar las contribuciones de la gravedad y de las fuerzas resultantes de la tensión superficial. Para el valor  $K=1/12$  la contribución de ambos efectos es la misma; la concordancia con los datos experimentales es muy buena <sup>[30]</sup>. Además, se encuentra que para valores de  $K$  ligeramente superiores o inferiores al de equilibrio, una de las dos contribuciones mengua rápidamente.

Los perfiles de velocidad para el caso puramente termocapilar y puramente gravitacional tienen el aspecto que se muestra en la Fig. 6.



*Fig. 6 Perfiles de velocidades para un flujo debido a la termocapilaridad (izquierda) y para un flujo debido a la gravedad (derecha).*

Es interesante destacar algunos rasgos cualitativos de estos flujos. Ambos constan de una capa superior en la que el líquido va de la zona caliente hacia la fría, y una capa

inferior por la que el líquido retorna. Pero mientras que en el flujo debido a la gravedad las dos capas tienen casi el mismo espesor, en el flujo termocapilar la capa inferior es aproximadamente el doble de alta que la del flujo de ida. Por otro lado, las velocidades máximas en ambos casos son las de la superficie. En el flujo termocapilar, sin embargo, ésta es aproximadamente 3 veces mayor que la velocidad máxima en sentido contrario; en el flujo gravitatorio, las velocidades máximas de ida y de vuelta son comparables. Además, en el primer caso la derivada de la velocidad respecto a la variable  $z$  no es nula en la superficie, al revés que en la situación dominada por las fuerzas de gravedad. Ello se debe a que el efecto Marangoni entra en el problema a través de las condiciones de contorno, de modo que -si puede despreciarse- la superficie libre no soporta ningún esfuerzo. Estos detalles son útiles para distinguir, de un golpe de vista, la situación a la que corresponden los datos experimentales.

Hay otros números adimensionales relevantes. El número de Prandtl se define como el tiempo característico de relajación térmica ( $\tau_T = d^2/\kappa$ ) dividido por el tiempo característico de relajación viscosa ( $\tau_v = d^2/\nu$ ), de manera que se obtiene  $Pr = \nu/\kappa$ . El tiempo de relajación más largo es el que marca el proceso dominante. Si el número de Prandtl es elevado (como ocurre en los líquidos empleados en los experimentos que se van a describir) el campo de velocidades se acopla al campo de temperaturas.

Se suelen definir además un número de Reynolds capilar:  $Re = \frac{\partial\sigma/\partial T \beta dh^2}{\mu\nu} = \frac{Ma}{Pr}$ ,

el número de Grashof  $Gr = \frac{g\alpha\beta dh^4}{\nu^2} = \frac{Ra}{Pr}$  (que proporciona la relación entre las fuerzas de

inercia y de empuje con respecto a la fuerza viscosa), y el número de Bond dinámico, que es justamente el inverso del parámetro  $K$ .

Por último, es conveniente hacer una referencia al número de Biot, que mide de alguna manera la razón entre el calor transferido al aire y el calor transmitido dentro del fluido:  $Bi = \frac{\chi_a sh}{\chi_l he}$ , donde  $\chi_a$  y  $\chi_l$  son, respectivamente, las conductividades térmicas del aire

y del líquido, siendo  $e$  una distancia característica que mide el espesor de la capa de aire

afectada por la transferencia térmica (dicho de otro modo, la distancia vertical característica, medida desde la superficie libre, en la cual el perfil horizontal de temperaturas en el aire se separa de su distribución de equilibrio  $T=T_i+\beta x$ ). Como la conductividad térmica del aire suele ser varios órdenes de magnitud menor que la de los líquidos, el número de Biot es muy pequeño. En algunos experimentos se ha demostrado que 0.01 puede ser una cota superior \*. Incluso en el caso de que el número de Biot fuera mucho mayor (por ejemplo,  $Bi=0.1$ ), la influencia que sería de esperar en el campo de temperaturas o de velocidades es muy pequeña, a juzgar por estudios numéricos realizados al respecto <sup>[32]</sup>. Por lo tanto, en nuestro caso tomar  $Bi=0$  no es una mala aproximación, pues se elimina calor sobre todo a través de la pared fría.

Una advertencia útil es señalar que las definiciones de estos números adimensionales pueden variar ligeramente, según los autores.

### 2.3. Análisis de estabilidad.

Tomando como base las ecuaciones descritas en la sección precedente, varios autores han llevado a cabo el análisis lineal de la estabilidad del flujo básico. Es necesaria cierta cautela, sin embargo, porque los razonamientos sólo son válidos para la región central del canal. No se tienen en cuenta los efectos de borde, cerca de las paredes caliente y fría, donde puede perderse la estabilidad por mecanismos completamente diferentes, especialmente cuando  $Pr$  es elevado.

#### a) Análisis de M. Smith y S. Davis <sup>[26-27][33-36]</sup>.

El caso considerado por estos autores es el puramente termocapilar ( $Ra=0$ ). Se estudia la estabilidad de dos flujos (el llamado *linear flow* -que es un flujo de Couette, sin retorno- y el *return flow*, que coincide con el campo de velocidades descrito aquí para  $K \rightarrow \infty$ ), en función del número de Prandtl. En los experimentos, en cambio, el número de Prandtl queda fijado una vez se escoge el líquido, y los parámetros que más fácilmente se pueden variar son  $\beta$  y  $h$  (o bien,  $Ra$  y  $Ma$ ). Smith y Davis encuentran diferentes

---

\* Medición realizada por Diego Maza.

inestabilidades para el flujo básico; los rollos longitudinales (paralelos al gradiente de temperaturas), que era una de las inestabilidades posibles en el *linear flow*, no aparecen aquí. Para números de Prandtl elevados, las inestabilidades son siempre oscilatorias, y pueden ser de dos tipos, a los que bautizaron llamando "surface waves" (ondas superficiales) y "hydrothermal waves" (ondas hidrotermales).

Las características más sobresalientes de ambos tipos de ondas son las siguientes. El mecanismo que produce las ondas superficiales es puramente hidrodinámico y nada tiene que ver con el calentamiento, pues si se estableciera el flujo básico mediante otro dispositivo no térmico, aparecería igualmente esta inestabilidad. Las ondas hidrotermales, por el contrario, nacen como consecuencia de la interacción del campo de temperaturas y del campo de velocidades. La explicación ofrecida <sup>[34]</sup> es la siguiente: si en un punto de la superficie, por cualquier motivo, se produce un calentamiento local, el efecto Marangoni provocará un flujo superpuesto al de base, que arrastra la perturbación consigo. Una consecuencia de lo expuesto es que para las ondas superficiales existe un número de Reynolds crítico; no así para las ondas hidrotermales. Las ondas hidrotermales, en cambio, serán sensibles a las condiciones térmicas del experimento. Además, la deflexión de la superficie es muy pequeña en este último caso. Otra diferencia notable es la longitud de onda, mucho mayor para las ondas superficiales.

Finalmente, Smith y Davis encuentran que en los líquidos de elevado número de Prandtl las ondas hidrotermales se propagan con un pequeño ángulo respecto al gradiente térmico (unos  $10^\circ$ ) hacia la dirección de las  $x$  negativas, es decir, desde el extremo frío hacia el caliente.

#### b) Análisis de estabilidad de P. Parmentier, V. Regnier y G. Lebon <sup>[37]</sup>.

El caso analizado es mucho más general que el de M. Smith y S. Davis, pues tiene en cuenta tanto los efectos termocapilares como los gravitatorios. El análisis realizado por estos autores se hace, además, en función de  $Ma$  y  $Ra$ , por lo cual la comparación con distintas situaciones experimentales es mucho más sencilla. (Dado que todos los parámetros que intervienen en la definición de  $Ma$  y  $Ra$ , salvo  $\beta$  y  $h$ , pueden considerarse constantes una vez escogido el líquido, se puede establecer una relación uno a uno entre ambos pares de parámetros. Emplear  $Ma$  y  $Ra$  como parámetros de control tiene la ventaja

adicional de que la identificación de los efectos gravitatorios y termocapilares es inmediata). Se exploran unos cuantos números de Prandtl; en concreto, el correspondiente a uno de los líquidos empleados en el presente experimento \*.

Los resultados predicen también una inestabilidad propagativa, que los autores denominan "rollos viajeros", pues las perturbaciones pueden imaginarse como rollos casi perpendiculares al gradiente, para números de Prandtl elevados, que viajan en la dirección longitudinal. De nuevo se ignoran los efectos de los extremos. Pero la curva de inestabilidad proporcionada por los autores tiene la ventaja de que puede ser comprobada experimentalmente con cierta facilidad; se hará referencia a ella más adelante.

\* \* \*

Otros análisis de estabilidad han sido realizados por Gershuni *et al.* <sup>[31]</sup>, en función del número de Grashof, que consideran también otros flujos, y por J.V. Mercier <sup>[32]</sup>, que explora además la influencia de  $Bi$ .

## 2.4. Simulaciones numéricas

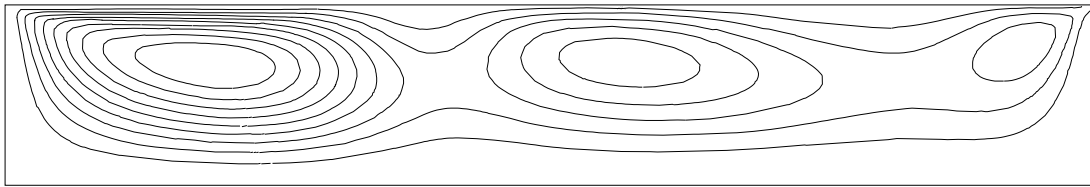
Las ecuaciones básicas pueden simularse numéricamente para hallar las líneas de corriente y las isothermas del flujo básico. El interés que reviste la simulación es doble. Por un lado, la temperatura en la superficie del líquido no se define de antemano, sino que aparece naturalmente a consecuencia del flujo. Si se toma el número de Biot igual a cero, lo cual -como se ha dicho- es una buena aproximación, no hay que hacer ninguna hipótesis adicional sobre el aire que está sobre la superficie límite. Por otro lado, los efectos de borde quedan patentes. Pero es necesaria una advertencia: tanto si el número de Prandtl elegido es grande, como si se aumenta mucho  $\Delta T$ , la simulación consume mucho tiempo. Por ese motivo, en la mayor parte de las simulaciones que se han llevado a cabo se tomó un número

---

\* Se agradecen los cálculos numéricos realizados por los autores, a petición del Prof. Platten, con los parámetros adecuados al experimento, cuyos resultados aún no publicados se reproducen en esta tesis con su permiso.

de Prandtl pequeño (cercano a 1). En tales simulaciones, se obtienen rollos transversales estacionarios cuya amplitud va disminuyendo con la distancia a la pared caliente <sup>[38]</sup>.

D. Villers y J.K. Platten <sup>[39]</sup> calcularon numéricamente las isothermas y las líneas de corriente para  $Pr=4$  y un  $\Delta T$  relativamente elevado (ver Fig. 7). La relación de aspecto de la celda es 6. Se observan claramente tres rollos transversales, estacionarios, de mayor intensidad cerca de la pared caliente. Al aumentar  $\Delta T$  los rollos comienzan a moverse, de manera quizá oscilatoria. El número de Prandtl elegido corresponde al de la acetona, y los resultados numéricos reproducen muy bien lo observado en los experimentos realizados por los mismos autores <sup>[39]</sup>.



*Fig. 7. Líneas de corriente calculadas numéricamente (tomado de Villers y Platten, <sup>[39]</sup> para  $Pr=4$ ,  $Ma=8000$  y  $Ra=0$ ).*

Para resolver analíticamente las ecuaciones, se ignoran los efectos de borde en las paredes caliente y fría y se hace la hipótesis de que el gradiente de temperatura es constante. Revisten gran interés, por tanto, las simulaciones para números de Prandtl más elevados y una relación de aspecto todavía más grande. Sería interesante emprender algún estudio sobre el tema.

## **3. MONTAJE EXPERIMENTAL**

### **3.1 Técnicas empleadas**

#### **3.1.1. Ombroscopía**

Es una técnica de visualización empleada profusamente, cuyos detalles pueden consultarse en monografías sobre el tema <sup>[40]</sup>. El sistema concreto empleado es original de H.L. Mancini, y está descrita con pormenores en algunos de sus trabajos <sup>[41] [42]</sup>.

La idea subyacente consiste en emplear el fluido como si fuera una lente térmica. Las variaciones de temperatura en el seno del líquido llevan aparejadas variaciones en el índice de refracción (la variación de temperatura influye en la densidad, y la densidad a su vez está relacionada con el índice de refracción a través de la ecuación de Clausius-Mosotti). La superficie libre del fluido, además, puede estar deformada. Por lo tanto, si se envía un frente de onda plano sobre la capa de líquido que se quiere estudiar y se recoge a la salida sobre una pantalla, la iluminación proporciona información sobre el campo de temperatura y la deflexión de la superficie. Como en el caso presente las deformaciones de la superficie, si las hay, son provocadas por el mismo proceso responsable de las variaciones de temperatura, no es crucial diferenciar en qué proporción contribuye cada una. Sería interesante discernir el efecto de ambos mecanismos y aislarlos, primer paso para una ombroscopía cuantitativa; pero no nos ha sido posible hasta el momento.

Como el líquido forma un menisco al contacto con las paredes del recipiente, la luz de esa zona queda desenfocada. Por lo tanto, en una ombroscopía no se recoge la capa



de líquido en toda su extensión, sino sólo la porción central. La zona afectada por el menisco es una banda de alrededor de 1 cm de anchura junto a cada pared.

Se pueden evaluar las variaciones relativas en la intensidad luminosa provocadas por un campo de temperaturas que varíe sinusoidalmente con  $x$ , que es, como se verá, un caso de interés en este trabajo. Sea la temperatura

$$T(x,z) = \tilde{T}(z) \cos(x/\lambda)$$

es decir, una amplitud dependiente de  $z$  multiplicada por una modulación sinusoidal en  $x$  ( $\lambda$  es la longitud de onda dividida entre  $2\pi$ ). Las variaciones relativas de la intensidad de luz que se recogería en una pantalla después de atravesar el fluido se pueden escribir así <sup>[40]</sup>

$$\frac{\Delta I}{I} = 2h \int_0^h \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln(n) dz$$

donde  $n$  es el índice de refracción. En primera aproximación, se puede considerar que  $n$  depende linealmente de la temperatura:  $n=n_0+\zeta T$ . Así, pues, para pequeñas fluctuaciones de temperatura queda

$$\frac{\Delta I}{I} = -2dh \zeta \frac{\cos(x/\lambda)}{\lambda^2} \int_0^h \frac{\tilde{T}}{n_0} dz$$

de modo que las variaciones relativas de la intensidad en la ombroscopía son proporcionales a las fluctuaciones de la temperatura, promediadas según la vertical.

El montaje experimental requiere una fuente puntual, que se consigue colocando una lámpara de filamento lo más pequeño posible en el foco de un espejo esférico, y un sistema para recoger la imagen devuelta por el sistema, para lo que se emplea una cámara CCD. En realidad, la luz no se recoge nada más atravesar la capa de fluido, sino que se refleja desde debajo de la celda y se colecta cerca del foco del espejo esférico. Para ello es necesario que el sistema sea levemente astigmático, pero como la longitud focal es muy grande (153 cm) no se producen deformaciones apreciables. Simplificado, el montaje es

así:

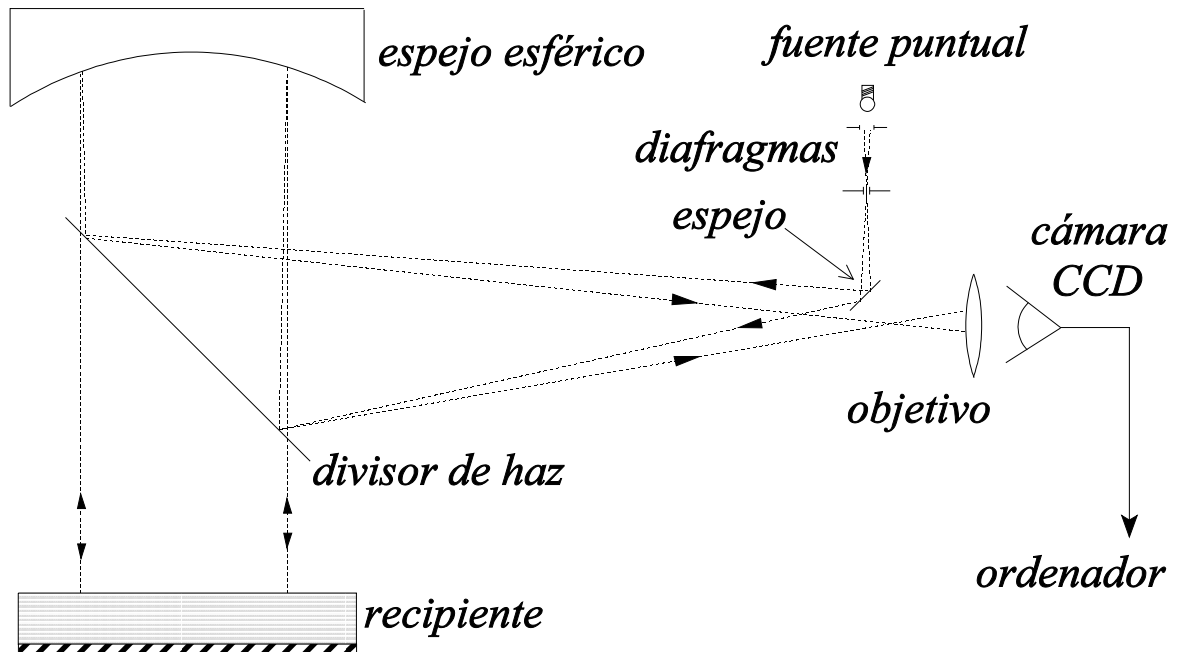


Fig. 8. Esquema del montaje empleado para obtener la ombroscopía de la capa de fluido, con la marcha de los rayos.

(debajo del recipiente, que es transparente, se coloca un espejo; a veces, el fondo del recipiente es de metal pulido, que refleja lo suficiente).

Para evitar vibraciones, el experimento se realiza sobre una mesa amortiguada, con frecuencia de corte de 2 Hz.

Una vez obtenida la imagen, se procede a su tratamiento. La cámara CCD está conectada a un ordenador y la imagen (de un tamaño máximo de 512x512 pixels) se guarda digitalizada en 256 niveles de gris. Los dispositivos CCD comerciales suelen responder automáticamente a la luz, ajustándose a la iluminación, con lo que los niveles de gris no son constantes de una imagen a otra. Sin embargo, la cámara utilizada permite fijar la ganancia, de modo que el valor del nivel de gris corresponde siempre al mismo intervalo de intensidad luminosa.

El intervalo entre los niveles de gris máximo y mínimo de una imagen es el rango dinámico. Normalmente, el rango dinámico es menor que 256, a no ser que la cámara se sature (situación no deseable y que se puede evitar). A pesar de que la cámara no es lineal,

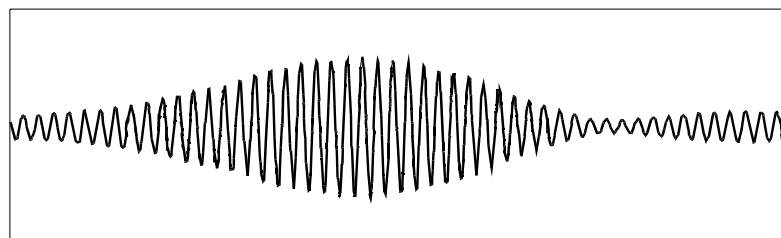
el rango dinámico utilizado sí que lo es dentro de un 20%.

El tratamiento que han sufrido las imágenes que se mostrarán en esta tesis es muy escaso; se presentan casi tal y como aparecen en la pantalla. Normalmente, se realizan sólo dos operaciones: estirar el rango dinámico mediante una ecualización para aumentar el contraste (que se puede realizar en tiempo real o a posteriori) y un leve filtrado para evitar el ruido (a veces promediando varias imágenes, si la estructura del flujo es estacionaria, o mediante un filtro pasabajos) <sup>[43][44]</sup>. Véanse por ejemplo la Fig. 28.

Cuando la estructura es viajera, se puede extraer mucha información de un diagrama espaciotemporal, que se obtiene del siguiente modo. Se estira el rango dinámico antes de la adquisición, y se escoge una línea de pixels en la dirección que interese (habitualmente, en la dirección del movimiento; en nuestro caso, paralela al eje  $x$ ). Se adquiere esa línea a intervalos de tiempo regulares (el período de muestreo usual es de 0.1 s) y se apilan los registros verticalmente, de manera que la imagen resultante es la evolución temporal de esa línea. El diagrama espaciotemporal es, pues, un gráfico tridimensional cuyo eje horizontal es la distancia, el vertical el tiempo (positivo hacia abajo) y la tercera dimensión viene dada por el nivel de gris de cada punto. Se muestra uno más adelante, en la Fig. 46.

### 3.1.2. Velocimetría láser Doppler

Los principios de la velocimetría láser Doppler se pueden consultar en la excelente obra de Durst, Melling y Whitelaw <sup>[45]</sup>. La esencia del método es la siguiente. Si se cruzan dos haces de luz coherente y polarizada de la misma frecuencia, se producen franjas de interferencia en la zona donde se cortan los haces. Las franjas de interferencia no son más que una modulación espacial periódica de la intensidad de la luz. Así pues, toda partícula que cruce esa zona con una cierta velocidad, reflejará una señal luminosa periódica



*Fig. 9. Señal reflejada por una partícula al atravesar la zona de medida. Las dimensiones del recuadro son de 40 ms (horizontal) por 40 mV (vertical).*

(ver Fig. 9). La frecuencia de la luz reflejada es igual a la velocidad de la partícula dividida por la distancia entre las franjas de interferencia. Conocida ésta, basta registrar la señal reflejada y hallar su frecuencia para obtener la velocidad de la partícula.

El empleo del láser es natural, puesto que se necesita luz coherente, polarizada, monocromática y unidireccional. El haz se colima para que no se ensanche demasiado, y se divide en dos con un divisor de haz. Se enfocan sobre la zona deseada mediante un objetivo, y la luz reflejada por las partículas es recogida por un fotodetector.

Para que la medida de la velocidad corresponda a una zona del espacio lo más pequeña posible, y teniendo en cuenta que es difícil reducir significativamente el diámetro del haz láser sin aumentar su divergencia, es necesario separar los haces para que se crucen con un ángulo lo suficientemente grande; por eso se coloca un expansor de haz delante del objetivo. A la vez, éste ha de tener gran potencia (pequeña distancia focal). La zona de medida tiene forma de elipsoide, coincidiendo el eje mayor con el del sistema óptico. Las franjas de interferencia son planos paralelos al definido por los dos haces láser. Sin necesidad de más refinamientos, la sección de la zona de medida puede tener un diámetro de sólo 100  $\mu\text{m}$ . La distancia entre las franjas de interferencia es del orden de 1  $\mu\text{m}$ .

Con esta técnica, se obtiene una componente de la velocidad. En efecto: si una partícula atraviesa la zona de medida paralelamente a las franjas de interferencia, la señal luminosa reflejada es constante. Sólo se detecta, según lo expuesto, la componente de velocidad perpendicular al plano definido por los dos haces láser. Si se desea medir otra componente, hay que girar todo el sistema, teniendo en cuenta que también la polarización tiene que cambiar si -como es obligado- el láser se mantiene fijo. Ello se consigue con láminas de un cuarto de onda.

Si la velocidad que se quiere medir es pequeña (y por pequeña se entiende 1 cm/s o menor), es muy conveniente introducir una modificación en el sistema para que las rayas de interferencia no permanezcan estáticas, sino que se muevan con una cierta velocidad. Así, aunque la velocidad de la partícula sea muy pequeña (incluso cero) al moverse las franjas de interferencia se refleja una señal luminosa periódica. Eso se consigue cambiando ligeramente la frecuencia de uno de los dos haces láser, mediante una celda de Bragg (un dispositivo acustoóptico). Como las celdas de Bragg tienen un rendimiento óptico en

torno a los 40 MHz, cantidad que resulta excesiva, en realidad se usan dos celdas de Bragg, una para cada haz, sintonizadas a frecuencias muy parecidas, de manera que la diferencia de frecuencias sea la deseada (por ejemplo, 5 kHz).

En la explicación precedente se ha dado por supuesto que en el fluido existen partículas que reflejarán la luz. Eso es cierto si se mide la velocidad del aire, o se emplea agua del grifo, por ejemplo. En caso contrario, hay que sembrar el fluido con una pequeña cantidad de partículas. Para que la señal luminosa recogida sea de calidad, el diámetro de las partículas ha de ser lo más parecido posible al espaciado entre las franjas. Además, hay que asegurarse de que las partículas sean efectivamente arrastradas por el fluido. En el caso de un campo de velocidad de pequeña magnitud y que no oscile rápidamente, como es el nuestro, no hay ningún problema. Se emplearon partículas calibradas de  $\text{Al}_2\text{O}_3$ .

Finalmente, el fotodetector tiene que estar conectado a algún aparato capaz de analizar su señal en tiempo muy breve (idealmente, en tiempo real). Es de gran ayuda que el analizador esté conectado a su vez con un ordenador para el almacenar los datos.

El sistema utilizado \*\*, concretamente, consta de un láser de He-Ne de 30 mW, polarizado verticalmente, y toda la óptica (separador de haz, polarizadores, celdas de Bragg, expansor de haz y objetivo) está montada sobre un soporte giratorio para permitir la medición de dos componentes de la velocidad. La salida del fotodetector está conectada a un analizador dinámico de señal que permite hacer una transformada rápida de Fourier y obtener el valor del pico cada 0,24 s aproximadamente. Este aparato está conectado a su vez a un ordenador personal. La celda que contiene el líquido se coloca sobre un soporte motorizado en los tres ejes, con precisión de 10  $\mu\text{m}$  y un recorrido de 120 mm sobre cada eje, controlado también por el mismo ordenador (ver esquema, Fig. 10).

---

\*\* *Laboratorio del Service de Chimie Générale, Faculté de Médecine, Université de Mons-Hainaut, Mons (Bélgica), que dirige el Prof. Platten.*

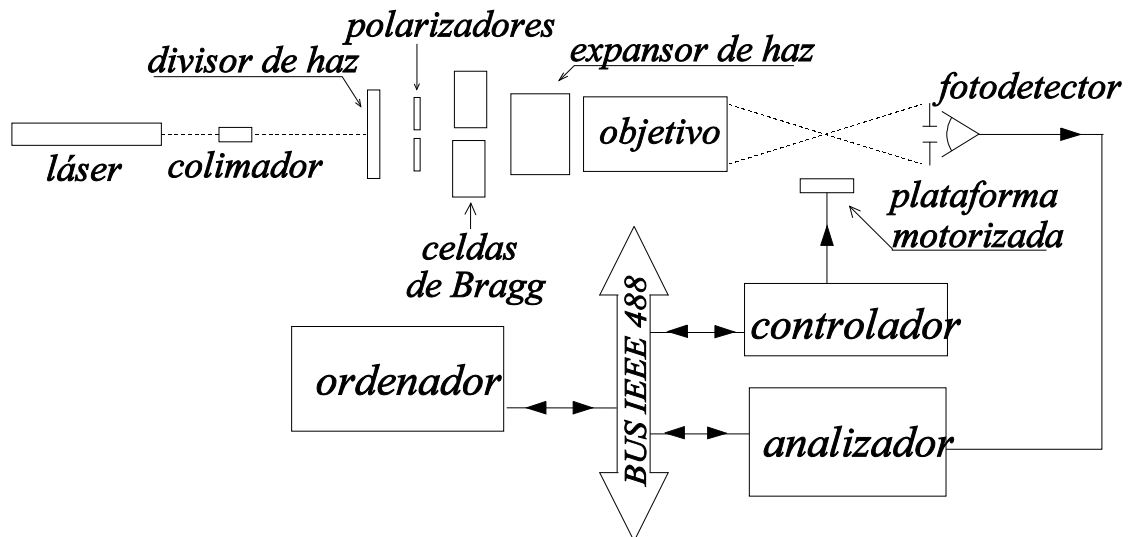


Fig. 10. Esquema del velocímetro láser-Doppler

La distancia entre franjas en este sistema es de  $1.7 \mu\text{m}$ , y el diámetro de la sección de la zona de medida es aproximadamente  $100 \mu\text{m}$ . La precisión que se puede alcanzar depende de varios factores, entre ellos el valor de la velocidad misma. Se estimó en  $\pm 30 \mu\text{m/s}$  ó el 5%, el que sea mayor.

### 3.1.3. Medición de la temperatura

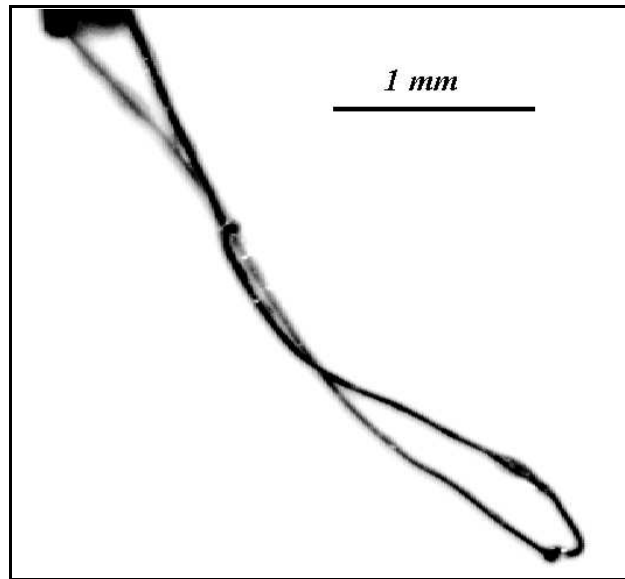
Mientras que la ombroscopía y la velocimetría láser Doppler son métodos no invasivos, para obtener una medida de la temperatura en el interior del fluido es necesario introducir en él un termopar o un termistor. El tamaño de estos sensores tiene que ser mínimo, para que la perturbación sea lo más pequeña posible. Los termopares empleados están hechos de un alambre muy fino ( $\varnothing=0.025 \text{ mm}$ ) y la perla resultante de la soldadura tiene un diámetro menor que una décima de milímetro (ver Fig. 11). El hilo se barniza y se embute en un capilar, para poder sujetarlo mediante un brazo a un desplazador micrométrico. En el líquido sólo se introduce la porción de termopar que sobresale del capilar, curvado como muestra la Fig. 11, de manera que la perla quede enfrentada al flujo. Aun tomando todas estas precauciones, las mediciones de temperatura perturban el sistema, pues es imposible evitar la formación de un menisco en el punto donde se introduce el termopar. El menisco tiene un diámetro del orden de  $\sim 1\text{-}2 \text{ mm}$ , y su influencia

sobre el flujo debe ser significativa. En otras ocasiones se emplea un pequeño termistor ( $\varnothing=0.5$  mm), sujeto horizontalmente entre dos agujas; así se evita el problema de la formación del menisco, pero su tamaño es mucho mayor que el de los termopares, por lo que estas medidas son más intrusivas aún.

Los termopares empleados son de tipo T (cobre-constantán). La resolución es de 0.02 K aproximadamente, en condiciones óptimas. Las mediciones se realizan a través de un *mainframe* VXI, fabricado por Hewlett-Packard, que incluye un multiplexor de 16 canales. El *mainframe* corrige automáticamente la señal del termopar de la desviación debida a la temperatura ambiente, medida independientemente con una resistencia de platino cerca de los contactos. Este aparato permite, además, realizar mediciones con una elevada frecuencia de muestreo, o integrar durante un cierto tiempo para aumentar la resolución.

Una ventaja adicional del pequeño tamaño de los termopares es su tiempo característico de respuesta, excepcionalmente rápido. Varias mediciones que hemos realizado arrojan consistentemente valores muy por debajo de una décima de segundo, y en ocasiones hasta de una centésima de segundo <sup>[46]</sup>. Gracias a ello, pueden emplearse para registrar fenómenos rápidos (con frecuencias del orden del segundo, por ejemplo).

Para medir la temperatura de la superficie -pero no la del interior de la capa de fluido- es muy indicado un detector de infrarrojos. El modelo empleado lo manufactura Omega Technologies (# OS-36-T). La medida no es puntual, como en el caso de un termopar, sino que integra la señal de un área de 3 mm<sup>2</sup>. La resolución en temperatura y la repetibilidad son extremadamente buenas.



*Fig. 11 fotografía de un termopar; la soldadura es la pequeña esfera cerca de la esquina inferior derecha.*

### 3.1.4. Deflexión de un haz láser

Es de esperar que la curvatura de la superficie, como ya se apuntó, sea muy pequeña. Para pequeños valores de  $\Delta T$  el estado básico es estable y la curvatura despreciable, pues  $\Gamma$  tiende a infinito. Queda por ver lo que ocurre en otros estados, pero los análisis reseñados <sup>[26-27]</sup> predicen una muy pequeña deflexión en el caso de las ondas hidrotermales.

La manera de amplificar esa deflexión consiste en dirigir un haz láser sobre la superficie del líquido y recoger el haz reflejado a gran distancia sobre una pantalla (v. Fig. 12). Con una cámara CCD, a la que se adapta un teleobjetivo con zoom para amplificar

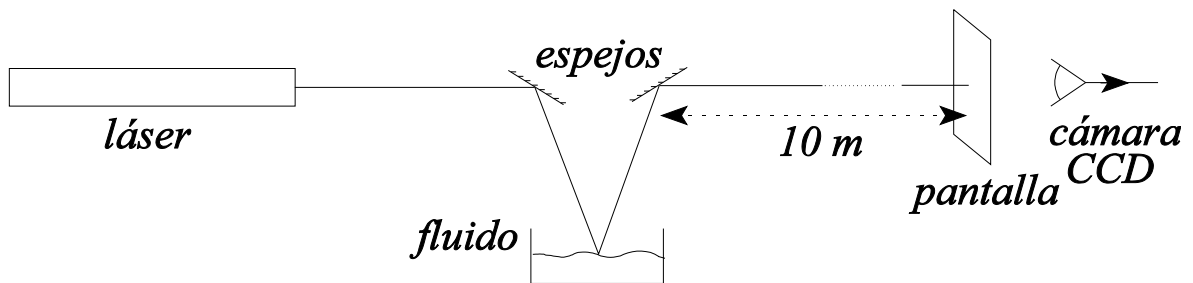


Fig. 12. Método de deflexión de un haz láser

todavía más el desplazamiento, se filma la imagen de la pantalla. La cámara está conectada a un ordenador 386, y mediante un sencillo programa se calcula el centro de la mancha luminosa y se registra su posición en el transcurso del tiempo. La frecuencia de muestreo es muy grande en comparación con la de los fenómenos que se observan. El problema principal de esta técnica es que -como la amplificación es tan grande- cualquier perturbación en el medio que atraviesa el haz se registra igualmente. Las pequeñas fluctuaciones del aire en el laboratorio son las que limitan la resolución. El estado estacionario del fluido sirve para calibrar el método; se cifró la resolución en aproximadamente 0.05 mrad.

## 3.2 Líquidos



Se emplearon en las diversas fases del experimento dos líquidos: decano y aceite de silicona. La elección recayó en ellos principalmente por la baja presión de vapor (que puede modificar el efecto Marangoni y dificultar largos períodos de observación al disminuir la altura), y por su elevado número de Prandtl. Para el decano,  $Pr=14.7$  a  $20^{\circ}\text{C}$ . Se probaron varios aceites de silicona, de entre 5 y 100 cSt nominales a  $25^{\circ}\text{C}$ . Gran parte de los experimentos se realizaron con el aceite de silicona PMS 5, de fabricación rusa \*, para el cual  $Pr=30$  a  $25^{\circ}\text{C}$ , aproximadamente.

En la Tabla I se relacionan las propiedades físicas de ambos líquidos.

<i>propiedades</i>	<i>símbolo</i>	<i>decano</i>	<i>PMS 5</i>	<i>unidades</i>
densidad a $25^{\circ}\text{C}$	$\rho_0$	0.726	0.885	$\text{g/cm}^3$
coef. de dilatación térmica	$\alpha$	0.001	0.0011	$\text{K}^{-1}$
viscosidad dinámica	$\mu$	0.907	2.85	cPs
viscosidad cinemática	$\nu$	1.25	3.21	cSt
tensión superficial a $25^{\circ}\text{C}$	$\sigma_0$	23.43	15.05	mN/m
coef. de variación de la tensión superficial con $T$	$\frac{\partial\sigma}{\partial T}$	0.09	0.08	mN/m K
conductividad térmica	$\frac{\partial T}{\chi_l}$	0.135	0.135	W/m K
difusividad térmica	$\kappa$	$0.88 \times 10^{-7}$	$1.05 \times 10^{-7}$	$\text{m}^2/\text{s}$

*Tabla I. Propiedades físicas de los líquidos utilizados.*

A continuación se dan también los números adimensionales, definidos anteriormente, para cuatro condiciones típicas. La primera columna corresponde a una capa de decano de altura  $h=2.5$  mm y  $l=7.4$  cm, con  $\Delta T=4^{\circ}\text{C}$ . En la siguiente sólo varía la diferencia de temperatura:  $\Delta T=8^{\circ}\text{C}$ . La tercera es para una capa de aceite de silicona PMS 5 con  $h=1.5$  mm,  $l=6$  cm,  $\Delta T=15^{\circ}\text{C}$ , y la última está calculada para el mismo líquido pero con  $h=2.5$  mm y  $\Delta T=30^{\circ}\text{C}$ .

---

\* *Sus propiedades fueron tabuladas en el laboratorio del Dr. I.B. Rabinovich (Institute of Chemistry, Nizhny Novgorod University, Nizhny Novgorod, Russia), y la variación de la tensión superficial con la temperatura ( $\partial\sigma/\partial T$ ) fue medida por G. Chavepeyer y P. Smet (Université de Mons-Hainaut), a quienes se agradece su gentileza.*

	1)	2)	3)	4)
<i>Pr</i>	15	15	34	31
<i>Ma</i>	390	780	130	1100
<i>Ra</i>	190	380	35	747
<i>Re</i>	27	53	4	33
<i>Gr</i>	13	25	1	25
<i>K</i>	0.5	0.5	0.27	0.75

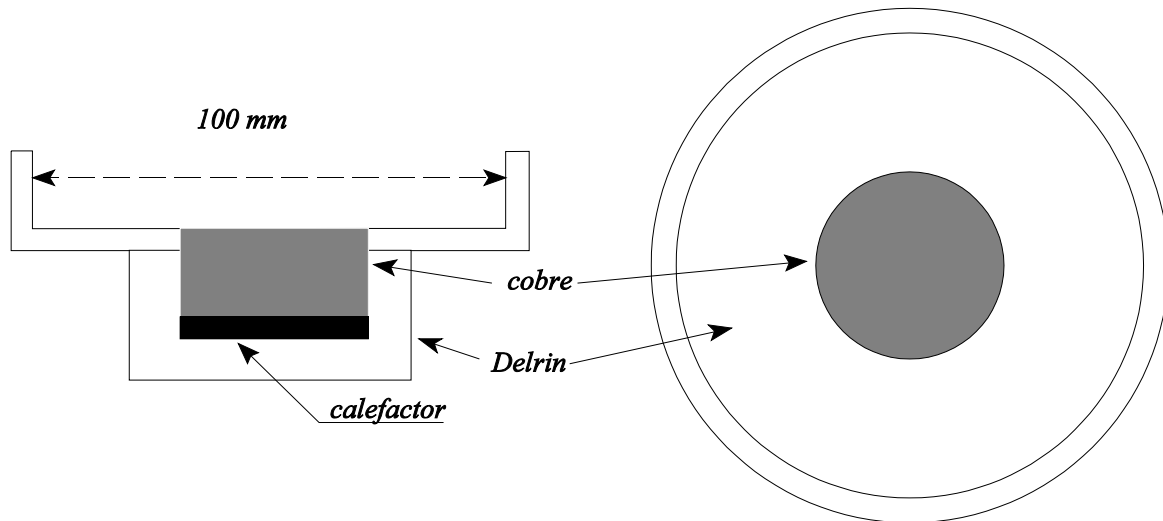
Tabla II. Números adimensionales correspondientes a cuatro situaciones típicas.

El número de Prandtl es, como se ve, muy grande. El número de Reynolds, en cambio, es muy pequeño, por lo que son improbables las inestabilidades de cizalladura (*shear instabilities*). Las ondas superficiales predichas por Smith y Davis<sup>[26-27]</sup>, por ejemplo, aparecen para valores de *Re* superiores a 200, por lo que quedan descartadas: las inestabilidades que se observarán serán termocapilares. Como *K* es significativamente mayor que 1/12, es de esperar que los efectos gravitatorios sean muy pequeños.

### 3.3 Celdas

Se describen a continuación los diversos recipientes en los que se llevaron a cabo las diferentes observaciones. Cuando se describan éstas, se indicará en qué celda fueron realizadas si eso es relevante, aunque se puede adelantar que el cambio de geometría no tiene ninguna influencia digna de reseñar en el experimento, salvo las simetrías obvias que impone.

Las primeras observaciones se realizaron en una celda circular, cuyo fondo se calienta localmente en el centro mediante una resistencia eléctrica (ver Fig. 13). La construcción circular se debe a la continuidad con las primeras observaciones con calentamiento inhomogéneo<sup>[9]</sup>. Aunque pueda parecer un diseño muy alejado del esquema propuesto (Fig. 1), veremos que la fenomenología observada es la misma que en otras geometrías.

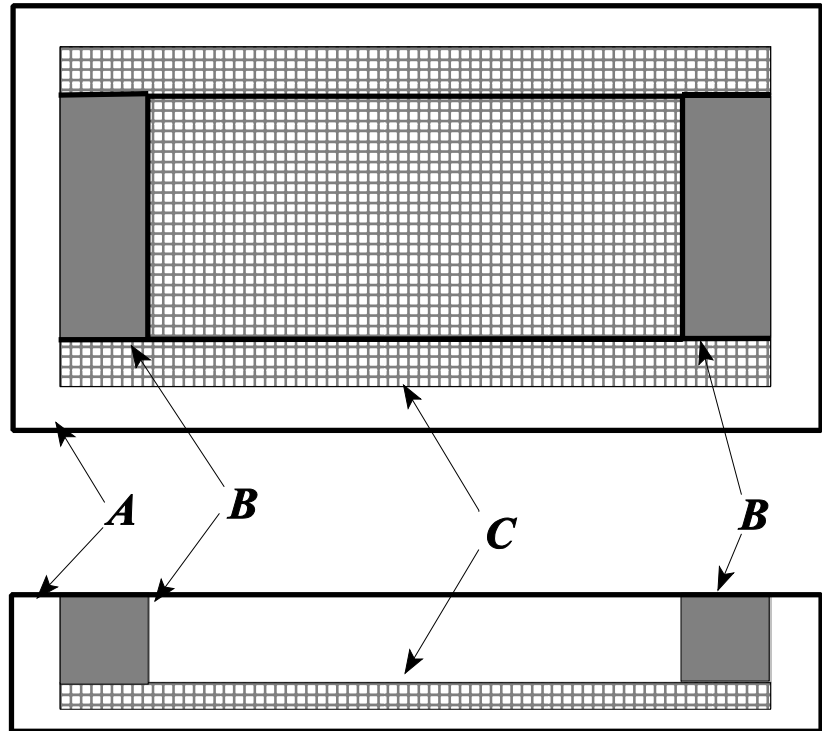


*Fig. 13. Sección y vista superior de la celda convectiva circular. El Delrin es un aislante sintético. El diámetro de la pieza de cobre es de 3 cm.*

El calentador empleado es una resistencia de película manufacturada por Minco, de elevada potencia. El bloque de cobre sirve para homogeneizar la temperatura; dentro de él se introduce un termopar para controlarla.

Pero la mayoría de los experimentos se realizaron en otra celda mucho más parecida al esbozo de la Fig. 1. Consta de una caja rectangular de metacrilato con un recubrimiento interior intercambiable, que puede ser de metacrilato o de aluminio, y dos piezas de cobre por las que circula agua termostatzada adosadas a las paredes más alejadas (ver Fig. 14). El agua proviene de dos baños cuya temperatura se controla mediante un bucle PID. La precisión nominal es de  $0.05^{\circ}\text{C}$ , pero las fluctuaciones rápidas deben ser mucho más pequeñas, dada la gran masa térmica de las dos piezas de cobre. Para poder realizar la velocimetría láser Doppler, es necesaria una celda mucho más estrecha, para que los haces no se reflejen en la superficie del líquido. Como la profundidad es pequeña, la restricción sobre la dimensión transversal es muy rigurosa. Se empleó una celda de cuarzo cuyo diseño básico es el mismo que el de la Fig. 14, pero sin revestimiento y con unas dimensiones diferentes: 1 cm. de anchura, 7 cm. de longitud y 10 cm. de altura. Los baños termostáticos tienen en este caso una precisión de  $0.01^{\circ}\text{C}$ .

*Fig. 14. Vista superior y sección de la celda convectiva rectangular. La distancia entre las paredes fría y caliente es de 7 cm, la anchura es de 5 cm, y la altura utilizable es de 2 cm. A: caja de metacrilato; B: piezas de cobre termostatzadas; C: revestimiento interior.*





## 4. LA SECUENCIA DE BIFURCACIONES

### 4.1. Fenomenología

Una de las cuestiones clave en este experimento es la descripción de lo que ocurre en la capa de fluido al aumentar la diferencia de temperatura  $\Delta T$  entre las paredes manteniendo los demás parámetros constantes. Como los números de Rayleigh y de Marangoni dependen linealmente de  $\Delta T$ , nuestro parámetro de control, en un diagrama  $Ra-Ma$  el aumento de la diferencia de temperatura viene representado por una línea recta, cuya pendiente es función de la profundidad. Los efectos de las fuerzas gravitatorias y la tensión superficial se suman, y el flujo se hace cada vez más energético. En los análisis de estabilidad reseñados se encuentra una curva en el diagrama  $Ma-Ra$  a partir de la cual el sistema se vuelve inestable, y se predice la aparición de ondas: el flujo básico sufre una bifurcación hacia otro estado. La pérdida de estabilidad de este nuevo régimen frente a un ulterior aumento de la temperatura no ha sido estudiada teóricamente, pero es de esperar que tras una o varias bifurcaciones más el sistema llegue a la turbulencia.

Para observar esta cadena de bifurcaciones, es necesario que el número de Prandtl del fluido sea elevado. R. Krishnamurti <sup>[7]</sup> apuntó por primera vez las características de la transición a la turbulencia en la convección de Rayleigh-Bénard comparando diferentes fluidos. Encontró que las etapas que recorre el sistema (flujo bidimensional estacionario, tridimensional, y tridimensional dependiente del tiempo) son las mismas para los diversos números de Prandtl. Pero tienen lugar para diferentes valores del parámetro de control (ver Fig.

4, ref. [7]). Si  $Pr$  es grande, los intervalos del parámetro de control correspondientes a los diferentes estados que atraviesa el sistema son "amplios", en el sentido de que conforme se varía  $\Delta T$  se observa esa sucesión de etapas. Pero si  $Pr$  es pequeño, los intervalos del parámetro de control en los que se da cada estado se hacen tan diminutos que el sistema pasa del estado básico a la turbulencia al aumentar ligeramente  $\Delta T$ . El número de Prandtl escogido aquí puede considerarse infinito a estos efectos.

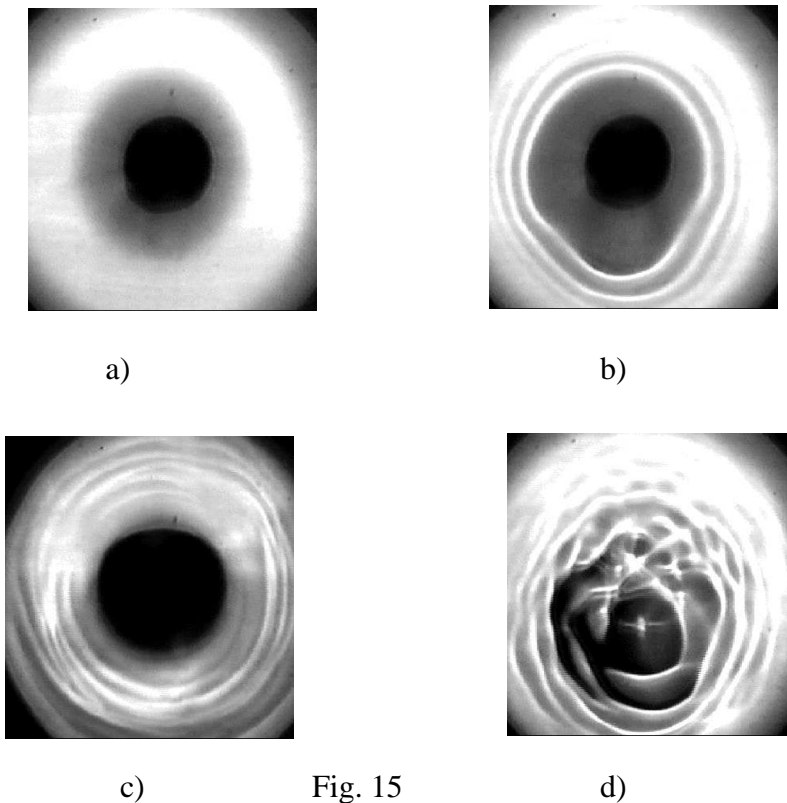


Fig. 15

La observación de las sucesivas configuraciones que adopta el flujo en una capa de fluido calentada lateralmente aporta resultados sorprendentes, pues no coinciden exactamente con el esquema teórico. El estado básico, que podríamos denominar de una sola celda convectiva, es ciertamente el punto de partida. Pero la estabilidad se pierde no de forma ondulatoria, sino con la aparición de rollos estacionarios con el eje alineado perpendicularmente al gradiente de temperatura (es decir, en la dirección  $y$ ). Si se sigue aumentando la temperatura, entonces se observan ondas; ondas que pueden considerarse rollos viajeros. La dirección de propagación de las ondas es la misma que la del gradiente térmico, desde la pared caliente hacia la fría. El posterior aumento de temperatura provoca que el frente de las ondas se rompa y el estado al que se llega puede calificarse de turbulento por la descorrelación espacial observada. Estos fenómenos se recogen en la Fig. 15; las imágenes son

una ombroscopía realizada con la celda circular. En la Fig. 15 a) se aprecia la ausencia de estructura en el flujo; es el estado básico. Los rollos estacionarios, Fig. 15 b), en este caso son concéntricos. El pequeño apartamiento de la forma circular se debe a un defecto que se produjo en la celda tras su uso prolongado. En la Fig. 15 c) se muestra el estado ondulatorio. El aspecto es muy parecido al de la Fig. 15 b), salvo quizá la longitud de onda, pero aquí hay movimiento en la dirección radial. La Fig. 15 d) corresponde al estado final turbulento.

A la vez que ocurre esto en la región comprendida entre la pieza de cobre calefactora y la pared lateral, la porción de fluido situada encima del metal también experimenta un cambio. Sin embargo, lo que ocurre allí en realidad poco tiene que ver con la zona que nos ocupa. El líquido situado sobre el calefactor, al parecer, forma una celda convectiva relativamente aislada del resto. Se comprobó este extremo colocando un cilindro metálico sobre la pieza de cobre, de su mismo diámetro, sobresaliendo del líquido, y la organización de las estructuras es la misma. Sólo en el caso de la turbulencia se observa una cierta correlación de la frecuencia de las plumas térmicas en la zona central con la de las ondas (si pueden denominarse así) de la zona exterior al calefactor.

Las imágenes de la Fig. 15 constituyen como una guía de este trabajo. Para comprender mejor lo que sucede, se hace necesaria la caracterización cuantitativa (velocidad, temperatura, deflexión de la superficie), que se irá exponiendo en los próximos capítulos. Surgen enseguida varias cuestiones. ¿Preceden siempre los rollos al estado oscilatorio, incluso si se cambia la profundidad del fluido, o si se emplea otro líquido? Esta estructura, que no contemplaban los análisis teóricos, ¿se debe a la geometría circular? ¿Qué ocurre si se cambia la geometría? En la Fig. 15 b) se observa que la amplitud de los rollos decrece conforme nos acercamos a la pared fría. ¿Es esto efecto de la geometría, o realmente decae la amplitud?. Conviene tratar inmediatamente dos aspectos: los umbrales de  $\Delta T$  umbral para la aparición de los rollos y de las ondas, y un rápido estudio de la velocidad de éstas.

## **4.2. $\Delta T$ umbral para los rollos.**

Para empezar: los rollos son siempre el estado resultante de la primera bifurcación en la región de los parámetros explorada<sup>[47]</sup>, es decir, para pequeñas profundidades ( $Ma > Ra$ ),



y para números de Prandtl elevados (se utilizaron diversos líquidos con  $Pr$  comprendido entre 15 y 600). Por lo tanto, es una situación general. Además, se obtienen rollos en todas las celdas empleadas; así que no aparecen como consecuencia de la geometría.

La ombroscopía no es la mejor técnica para estudiar el umbral de aparición de los rollos. Como nacen con una amplitud muy pequeña, es mejor emplear la velocimetría láser-Doppler, que permite detectar velocidades muy pequeñas (de sólo  $50 \mu\text{m/s}$ ). Por otro lado, se forma un menisco junto a las paredes, que impide la visión cerca de la pared caliente -la zona más interesante. En efecto, los rollos no nacen toda la celda a la vez, llenándola, sino que la invaden a partir de la pared caliente conforme aumenta la diferencia de temperaturas, como veremos. Es preciso, por tanto, establecer algún criterio, aunque sea arbitrario, si se quiere dar un valor crítico.

En la Fig. 16 se representa la línea de estabilidad calculada por Lebon y sus colaboradores <sup>[48]</sup> con los parámetros del líquido usado en el experimento, y algunos de los puntos explorados. Recordemos que la inestabilidad predicha es ondulatoria, y no rollos como se observa en el experimento. La línea sólida corresponde a los cálculos, mientras que las líneas discontinuas corresponden a algunas profundidades de la capa de fluido. Pues bien: para cada una de las diferentes alturas representadas, en al menos uno de los puntos correspondientes de los que se encuentran por debajo de la curva de estabilidad marginal se observan rollos en aproximadamente la mitad de la celda. (Por supuesto, también en los puntos que se encuentran por encima de la curva de estabilidad calculada). La línea de estabilidad neutra para los rollos no es fácil de dibujar, pues se necesitarían más puntos experimentales, pero es seguro que está por debajo de la que dan esos autores. Es inmediato cuestionar la validez del análisis de estabilidad, toda vez que antes de la aparición de las ondas el estado básico ya está perturbado. Más adelante se tratará de la cuestión al analizar cuantitativamente

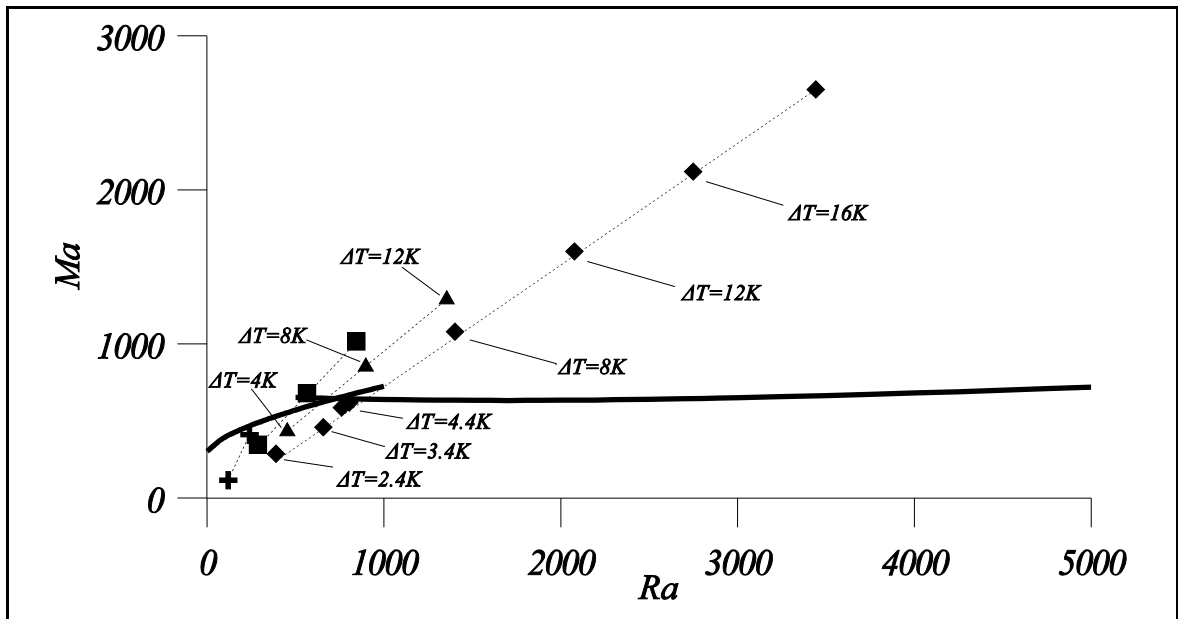


Fig. 16. Línea de estabilidad marginal calculada por Lebon y colaboradores <sup>[48]</sup> junto con algunos de las profundidades exploradas:  $\blacklozenge$   $h=4\text{mm}$ ,  $\blacktriangle$   $h=3.6\text{mm}$ ,  $\blacksquare$   $h=3.2\text{mm}$  y  $\blackplus$   $h=2.5\text{mm}$ . En el gráfico se da  $\Delta T$  para dos series; para la serie  $\blackplus$  los puntos corresponden a  $\Delta T=4\text{K}$  y  $8\text{K}$ , y para la serie  $\blacksquare$  a  $\Delta T=4\text{K}$ ,  $8\text{K}$  y  $12\text{K}$ .

la amplitud de los rollos.

### 4.3. $\Delta T$ umbral para las ondas.

Para determinar el umbral de aparición de las ondas sí que resulta adecuada, en cambio, la ombroscopía, puesto que nacen con una amplitud finita y no están localizadas en una zona de la celda. Además es fácil medir la velocidad de fase.

En la Fig. 17 se muestran las mediciones de temperatura críticas para la aparición de

las ondas. Están tomadas en la celda circular, pero se comprobó en las otras celdas que  $\Delta T$  es aproximadamente la misma en una geometría rectangular. La escala de ambos ejes es logarítmica, puesto que si se despeja del número de Marangoni la relación entre  $\Delta T$  y  $h$  se encuentra  $Ma_c \propto h^2$ , donde  $Ma_c$  es el número de Marangoni crítico, de modo que el ajuste correcto según esta fórmula sería una recta (línea continua).

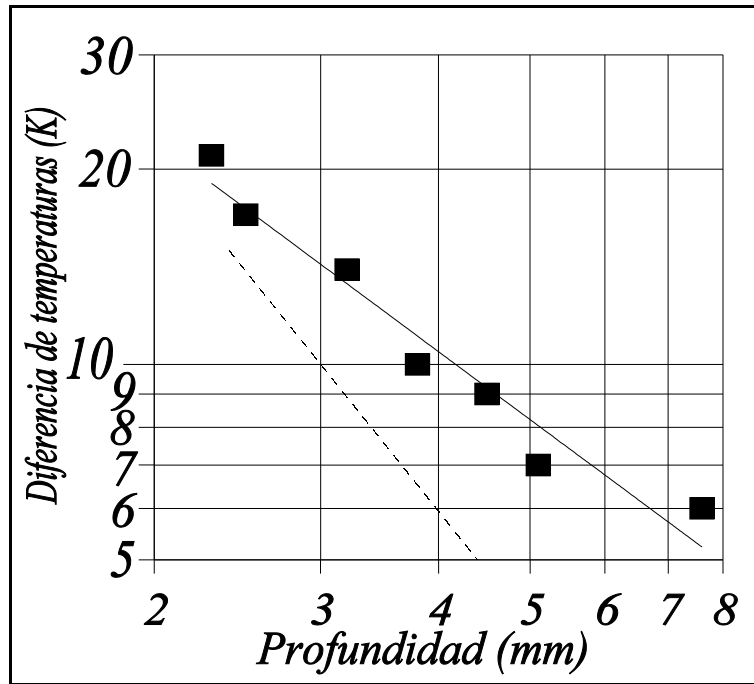


Fig. 17. Diferencia de temperaturas  $\Delta T$  umbral para la aparición de las ondas (■ y línea continua), junto con el cálculo de Smith y Davis (línea discontinua).

El cálculo de Smith y Davis es la línea discontinua. (No hay que olvidar lo expuesto sobre el análisis de estabilidad, realizado sin tener en cuenta que a este estado le precedieron los rollos). El orden de magnitud concuerda, y la forma de la curva de estabilidad es la correcta. Todos los puntos medidos se encuentran también por encima de la curva de estabilidad en el diagrama  $Ma-Ra$  calculado por Lebon y colaboradores <sup>[37][48]</sup>.

Es interesante comparar la Fig. 17 con el diagrama obtenido por F. Daviaud y J.M. Vince <sup>[49]</sup>, para un experimento emparentado con éste.

#### 4.4. Comparación de la velocidad de las ondas con la velocidad del flujo básico.

Ya que la velocidad de las ondas es fácil de medir (salvo por la lógica divergencia impuesta por la geometría circular) es interesante compararla con la velocidad superficial calculada para el flujo básico a partir de la fórmula (9). Se mostrará más adelante que el perfil de velocidades obtenido experimentalmente se ajusta muy bien a esa expresión para diferencias

de temperatura no muy elevadas. Ciertamente no hay garantías de que suceda así a diferencias de temperatura más grandes, pero una primera comparación puede ser de utilidad.

Se observa que la velocidad de las ondas crece con  $\Delta T$ , y puede que también con  $h$ , aunque esta tendencia es mucho menos pronunciada. La velocidad de las ondas es menor que la de la superficie de líquido (donde es máxima). Ésta es una situación típica: la inestabilidad tiene una velocidad menor que la máxima del flujo estable.

Eso es un indicio de que el origen de la inestabilidad está en una capa límite que se desprende.

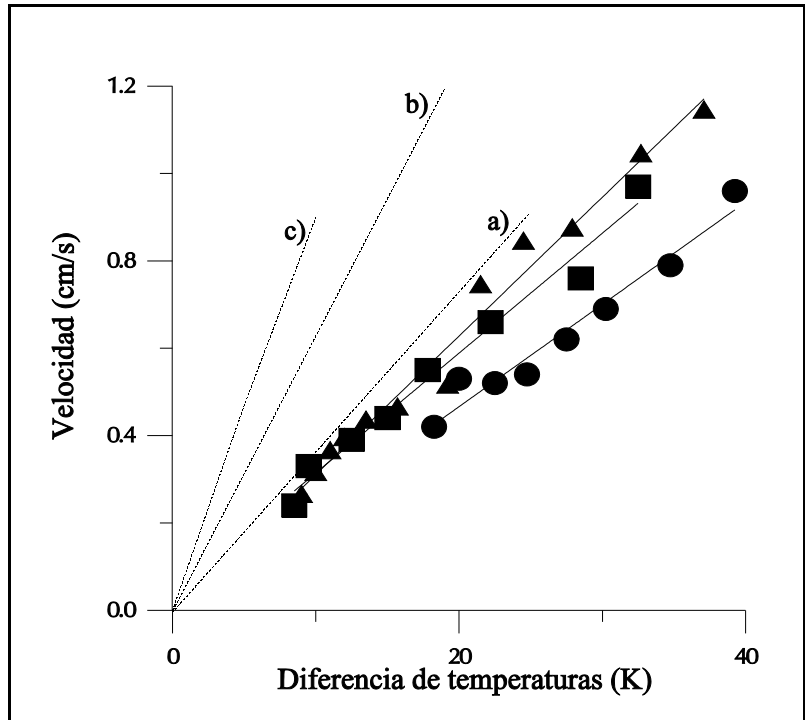


Fig. 18. Velocidad de las ondas en función de la temperatura, para diferentes profundidades. Las líneas de puntos son los resultados analíticos. ● y línea a):  $h=2.6$  mm; ■ y línea b):  $h=5.1$  mm; ▲ y línea c):  $h=7.6$  mm.

#### 4.5. El comportamiento de la frecuencia cerca del umbral.

Cerca de la diferencia de temperatura crítica, se pueden observar algunos fenómenos interesantes, de los que sólo se trata aquí brevemente por ser colaterales dentro de la temática presentada. La aparición de las ondas es intermitente, es decir, lo primero que se observa al aumentar  $\Delta T$  (o lo último, al disminuirlo) son trenes de ondas; no una producción continua de oscilaciones. Se puede observar entonces cómo es la dispersión de uno de esos pulsos. En un diagrama espaciotemporal, se puede ver que una o muy pocas ondas nacidas cerca del extremo caliente forman un grupo de ondas (v. Fig. 19).

La inestabilidad es convectiva, al menos cerca del umbral, en el sentido de que se desarrolla y satura corriente abajo. Conforme se va aumentando la diferencia de temperaturas, el ángulo que enmarca la dispersión del grupo de ondas se va abriendo cada vez más, y los



Fig. 19. Trenches de ondas, cerca del umbral.

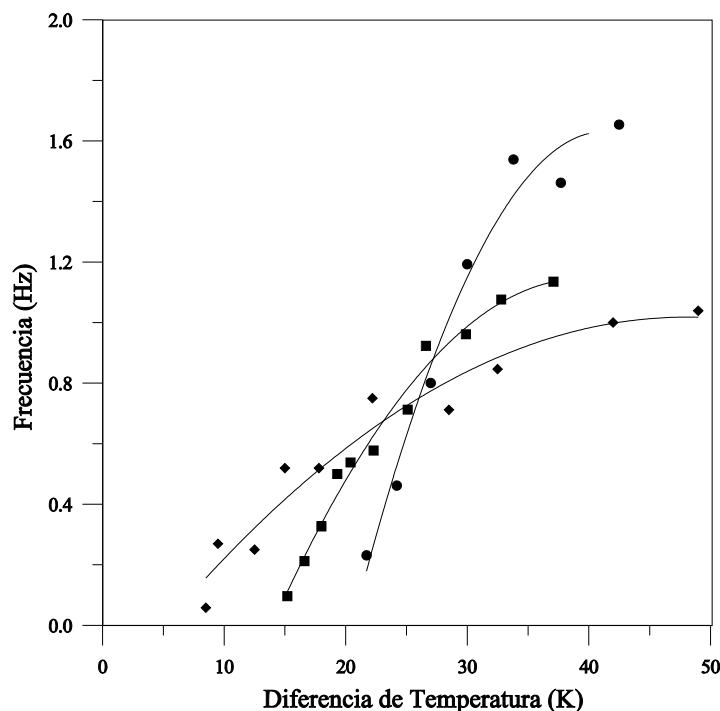


Fig. 20. Frecuencia media en función de la temperatura para tres profundidades: ■  $h=3.2$  mm; ●  $h=2.3$  mm; ◆  $h=5.1$  mm.

trenes de ondas se van haciendo más frecuentes, hasta que finalmente acaban por llenar el diagrama espaciotemporal completamente. Más adelante se mostrarán otros diagramas espaciotemporales con los que comparar la Fig. 19.

Por todo ello, para medir la temperatura umbral expuesta en la sección 4.3., se estudió el comportamiento de la "frecuencia media" en función de  $\Delta T$  (ver Fig. 20). Esa frecuencia media es el número de ondas por unidad de tiempo que se producen en un intervalo temporal muy largo - comparado con el período de las ondas-, pero el gráfico no ha de llevar a la conclusión de que el

número de onda sufre una variación tan grande, puesto que, como se verá al comparar la Fig. 19 con otros diagramas espaciotemporales lejos del umbral, es muy parecido en ambos casos.



## **5. EL FLUJO BÁSICO**

Puesto que el flujo básico no presenta ninguna estructura espacial, la ombroscopía no muestra ninguna característica relevante. La superficie se supone indeformable, puesto que la relación de aspecto es muy grande, salvo por el menisco que se forma junto a las paredes. Por lo tanto, de este estado se describirán únicamente la velocidad y la temperatura.

### **5.1. Mediciones de temperatura.**

El campo de temperaturas del flujo básico es difícil de medir. Por un lado, los termopares (capítulo 3) son sensores invasivos, puesto que hay que introducirlos en el fluido. La invasión no es solamente térmica (que es relativamente pequeña), sino que se altera el campo de velocidades. Como los termopares empleados son muy finos, esta perturbación es también muy reducida. Sin embargo, en la superficie del líquido siempre se forma un menisco al contacto con el termopar. El tamaño del menisco no depende del diámetro del cable, sino del ángulo de contacto, y poco se puede hacer para remediar esto. Las cosas se complican más porque las diferencias de temperatura para el flujo básico son pequeñas (menos de 1K entre el fondo y la superficie). Por tanto, las medidas de temperatura realizadas con un termopar cerca de la superficie han de ponerse entre paréntesis en cuanto a la precisión. Las sondas de infrarojos no son invasivas, pero por su tamaño no permiten tomar mediciones cerca de las paredes, sino sólo en la zona central.



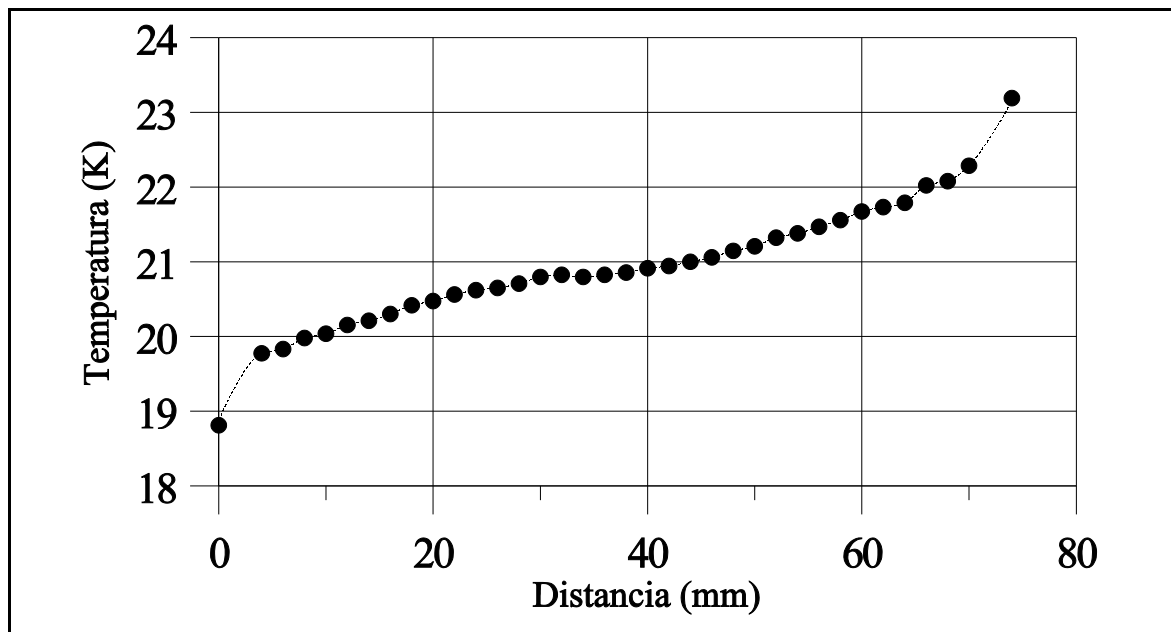


Fig. 21. Perfil de temperaturas en la superficie correspondiente al flujo básico, según la dirección del gradiente térmico.

En la Fig. 21 se muestra un perfil de temperaturas de la superficie según la dirección  $x^{**}$ , tomado con un termopar. Está claro que el gradiente de temperatura no se reparte uniformemente por el fluido. El cambio de temperatura es mucho más brusco cerca de los extremos; en la zona central, el gradiente local es aproximadamente 1/3 del aplicado entre las paredes fría y caliente. Esto tiene su importancia para comparar cuantitativamente los datos experimentales con los resultados obtenidos numérica o analíticamente, como se discutió en el capítulo 2.

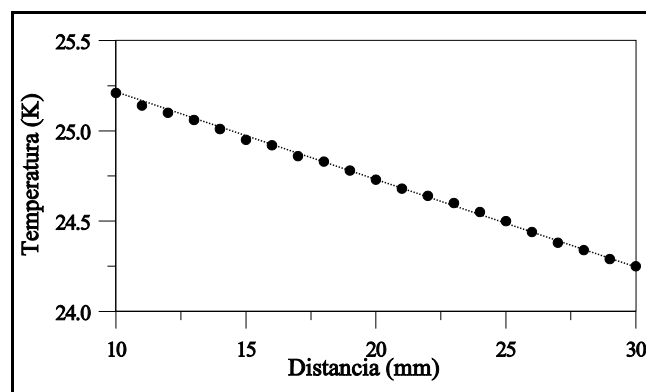


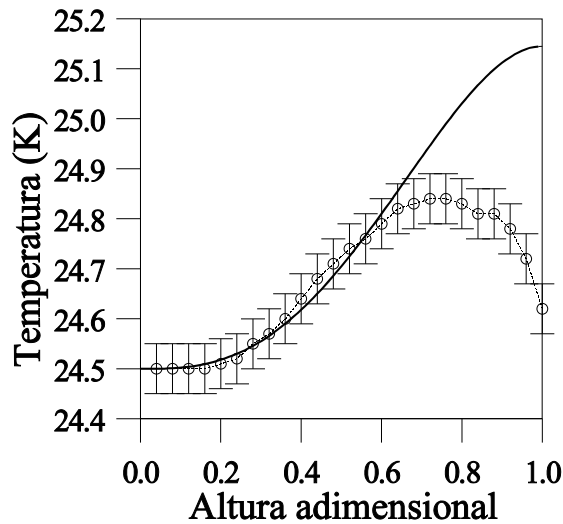
Fig. 22. Perfil de temperaturas en la zona central de la celda.

En la zona central, el gradiente es aproximadamente uniforme. Con las mediciones realizadas con una sonda infrarroja es aún más manifiesto (Fig. 22). Por lo tanto,

---

*\*\*NOTA: En la toma de datos experimentales, con cierta frecuencia se cambió de celda, se invirtió la dirección, se intercambiaron las piezas calentadoras y se tomaron diversas medidas para comprobar la ausencia de defectos. Por eso, el sentido del gradiente puede cambiar de una figura a otra. Sólo se hará referencia expresa a esto si hay posibilidad de confusión.*

con respecto a la temperatura, una celda con relación de aspecto igual o superior a 20 -como las que se muestran- puede considerarse infinita, y sólo en una zona cerca de los extremos el gradiente deja de ser lineal.



El perfil de temperaturas según la dirección vertical  $z$  es difícil de obtener, como se ha dicho. En la Fig. 23 se recogen las mediciones realizadas con un termopar. Las barras de error son una estimación. Los datos concuerdan bien con el perfil analítico <sup>[31]</sup> excepto cerca de la superficie, donde el flujo indudablemente está afectado por el menisco. La superficie (altura adimensional=1) está a 2.4 mm del fondo.

Fig. 23. Perfil vertical de temperaturas.

## 5.2. El perfil de velocidades.

El perfil de velocidades del flujo básico ya había sido medido por D. Villers y J.K. Platten <sup>[39]</sup>. Sin embargo, en su experimento la relación de aspecto era mucho más pequeño y, por otro lado, el número de Prandtl era diferente. Es interesante estudiar la velocidad del flujo básico, entre otros motivos, para discernir si existe alguna zona de la celda donde los efectos de las paredes sean negligibles y  $v_x(z)$  sea constante, es decir, si la relación de aspecto puede considerarse infinita. Como se ha visto, cerca de los extremos frío y caliente el gradiente térmico es mayor, y por lo tanto es de esperar que en esas zonas la velocidad sea mayor que en el centro de la celda. Asimismo, no hay ningún indicio que haga pensar en la existencia de una componente vertical no nula de la velocidad, excepto obviamente cerca de las paredes. Además, el perfil de velocidades del flujo básico obtenido sirve para determinar la concordancia de las condiciones experimentales con las de la solución analítica.

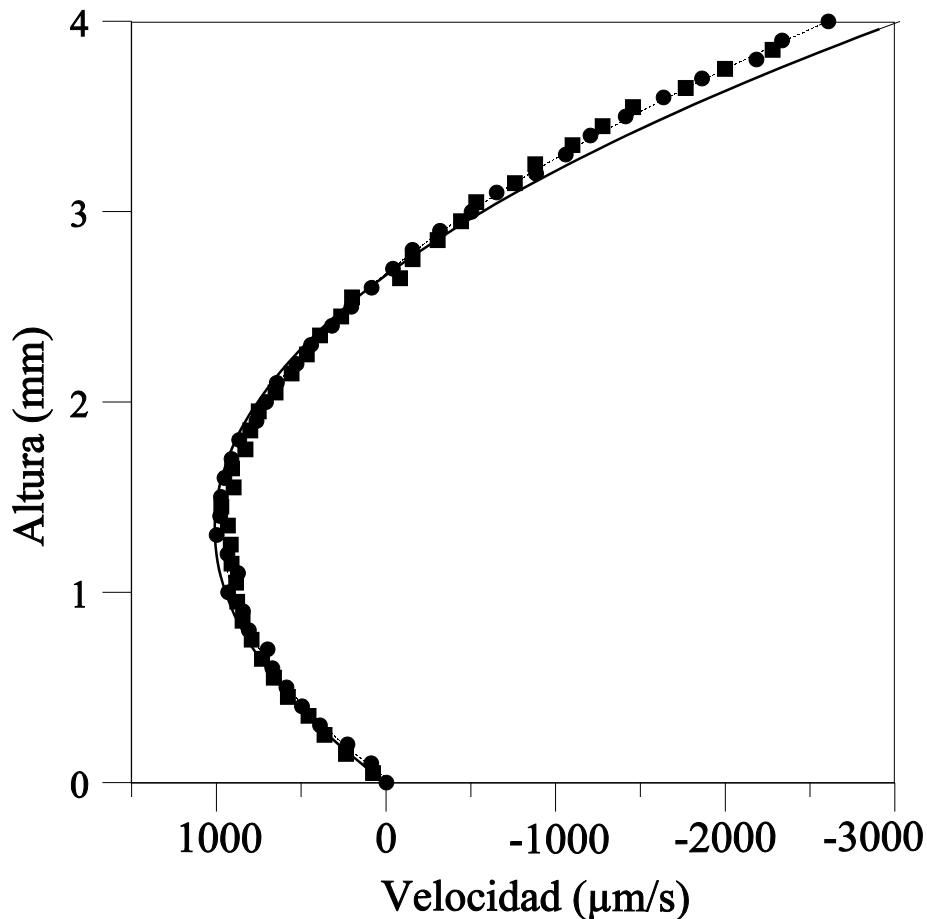


Fig. 24. Perfil de velocidad según la vertical:  $v_x(z)$ . ● y ■: datos experimentales tomados en dos momentos diferentes. El error -tanto en la altura como en la velocidad- es aproximadamente el tamaño del símbolo usado. Línea discontinua: ajuste de las dos series de datos experimentales. Línea continua: la solución analítica (12). La diferencia de temperaturas entre los extremos frío y caliente es de  $\Delta T=4.4$  K, y la altura de la capa de fluido es de 4 mm. El perfil está tomado en el centro de la celda ( $x=34$  mm). La serie ● está tomada en el eje central ( $y=0$ ) y la serie ■ en  $y=1.5$  mm.

Las medidas experimentales ajustan muy bien al perfil teórico (12), como se muestra en la Fig. 24. Este comportamiento subsiste incluso para diferencias de temperatura más elevadas ( $\Delta T=8$  K, por ejemplo), y sólo se encuentran ligeras diferencias en la superficie. Ello puede ser debido a pequeñas contaminaciones (que afectan notablemente a la tensión superficial). El acuerdo es igual de bueno para diferentes alturas, siempre que los efectos de la gravedad puedan despreciarse frente a los termocapilares. En el caso de que las fuerzas dominantes sean las gravitatorias, el perfil de velocidades parece ajustar también a la fórmula analítica (11) correspondiente <sup>[50]</sup>. Este flujo es estable a corto y a largo plazo (las dos series representadas en la Fig. 24 están tomadas con dos horas de diferencia, y la velocidad en un punto dado no varía con el tiempo en escalas del orden de un segundo o mayor). Tampoco

varía con la dimensión transversal  $y$ , al menos cerca del eje de la celda. El montaje experimental dispuesto para medir las velocidades no permite apartarse mucho de esa zona, por lo que no se pudieron obtener perfiles de velocidad completos según el eje  $y$ . Aun así, una de las dos series de datos de la Fig. 24 fue tomada a 1.5 mm del eje de la celda, y -como se ve- las diferencias son inapreciables.

Visto que la velocidad horizontal es la esperada, cabe preguntarse en qué zona de la celda es correcto suponer que el flujo guarda esa estructura, pues claramente cerca de las paredes no puede mantenerse. A tal efecto, se obtuvieron varios perfiles de la velocidad

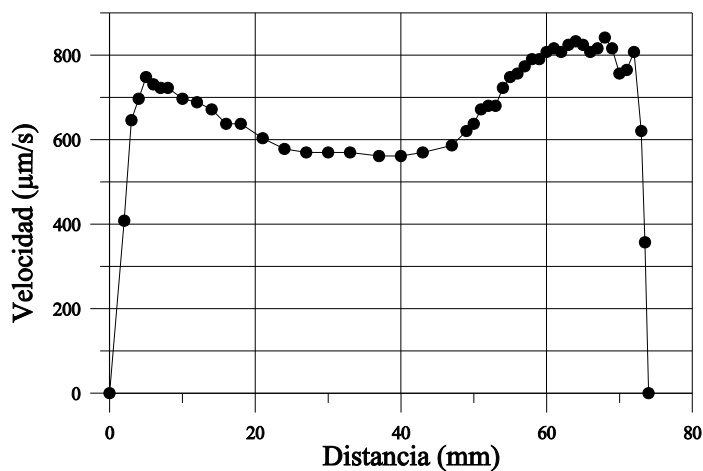


Fig. 25. Perfil de velocidad  $v_x(x)$ . La longitud de la celda es de 74 mm, estando el extremo caliente situado a la derecha. La profundidad del fluido es de  $h=2.5$  mm y este perfil se tomó a una altura de 0.9 mm desde el fondo. La diferencia de temperaturas es  $\Delta T=4$  K.

horizontal según la dirección del gradiente ( $y$ ), a diferentes alturas. Todos tienen un aspecto similar; uno de ellos se muestra en la Fig. 25. Se observa claramente que cerca de las paredes fría y caliente (hasta unos 2 cm de distancia aproximadamente) la velocidad es mayor, pero en una zona central de la celda relativamente

amplia (unos 3 cm) la velocidad horizontal es casi constante. Por lo tanto, se puede considerar que el flujo en esa porción de la celda no es influenciado por las condiciones de contorno; dicho de otra manera, la relación de aspecto es, a estos efectos, infinita.

Es de esperar que la componente vertical de la velocidad sea nula excepto cerca de los extremos frío y caliente. Allí, el fluido sube -o baja- tan pronto como se establece una diferencia de temperatura, por pequeña que sea. El perfil de la velocidad vertical a lo largo del eje de la celda  $v_z(x)$  (Fig. 26) es interesante para tener una idea del orden de magnitud de la velocidad ascensional cerca de las paredes. La medición se hace complicada cerca de las paredes; de hecho los ceros de velocidad en los extremos de la celda indican simplemente que

no se recoge señal, de modo que no representan realmente una medición. Es remarcable también que la zona donde el fluido posee cierta velocidad ascensional es relativamente pequeña (obsérvese que está limitada a los 5 mm más próximos a las paredes, aproximadamente). En el resto de la celda, la componente vertical de la velocidad es despreciable.

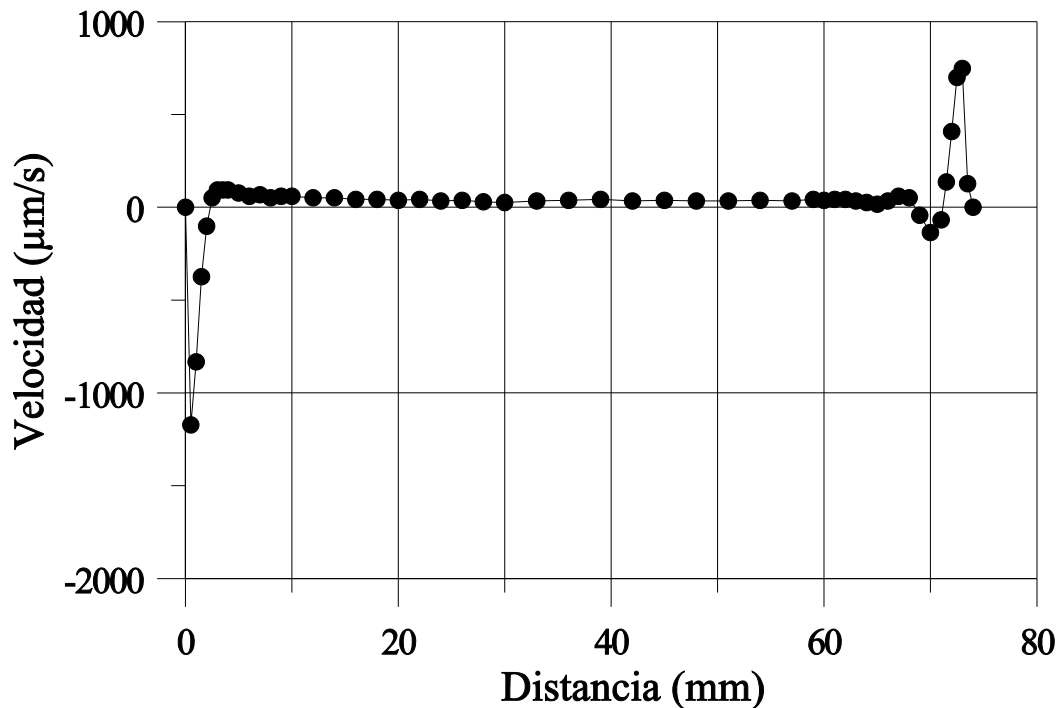
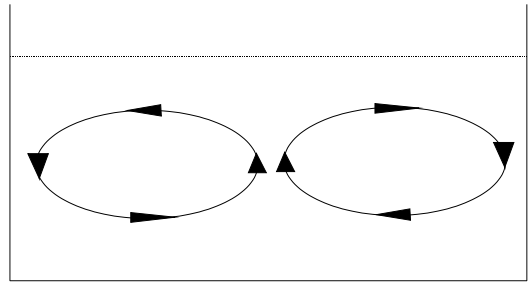


Fig. 26. Perfil de velocidad  $v_z(x)$  a lo largo del eje de la celda. La celda tiene 74 mm de longitud. La profundidad de la capa de fluido es de 3.6 mm y este perfil se tomó a una altura  $z=2.75$  mm en el eje central ( $y=0$ ). La diferencia de temperaturas entre los extremos es  $\Delta T=4.0$  K. El error de las mediciones es aproximadamente igual al tamaño del símbolo empleado. El extremo caliente está a la derecha.

Sin embargo, la velocidad vertical no es cero. En todas las mediciones realizadas, a diferentes alturas, con varios gradientes de temperatura y bajo distintas condiciones, se encuentra que existe una velocidad ascensional muy pequeña en el eje central de la celda, de aproximadamente  $50 \mu\text{m/s}$ . El error estimado es de  $\pm 30 \mu\text{m/s}$ , y se descartó un error sistemático o del aparato de medida, por lo que hay que suponer que las mediciones responden realmente a una pequeña velocidad vertical del líquido. Evidentemente se puede despreciar, viendo que es de un orden de magnitud dos veces menor a las velocidades típicas

observadas. Una conjetura razonable es que exista una circulación secundaria entre las paredes laterales. Como la diferencia de temperaturas impuesta se escoge de manera que la temperatura media del fluido sea igual a la temperatura ambiente, la superficie (donde la temperatura es mayor) está más caliente que las paredes, así que las fuerzas termocapilares bien pudieran dar



*Fig. 27 Sección transversal de la celda (según un plano  $x=cte.$ ): esquema de la circulación secundaria conjeturada.*

lugar a una circulación secundaria transversal (Fig. 27). Como ya se indicó, es difícil medir la velocidad cerca de las paredes, de modo que no fue posible comprobar la existencia de esta circulación residual. Dado que su magnitud es muy pequeña, en lo sucesivo se despreciará.

\*            \*            \*

En suma, el flujo básico se ajusta cuantitativamente a la solución analítica hallada (capítulo 2) dentro de las limitaciones del montaje experimental. Es interesante destacar que la relación de aspecto puede considerarse infinita, al menos en el centro de la celda, y que la hipótesis que se hizo para hallar una solución analítica de distancia infinita entre los extremos es alcanzable experimentalmente en esta etapa, donde las diferencias de temperatura (y consecuentemente  $Ma$  y  $Ra$ ) son pequeñas.



## 6. LA INESTABILIDAD PRIMARIA

Recordemos que en toda la región de los parámetros explorada el flujo básico pierde su estabilidad dando paso a una estructura de rollos transversales al gradiente térmico (con el eje en la dirección  $y$ ), sin ninguna dinámica aparente. En este capítulo se describen cuantitativamente estos rollos (temperaturas, velocidades). Empezaremos prestando atención a su nacimiento, dado el interés que reviste el mecanismo físico subyacente y cuya comprensión es aún incompleta.

La primera observación de esta inestabilidad, que no había sido predicha por los estudios teóricos, fue publicada en <sup>[47]</sup>, con ombroscopías como las que se han mostrado (Fig. 15). Casi a la vez, y de manera independiente, Schwabe y sus colaboradores <sup>[51]</sup> dieron cuenta de una estructura similar, en una geometría rectangular, pero las imágenes que se muestran son fotografías de larga exposición para obtener la trayectoria de las partículas sembradas en el flujo. Con ello se consigue tener una idea del campo de velocidades, si bien se carece de datos cuantitativos. Las medidas con velocimetría láser-Doppler, que se presentan en una sección de este capítulo, constituyen un buen complemento a la ombroscopía.

### 6.1. La aparición de la nueva estructura del flujo.

La ombroscopía de la Fig. 28 fue obtenida aumentando poco a poco la diferencia de temperaturas  $\Delta T$  hasta que se observaban claramente los rollos. Esa estructura es estacionaria. Llama la atención el hecho de que los rollos no aparezcan en toda la celda a la vez, como



ocurre en la convección de Rayleigh-Bénard, por ejemplo, o como veremos que pasa con la inestabilidad ondulatoria. Aunque en la ombroscopía es difícil de traducir el brillo de la imagen a una medida cuantitativa, parece que efectivamente la amplitud de los rollos decrece conforme nos alejamos del borde caliente (Fig. 29). Esto se ve mejor si uno observa el aspecto de la estructura conforme se va aumentando la diferencia de temperatura: al principio sólo se observan rollos cerca de la pared caliente, y luego se van extendiendo por toda la celda.

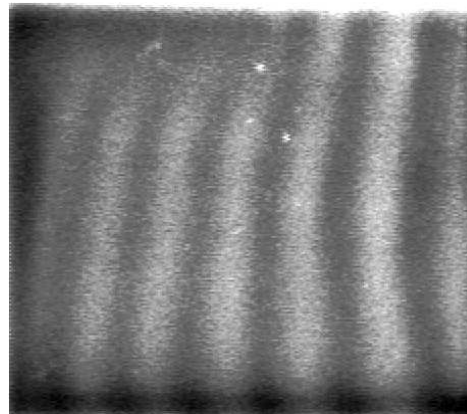


Fig. 28. Nacimiento de los rollos. El extremo caliente está a la derecha.

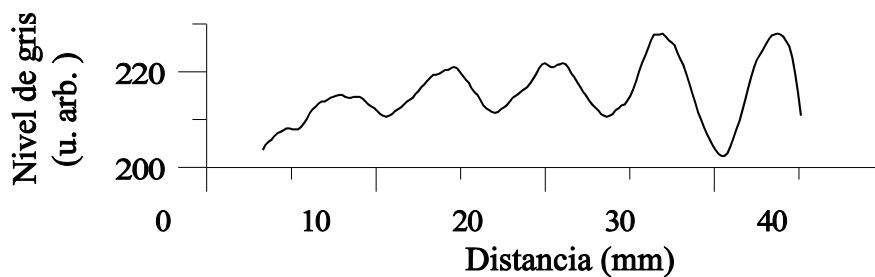


Fig. 29 Nivel de gris en función de la distancia en una ombroscopía correspondiente a la situación de la Fig. 28.

Para estudiar cuantitativamente este fenómeno, en otra sección de este capítulo se proporcionan mediciones de la velocidad. La difusión de los rollos parece deberse a un proceso de "difusión" de la inestabilidad desde la pared caliente.

La ombroscopía lateral (Fig. 30) es intrigante. Los rollos parecen estar inclinados en el sentido de la corriente. La longitud de onda es aproximadamente el doble de la profundidad,



Fig. 30. Ombroscopía lateral de la totalidad de la celda, que mide 74 mm. (la iluminación no es homogénea). El extremo caliente está a la derecha. La profundidad de la capa de fluido es de 2.5 mm.

pero la forma de los rollos no es la habitual, sino que están deformados. E. Guyon<sup>[52]</sup> sugirió una posible explicación de esta apariencia. En experiencias de Rayleigh-Bénard, Guyon observó que la inclinación de la celda provoca una aniquilación de los rollos que giran en contra del flujo a gran escala que aparece. En efecto: una pared fría o caliente, si está inclinada,

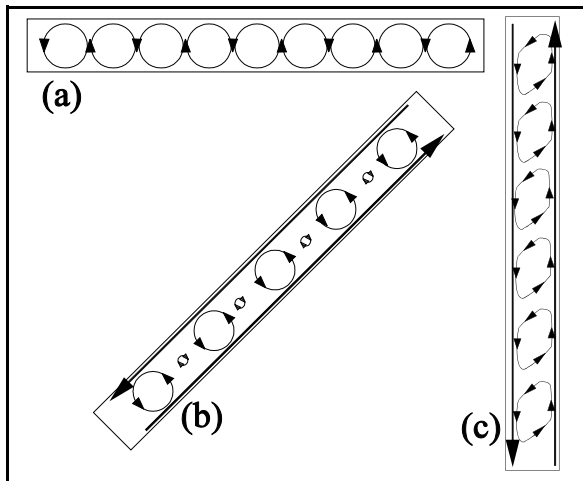


Fig. 31 Una experiencia de Rayleigh-Bénard (a); al inclinarse la celda (b), los rollos contrarrotatorios se hacen más débiles; finalmente, sólo quedan los rollos que giran a favor de la corriente, deformados (c).

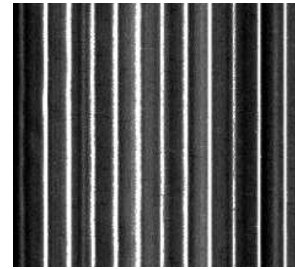
da lugar a un flujo paralelo a la pared tan pronto como se establece la diferencia de temperaturas (como ya se ha visto en el caso de los extremos de la celda en este experimento). En una experiencia de Rayleigh-Bénard, al inclinarse la celda se establece una circulación cerrada global, un único rollo superpuesto a los rollos convectivos habituales. Esta circulación entra en competición con los rollos "contrarrotatorios" a la vez que refuerza los que giran en el mismo sentido (Fig. 31, b). Este efecto se acentúa conforme se va inclinando la celda, hasta que finalmente los

rollos "contrarrotatorios" son aniquilados (Fig. 31, c). Los rollos que quedan giran todos en el mismo sentido y el flujo paralelo a las paredes los deforma.

Es muy sugerente la similitud entre el esquema de la Fig. 31 (c), y la ombroscopía lateral (Fig. 30). La forma de los rollos en ambos casos es muy semejante. Schwabe<sup>[51]</sup> observó en su experiencia que todos los rollos parecen rotar en la misma dirección. Ninguno de los métodos empleadas aquí permite, desgraciadamente, establecer este extremo con absoluta

certeza; con la técnica de seguimiento de partículas podría obtenerse una imagen global del campo de velocidades, pero la profundidad de la capa de fluido es tan pequeña que parece difícilmente factible. Más adelante se indicarán otros indicios que apuntan efectivamente la probabilidad de que los rollos giren todos en la misma dirección.

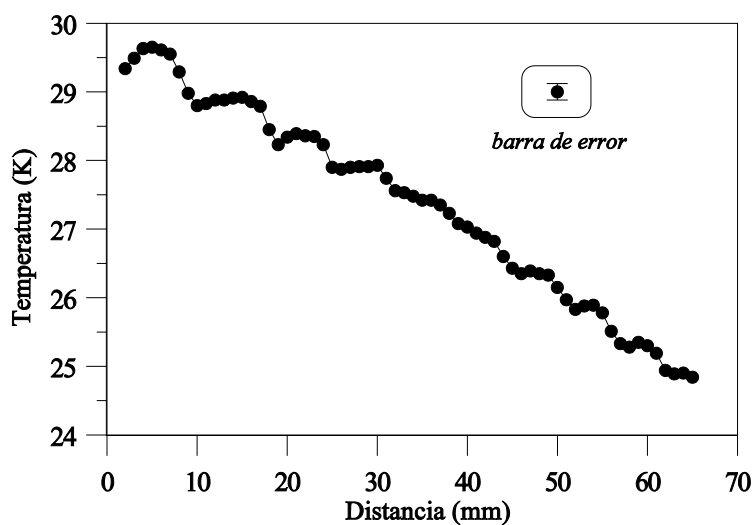
Finalmente, una rápida ojeada al diagrama espaciotemporal de los rollos (Fig. 32) indica que -cerca del umbral- son inmóviles. Más adelante se comentará cómo se pierde esa estabilidad al aumentar  $\Delta T$ .



*Fig. 32. Diagrama espaciotemporal de los rollos cerca del umbral.*

## 6.2. El perfil de temperaturas.

Se muestra un perfil de temperaturas, tomado cerca de la altura media de la capa y cerca del eje central, paralelo al gradiente (Fig. 33). Las mediciones de velocidad son más útiles para caracterizar cuantitativamente este estado; por lo tanto no se prestará más atención a estos datos que para resaltar la amplitud de los rollos (unos 0.5 K) y el hecho de que son más potentes cerca de los extremos, tanto frío como caliente (donde, como vimos, el gradiente era mayor).



*Fig. 33. Perfil de temperaturas a lo largo del eje central de la celda, que tiene 6.4 cm. de largo, aproximadamente a media altura. (La profundidad de la capa de líquido es de unos 2.5 mm)*

### 6.3. El campo de velocidades.

Los perfiles de la componente vertical de la velocidad según la dirección del gradiente son probablemente los más apropiados para ilustrar la aparición de los rollos y su magnitud, así como algunas características adicionales. Por eso, en esta sección se recogen sólo gráficos de  $v_z(x)$ . En la componente horizontal de la velocidad también se observan los rollos, pero están superpuestos a un campo de velocidades, el flujo básico, mientras que -como se puso de manifiesto en el capítulo anterior- la velocidad vertical del estado de equilibrio es nula. Baste decir que la componente horizontal de la velocidad de los rollos es del mismo orden que la vertical, como era lógico esperar.

Si bien las mediciones en el eje central de la celda, a media altura sobre la capa de líquido, son relativamente fáciles de obtener, no ocurre lo mismo cerca de la superficie, o del fondo, o si se desplaza la zona de medida hacia las paredes laterales. Para obtener, por tanto, una idea de la organización espacial es necesario recurrir a otras técnicas no locales, como por ejemplo la ombroscopía. Lo mismo cabe decir si se quiere estudiar la dinámica temporal del flujo (que en este caso es trivial).

Antes de presentar los resultados obtenidos, es del caso una pequeña digresión para comentar un trabajo anterior de D. Villers y J.K. Platten <sup>[39]</sup>. En ese artículo se recogen una serie de experimentos y de simulaciones numéricas sobre la convección de Marangoni en una capa de fluido. El número de Prandtl escogido es 4 (correspondiente a la acetona), a fin de reducir el tiempo de cálculo en el ordenador. La relación de aspecto, sin embargo, era pequeña (menor o del orden de 10). Este parámetro se escogió así por razones de continuidad con otros experimentos y estudios, de los cuales muchos de ellos se situaban en el ámbito de la microgravedad y de las experiencias en el espacio <sup>[20]</sup>. Del experimento resultó el hallazgo de que el flujo básico perdía su estabilidad formando tres rollos. Sin embargo, esto no es en absoluto concluyente. En efecto: como hemos visto, hay dos zonas (cerca de cada pared) donde la solución analítica no es válida (el fluido lleva cierta velocidad ascensional). Estas zonas son de un tamaño aproximado de dos o tres veces la altura. En la Fig. 26 se observa que cerca de la pared caliente la tendencia a formarse un rollo cerrado en esa zona es acusada. Puede argumentarse, pues, que el hecho de que la celda muestre tres "rollos" al aumentar la diferencia de temperaturas entre las paredes no es cuestión sino de un efecto lateral, que por casualidad

tiene la misma dimensión que la zona central de la celda libre de esa influencia, con lo que se obtiene esa apariencia. Por otro lado, las simulaciones numéricas realizadas por los autores mostraban que efectivamente el flujo básico perdía su estabilidad en forma de rollos.

En las conclusiones de ese trabajo -cuya lectura es interesante para situarse en el contexto las mediciones que se presentan aquí- se apuntaba el interés de posteriores investigaciones sobre esa cuestión, que podría plantearse así: ¿puede conseguirse una relación de aspecto infinita? Lo que se intentaba dilucidar era, en suma, si la transición flujo básico→rollos→convección dependiente del tiempo, que se recogía en ese artículo, no sería en realidad un artificio experimental debido a la pequeña relación de aspecto; más acorde con los estudios teóricos era la pérdida de estabilidad en forma ondulatoria. Por las implicaciones en varios contextos de la situación tratada (algunos se resumieron en la introducción), el conocimiento más exacto de esa transición tiene un interés obvio.

De hecho se esperaba que una relación de aspecto grande (20~30) resultara en la desaparición de la etapa de los rollos en la secuencia de bifurcaciones; o, al menos, en que los rollos en la porción central de la celda tuvieran una amplitud lo suficientemente pequeña como para que su existencia pudiera ser ignorada en comparación con el flujo básico.

Sorprendentemente, esto no es así. Para que la velocidad del flujo básico sea la misma hay que ir aumentando  $\Delta T$  a la par que la relación de aspecto. Como el perfil de temperaturas en la superficie del flujo básico no cambia de forma, persisten esas dos zonas cerca de los extremos donde el gradiente es mayor. Los rollos vuelven a invadir la celda antes de que las ondas hagan su aparición. El escenario de la Fig. 34 es el mismo para todo el rango de parámetros explorado.

Obsérvese cómo los rollos parecen irse "difundiendo" desde la pared caliente, con una longitud característica de difusión que es función de la temperatura, hasta que para un cierto valor de  $\Delta T$  la amplitud de los rollos se satura (Fig. 34, c). Es remarcable la similitud con un estudio, ya clásico, realizado por J.E. Wesfreid, P. Bergé y M. Dubois<sup>[53]</sup> sobre convección de Rayleigh-Bénard inducida por debajo del número de Rayleigh crítico.

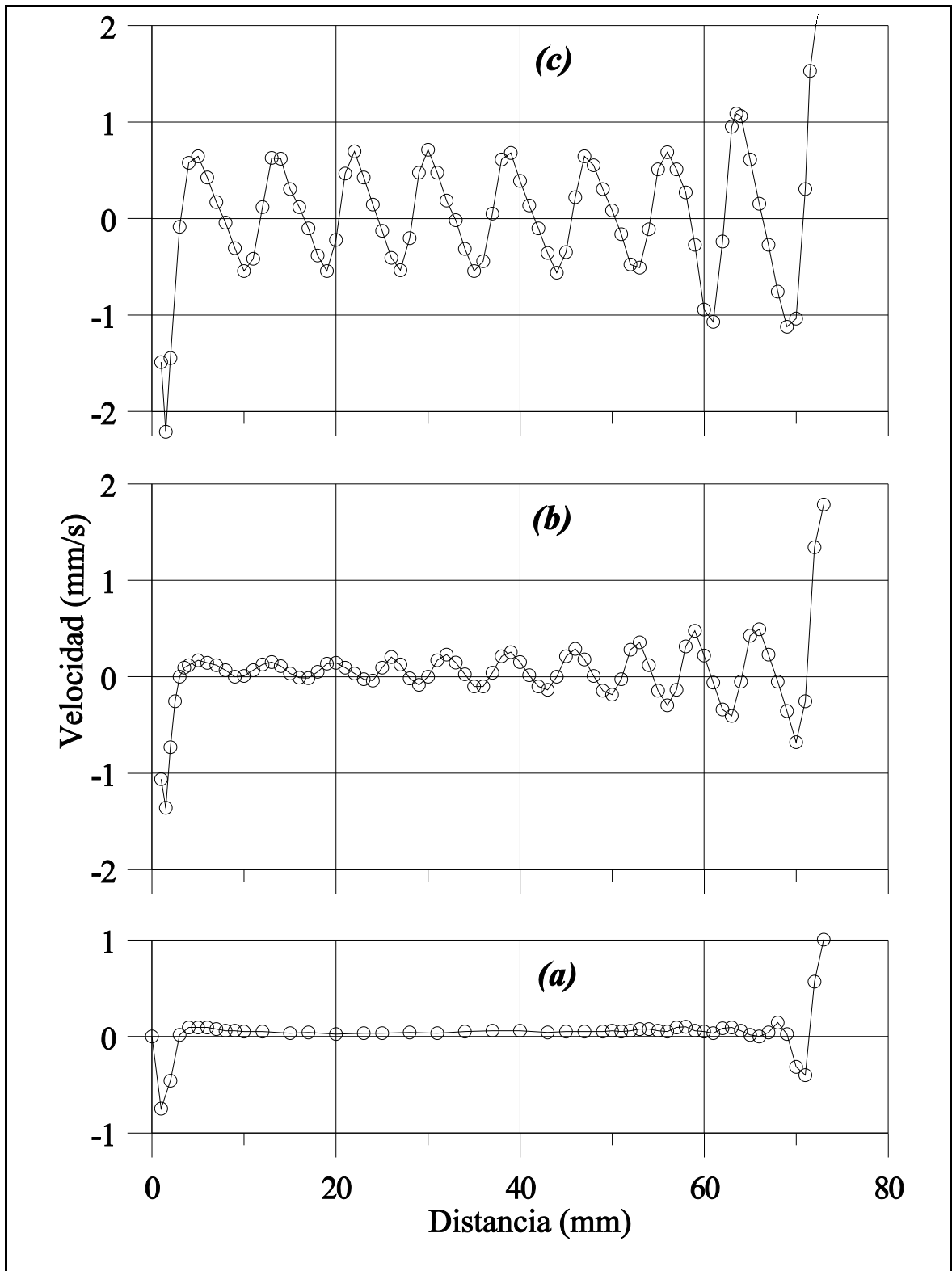


Fig. 34. Perfiles de velocidad (componente vertical) según la dirección del gradiente térmico -el extremo caliente está a la derecha. La profundidad de la capa de líquido es de 3.2 mm y las mediciones se realizaron a una altura de 2.4 mm sobre el fondo, en  $y=0$ . El tamaño de los símbolos empleados es aproximadamente el error en la velocidad. La diferencia de temperatura aplicada entre los extremos es: (a): 4K, (b): 8 K, (c): 12K. Nótese que los tres gráficos están representados a la misma escala.

A tal efecto, en un experimento de convección se estableció una diferencia de temperatura superior a la crítica en un extremo de la celda, mientras que en el resto no se alcanzaba ese valor. El resultado es que en la zona donde  $Ra > Ra_c$  aparecen rollos convectivos, que se difunden hacia la zona donde  $Ra < Ra_c$ . El término difusión está justificado; la amplitud de los rollos decrece exponencialmente con la distancia. El valor de la longitud característica estaba predicho por la teoría, y es uno de los coeficientes de la ecuación fenomenológica de Ginzburg-Landau que se emplea para describir ese fenómeno <sup>[54]</sup>. Con sólo dos o tres puntos, como tenemos aquí, no hay suficiente como para calcular ese parámetro, pero la situación es completamente paralela: si bien el mecanismo es diferente, los rollos invaden la celda empezando desde un extremo siguiendo un proceso similar.

La forma de los rollos en la Fig. 34, c es otro indicio de que giran todos en la misma dirección. Si ese fuera el caso, el perfil esperado es un diente de sierra, aproximadamente. El resultado experimental no es concluyente, pero la similitud es marcada. (Obsérvese que en cada rollo hay más puntos en un lado que en el otro, y las velocidades fueron tomadas a intervalos de distancia regulares).

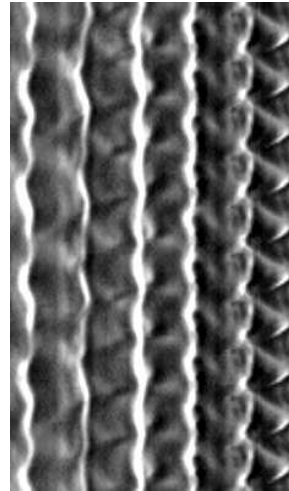
Otro aspecto que queda de manifiesto en la Fig. 34 es el aumento de la longitud de onda de los rollos conforme sube la diferencia de temperaturas. Para  $\Delta T = 12$  K (Fig. 34, c) la amplitud ya ha saturado, y un gradiente mayor no influye ya en la longitud de onda ni la velocidad aumenta significativamente. Simplemente, al alcanzarse un cierto valor la estructura se vuelve inestable.

#### **6.4. La pérdida de estabilidad de los rollos.**

Hay que conformarse con la explicación fenomenológica, puesto que si ni siquiera este estado era contemplado en la teoría, difícilmente cabe un estudio de su estabilidad. Como se apuntó, el valor umbral para la siguiente bifurcación (capítulo 4.3., Fig. 17) es mayor que el predicho por la teoría para las ondas hidrotermales de Smith y Davis.

La inspección visual mediante la ombroscopía revela que los rollos comienzan a oscilar. Las mediciones de velocidad muestran que en un punto dado la velocidad no es

constante a lo largo del tiempo. Posteriormente, aparecen en el diagrama espaciotemporal unos trazos inclinados cerca de la pared caliente: los rollos comienzan a moverse, y esa perturbación viaja en la dirección del gradiente (Fig. 35)<sup>\*\*\*</sup>. En este diagrama no queda del todo claro este punto, manifiesto en la observación de la ombroscopía desde arriba: en cuanto aparece una estructura viajera, ésta recorre toda la celda (Fig. 19).



*Fig. 35. Diagrama espaciotemporal cerca del umbral de la inestabilidad. El extremo caliente está a la derecha. Los rollos allí han comenzado a moverse, y la perturbación se transmite a toda la celda. En la parte izquierda se ve cómo los rollos oscilan.*

Un  $\Delta T$  un poco mayor, y sólo se observan ondas que recorren la celda en toda su longitud. Al parecer, las ondas no son sino estos rollos que ahora se hacen viajeros.

\*            \*            \*

En conclusión, podemos afirmar que esta etapa del proceso está caracterizada básicamente, al menos en lo que se refiere al valor de las variables más relevantes: perfiles de velocidades y amplitud de las oscilaciones de temperatura<sup>[55]</sup>. Quedan algunos puntos por aclarar: establecer definitivamente que el sentido de giro de los rollos es el mismo, por ejemplo, o -con más datos experimentales- calcular la longitud característica de difusión del proceso de formación de los rollos.

Sin embargo, el aspecto más importante que queda por explicar es por qué en los análisis teóricos no se obtiene este estado. Al parecer, el camino a seguir es incorporar las paredes laterales (los extremos frío y caliente) y dejar que el gradiente de temperatura en la superficie tome el valor establecido por el flujo, en vez de imponer  $\beta = \text{constante}$ . Volveremos sobre este punto en el último capítulo.

Una última llamada de atención. La amplitud de los rollos (la velocidad máxima) es tan grande que no puede ser despreciada frente al flujo básico; es del mismo orden de

---

<sup>\*\*\*</sup> *Los diagramas espaciotemporales de las Figuras 32 y 35 fueron obtenidos por J. Burguete.*



magnitud: véase la Fig. 24 y la Fig. 34. Ciertamente, la velocidad impuesta por los rollos es menor que la del flujo básico subyacente, pero no es posible considerarlos como una pequeña perturbación o ignorarlos sin más.

## **7. LA ESTRUCTURA ESPACIOTEMPORAL DE LAS ONDAS**

En este capítulo se trata de la inestabilidad secundaria, que es una estructura ondulatoria -como quedó dicho al describir la pérdida de estabilidad de los rollos-. Pero antes de la exposición de los resultados es necesaria una advertencia preliminar. El tratamiento teórico, como se recordará (capítulo 2), predice que el flujo básico sufre una transición, si la diferencia de temperaturas es lo suficientemente elevada, y aparecen unas ondas [Gers.][SD]. Puesto que los cálculos proporcionan bastantes datos acerca de esas ondas (la velocidad, el número de onda, la dirección de propagación, ...) cabe la tentación de establecer una comparación directa entre las observaciones experimentales y los estudios teóricos citados. De hecho, se hará referencia abundante a ellos. Sin embargo, tal comparación debe ser correctamente situada en su contexto. La existencia de un estado "intermedio" entre el flujo básico y las ondas pone en tela de juicio el análisis de estabilidad realizado. Los rollos, como se ha visto, no pueden ser pasados por alto; su amplitud es del mismo orden de magnitud que la del flujo básico. No es posible establecer en qué grado afecta esto a los trabajos teóricos. Tampoco se pretende con este comentario invalidarlos; detrás de cada análisis que resulta en una inestabilidad subyace un mecanismo físico que está actuando, quizá incluso a pesar de la existencia de los rollos.

La finalidad de la observación es poner en guardia frente a establecer sin más un paralelismo entre los resultados experimentales y los teóricos. Por eso, se evita el uso de la terminología empleada por esos autores, como "ondas hidrotermales", por ejemplo. Ciertamente que las ondas que se presentan aquí tienen un componente hidrodinámico y un indudable

constituyente de origen térmico, de modo que el nombre estaría plenamente justificado, pero para no caer en ese peligro se denominarán simplemente "ondas", sin más juicios acerca de su naturaleza.

### **7.1. El mecanismo de la inestabilidad.**

Si un estado pierde su estabilidad y deja paso a otro, lo primero que cabe preguntarse es por el mecanismo físico responsable de la bifurcación. Debe de existir algún proceso atenuado por la disipación para  $\Delta T$  pequeño que se vuelve inestable si la diferencia de temperatura (el parámetro de control) supera un cierto valor crítico.

De lo dicho más arriba puede concluirse que no se conoce este mecanismo en rigor. Aun así, recogemos aquí algunos razonamientos atrayentes para ayudar a la comprensión del fenómeno. Su validez deberá probarse, sin embargo, con un estudio ulterior que tenga en cuenta lo apuntado.

Cuando en un medio se producen ondas, atendiendo a su origen podemos distinguir dos tipos. El primero consiste en una fuente emisora local (oscilador) y un medio por el que se propaga la oscilación, que puede ser descrita entonces como una onda. La segunda posibilidad es una desestabilización global de todo el medio, y que esa inestabilidad viaje. De este tipo sería, por ejemplo, la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz (una capa límite que se torna inestable toda a la vez, en toda su extensión). En el caso que nos ocupa, más concretamente, veremos dos posibles mecanismos: uno, local (una oscilación cerca de la pared caliente), propuesto y desarrollado por H.L. Mancini [th] para una situación emparentada con ésta; y otro, descrito por M.K. Smith [Fluids], en el cual la inestabilidad se produce en toda la extensión de la capa de fluido. Bien pudiera ser que ambos actuaran a la vez y se reforzaran mutuamente.

La inestabilidad de la capa límite en la convección de Rayleigh-Bénard fue estudiada por Howard [Hw], quien calculó el tiempo característico de la oscilación. Fue observada experimentalmente por Pierre Bergé y Monique Dubois [BD]. El flujo de calor impuesto no puede ser transportado por el movimiento convectivo y se emiten "pulsos" de calor. Si la difusión térmica (el proceso que lleva a que estos pulsos se difuminen en el campo de

temperaturas existente en el fluido, haciéndose más anchos y perdiendo su identidad) es lenta comparada con el tiempo característico del movimiento convectivo, entonces se observarán ondas. El acoplamiento entre una difusión lenta y un transporte rápido es la interpretación propuesta por H.L. Mancini para dar cuenta de los fenómenos observados en un experimento reciente [th]. En nuestro caso, el tiempo de relajación térmico  $\tau = \frac{d^2}{\kappa}$  es de aproximadamente

70 s, mientras que la onda atraviesa la celda en unos 5 s aproximadamente. La extensión de tal mecanismo a la presente situación (capa límite vertical) no se ha llevado a cabo aún.

M.K. Smith [Fluids][c.p.] propone, en cambio, un mecanismo directamente relacionado con la tensión superficial. Si uno imagina una perturbación en cualquier lugar de la superficie (para simplificar, piénsese por ejemplo en una línea caliente perpendicular a la dirección del gradiente térmico) la tensión superficial la arrastrará hacia la zona más fría. Por continuidad, el fluido que está más abajo ascenderá. Si la perturbación no estuviera localizada en la superficie el resultado sería el mismo, porque se daría una estratificación inestable y el fluido caliente ascendería. En los cálculos numéricos que realizó, Smith encuentra que el acople entre el campo de temperaturas y el campo de velocidades es muy fuerte, y como resultado de la velocidad horizontal que lleva el fluido que asciende las ondas se desplazan con un cierto ángulo en la dirección *contraria* al gradiente térmico. A pesar de que en el experimento las ondas se desplazan en la dirección del gradiente, este mecanismo resulta plausible, y la diferencia entre el campo de velocidades básico que toma M.K. Smith y el que se obtiene (con rollos) pudiera ser la razón de la discordancia. De cualquier manera, el argumento deja claro que el transporte del pulso de calor en el medio no es pasivo, sino que puede ser amplificado.

Como se ve, el mecanismo responsable de la aparición de las ondas es una de las cuestiones que se dejan abiertas para un estudio posterior.

## **7.2. Particularidades del montaje experimental.**

Es necesario este breve apartado para indicar algunas modificaciones sobre lo expuesto en el capítulo 3. Todas las experiencias relevantes para este capítulo se hicieron con

una celda como la de la Fig. 14, cuyas dimensiones interiores interiores son 5 cm de ancho por 7 cm de largo. Las paredes y el fondo de la celda, como se dijo, son intercambiables, y se emplearon dos juegos, uno de aluminio y otro de plexiglas. El plexiglas tiene aproximadamente la misma conductividad térmica que el aceite de silicona, así que esas paredes pueden considerarse aproximadamente adiabáticas, mientras que el aluminio es un buen conductor del calor. El líquido empleado fue en todos los casos aceite de silicona PMS 5 (ver Tabla I, capítulo 3).

Como veremos, al ser tan grande la anchura de la celda en comparación con la longitud de onda (que es del orden del milímetro), el frente de onda no es coherente, sino que se rompe en varias porciones. Para obtener un frente de onda único en todo el ancho de la celda, se introduce una pequeña perturbación a fin de provocar que todo el frente de onda esté en fase. La perturbación introducida permite, además, forzar la frecuencia de las ondas (dentro de cierto intervalo), y se lleva a cabo de la siguiente manera. Se coloca un fino alambre de Nichrom ( $\varnothing=0.12$  mm) horizontalmente y en contacto con la superficie, perpendicular al gradiente térmico, cubriendo todo el ancho de la celda, muy cerca de la pared caliente (a unos 3 mm). Por ese alambre, cuya resistencia es de  $2.4 \Omega$ , se hace circular una corriente sinusoidal, de modo que se obtiene un calentamiento periódico sobre la superficie por efecto Joule. (El hilo está conectado a un generador de funciones digital a través de un amplificador, de manera que la corriente se puede controlar con gran precisión). Se muestra más adelante la diferencia entre las ondas espontáneas y las forzadas; la amplitud es prácticamente la misma, pero la fase es homogénea. Se puede escoger la frecuencia del forzado con gran facilidad, actuando sobre el generador de funciones. Este es un sistema empleado en otros experimentos [Gollub], y con ello es posible obtener la respuesta en frecuencia del medio.

Por otro lado, para establecer un  $\Delta T$  grande entre los extremos de la celda ya no resulta práctico elevar la temperatura de un extremo sobre la temperatura ambiente y reducir la temperatura del extremo opuesto (como se hizo hasta aquí a fin de que la temperatura media del líquido fuera aproximadamente la misma que la del ambiente). Típicamente se establecen unas temperaturas de  $35^\circ\text{C}$  y  $60^\circ\text{C}$ , aproximadamente, en las paredes fría y caliente. Aparte

de tener en cuenta la variación de los parámetros físicos del líquido como consecuencia de su dependencia con la temperatura, la consecuencia más importante es que la

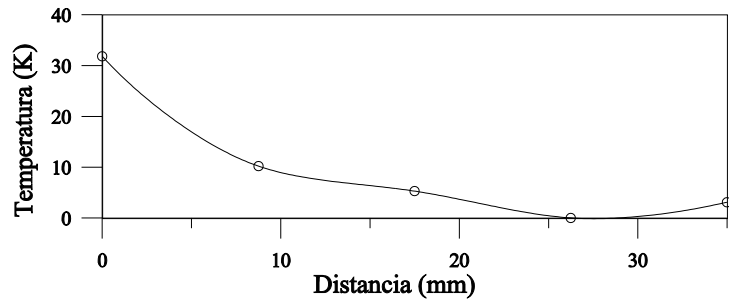


Fig. 36. Perfil de temperaturas en el fondo de la celda.

distribución de temperaturas en el fondo y las paredes de la celda ya no puede considerarse aproximadamente lineal. Una medición en la proción central de la celda arrojó el resultado que se muestra en la Fig. 36. Como se ve, cerca del extremo frío el gradiente de temperaturas se hace negativo, lo cual quiere decir que las ondas se aniquilarán.

### 7.3. Amplitud de las oscilaciones de temperatura.

Se habla de oscilaciones porque en esta sección se presentan las mediciones realizadas introduciendo un termopar inmóvil dentro del líquido, de modo que un registro temporal

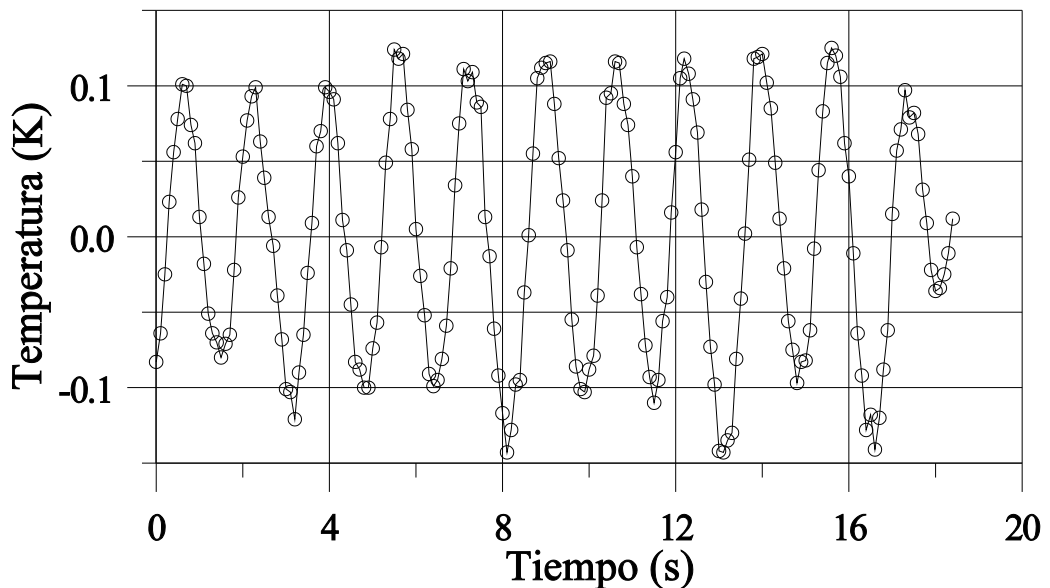


Fig. 37. Registro temporal de la temperatura en el centro de la celda a 0.3 mm por debajo de la superficie, una vez sustraído el valor medio. La diferencia de temperatura entre los extremos es de 21 K. La altura de la capa de fluido (aceite de silicona) es de 2.8 mm.

muestra el paso de las ondas (Fig. 37). La medición del tiempo característico de respuesta del termopar empleado (capítulo 3) permite despreciar cualquier retardo dinámico debido al sensor, a la vez que la frecuencia de muestreo puede aumentarse hasta obtener unos 10 puntos por período. Al registro hay que restarle la temperatura media del fluido más la deriva (del orden de las centésimas de grado) debida a la variación lenta de la temperatura en las piezas termostalizadas.

Estas mediciones se realizaron sistemáticamente y cubriendo toda la altura de la capa de líquido. De cada serie temporal, se calcula la transformada de Fourier, y de esa manera se obtiene la amplitud media a cada profundidad. Con eso puede uno hacerse una idea de la distribución espacial de las ondas: Fig. 38.

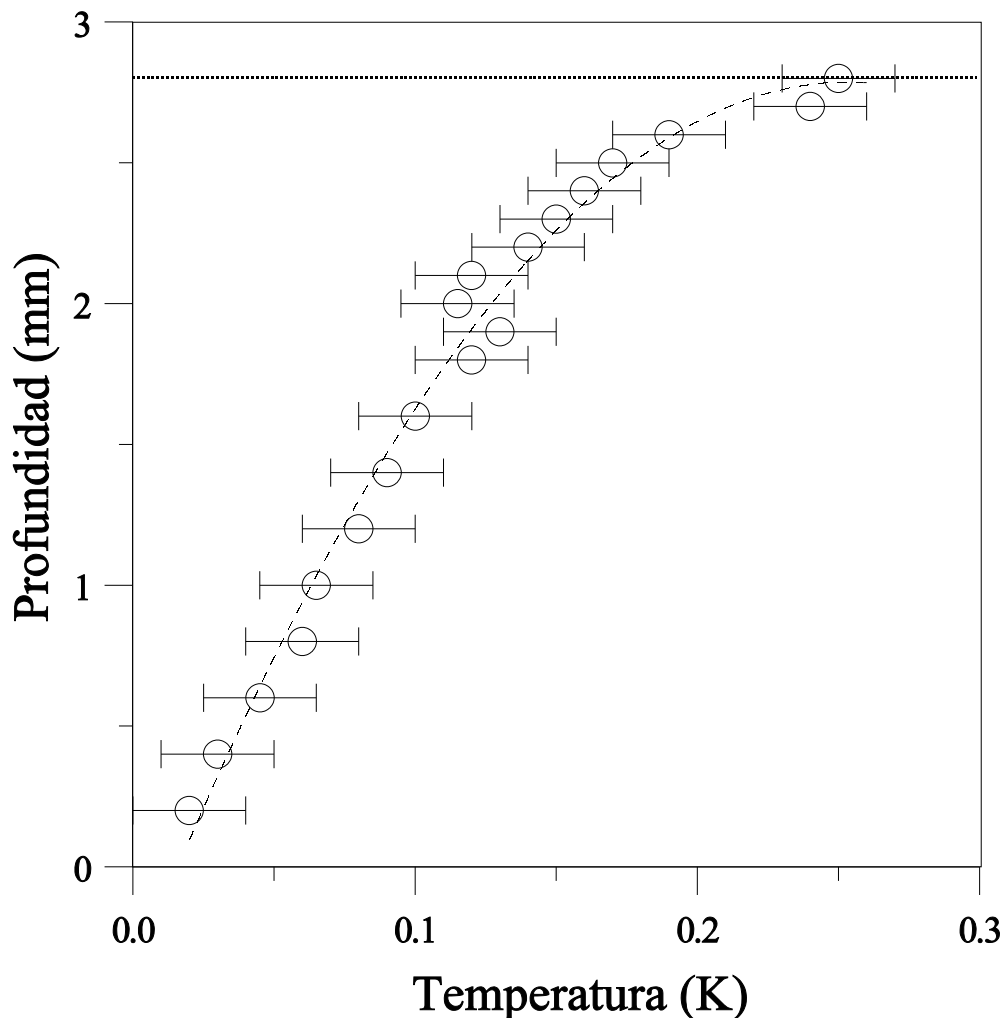


Fig. 38. Amplitud de las ondas en función de la profundidad. El error en la altura es aproximadamente igual al tamaño del símbolo empleado.

La línea horizontal de puntos de la Fig. 38 marca la superficie, a 2.8 mm de altura, mientras que la línea discontinua es un ajuste polinómico que no tiene más significado que el proporcionar una ayuda visual (no responde a ningún otro concepto). Las barras de error se calcularon con la anchura a media altura del pico de la transformada de Fourier. Las mediciones llegan hasta 0.2 mm del fondo; más cerca las oscilaciones son tan pequeñas (si existen) que son indistinguibles del ruido. Las mediciones se repitieron para diversas condiciones, con resultados siempre similares.

El aporte de estas mediciones a la comprensión del fenómeno estriba principalmente en que queda de relieve su carácter volumétrico. Como se ve, las ondas no están localizadas en la superficie, sino que afectan a la capa de fluido en toda su altura. La amplitud es mayor en la superficie, lo cual es un indicio de la existencia de un mecanismo amplificador (posiblemente relacionado con el efecto Marangoni, en la línea de lo apuntado por M.K. Smith).

Incidentalmente, cabe indicar que las mediciones recogidas en esta sección fueron tomadas sin forzar el frente de ondas con el hilo calentado periódicamente, puesto que la forma del frente de ondas es irrelevante para una medida puntual. Constituye una comprobación de que el artificio forzante no afecta significativamente a la mecánica de las ondas el hecho de que las mismas mediciones, realizadas con forzado, arrojan unos resultados prácticamente idénticos.

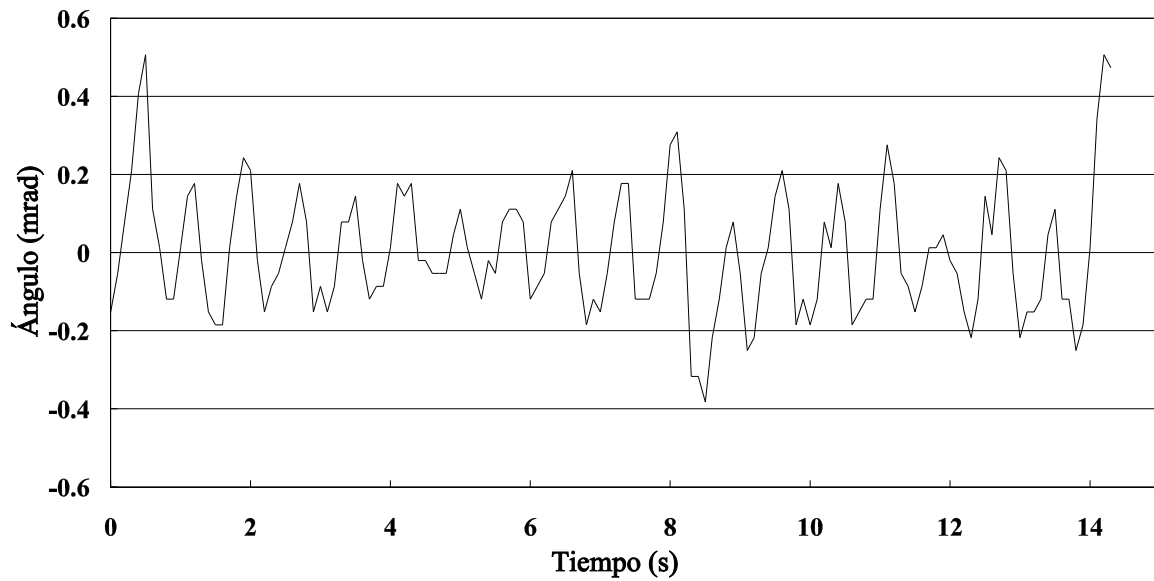
#### **7.4. La deflexión de la superficie.**

Es de esperar que la deformación que estas ondas producen en la superficie sea muy pequeña, dado el mecanismo responsable (esencialmente son ondas de temperatura y velocidad; la gravedad y la capilaridad no son su causa). Por inspección visual se confirma esta suposición; basta provocar en la superficie de un líquido ondas gravitatorias o capilares (crispación de Faraday) para darse cuenta del drástico efecto que tienen en la ombroscopía. La superficie del líquido en este experimento, en cambio, da una imagen mucho menos contrastada de las ondas: señal de que la deformación es mucho menor.

La medida cuantitativa se realizó con la técnica explicada en la sección 3.1.4. del



capítulo 3. En la Fig. 39 se muestra uno de los registros temporales obtenidos.



*Fig. 39. Serie temporal correspondiente a la deflexión de la superficie en un punto cercano al centro de la celda. La diferencia de temperaturas es  $\Delta T=26$  K.*

La deflexión medida está en el límite de las posibilidades experimentales: la resolución del método es aproximadamente 0.05 mrad y los movimientos del aire influyen notablemente, de modo que el error calculado por comparación con una superficie inalterada es de más o menos 0.1 mrad. De todas maneras, la medición es significativa; la deflexión obtenida es de unos 0.4 mrad de amplitud.

Se comprueba también que con el hilo forzante en marcha la deflexión no varía significativamente, siempre que la corriente sea pequeña, como es el caso.

## **7.5. Mediciones de velocidad**

En esta sección se proporcionan algunas mediciones realizadas en una capa de decano, como todas las velocimetrías láser-Doppler que en este trabajo se presentan, cuya profundidad es de 2.5 mm. Como la técnica proporciona una medida puntual, se sigue el mismo procedimiento que en las secciones precedentes: registrar la velocidad en un punto a lo largo

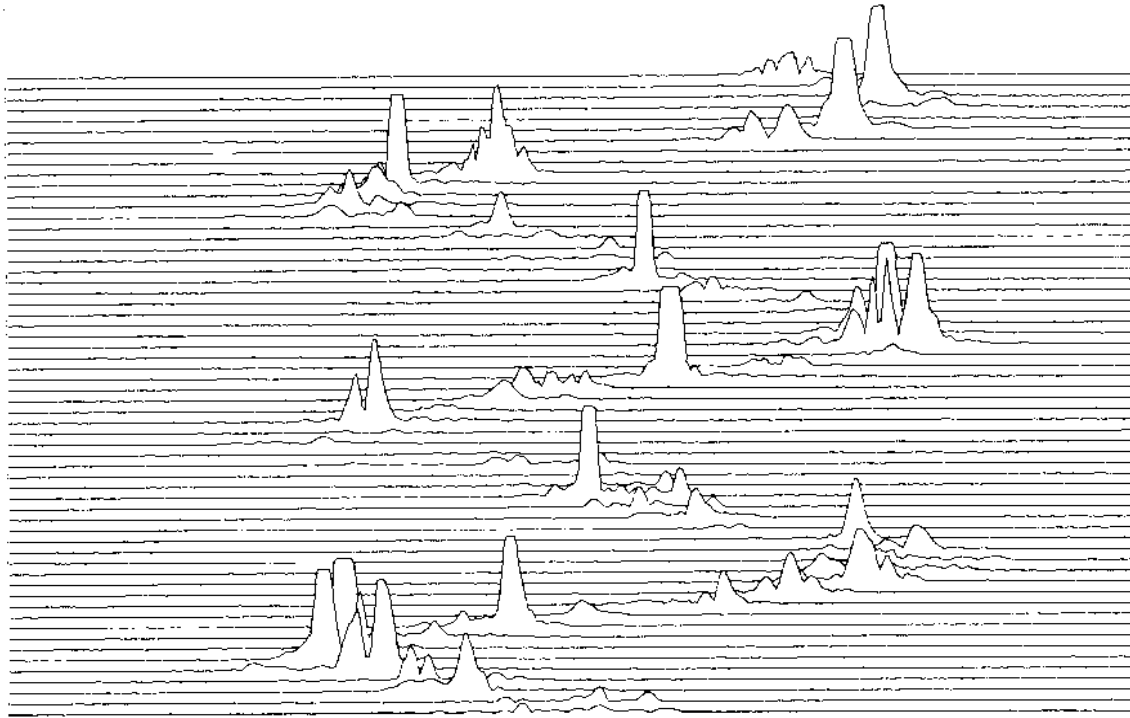
del tiempo. Pero la velocidad de fase de las ondas es demasiado rápida para las posibilidades de la velocimetría láser-Doppler. Normalmente, se programa el analizador dinámico a la salida del fotodetector para seleccionar sólo las señales con una frecuencia bien marcada, para asegurar que la partícula pasa cerca del centro de la zona de medida, y se toma la media aritmética de un cierto número de partículas. Lógicamente, eso se hace a expensas de aumentar el tiempo que se tarda en registrar una velocidad, que suele ser del orden del minuto. Si la velocidad no varía con el tiempo (como en el flujo básico o en los rollos), el procedimiento no presenta ningún problema. Pero con las ondas es diferente. Lo ideal sería una frecuencia de muestreo de varias tomas por segundo, una tasa que supera los límites no del análisis de datos, sino de la técnica, porque conllevaría la necesidad de sembrar un gran número de partículas en el fluido.

La solución de compromiso adoptada es la siguiente. Se realiza un sembrado más concentrado que de costumbre y se registran todas las señales del fotodetector a la frecuencia de muestreo más alta que permite el analizador (unos 4 Hz). Como consecuencia, se obtienen picos de muy diferente calidad, y su análisis resulta problemático. Por lo tanto, se muestran todas las señales "apiladas" en un diagrama para que se puedan captar visualmente las variaciones de velocidad en un punto. En estos diagramas, el eje horizontal son las frecuencias (traducibles directamente a velocidades) y el eje vertical es el tiempo.

Las Fig. 40, 41 y 42 fueron obtenidas, pues, en una capa de decano de 2.5 mm de profundidad, a unos 0.7 mm por debajo de la superficie. Las tres están a la misma escala: el tiempo total transcurrido desde la primera señal hasta la última son 13.6 s (en total, hay en cada diagrama 60 señales), y el eje horizontal (de velocidades) tiene una longitud de 8.5 mm/s. La escala vertical (amplitud de la transformada de Fourier de la señal) es también la misma para las tres figuras.

La Fig. 40 corresponde a una serie temporal obtenida en el eje central de la celda, hacia la mitad de su longitud ( $x=36$  mm,  $y=0$ ), con una diferencia de temperaturas de  $\Delta T=20$  K. Se observa que el período es del orden del segundo, y que la velocidad de fase sufre oscilaciones de amplitud 6 mm/s, aproximadamente.

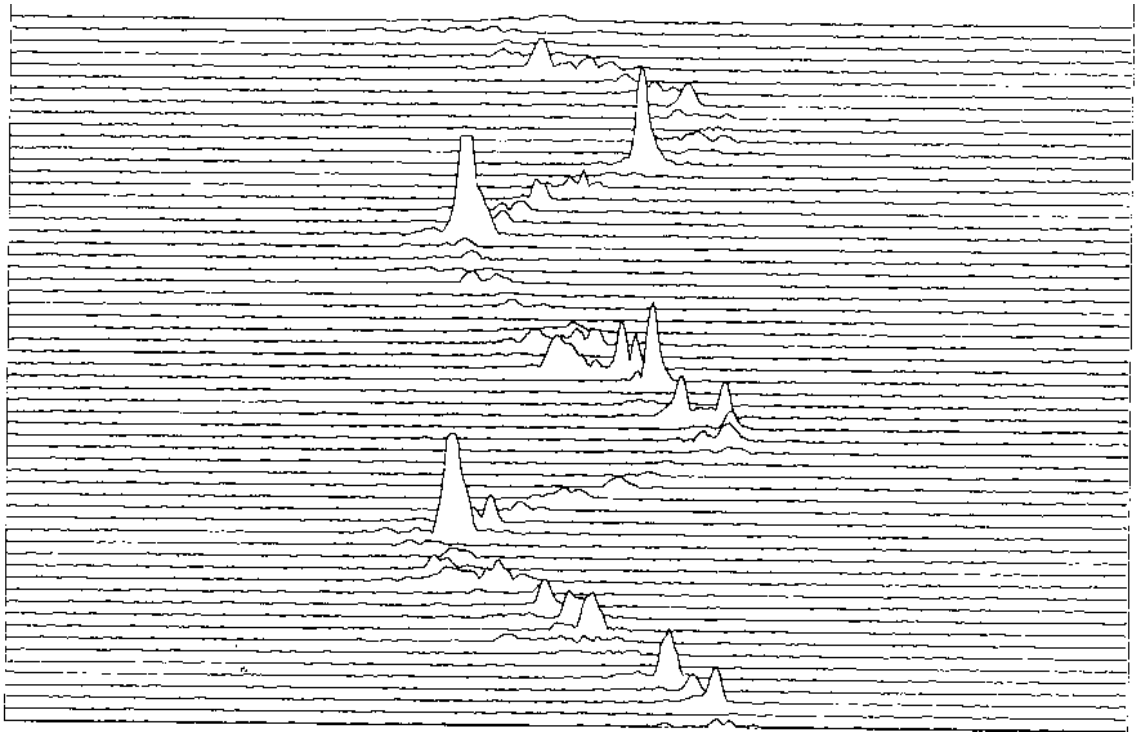
La Fig. 41, en cambio, fue obtenida mucho más cerca de la pared caliente, con la misma diferencia de temperaturas. Sólo interesa aquí resaltar que la amplitud de las



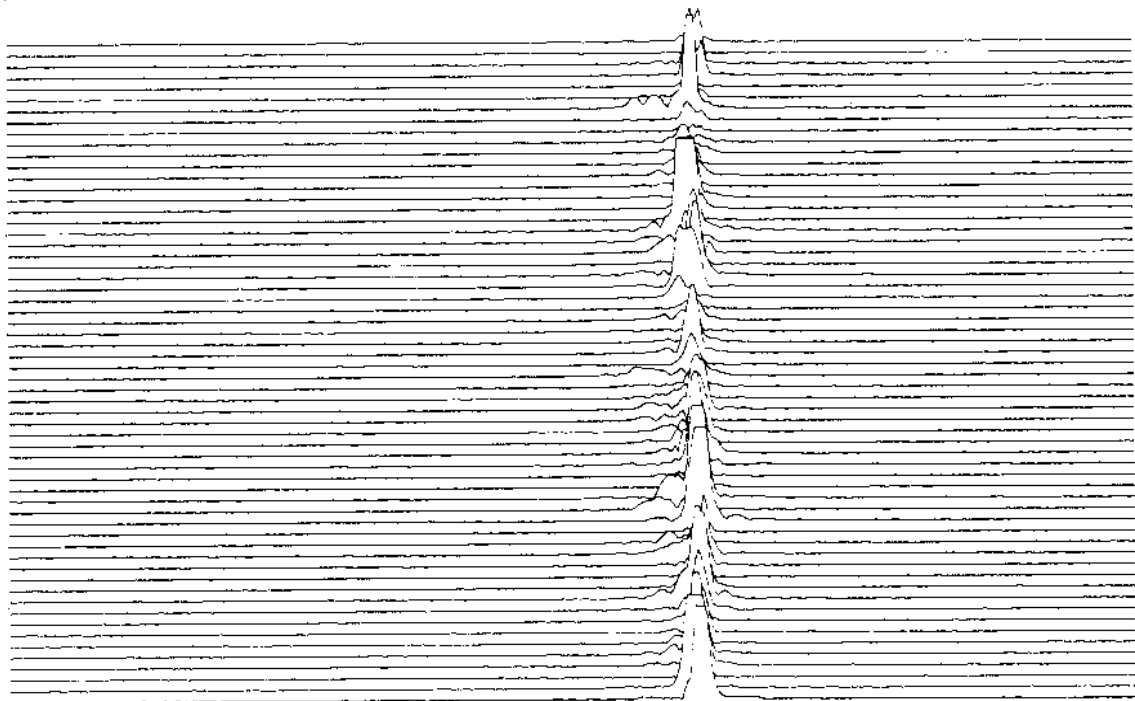
*Fig. 40. (Ver el texto para la explicación)*

oscilaciones de velocidad es menor (unos 4 mm/s), pero en cambio parecen mucho más ordenadas. ¿Es esto un indicio de que las ondas nacen, efectivamente, como consecuencia de la inestabilidad de la capa límite, y que el fluido las transporta, amplificándolas durante el viaje?

Finalmente, se muestran también, para que sirva de comparación, las señales que se registran en un punto cuando la velocidad no varía con el tiempo (Fig. 42). La diferencia de temperaturas era en este caso  $\Delta T=8$  K.



*Fig. 41. (Ver el texto para la explicación)*



*Fig. 42. (Ver el texto para la explicación)*

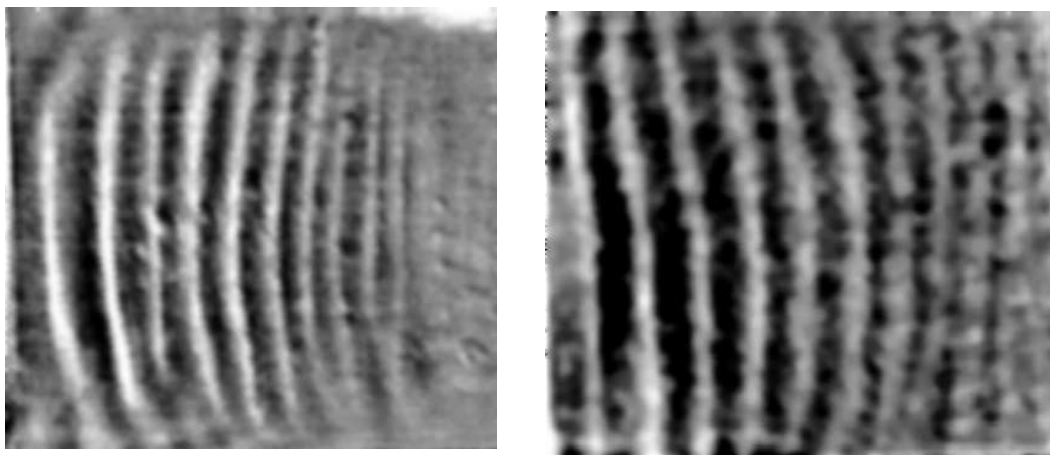
## 7.6. La forma del frente de onda.

Para observar un frente de onda coherente, se emplea el hilo forzante en la manera expuesta al principio de este capítulo. Las ondas espontáneas (Fig. 43) tienen las mismas propiedades (frecuencia, amplitud, etc.) que las forzadas, pero el frente de éstas es coherente (Fig.44). En lo que resta del capítulo se emplea el forzado, pues los diagramas espaciotemporales resultan mucho más nítidos.

En esta sección se llama la atención sobre la diferencia entre los

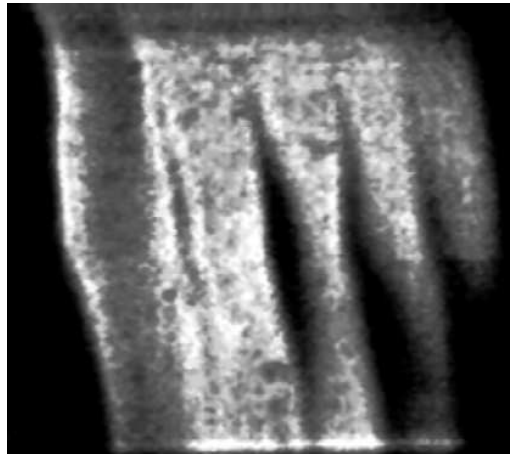


*Fig. 43. Ondas espontáneas en una celda rectangular.*



*Fig. 44. Frentes de onda coherentes. (a) (A la derecha) Las paredes y el fondo son de plexiglas (adiabáticas). (b) (A la izquierda) Las paredes y el fondo son de aluminio (buen conductor térmico).*

frentes de onda de la Fig. 44 (a) y (b): la concavidad. Sobre este particular, no existe -que se sepa- ninguna explicación teórica, ni heurística, que justifique el hecho de que el frente se curve. Lo que resulta todavía más intrigante, es que además la curvatura dependa de las condiciones térmicas en los bordes. Para comprobar realmente que esto es así, se tomó la imagen de la Fig. 45, en una celda con una pared de cada tipo. El resultado es que el frente de onda está inclinado, presentando un "ángulo de contacto" diferente con cada pared, en consonancia con lo que se ve en la Fig. 44. El que las condiciones térmicas en las paredes impongan condiciones de contorno para la fase de las ondas es algo difícil de explicar.



*Fig. 45. Ondas en una celda con una pared lateral de metal (arriba) y otra de plexiglas (abajo).*

(No está de más recordar que las ombroscopías no recogen toda la celda, sino sólo la parte central; las dimensiones de las imágenes de las Fig. 43, 43 y 45 son: 3.7 cm de largo por 3.2 cm de alto).

## **7.7. La respuesta en frecuencia.**

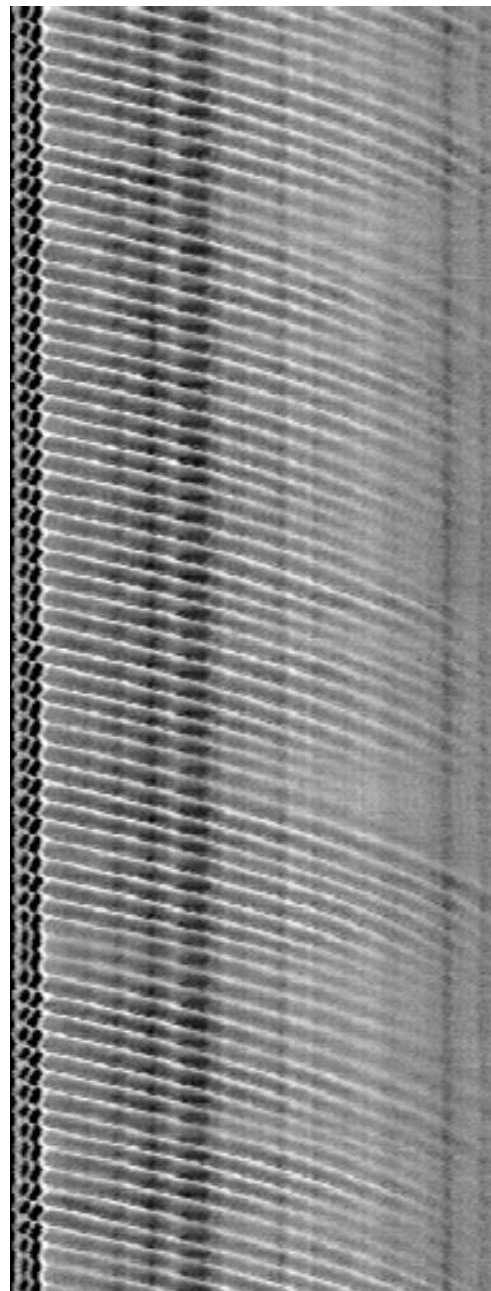
Con el forzado del que hablamos, se puede estudiar la respuesta de la capa de líquido frente a las perturbaciones ondulatorias de distinta frecuencia. Si se calienta el hilo con una frecuencia distinta de la natural, las ondas decrecen en amplitud (lógicamente, pues cerca del umbral de la inestabilidad, es general que sólo un pequeño intervalo de frecuencias en torno a la frecuencia crítica tengan una tasa de crecimiento mayor de cero, y se vuelvan inestables).

La información necesaria para ello está contenida en los diagramas espaciotemporales como el de la Fig. 46, que se obtiene a partir de la ombroscopía registrando una línea de pixels

paralela al gradiente a lo largo del tiempo. (El período de muestreo de la línea es de 0.1 s). De este diagrama se toman líneas verticales, es decir,  $x=cte.$ , a intervalos regulares (cada milímetro, por ejemplo). Cada línea vertical es el registro temporal del brillo (proporcional a la amplitud de la onda) en un punto dado. Se calcula entonces el espectro de potencias de esas líneas y se colocan uno detrás de otro en un gráfico tridimensional (Fig. 47) cuyos ejes son, por lo tanto, frecuencia, distancia ( $x$ ) y densidad de potencia espectral.

Para calcular el espectro de potencias se emplea el siguiente algoritmo. Para evitar frecuencias espúreas debidas al tamaño finito del registro, la serie temporal (típicamente de 512 puntos, o sea, 51.2 s) se cierra sobre sí misma de manera que a continuación del último punto venga el primero. Luego, se calcula la transformada rápida de Fourier (FFT) de una porción, o ventana, de 128 puntos, y se guarda el espectro de potencias. La ventana se va moviendo de manera que recorra toda la serie temporal, y finalmente se obtiene la media de todos los espectros. Esta técnica u otras similares se denominan a veces filtros "anti-aliasing".

El número de onda puede ser estudiado de la misma manera, pero tomando líneas horizontales del diagrama espaciotemporal ( $t=cte.$ ). Se obtiene entonces un gráfico de la potencia espectral en función de la distancia y de la frecuencia espacial (inverso de



*Fig. 46. Diagrama espaciotemporal que muestra las ondas propagándose en una celda rectangular. El eje vertical es el tiempo (positivo hacia abajo) y tiene una dimensión de 51.2 s. El eje horizontal corresponde a  $x$  y se extiende 3.5 cm (positivo hacia la derecha).*

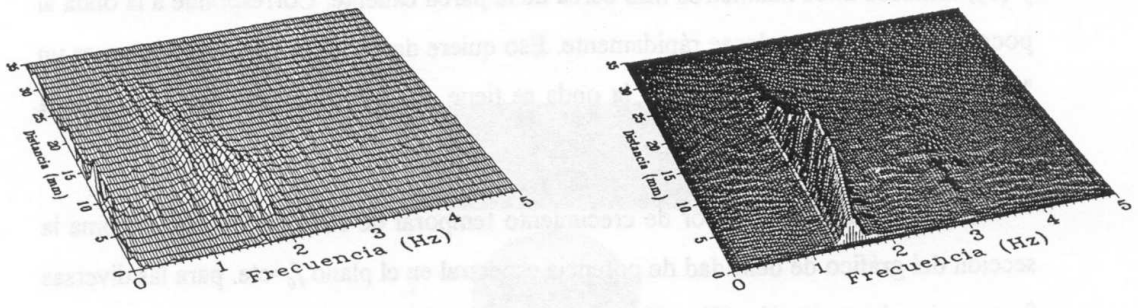


Fig. 47. Gráficos de la densidad de potencia espectral (eje vertical, en unidades arbitrarias) en función de la frecuencia y la distancia. (a) (Izquierda): Ondas espontáneas. (b) (Derecha) Se introduce un forzado cerca de la frecuencia crítica ( $f_0=1.5$  Hz). Ambos gráficos están a la misma escala.

la longitud de onda), en vez de frecuencias temporales.

En la Fig. 47 (a) se puede ver el intervalo de frecuencias inestables: de 1 a 2 Hz aproximadamente. Si se aplica un forzado de frecuencia  $f_0$  dentro de ese rango, las demás frecuencias se suprimen. La perturbación ordena las ondas en torno a su frecuencia, siempre que esté dentro del intervalo citado. Las Fig. 47 y 48 fueron tomadas para un valor de  $Ma$  de

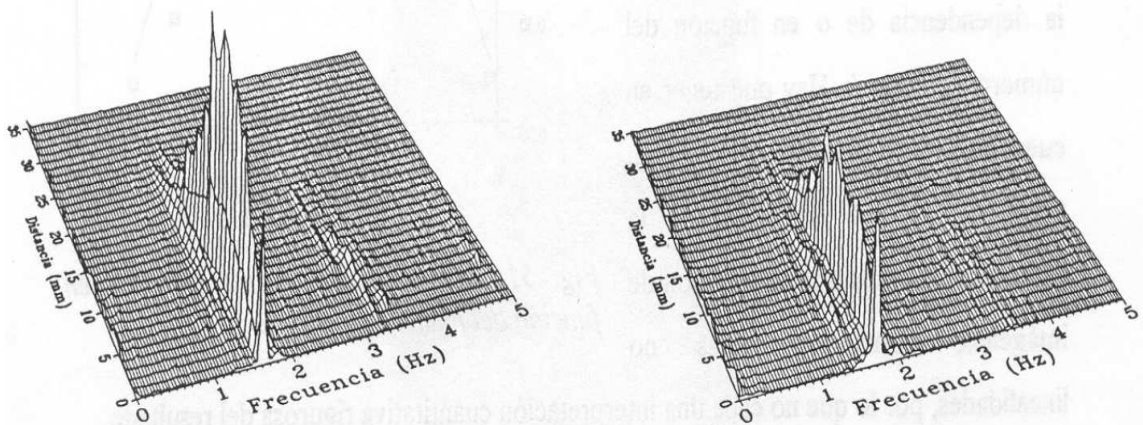


Fig. 48. Densidad de potencia espectral. (a) (Izquierda)  $f_0=1.6$  Hz; (b) (Derecha)  $f_0=1.7$  Hz. Ambos gráficos están a la misma escala que los de la Fig. 47.



aproximadamente 1200.

Es interesante el pico que aparece cerca del origen de distancias en las Fig. 48 (a) y (b), tomadas unos milímetros más cerca de la pared caliente. Corresponde a la onda al poco de ser forzada, y decae rápidamente. Eso quiere decir que la perturbación no es un "modo propio", por decirlo así, y la onda se tiene que reestructurar: tras conseguir la estructura adecuada, la amplitud crece flujo abajo.

Para calcular el factor de crecimiento temporal de cada frecuencia, se toma la sección del gráfico de densidad de potencia espectral en el plano  $f_0 = \text{cte.}$  para las diversas frecuencias de excitación (Fig. 49, en las cuales el eje horizontal es la distancia  $x$ , que abarca 35 mm, y el eje vertical es la densidad de potencia espectral, en unidades arbitrarias, todas en la misma escala). Ya se razonó en la sección dedicada a las mediciones de temperatura que el decrecimiento en amplitud no está relacionado con una saturación no lineal, sino que es consecuencia de que el gradiente de temperatura no es uniforme en las paredes y el fondo de la celda.

El factor de crecimiento temporal  $\sigma$  se obtiene ajustando una exponencial a la zona donde comienza el aumento de amplitud. El nacimiento de una inestabilidad sigue, al menos al inicio, en el régimen lineal, una ley exponencial. En la Fig. 50 se muestra la dependencia de  $\sigma$  en función del número de onda  $k$ . Hay que tener en cuenta que en el sistema experimental, tanto en lo que se refiere a la ombroscopía como a la adquisición de imágenes, concurren varias no linealidades, por lo que no cabe una interpretación cuantitativa rigurosa del resultado.

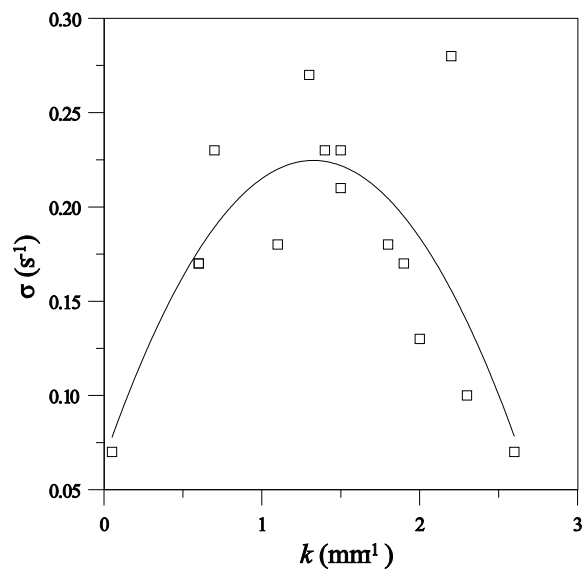
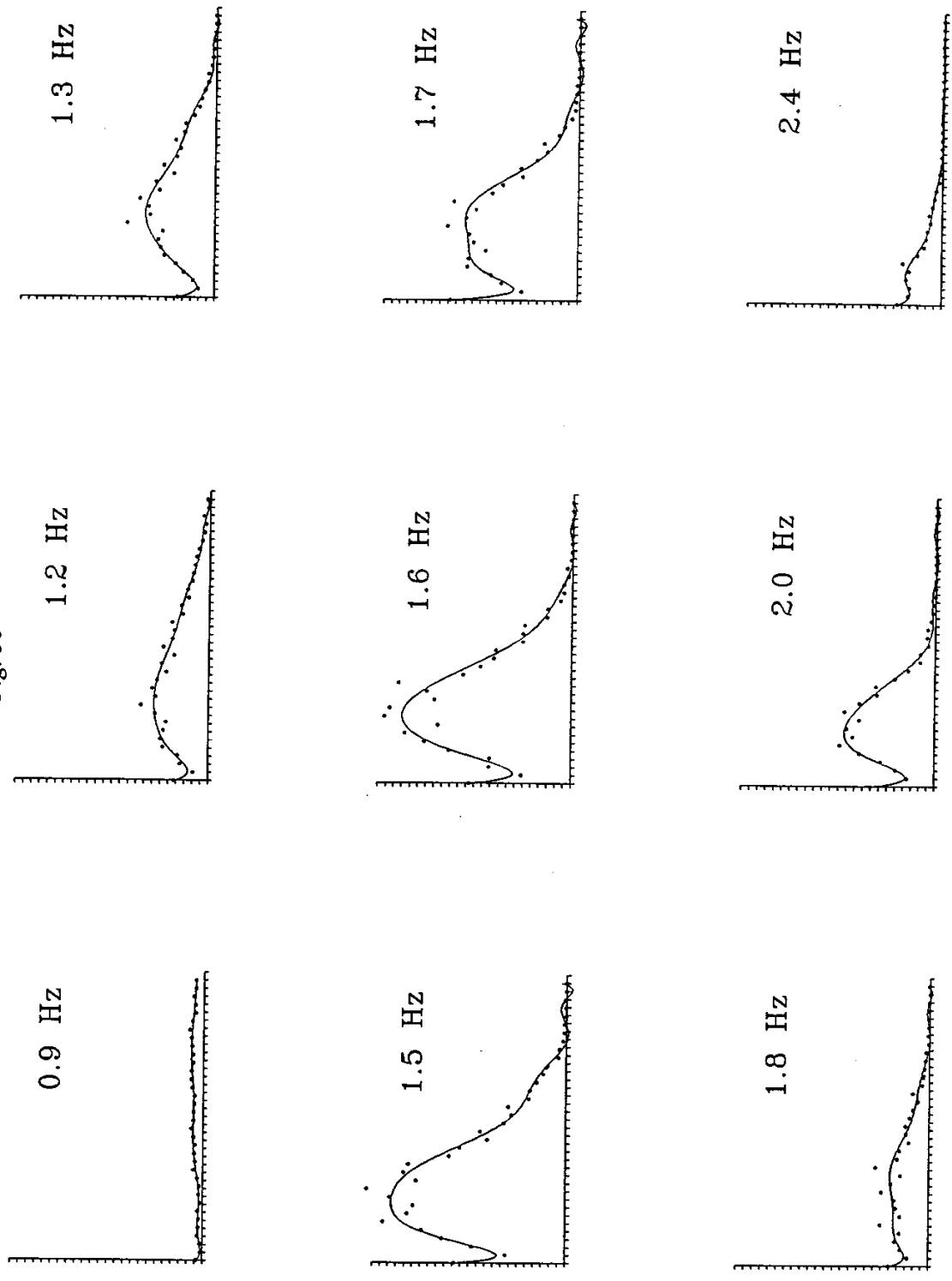


Fig. 50. Factor de crecimiento temporal en función del número de onda  $k$ .

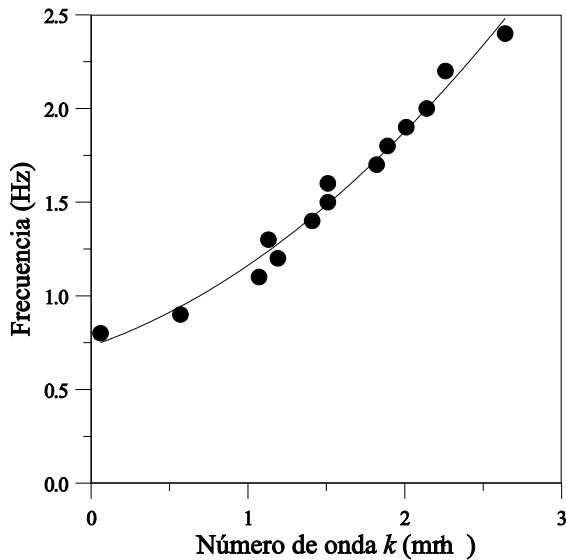
Para calcular la velocidad de grupo, se toman dos líneas verticales del diagrama espaciotemporal -correspondientes a dos posiciones diferentes- y se calcula la correlación

Fig. 50



cruzada. (Esencialmente, se desplaza temporalmente una serie respecto a la otra hasta para hallar cuándo la coincidencia es mejor; como se conoce el desplazamiento en  $x$ , con este nuevo dato se puede calcular la velocidad de grupo  $v_g$ ).

La relación entre frecuencia y número de onda (relación de dispersión) se puede



obtener inmediatamente del diagrama espaciotemporal, con el procedimiento explicado. Se ajustan los datos a una expresión de la forma

$$\omega = \omega_0 + V k + B k^2$$

donde  $\omega$  es la frecuencia,  $k$  el número de onda y  $V$  y  $B$  dos constantes que se obtienen del ajuste experimental (Fig. 51).

La velocidad de grupo es

Fig. 51. Relación de dispersión. El ajuste es  $\omega=0.73+0.29k+0.14k^2$ .

$$v_g = \frac{\partial \omega}{\partial k} = V + 2k B.$$

Es de resaltar el hecho de que el número de onda coincide casi exactamente con el predicho por Smith y Davis, que encuentran un número de onda adimensional  $k=2.4$ : es muy parecido al obtenido experimentalmente para las ondas espontáneas. Queda claro también que las ondas no son simplemente mecánicas, sino que se ven afectadas por las condiciones térmicas. Basta esto para descartar la identificación con las ondas superficiales estudiadas por los mismos autores, para las cuales  $k \sim 0.1-0.2$  (lo que supone una longitud de onda más larga que las dimensiones de la celda empleada) y que aparecen sólo para  $Re \geq 200$  (como hemos visto, muy superior al del experimento). Respecto a las ondas hidrotermales, la principal disgresión es la dirección de propagación: Smith y Davis afirman que van contra el gradiente térmico.

## 7.8. Una ecuación modelo de Ginzburg-Landau.

Aunque no disponemos siquiera de una teoría lineal para estas ondas, podemos sin embargo usar un marco de trabajo muy general para la descripción no lineal de las ondas propagativas. Es bien conocido que, bajo condiciones muy generales, este tipo de ondas pueden ser descritas mediante una ecuación compleja de Ginzburg-Landau para la amplitud compleja  $A$  lentamente variable [Coullet]. En nuestro sistema esa ecuación se puede escribir así:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \sigma A - v_g \frac{\partial A}{\partial x} + (\beta_1 + i\beta_2) \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + (\delta_1 + i\delta_2) \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} - (\xi_1 + i\xi_2) |A|^2 A$$

Esta ecuación toma esa forma concreta tras incluir las simetrías del problema. (Por ejemplo: la simetría de reflexión  $y \rightarrow -y$  impone que no haya ningún término donde aparezca el operador  $\frac{\partial}{\partial y}$ , puesto que no cumple dicha simetría; etcétera). En el miembro de

la derecha de la ecuación aparece: un término de inestabilidad lineal,  $\sigma A$ ; un término advectivo,  $(v \cdot \nabla) A$ , que no puede eliminarse por variancia galileana porque las condiciones de contorno espaciales están fijadas; los coeficientes de difusión ( $\beta_1$  y  $\delta_1$ ) y de dispersión ( $\beta_2$  y  $\delta_2$ ); un término de saturación no lineal ( $\xi_1$ ) y otro que da cuenta del corrimiento de frecuencia ( $\xi_2$ ).

Se pueden obtener experimentalmente varios de los coeficientes de esta ecuación, como la velocidad de grupo  $v_g$ , o el coeficiente  $\beta_2$ , que es igual al parámetro  $B$  de la relación de dispersión y cuyo valor se da en la sección precedente. También se puede calcular  $\xi_1$  a partir de su definición:  $\xi_1 = \frac{\sigma}{A_0^2}$ , donde  $A_0$  es la amplitud saturada, que se obtuvo forzando ondas

con una corriente muy grande [Ez2]. No se pueden dar, en cambio, valores para  $\xi_2$ , aunque debe ser mucho menor que  $\xi_1$ . Tampoco se dispone de información sobre  $\delta_1$  ni  $\delta_2$ , que describen el comportamiento de la amplitud lentamente variable en la dirección transversal.

Una de las posibilidades de esta ecuación es que permite estudiar -aunque sea de una manera fenomenológica- la forma de los frentes de onda. Se puede encontrar una discusión más detallada en [Ez2], pero como los trabajos que se están llevando a cabo actualmente sobre

este tema [c.p.] están todavía poco avanzados, nos abstendremos de su exposición.

\* \* \*

En este capítulo se ha expuesto la caracterización de las ondas desde el punto de vista experimental, ofreciéndose detalles de la velocidad, temperatura y deflexión de la superficie, así como de la respuesta en frecuencia del medio.

Se ha puesto especial cuidado en no establecer una comparación directa con los resultados teóricos; el punto de partida no es el mismo. Sin embargo, la coincidencia es notable, excepto en lo que se refiere a la dirección de propagación de las ondas.

Está claro que es necesario un estudio más profundo sobre el mecanismo físico responsable de las ondas, tanto a nivel teórico como experimental. Por ahora, sólo se pueden ofrecer cuestiones y muy pocas respuestas.

## 8. CONCLUSIONES

En los capítulos precedentes, se han ido avanzando algunas conclusiones parciales; a esa recapitulación hay que añadir, sin duda, las mejoras que la práctica ha llevado a introducir en algunas técnicas empleadas: refinamientos, control por ordenador, etc., aprovechables en posteriores experimentos.

Ciñéndonos al problema abordado, a continuación se ofrece un resumen de los resultados -y de las preguntas que han quedado sin respuesta. Se apuntan también algunas líneas de trabajo que parecen prometedoras.

### **a. Descripción de una secuencia de bifurcaciones que conduce a la turbulencia.**

Este es un ejemplo experimental limpio de cómo el aumento de un parámetro de control (la diferencia de temperatura) provoca una serie de bifurcaciones de manera que el sistema, atravesando una sucesión de estados, llega a la turbulencia. En una capa de fluido calentada lateralmente se establece un flujo básico tan pronto como se aplica una diferencia de temperaturas. Este estado pierde su estabilidad si la diferencia de temperaturas es lo suficientemente elevada, y en vez de un único rollo convectivo aparecen en la celda varios rollos con el eje alineado perpendicularmente al gradiente térmico. El aumento posterior de  $\Delta T$  provoca la aparición de ondas. Si se sigue más allá, la convección se vuelve turbulenta.

Este proceso era de esperar. De hecho, se conocen desde hace tiempo algunos estudios experimentales <sup>[6-8]</sup> en los que se ilustra un comportamiento similar en la convección de Rayleigh-Bénard. Es general que el número de dimensiones necesarias para describir la estructura vaya aumentando, y que por fin entre en juego la dependencia temporal como preludio de la turbulencia. Pero aunque el caso presentado aquí no añade ningún aspecto desconcertante, no deja de ser uno más de los que pueden citarse como típicos.

## **b. Caracterización de cada uno de los estados por los que pasa el sistema.**

Para la comprensión de lo que ocurre en la capa de fluido, se prestó atención a cuatro variables: el aspecto de la estructura del flujo, observada mediante la ombroscopía; el campo de velocidades, que se conoce gracias a los perfiles medidos con velocimetría láser-Doppler; la temperatura, tanto en la superficie como en el interior de la capa, tomada con termopares y sondas de infrarrojos; y la deformación de la superficie, obtenida con la técnica de la deflexión de un haz láser.

Para el flujo básico, ya existía una caracterización previa del campo de velocidades <sup>[39]</sup>, y pronto se publicarán algunos resultados adicionales junto con otros sobre la temperatura de la superficie <sup>[55]</sup>. Se han confirmado esos datos anteriores, con una precisión más refinada y extendiendo su validez a otras condiciones, y por primera vez se pudo comparar *cuantitativamente* el resultado experimental con la solución analítica, obteniéndose un excelente acuerdo.

Los rollos no estaban previstos en los estudios teóricos. Se proporcionan por primera vez <sup>[55]</sup> medidas cuantitativas de los perfiles de velocidad y temperatura para una celda de elevada relación de aspecto, además de otros detalles que se observan gracias a la visualización mediante ombroscopía.

Para las ondas, se estudiaron los aspectos que revisten mayor interés, como son la diferencia de temperatura crítica en un diagrama *Ma-Ra*, la relación de dispersión, la respuesta en frecuencia del medio, etcétera; y se proporcionan mediciones de la amplitud de las oscilaciones de temperatura, la velocidad de fase y la deflexión de la superficie. Por otro lado, se calcularon algunos coeficientes de una ecuación fenomenológica de Ginzburg-Landau que

se puede emplear para describir la estructura espaciotemporal de estas ondas.

### **c. Discusión sobre los mecanismos físicos subyacentes.**

Realmente, más son las cuestiones que las respuestas acerca de estos mecanismos. Con todo, la discusión está ahora centrada en unos cuantos aspectos que a lo largo de este trabajo se han revelado importantes.

En primer lugar, la absoluta necesidad de tener en cuenta las condiciones de contorno ( las paredes fría y caliente) incluso en el problema bidimensional más simplificado, y el flujo cerca de ellas, con la posibilidad de que la capa límite oscile. Por otro lado, se proporcionan datos como para que sirvan de punto de referencia en posteriores estudios teóricos sobre la difusión de los rollos al invadir la celda desde la pared caliente. Y se llama la atención sobre la naturaleza de las ondas, con referencia a un trabajo más completo <sup>[41]</sup>, porque pueden ser una desestabilización oscilatoria de la capa límite vertical, asociada con un fenómeno de transporte, y amplificada quizás por una inestabilidad debida al efecto Marangoni. Se ponen de relieve así las limitaciones de los trabajos teóricos sobre estas inestabilidades y se señalan los aspectos que deben ser explicados en estudio posteriores.

### **d. No hay una relación de aspecto infinita.**

Por último, una conclusión -que se desprende de las anteriores, pero que por sus repercusiones prácticas puede ser singularizada- es que no se puede alcanzar una relación de aspecto tan grande que permita olvidar la existencia de los extremos del recipiente, las paredes fría y caliente. Dicho de otra manera, los fenómenos particulares que tienen lugar cerca de las paredes afectan a la estructura del flujo de toda la celda, aun a pesar de que sea muy larga. La razón estriba en que el gradiente de temperatura espontáneo que aparece en la superficie es mucho mayor cerca de las paredes (resultado que se encontró en algunas simulaciones numéricas <sup>[62]</sup>), con lo cual la zona peligrosa, donde aparecen las primeras inestabilidades, es allí; y resulta que el flujo transporta esas inestabilidades corriente abajo, de modo que llegan a ocupar toda la celda.





## REFERENCIAS

- [1] R. LÓPEZ-RUIZ, H.L. MANCINI and C. PÉREZ-GARCÍA, "A statistical measure of complexity", *preprint* (1994).
- [2] J.-P. ECKMANN, "Roads to turbulence in dissipative dynamical systems", *Rev. Mod. Phys.* **53**, 643 (1981).
- [3] P. BERGÉ, Y. POMEAU and CH. VIDAL, *L'ordre dans le chaos*, Hermann (París), 1984.
- [4] M.C. CROSS and P.C. HOHENBERG, "Pattern formation outside of equilibrium", *Rev. Mod. Phys.* **65** (3), part II (1993).
- [5] H. BÉNARD, "Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide. Première partie: description générale des phénomènes. Deuxième partie: procédés mécaniques et optiques d'examen. Lois numériques des phénomènes", *Rev. Gen. Sci.* **11**, 1261, 1309 (1900).
- [6] R. KRISHNAMURTI, "On the transition to turbulent convection. Part 1. The transition from two- to three-dimensional flow", *J. Fluid Mech.* **42**, 295 (1970); "On the transition to turbulent convection. Part 2. The transition to time-dependent flow", *J. Fluid Mech.* **42**, 300 (1970).
- [7] R. KRISHNAMURTI, "Some further studies on the transition to turbulent convection", *J. Fluid Mech.* **60**, 285 (1973).
- [8] R. KRISHNAMURTI, "Finite amplitude convection with changing mean temperature. Part 1: Theory", *J. Fluid Mech.* **33**, 445 (1968); "Finite amplitude convection with changing mean temperature. Part 2: An experimental test of the theory", *J. Fluid Mech.* **33**, 457 (1968).
- [9] A.B. EZERSKY, A.D. PREOBRAZHENSKY and M.I. RABINOVICH, "Spatial bifurcations of localized structures in Bénard-Marangoni convection", *Eur. J. Mech., B/Fluids*, **10**, 211 (1991).
- [10] J. MAURER and A. LIBCHABER, "Une expérience de Rayleigh-Bénard de géométrie réduite: multiplication, accrochage et demultiplication de fréquences", *J. Physique (Paris), Colloque C3*, **41**, C3-51 (1980).
- [11] S.B.G.M. O'BRIEN, "On Marangoni drying: nonlinear kinematic waves in a thin film", *J. Fluid Mech.* **254**, 649 (1993).
- [12] A. PRAKASH and J.N. KOSTER, "Natural and thermocapillary convection in three layers", *Eur. J. Mech B / Fluids* **12**, 635 (1993).
- [13] Q.S. LIU, G. CHEN and B. ROUX, "Thermogravitational and thermocapillary convection in a cavity containing two superposed immiscible liquid layers", *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 101 (1993).
- [14] T. DOI and J.N. KOSTER, "Thermocapillary convection in two immiscible liquid layers with free

surface", *Phys. Fluids A* **5**, 1914 (1993).

[15] E. CRESPO DEL ARCO, G.P. EXTREMET and R.L. SANI, "Steady thermocapillary flows in a two-layer liquid system with flat interfaces", *J. Crystal Growth* **126**, 335 (1993).

[16] J.K. PLATTEN, comunicación privada.

[17] G. MÜLLER, "Convective instabilities in melt growth configurations", *J. Crystal Growth* **128**, 26 (1993).

[18] R. VELTEN, D. SCHWABE and A. SCHARMANN, "The periodic instability of thermocapillary convection in cylindrical liquid bridges", *Phys. Fluids A* **3**, 267 (1991).

[19] H.C. KUHLMANN, "Hydrodynamic instabilities in cylindrical thermocapillary liquid bridges", *J. Fluid Mech.* **247**, 247 (1993).

[20] S. OSTRACH, "Low gravity fluid flows", *Ann. Rev. Fluid Mech.* **14**, 313 (1982).

[21] H.C. KUHLMANN, "Thermocapillary instabilities in cylindrical liquid bridges: mechanisms and transition boundaries", *Proc. Materials and Fluid Sciences in Microgravity*, Brussels, April 1992 (ESA SP-33, August 1992).

[22] A. PRAKASH, D. FUJITA and J.N. KOSTER, "Surface tension and buoyancy effects in a free-free layer", *Eur. J. Mech B / Fluids* **12**, 15 (1993).

[23] N. POSTACIOGLU, P. KAPADIA and J. DOWEN, "A theoretical model of thermocapillary flows in laser welding", *J. Phys. D: Appl. Phys.* **24**, 15 (1991).

[24] *The New Encyclopaedia Britannica*, 15th ed., Chicago (1985), voz "Climate and Weather".

[25] C. NORMAND, Y. POMEAU and M.G. VELARDE, "Convective instability: A physicist's approach", *Rev. Mod. Phys.* **49**, 581 (1977).

[26] M.K. SMITH and S.H. DAVIS, "Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities", *J. Fluid Mech.* **132**, 119 (1983).

[27] M.K. SMITH and S.H. DAVIS, "Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 2. Surface-wave instabilities", *J. Fluid Mech.* **132**, 145 (1983).

[28] A.K. SEN and S.H. DAVIS, "Steady thermocapillary flows in two-dimensional slots", *J. Fluid Mech.* **121**, 163 (1982).

[29] G. CARNEIRO, *Tesis*, Universidad Autónoma de Barcelona (1991).

[30] D. VILLERS and J.K. PLATTEN, "Separation of Marangoni convection from gravitational convection in earth experiments", *PCH PhysicoChem. Hydrodyn.* **8**, 173 (1987).

[31] G.Z. GERSHUNI, P. LAURE, V.M. MYZNIKOV, B. ROUX and E.M. ZHUKHOVITSKY, "On the stability of plane-parallel advective flows in long horizontal layers", *Microgravity Q.* **2**, 142

(1992).

- [32] J.F. MERCIER, "Stabilité d'un écoulement thermocapillaire et de thermogravité induit par un gradient de température horizontal", Rapport de Stage, CEA de Saclay, junio de 1993.
- [33] S.H. DAVIS, "Thermocapillary instabilities", *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, 403 (1987).
- [34] M.K. SMITH, "Instability mechanisms in dynamic thermocapillary liquid layers", *Phys. Fluids* **29**, 3182 (1986), y consultas privadas a Mark K. Smith para aclarar algunos detalles de ese trabajo.
- [35] M.K. SMITH and S.H. DAVIS, "The instabilities of sheared liquid layers", *J. Fluid Mech.* **121**, 187 (1982).
- [36] M.K. SMITH, "The instability of dynamic liquid layers", *J. Fluid Mech.* **194**, 391 (1988).
- [37] P. PARMENTIER, V. REGNIER and G. LEBON, "Buoyant-thermocapillary instabilities in medium-Prandtl-number fluid layers subject to a horizontal temperature gradient", *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 2417 (1993).
- [38] H. BEN HADID and B. ROUX, "Buoyancy- and thermocapillary-driven flows in differentially heated cavities for low-Prandtl-number fluids", *J. Fluid Mech.* **235**, 1 (1992).
- [39] D. VILLERS and J.K. PLATTEN, "Coupled buoyant and Marangoni convection in acetone: experiments and comparison with numerical simulations", *J. Fluid Mech.* **234**, 487 (1992).
- [40] W. MERZKIRCH, *Flow visualization*, 2nd edition, Academic (London), 1987.
- [41] H.L. Mancini, Tesis: "Osciladores térmicos de Bénard-Marangoni", Universidad de Navarra (1994).
- [42] M. DELFINER, E. IZAGUIRRE, H.L. MANCINI, Asociación Física Argentina, La Cumbre, Córdoba, Argentina (1986).
- [43] L. HESSELINK, "Digital image processing in flow visualization", *Ann. Rev. Fluid Mech.* **20**, 421 (1988).
- [44] Un libro donde se describen éstas y otras técnicas básicas es M.P. EKSTROM, *Digital image processing techniques*, Academic, London (1984).
- [45] F. DURST, A. MELLING and J.H. WHITELAW, *Principles and practice of laser-Doppler anemometry*, 2nd edition, Academic (London), 1981.
- [46] Para lo referente a las mediciones de temperatura, en especial de las dinámicas, se pueden consultar: J.F. SHOOLEY, *Thermometry*, CRC (Boca Raton), 1986, y L. MICHALSKI, K. ECKERSDORF and J. MCGHEE, *Temperature measurement*, John Wiley & Sons (Chichester), 1991.
- [47] A.B. EZERSKY, A. GARCIMARTÍN, J. BURGUETE, H.L. MANCINI and C. PÉREZ-GARCÍA, "Hydrothermal waves in Marangoni convection in a cylindrical container", *Phys. Rev. E*

47, 1126 (1993).

[48] G. LEBON y colaboradores, comunicación privada.

[49] F. DAVIAUD and J.M. VINCE, "Traveling waves in a fluid layer subjected to a horizontal temperature gradient", Phys. Rev. E **48**, 4432 (1993).

[50] H.L. MANCINI y D. MAZA han realizado estas medidas, que aún no han sido publicadas.

[51] D. SCHWABE, U. MÖLLER, J. SCHNEIDER and A. SCHARMANN, "Instabilities of shallow dynamic thermocapillary liquid layers", Phys. Fluids A **4**, 2368 (1992).

[52] E. GUYON, comunicación privada.

[53] J. WESFREID, P. BERGÉ and M. DUBOIS, "Induced pre-transitional Rayleigh-Bénard convection", Phys. Rev. A **19**, 1231 (1979).

[54] J.K. PLATTEN and J.C. LEGROS, *Convection in liquids*, Springer-Verlag (Berlin), 1984, p. 470.

[55] C. DE SAEDELEER, A. GARCIMARTÍN, G. CHAVEPEYER and J.K. PLATTEN, "The instability of a liquid layer heated from the side, *preprint*."

[56] L.N. HOWARD, Proc. 11th Int. Cong. Appl. Mech. (1966) (Springer) p. 109.

[57] P. BERGÉ and M. DUBOIS, en *Systems far from equilibrium*, L. Garrido (ed.), Springer-Verlag, 1980.

[58] J. LIU, J.D. PAUL and J.P. GOLLUB, "Measurements of the primary instabilities of film flows", J. Fluid Mech. **250**, 69 (1993).

[59] Véase el artículo W. SCHÖPF and W. ZIMMERMANN, "Convection in binary fluids: amplitude equations, codimension-2 bifurcation and thermal fluctuations", Phys. Rev. E **47**, 1739 (1993), donde se expone de manera detallada este tratamiento en un sistema de similares características.

[60] A.B. EZERSKY, A. GARCIMARTÍN, H.L. MANCINI and C. PÉREZ-GARCÍA, "Spatiotemporal structure of hydrothermal waves in Marangoni convection", Phys. Rev. E **48**, 4414 (1993).

[61] A.B. EZERSKY, comunicación privada.

[62] J. FONTAINE, K. KOSTER and R.L. SANI, "Thermocapillary effects in a shallow cavity filled with high Prandtl number fluids", Am. Chim. Fr. **17**, 377 (1992).

## BIBLIOGRAFÍA ADICIONAL

- *Obras de carácter general*

D.J. ACHESON, *Elementary fluid dynamics*, Clarendon (Oxford), 1990.

D.J. TRITTON, *Physical fluid dynamics*, 2nd ed., Oxford (London), 1988.

J.S. TURNER, *Buoyancy effects in fluids*, Cambridge University Press (Cambridge), 1973.

P. MANNEVILLE, *Structures dissipatives et turbulence faible*, Aléa-Saclay (Saclay), 1990.

A.V. GAPONOV-GREKHOV and M.I. RABINOVICH, *Nonlinearities in action*, Springer-Verlag (Berlin), 1992.

D.L. STEIN (ed.), *Lectures in the sciences of complexity*, Vol. I (Proc. of the 1988 Complex systems summer school), Addison-Wesley (Redwood), 1989.

H. BAI-LIN, *Chaos*, World Scientific (Singapore), 1984.

- *Convección de Rayleigh-Bénard*

E.L. KOSCHMIEDER, "Bénard convection", *Adv. Chem. Phys.* **26**, 177 (1974).

F.H. BUSSE, "Non-linear properties of thermal convection", *Rep. Prog. Phys.* **41**, 1929 (1978).

P. BERGÉ and M. DUBOIS, "Rayleigh-Bénard convection", *Contemp. Phys.* **25**, 535 (1984).

P. BERGÉ and M. DUBOIS, "Convective velocity field in the Rayleigh-Bénard instability: experimental results", *Phys. Rev. Lett.* **32**, 1041 (1974).

M. DUBOIS and P. BERGÉ, "Experimental study of the velocity field in Rayleigh-Bénard convection", *J. Fluid Mech.* **85**, 641 (1978).

M.P. ARROYO and J.M. SAVIRÓN, "Rayleigh-Bénard convection in a small box: spatial features and thermal dependence of the velocity field", *J. Fluid Mech.* **235**, 325 (1992).

- *Transición a la turbulencia: otros experimentos.*

H.L. SWINNEY and J.P. GOLLUB, "The transition to turbulence", *Physics Today* **31 (8)**, 41 (1978).

J. MAURER and A. LIBCHABER, "Effect of the Prandtl number on the onset of turbulence in liquid He", *J. Physique-Lettres* **41**, 1-515 (1980).

P. BERGÉ, M. DUBOIS, P. MANNEVILLE and Y. POMEAU, "Intermittency in Rayleigh-Bénard convection", J. Physique-Lettres **41**, L-341 (1980).

E. GUYON and J. PANTALONI, "*Instabilités (hydrodynamiques ...) et bifurcations. Quelques exemples expérimentaux*", Les Embiez (1978).

• *Sobre la forma del frente de onda en situaciones análogas*

P. ALBARÈDE and P.A. MONKEWITZ, "A model for the formation of oblique shedding and "chevron" patterns in cylinder wakes", Phys. Fluids A **4**, 744 (1992).

D.S. PARK and L.G. REDEKOPP, "A model for pattern selection in wake flows", Phys. Fluids A **4**, 1697 (1992).

A. CHIFFAUDEL, "Nonlinear stability analysis of two-dimensional patterns in the wake of a cylinder", Europhys. Lett. **18**, 589 (1992).

T. LEWEKE, M. PROVANSAL and L. BOYER, "Stability of vortex shedding modes in the wake of a ring at low Reynolds numbers", Phys. Rev. Lett. **71**, 3469 (1993).

P. COULLET, C. ELPHICK, L. GIL and J. LEGA, "Topological defects of wave patterns", Phys Rev. Lett. **59**, 884 (1987).

. *Efecto Marangoni y convección de Bénard-Marangoni*

D.A. NIELD, "Surface-tension and buoyancy effects in cellular convection", J. Fluid Mech. **19**, 341 (1964).

M.J. BLOCK, "Surface tension as the case of Bénard cells and surface deformation in a liquid film", Nature **178**, 650 (1956).

L.E. SCRIVEN and C.V. STERLING, "The Marangoni effects", Nature **187**, 186 (1960).

E.N. FERM and D.J. WOLLKIND, "Onset of Rayleigh-Bénard-Marangoni instability: comparison between theory and experiment", J. Non-Equilib. Thermodyn., **7**, 169 (1982).

P. CERISIER, C. JAMOND, J. PANTALONI et J.C. CHARMET, "Déformation de la surface libre en convection de Bénard-Marangoni", J. Physique **45**, 405 (1984).

• *Métodos experimentales (óptica) aplicados a la convección*

P. BERGÉ and M. DUBOIS, "Study of Rayleigh-Bénard convection properties through optical measurements", Ecole d'été de l'OTAN, Boston, 1980.

P. BERGÉ and M. DUBOIS, "Techniques de diagnostic optique appliquées à l'étude d'une instabilité hydrodynamique: la convection thermique de Rayleigh-Bénard".

• *Otros experimentos relacionados con éste*

Y. KAMOTANI, J.H. LEE and S. OSTRACH, "An experimental study of oscillatory thermocapillary convection in cylindrical containers", Phys. Fluids A **4**, 955 (1992).

J.A. SZYMCZYK, "Interaction between thermocapillary and buoyancy driven convection", Experiments in Fluids **12**, 151 (1992).

F. PREISSER, D. SCHWABE and A. SCHARMANN, "Steady and oscillatory thermocapillary convection in liquid columns with free cylindrical surface", J. Fluid Mech. **126**, 545 (1983).

J.M. VINCE and M. DUBOIS, "Hot wire below the free surface of a liquid: structural and dynamical properties of a secondary instability", Europhys. Lett. **20**, 505 (1992).

M. DUBOIS, F. DAVIAUD, O. RONSIN and P. BERGÉ, "Travelling waves in pure fluids locally heated along wires", preprint.

J. BURGUETE, H.L. MANCINI and C. PÉREZ-GARCÍA, "Dynamics of a secondary instability in Bénard-Marangoni convection with unidimensional heating", Europhys. Lett. **23**, 401 (1993).

• *Estructura espaciotemporal de las ondas hidrotermales*

R.A. KRAENKEL, J.G. PEREIRA and M.A. MANNA, "Hydrothermal surface-wave instability and the Kuramoto-Sivashinsky equation", Phys. Lett A **185**, 88 (1994).

• *Calentamiento lateral*

P.G. DANIELS and P. WANG, "On the evolution of thermally driven shallow cavity flows", J. Fluid Mech. **259**, 107 (1994).

A. ZEBIB, G.M. HOMSY and E. MEIBURG, "High Marangoni number convection in a square cavity", Phys. Fluids **28**, 3467 (1985).



K.H. WINTERS, Th. PLESSER and K.A. CLIFFE, "The onset of convection in a finite container due to surface tension and buoyancy", *Physica* **29** D, 387 (1988).

M. STRANI, R. PIVA and G. GRAZIANI, "Thermocapillary convection in a rectangular cavity: asymptotic theory and numerical simulation", *J. Fluid Mech.* **130**, 347 (1983).

Z.-M. TANG and W.-R. HU, "Critical Bond number in two-dimensional thermocapillary oscillatory convection", *Chinese Sci. Bull.* **38**, 1249 (1993).

JYH-CHEN CHEN and FARN-SHIUN HWU, "Oscillatory thermocapillary flow in a rectangular cavity", *Int. J. Heat Mass Transfer* **36**, 3743 (1993).

P.G. DANIELS, "High Rayleigh number thermal convection in a shallow laterally heated cavity", *Proc. R. Soc. London A* **440**, 273 (1993).

M. MUNDRANE and A. ZEBIB, "Two- and three-dimensional buoyant thermocapillary convection", *Phys. Fluids A* **5**, 810 (1993).

L. PELTIER and S. BIRINGEN, "Time-dependent thermocapillary convection in a rectangular cavity: numerical results for a moderate Prandtl number fluid", *J. Fluid Mech.* **257**, 339 (1993).

• *Microgravedad*

M. STRANI and R. PIVA, "Surface-tension driven flow in microgravity conditions", *Int. J. for Numerical Methods in Fluids* **2**, 367 (1982).

G.P. NEITZEL and D.V. JANKOWSKI, "Application of energy-stability theory to problems in crystal growth", Koster and Sani (eds.), *Low-gravity fluid dynamics and transport phenomena*, Progress in Astronautics and Aeronautics **130**, AIAA (1990).

• *Convección en la fabricación y purificación de crisales*

G.P. NEITZEL, K.-T. CHANG, D.F. JANKOWSKI and H.D. MITTELMAN, "Linear-stability theory of thermocapillary convection in a model of the float-zone crystal growth process", *Phys. Fluids A* **5**, 108 (1993).

Y. OKANO, A. HATANO and A. HIRATA, "Natural and Marangoni convections in a floating zone", *J. Chem. Eng. Japan* **22**, 4 (1989).

A. HIRATA, M. TACHIBANA, Y. OKANO and T. FUKUDA, "Observation of crystal-melt

- interface shape in simulated Czochralski method with model fluid", *J. Crystal Growth* **128**, 195 (1993).
- Y. OKANO, T. FUKUDA, A. HIRATA, N. TAKANO, T. TSUKADA, M. HOZAWA and N. IMAISHI, "Numerical study of Czochralski growth of oxide single crystals", *J. Crystal Growth* **109**, 94 (1991).
- S. NAKAMURA and T. HIBIYA, "Thermophysical properties data on molten semiconductors", *Int. J. Thermodyn.* **13**, 1061 (1992).
- L.G. NAPOLITANO, R. MONTI and G. RUSSO, "Marangoni convection in one- and two-liquids floating zones", *Naturwissenschaften* **73**, 352 (1986).
- J.R. HYER, D.F. JANKOWSKI and G.P. NEITZEL, "Thermocapillary convection in a model float zone", *J. Thermophysics* **5**, 577 (1991).
- Y.T. CHAN and S.K. CHOI, "Numerical simulations of inductive-heated float-zone growth", *J. Appl. Phys.* **72**, 3741 (1992).
- Y. SEN, G.P. NEITZEL, D.F. JANKOWSKY and H.D. MITTELMANN, "Energy stability of thermocapillary convection in a model of the float-zone crystal growth process", *J. Fluid Mech.* **217**, 613 (1990).
- J.-Z. SHU, Y.-L. YAO and W.-R. HU, "Free surface vibration in oscillatory convection of half-floating zone", *Sci. in China (Series A)* **36**, 326 (1993).