

# Ondas hidrotermales en sistemas confinados

Trabajo de investigación presentado por  
Miguel Angel Pelacho Aja  
para optar al grado de  
Doctor en Ciencias Físicas

Departamento de Física y Matemática Aplicada  
Facultad de Ciencias  
Universidad de Navarra

25 de mayo de 2000

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra

ISBN 84-8081-087-4

**D. Javier Burguete Mas y D. Angel Garcimartín Montero**, Doctores en Ciencias Físicas.

**CERTIFICAN:**

Que el presente trabajo de investigación, *Ondas hidrotermales en sistemas confinados*, ha sido realizado bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, por D. Miguel Angel Pelacho Aja para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmamos la presente certificación en Pamplona, el dos de mayo de dos mil.

Javier Burguete Mas

Angel Garcimartín Montero

# Índice

Agradecimientos	v
Notación	vii
<b>I Introducción</b>	<b>3</b>
1 Introducción general	5
2 Convección por calentamiento lateral	11
2.1 Fuerzas termocapilares y termogravitatorias . . . . .	11
2.2 Ecuaciones básicas . . . . .	13
2.2.1 Condiciones de contorno ideales . . . . .	14
2.2.2 Solución del flujo básico . . . . .	15
2.3 Números adimensionales . . . . .	16
3 Resultados anteriores	21
3.1 Trabajos teóricos y simulaciones . . . . .	21
3.2 Trabajos experimentales . . . . .	34
4 Objetivos y problemas tratados	41
<b>II Sistema experimental</b>	<b>43</b>
5 Introducción	45
6 Dispositivos experimentales	47
6.1 Fluidos . . . . .	47
6.2 Celda de geometría fija . . . . .	48
6.3 Celda de geometría variable . . . . .	50

<b>7</b>	<b>Técnicas experimentales</b>	<b>57</b>
7.1	Métodos de visualización . . . . .	57
7.1.1	Ombroscopía . . . . .	57
7.1.2	Sistema óptico . . . . .	59
7.2	Medidas de temperatura . . . . .	60
7.3	Filtrado de imágenes . . . . .	63
7.3.1	Transformada de Fourier en dos dimensiones . . . . .	65
<b>III</b>	<b>Resultados</b>	<b>69</b>
<b>8</b>	<b>Inestabilidades convectivas</b>	<b>71</b>
8.1	Flujo básico . . . . .	73
8.1.1	Ruptura del flujo básico . . . . .	75
8.2	Rollos corrotativos. Umbrales . . . . .	75
8.2.1	Variación de la anchura y número de los rollos . . . . .	77
8.2.2	Rollos inclinados . . . . .	78
8.3	Ondas hidrotermales . . . . .	79
8.3.1	Umbrales . . . . .	79
8.3.2	Características físicas . . . . .	83
8.3.3	Amplitud de las oscilaciones de la temperatura . . . . .	86
8.3.4	Mecanismos de inestabilidad . . . . .	90
8.4	Inestabilidades para $Pr = 4.4$ . . . . .	92
8.4.1	Umbrales y características de las ondas . . . . .	92
<b>9</b>	<b>Influencia de la geometría</b>	<b>95</b>
9.1	Confinamiento en la dirección $x$ . . . . .	95
9.1.1	Umbral de las ondas . . . . .	95
9.1.2	Perfiles de temperatura . . . . .	96
9.2	Número de Marangoni local . . . . .	98
9.3	Confinamiento en la dirección $y$ . . . . .	99
9.3.1	Efecto del tamaño finito . . . . .	99
9.3.2	Variación de las características físicas de las ondas . . . . .	102
9.4	Influencia de la relación de aspecto $l_x/l_y$ . . . . .	104
<b>IV</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>107</b>
<b>10</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>109</b>
10.1	Cuestiones abiertas . . . . .	111

---

<b>V</b>	<b>Apéndice</b>	<b>113</b>
<b>A</b>	<b>Ondas planas en una ecuación de amplitud</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>119</b>



# Agradecimientos

En primer lugar agradezco lo mucho que he aprendido de mis directores de tesis, D. Javier Burguete y D. Ángel Garcimartín. Ellos han sabido enseñarme a pensar como un físico debe hacerlo a través de sus comentarios y de su ayuda diaria.

A D. Carlos Pérez García le debo el haberme traído a trabajar a la Universidad de Navarra con este equipo de investigación de tan alto nivel, científico y humano, y a D. Héctor Mancini en gran medida haber podido concluir este trabajo. Quiero reconocer aquí también la ayuda inicial de Johnny Millán cuando *atterricé* en este departamento.

La disponibilidad y consejo atinado que he recibido de Diego Maza y de Blas Echebarría han sido siempre muy valiosos.

Podría seguir así dando las gracias a cada uno de los miembros del Departamento de Física y Matemática Aplicada porque cada uno de ellos ha colaborado de alguna manera en esta tesis. Con María Luisa Ramón y los que ahora siguen siendo Ayudantes del Departamento he pasado muy buenos momentos: Begoña Peña, Sergio Casado, Andrea Vallone, Carolina Mendoza, Santiago Madruga, Alejandro Godoy y Cecilia Wolluschek. Y también con todos los demás: Pedro Elizalde (al que debo su amistad y su ayuda técnica), María José Collados (secretaria del Departamento), Diego Valladares, Inés Pérez Mariño, Stefano Boccaletti, Wenceslao González (gracias también por la ayuda para escribir estas páginas y, en general, para *dominar* a los ordenadores), Antonio Peláez, Carmen Palacios, Ana Mancho, María Jesús Chasco, Emilio Díaz Calavia y Santiago de San Román.

Mi reconocimiento a La Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra que me ha permitido la realización de este trabajo. Parte de la financiación también fue posible por la participación en el proyecto PB95-0578 de la DGICYT y en la Acción Integrada Hispano-Italiana HI 97-30. Agradezco la ayuda que he encontrado en el grupo de Saclay (París) liderado por François Daviaud, por las ideas y comentarios que me han servido de mucho.

A toda mi familia: mis padres, hermanos, tíos y prima pamploneses y a mi prima Maite. El apoyo de todos ellos ha sido insustituible. Especialmente a mi padre, también colega en la profesión, por la ilusión que ha puesto y el ánimo que siempre he recibido de él. A todos los amigos que he tenido cerca



estos años en Pamplona.

Pamplona, 2 de mayo de 2000

# Notación

$\rho$	Densidad
$T$	Temperatura
$\alpha$	Coefficiente de expansión térmica
$\sigma$	Tensión superficial
$\gamma = \frac{\partial\sigma}{\partial T}$	Coefficiente de variación de la tensión superficial con la temperatura
$\kappa$	Difusividad térmica
$\nu$	Viscosidad cinemática
$\mu$	Viscosidad dinámica
$\beta = \frac{\partial T}{\partial x}$	Gradiente de temperatura en la dirección $x$
$\chi_a$	Conductividad térmica del aire
$\chi_f$	Conductividad térmica del fluido
$\vec{\nabla}$	Operador nábla
$\Delta$	Laplaciano
$t_\tau$	Tiempo característico térmico
$t_\nu$	Tiempo característico viscoso
$h$	Altura de la capa de fluido
$p$	Presión
$\vec{u}$	Velocidad
$u_x, u_y, u_z$	Componentes de la velocidad en las direcciones $x, y, z$
$\psi$	Ángulo de propagación de las ondas con respecto al gradiente de temperatura
$\lambda$	Longitud de onda
$\vec{k}$	Vector de onda
$k_x, k_y$	Componentes $(x, y)$ del vector de onda
$ \vec{k} $	Número de onda
$\omega$	Frecuencia
$l_x$	Distancia entre las paredes conductoras (dirección $x$ )
$l_y$	Distancia entre las paredes no conductoras (dirección $y$ )
$\Gamma_x = l_x/h$	Relación de aspecto en la dirección $x$
$\Gamma_y = l_y/h$	Relación de aspecto en la dirección $y$
$n$	Índice de refracción



*A mis padres y hermanos*



**Parte I**  
**Introducción**



# Capítulo 1

## Introducción general

Las formas y estructuras complejas que aparecen por todas partes en la naturaleza han sido siempre motivo de una gran fascinación para el hombre. La gente ha estado desde hace mucho tiempo intrigada, por ejemplo, en cómo se forman los copos de nieve, cuál es el origen de las manchas en la piel de algunos animales, por qué las colonias de bacterias se agrupan en determinadas formas, o cuál es el mecanismo que causa la forma de las olas en el mar. El asombro es aún mayor al contemplar la elegancia de la organización de los sistemas de vida, incluso de los más simples [1].

En años recientes se ha aprendido mucho sobre la formación de estructuras o patrones <sup>1</sup>; se ha descubierto la riqueza de comportamientos y estructuras presentes en la naturaleza y se intuye cuánto queda aún por entender. Este desarrollo ha llevado a especular sobre la existencia de una ciencia general de la complejidad, y a proponer cuestiones más profundas sobre la capacidad de predecir y controlar los fenómenos naturales.

Aunque la formación de patrones —la morfogénesis— siempre ha sido un asunto central en la Filosofía de la Naturaleza, este interés ha resurgido en la física de no equilibrio en el último cuarto del siglo XX. Esto se ha debido, en parte, al auge del interés de los físicos y científicos que estudian la estructura de la materia en las transiciones de fase. Muchos de los ejemplos más familiares de formación de patrones ocurren en situaciones en las cuales un sistema está pasando de una fase a otra: desde un líquido hacia un patrón sólido, por ejemplo, desde un estado paramagnético a uno ferromagnético, o la transición entre un estado conductor de un material a superconductor, cuando se alcanza una temperatura crítica de unos pocos grados por encima del cero absoluto. Cuando en las transiciones de fase se libera energía, en cierto sentido se puede decir que la materia pasa de un estado desordenado a uno más ordenado —por

---

<sup>1</sup>La palabra inglesa *pattern* no tiene una adecuada correspondencia con alguna palabra española que incluya todos los matices. Sin embargo, en todo este trabajo se utilizará alguna de estas palabras que se aproxima a su significado: estructura, patrón, forma.



ejemplo cuando un líquido se transforma en sólido al liberar el calor latente de fusión—. La materia se comporta de una manera característica en las condiciones de no equilibrio formándose unas estructuras *dissipativas* ocasionadas por la liberación de esa energía y la interacción con el mundo exterior. Como explica I. Prigogine [2] con una analogía, una ciudad tiene una estructura peculiar distinta al campo que la rodea gracias a las relaciones que establece precisamente con el campo colindante. Una propiedad interesante de los patrones disipativos es la coherencia que se alcanza en la estructura, como si las partículas supieran del comportamiento de las demás. Así, se puede decir que los avances en esta línea de investigación de transiciones de fase, y en los procesos de no equilibrio que las acompañan, han llevado directamente hacia el planteamiento de cuestiones relacionadas con la formación de patrones.

Otra dirección desde la cual los físicos han llevado a cabo el estudio de formación de patrones es la teoría de sistemas dinámicos no lineales. Durante mucho tiempo prevaleció en física la idea según la cual los efectos observados en la naturaleza estaban ligados a sus causas de una manera directamente proporcional, lineal. La imagen del mundo que se tenía era mayoritariamente la de un mundo cuyo comportamiento esencial estaba determinado por ecuaciones con términos lineales. Hasta principios del siglo XX se pensaba que las soluciones de los sistemas dinámicos no lineales no añadían diferencias cualitativas a las de los lineales y por tanto su resolución supondría simplemente obtener mejores aproximaciones a las soluciones ya conocidas. Es a partir del avance en la rapidez y potencia de cálculo de los ordenadores cuando se tienen en cuenta las interpretaciones de Poincaré [3] y se toma conciencia de la riqueza de situaciones que se tiene en la dinámica no lineal. Variando los parámetros de control estos sistemas pueden dar lugar a comportamientos complejos, aun teniendo pocos grados de libertad. Entender estos sistemas, que son deterministas, ha supuesto también un paso crucial hacia la comprensión del caos determinista —uno de los más intrigantes y profundos conceptos físicos que ha surgido en este siglo—: sistemas que poseen una gran sensibilidad a las condiciones iniciales e incapacidad de predicción a largo plazo.

En este contexto se impone introducir el concepto de estado inestable: son aquellos en los que hay soluciones que crecen ante pequeñas perturbaciones, a consecuencia de un mecanismo intrínsecamente no lineal. Inicialmente el sistema está en un estado de equilibrio, con una configuración espacial determinada, y va cambiando su energía a medida que aumenta un parámetro de control (por ejemplo una diferencia de temperatura, un campo magnético o una diferencia de potencial, etc). Llega un momento en que el sistema se vuelve inestable y la estructura que teníamos desaparece. Si la energía suministrada es compensada con la disipación se llega a una situación de equilibrio dinámico en la que surge una nueva estructura. Esta estructura puede llegar a ser estable aunque esté alejada del equilibrio inicial. Se dice entonces que el sistema

ha sufrido una bifurcación: la estructura primaria se ha vuelto inestable y se obtiene otra estructura estable con cierto grado de complejidad.

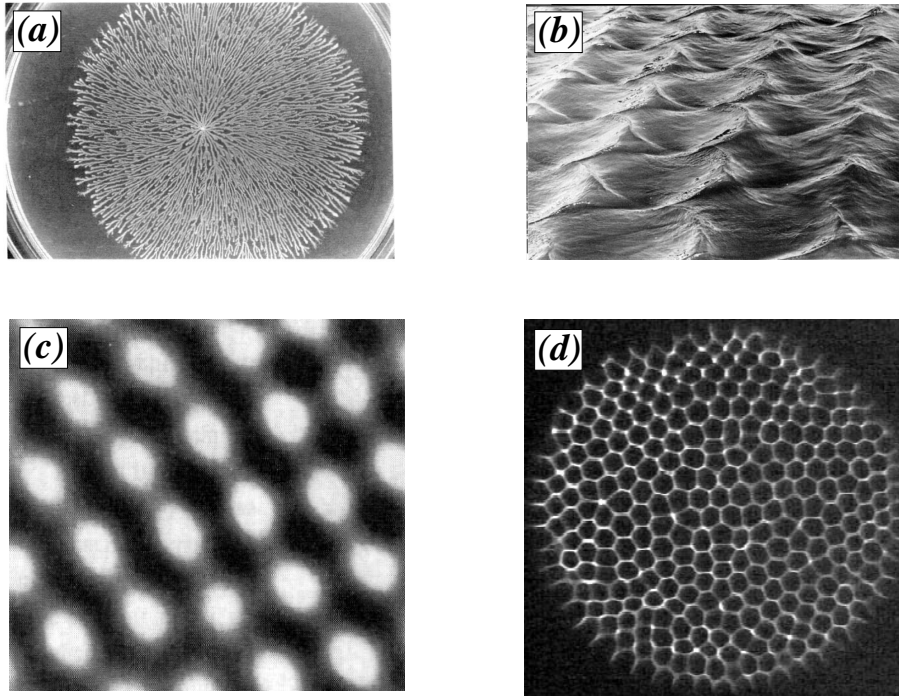


Figura 1.1: Imágenes de algunas estructuras que se forman en la naturaleza. (a) Morfología densa típica del crecimiento de una colonia de bacterias [4]; (b) Patrón regular tridimensional causado por la inestabilidad no lineal que surge de un tren de ondas mecánicas de superficie [5]; (c) Patrón estacionario obtenido en un sistema químico de reacción-difusión. La imagen muestra una mezcla de bandas y hexágonos [6]; (d) Estructura hexagonal con defectos, para una altura de 2 mm de aceite de silicona, en un sistema de Bénard-Marangoni [7].

Un tipo de sistemas en los que se observa este comportamiento son los fluidos. Por ejemplo, fluidos sometidos a diferencias de temperatura o a rotación gobernados por la ecuación de Navier-Stokes. Aunque no se conocen las soluciones exactas de esta ecuación para cualquier valor de los parámetros, se pueden analizar mediante un análisis perturbativo —por ejemplo, resolviendo la estabilidad lineal de la solución trivial  $\vec{v} = 0$  (el estado conductivo en convección)— o mediante modelos no lineales en los que se procura conservar la física que se considera relevante.

Los sistemas hidrodinámicos constituyen ciertamente un campo en el que este método es ampliamente desarrollado: convección en fluidos puros y mixtos, inestabilidades termocapilares, calentamiento lateral, fluidos sometidos a rotación, ondas superficiales no lineales en la interfase de dos fluidos, cristales líquidos sometidos a campos electromagnéticos o diferencias de temperatura,

etc. Pero también los patrones que surgen en otros sistemas fuera de equilibrio son objeto de estudio: sistemas químicos de reacción-difusión, medios granulares, fenómenos de óptica no lineal, solidificación de dendritas, sistemas biológicos, etc (ver fig. 1.1). Un buen compendio de la variedad de formación de estructuras en procesos de este tipo puede verse en la referencia [8]. Lo realmente interesante de estos sistemas alejados del equilibrio tan diferentes, es que la dinámica puede describirse cerca del umbral de la inestabilidad mediante modelos de carácter universal, como son las ecuaciones de amplitud [9, 10].

En nuestro trabajo vamos a estudiar las estructuras que se forman en un sistema convectivo en el que una capa de fluido, cuya superficie está en contacto con el aire, es sometida a un gradiente horizontal de temperatura. Varios motivos han impulsado la investigación de un sistema de este tipo. Por un lado, la mejora de la técnica de crecimiento de cristales de semiconductores, llamada de *zona flotante*, ha llevado a estudiar los efectos que tienen las oscilaciones de temperatura sobre la formación del cristal que surge en el proceso de solidificación del material. En la medida en que sea posible el control de estas oscilaciones se puede conseguir una mejora cualitativa del cristal [11, 12]. Entre los primeros trabajos encaminados a este objetivo se encuentran, por ejemplo, los de Schwabe *et al.* [13, 14]. Sin embargo, más allá de las implicaciones de tipo técnico el sistema tiene un interés intrínseco en el estudio de formación de patrones en sistemas disipativos fuera del equilibrio. Mientras que el sistema Bénard-Marangoni clásico —con gradiente vertical de temperatura— ha sido ampliamente estudiado desde hace un siglo, solamente en años recientes se ha emprendido el estudio, tanto teórico como experimental, de este tipo de sistemas. El conocimiento creciente sobre teoría de bifurcaciones y la comprensión de las causas que originan las transiciones han ocasionado durante estos años un incremento de las investigaciones experimentales y teóricas.

En la naturaleza existen numerosos fenómenos que ponen de manifiesto la presencia de un gradiente horizontal de temperatura: las corrientes oceánicas, el movimiento magmático en el manto de la tierra, los flujos formados en la atmósfera, etc. El mecanismo de este tipo de movimiento, cuando es debido a la dependencia de la tensión superficial con la temperatura, es conocido como efecto *Marangoni*. La variación de la tensión superficial no sólo se debe al cambio de la temperatura sino también a la variación de las concentraciones. En este caso se habla de doble difusión: difusión de calor y difusión de materia [15].

En la primera parte de esta tesis se explican las principales fuerzas que actúan en el fluido y los parámetros que determinan su comportamiento. Se hace una extensa mención de los trabajos anteriores que hemos considerado más relevantes, tanto teóricos como numéricos y experimentales. Seguidamente se describen las técnicas experimentales que hemos manejado. En la parte III

exponemos los resultados y en la última parte se citan las conclusiones del trabajo.



# Capítulo 2

## Convección por calentamiento lateral

A diferencia de lo que ocurre en una capa de fluido calentada por debajo [16, 17], cuando una capa de fluido con su superficie libre es sometida a una diferencia de temperatura horizontal el fluido comienza a moverse sin que exista previamente un estado básico conductivo ( $\vec{u} \neq 0$ ). Cuando la diferencia de temperatura se incrementa el sistema pasa por distintas situaciones fuera del equilibrio inicial, que pueden mostrar estructuras del flujo como rollos estacionarios, oscilaciones, ondas viajeras, caos espacio-temporal y turbulencia. En nuestro experimento se analizan únicamente las transiciones que generan ondas, sin considerar situaciones muy alejadas del equilibrio. Estas formas o estructuras dependen de las fuerzas que actúan en el sistema, de las propiedades del fluido, de las condiciones térmicas que afectan a la disipación, e incluso de la geometría del contenedor. Como en este trabajo se van a obtener algunas de estas estructuras es conveniente explicar ahora las fuerzas que las originan.

### 2.1 Fuerzas termocapilares y termogravitatorias

Consideremos una capa de fluido incompresible sometida a un gradiente horizontal de temperatura. En la interfaz entre el fluido y el aire aparece una tensión interfacial que varía con la temperatura, según la ley:

$$\sigma(T) = \sigma(T_0) + \gamma(T - T_0) \quad (2.1)$$

donde  $T_0$  es una temperatura de referencia y  $\gamma$  es el coeficiente de la variación de la tensión superficial con la temperatura. Habitualmente en la mayoría de los materiales el coeficiente es negativo, por lo que la tensión superficial  $\sigma$

disminuye al aumentar la temperatura ( $T > T_0$ )<sup>1</sup>.

Si la temperatura varía en la superficie  $\sigma$  lo hará también, de acuerdo con la ley previa. Por tanto:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x} = \gamma \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.2)$$

Es decir, si existe un gradiente de temperatura en la superficie, en alguna dirección, se forma un gradiente de tensión superficial en sentido contrario.

Esta fuerza genera un flujo superficial que lleva el fluido desde el lado  $T_+$  al  $T_-$  —ya que la zona de la superficie con mayor tensión superficial *tira* de la zona con menor tensión superficial— y en sentido contrario por el fondo, a causa de la conservación de la masa. La variación de la tensión superficial con la temperatura genera una fuerza horizontal responsable del movimiento horizontal en la superficie del fluido. Por continuidad y conservación de la masa, se establece un flujo de retorno en el fondo, en sentido contrario al de la superficie. Esto se puede ver en la figura 2.1,



Figura 2.1: Esquema del flujo básico en un sistema de calentamiento lateral.

Esta fuerza, llamada fuerza termocapilar, es una de las fuerzas desestabilizantes presentes en este problema.

Consideremos ahora el comportamiento de la densidad del fluido  $\rho$  que, en la mayoría de los materiales, sigue la ley

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) \quad (2.3)$$

donde  $\alpha$  es el coeficiente de expansión térmica y  $\rho_0$  la densidad del fluido a la temperatura de referencia.

---

<sup>1</sup>Sólo en algunos fluidos  $\gamma$  tiene signo contrario por lo que al aumentar la temperatura también aumenta la tensión superficial. Por ejemplo, en una solución de agua y etanol con una concentración determinada de éste [18].

Cerca del extremo donde la temperatura aumenta ( $T_+$ ) la densidad del fluido disminuye. Por el contrario, en el extremo donde la temperatura decrece ( $T_- < T_+$ ) las partículas sufren un aumento de la densidad.

La fuerza total, por unidad de volumen, que experimenta el fluido al variar la densidad es:

$$\vec{F}_z = \rho \vec{g} - \rho_0 \vec{g} = -\alpha \vec{g} \rho_0 (T - T_0)$$

donde se considera que  $\rho_0$  es la densidad del fluido circundante.

Como en la dirección  $x$  la temperatura varía, el valor de esta fuerza también cambia en esa dirección, de tal manera que:

$$\frac{\partial \vec{F}}{\partial x} = -\alpha \rho_0 \vec{g} \frac{\partial T}{\partial x}$$

Por tanto, debido al empuje, en cuanto existe un gradiente  $\frac{\partial T}{\partial x} \neq 0$  se forma un flujo vertical que refuerza al debido a las fuerzas interfaciales (ver figura 2.1).

## 2.2 Ecuaciones básicas

Las ecuaciones fundamentales que describen el comportamiento de un fluido incompresible son:

- La ecuación de Navier-Stokes, que establece el balance de momentos

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) \vec{u} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} p + \frac{\rho}{\rho_0} \vec{g} + \nu \Delta \vec{u} \quad (2.4)$$

- La ecuación de balance de la energía

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla}) T = \kappa \Delta T \quad (2.5)$$

- La ecuación de continuidad

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.6)$$

donde  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  es la velocidad del fluido,  $p$  es la presión,  $\nu$  la viscosidad cinemática,  $\kappa$  la difusividad térmica,  $\vec{\nabla}$  el operador nabla y  $\Delta$  el Laplaciano.

En estas ecuaciones se ha supuesto que es válida la aproximación de Boussinesq, según la cual las propiedades del fluido permanecen constantes al variar la temperatura excepto la tensión superficial y el término de la densidad que da lugar al empuje [19].



### 2.2.1 Condiciones de contorno ideales

Estas ecuaciones generales están acotadas por unas condiciones de contorno cinemáticas y térmicas. En la superficie del fluido el gradiente horizontal de temperatura ocasiona un flujo superficial de las zonas más calientes hacia las más frías, y en el fondo un flujo de retorno en sentido contrario debido a la presencia de paredes verticales. Habitualmente en los modelos de este sistema se sitúan las paredes verticales en el infinito, el flujo es bidimensional y se buscan soluciones en forma de onda plana, lo cual simplifica enormemente los cálculos. Por comodidad se normaliza la altura de la capa de fluido de tal manera que en la superficie  $z = 1$  y en el fondo  $z = 0$ . Si suponemos que la superficie es plana y no deformable, igualando el esfuerzo viscoso con el que provoca la tensión superficial, se cumple que en la superficie ( $z = 1$ ):

$$\mu \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} \quad (2.7)$$

siendo  $\mu$  la viscosidad dinámica. Para simplificar hemos considerado que sólo hay variación de la componente en  $x$  de la velocidad, pero en un caso más general habría que incluir el término de la componente  $y$ , puesto que en esta dirección también habría cambios de la tensión superficial. Sin embargo, como aquí se buscan soluciones con simetría de traslación en la dirección  $y$  podemos considerar relevante únicamente la dinámica en el eje  $x$ .

Además, en el fondo de la cavidad la condición de adherencia, o de no deslizamiento, da lugar a que allí la componente en  $x$  de la velocidad sea  $u_x = 0$ . La superficie no deformable ocasiona que la componente en  $z$  en la superficie sea  $u_z = 0$ .

Respecto de las condiciones térmicas se suelen distinguir dos situaciones y sus combinaciones.

1. Que el fondo sea conductor y su perfil de temperatura no se vea afectado por las variaciones de la temperatura del fluido, y que en la superficie no haya transferencia de calor. La temperatura en el fondo es lineal:

$$T(x) = T_+ - \beta x$$

donde  $\beta = \frac{T_+ - T_-}{l_x} = \frac{\Delta T}{l_x}$  siendo  $l_x$  la distancia entre las dos paredes cuyas temperaturas son  $T_+$  y  $T_-$ . En la superficie se cumple que:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$$

2. Que haya transferencia de calor en la superficie y el fondo sea adiabático. En la superficie se cumple entonces:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\chi_a h}{\chi_f h_a} (T - T_{aire}) = 0 \quad (2.8)$$

En esta ecuación  $h$  es la altura de fluido,  $T_a$  es la temperatura del aire a la distancia característica  $h_a$  de la interfaz en la que se produce la transferencia térmica, y  $\chi_a$  y  $\chi_f$  son, respectivamente, las conductividades térmicas del aire y del fluido. El valor resultante de la fracción  $\frac{\chi_a h}{\chi_f h_a}$  ha sido obtenido en varios casos de una forma empírica (ver sección 2.3).

### 2.2.2 Solución del flujo básico

Consideremos una capa de fluido con superficie plana e indeformable y un flujo estacionario bidimensional ( $u_y = 0$ ,  $\frac{\partial T}{\partial y} = 0$ ,  $\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = \frac{\partial T}{\partial t} = 0$ ). En una zona suficientemente alejada de las paredes se cumple:

$$u_z|_{z=1} = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

A partir de la ecuación 2.5, de balance de la energía, se obtiene:

$$u_x \frac{\partial T}{\partial x} = \kappa \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (2.9)$$

y a partir de la ecuación 2.4 tenemos, para la componente  $x$ :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}$$

y para la componente  $z$ :

$$\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} = \frac{\rho(T)}{\rho_0} (-g) \quad (2.10)$$

Manejando adecuadamente estas expresiones se llega a las ecuaciones del campo de temperatura y de la velocidad (para un cálculo más detallado se pueden ver las referencias [18] y [20]), teniendo en cuenta las siguientes condiciones de contorno:

- En el fondo de la celda ( $z = 0$ ) se tiene la condición de no deslizamiento:

$$u_x = 0$$

- Como el flujo es de retorno, se cumple que en cualquier plano vertical:

$$\int_0^1 u_x(z) dz = 0$$

- Debido a la condición expresada en la ecuación 2.7, en  $z = 1$ :

$$\mu \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} = \frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}$$

los perfiles de velocidad y temperatura vienen expresados por las ecuaciones:

$$u_x = U^* \left[ \frac{1}{6} z^3 + \frac{(12q+1)}{40} z^2 - \frac{(2q+1)}{10} z \right] \quad (2.11)$$

$$T(z) = \frac{(U^*)^2 \nu}{\kappa \alpha g} \left[ \frac{1}{120} z^5 + \frac{(12q+1)}{480} z^4 - \frac{(2q+1)}{60} z^3 \right] \quad (2.12)$$

donde:

$$q = \frac{\rho}{\alpha g} \frac{\partial \sigma}{\partial T} \quad U^* = \frac{g \alpha}{\nu} \frac{\partial T}{\partial x}$$

Es interesante darse cuenta de que tanto el perfil de la velocidad como el de temperatura solamente dependen del gradiente de temperatura en un término multiplicativo ( $U^*$ ), por lo que la forma de estos perfiles no cambia al aumentar o disminuir la diferencia de temperatura. Esta forma sí que varía, en cambio, al cambiar alguna de las propiedades del fluido contenidas en la definición de  $q$ .

## 2.3 Números adimensionales

A continuación se explica el significado de algunos números adimensionales que son de especial relevancia para este trabajo. Estos números nos permiten comparar la influencia de determinadas fuerzas o magnitudes fundamentales. Para ello es necesario saber los parámetros que intervienen en el experimento y a partir del análisis dimensional podemos averiguar cuáles de estos son independientes. Una buena referencia en la que se explican con detalle cada uno de estos números es la referencia [21].

### Número de Marangoni

Relaciona los efectos estabilizantes —disipación térmica y viscosa— con los efectos desestabilizantes de la tensión superficial. Comparando los tiempos característicos de ambos se obtiene el número de Marangoni. El tiempo de estabilización ( $t_e$ ) será el debido a los tiempos térmico ( $t_\tau$ ) y viscoso ( $t_\nu$ ):

$$t_\tau = L^2/\kappa \quad t_\nu = L^2/\nu \quad \Rightarrow \quad t_e^2 = t_\tau \cdot t_\nu = \frac{L^4}{\nu \kappa} \quad (2.13)$$

En esta definición  $L$  es la altura de fluido. El tiempo característico de desestabilización ( $t_d$ ) está asociado a la tensión superficial. Si  $a$  es la aceleración de

una partícula, este tiempo será:

$$t_d^2 = \frac{L}{a} = \frac{L}{\gamma(T - T_0)L/\rho L^3} = \frac{L^3 \rho}{\gamma(T - T_0)}$$

El número de Marangoni viene dado por la relación:

$$Ma = \frac{t_e^2}{t_d^2} = \frac{L\gamma(T - T_0)}{\rho\nu\kappa} = \frac{|\gamma|\beta L^2}{\mu\kappa} \quad (2.14)$$

siendo  $L$  la longitud característica,  $\beta = \frac{T-T_0}{L}$  un gradiente de temperatura, y  $\mu = \nu\rho$  la viscosidad dinámica. En adelante utilizaremos esta manera de escribir el número de Marangoni, con  $L = h$  y  $\beta = \frac{T-T_0}{l_x}$ , para comparar su valor con otros resultados encontrados en los experimentos de calentamiento lateral. El valor de  $l_x$  es la distancia entre los lados con temperatura  $T_+$  y  $T_-$ . A veces, en lugar de esta expresión, puede ser conveniente escribir el número de Marangoni de la forma siguiente:

$$Ma = \frac{|\gamma|\beta l_x^2}{\mu\kappa} \quad (2.15)$$

con  $\beta = \frac{\partial T}{\partial x}$

En esta definición el parámetro que se tiene en cuenta es  $l_x^2$ , porque el tiempo de difusión que se considera hace referencia a la estabilización en la misma dirección que actúan las fuerzas desestabilizantes, es decir en la dirección del gradiente de temperatura que es horizontal [22].

## Número de Rayleigh

Ahora se considera como efecto desestabilizante el empuje de Arquímedes. Este empuje, para una partícula de fluido de volumen  $\delta V$  cuya densidad varía en  $\rho - \rho_0$ , es:

$$|\delta F| = |(\rho - \rho_0) \cdot \delta V \cdot g| = \rho_0 \cdot \delta V \cdot g\alpha(T - T_0)$$

La aceleración de la partícula será:

$$\frac{|\delta F|}{\rho_0 \cdot \delta V} = g\alpha(T - T_0) = \frac{L}{t_{des}^2}$$

Luego el tiempo característico de desestabilización es:

$$t_{des}^2 = \frac{L}{g\alpha(T - T_0)} \quad (2.16)$$

y el número de Rayleigh:

$$Ra = \frac{t_e^2}{t_{des}^2} = \frac{L^4/\nu\kappa}{L/g\alpha(T - T_0)} = \frac{L^3 g\alpha(T - T_0)}{\nu\kappa} \quad (2.17)$$

Igualmente este número se puede escribir de una forma más adecuada que será la utilizada:

$$Ra = \frac{g\alpha\beta L^4}{\nu\kappa} \quad (2.18)$$

Si se tiene en cuenta que para el empuje el gradiente vertical de temperatura cobra mucha más importancia que el gradiente horizontal, podemos escribir el número de Rayleigh como:

$$Ra = \frac{g\alpha\beta_v h^4}{\nu\kappa} \quad (2.19)$$

donde  $\beta_v = \frac{\partial T}{\partial z}$ .

## Número de Prandtl

Proporciona la relación entre las dos fuerzas disipativas: térmica y viscosa. Así pues, según los valores de los tiempos característicos definidos en la ecuación 2.13 tenemos que el número de Prandtl es:

$$Pr = \frac{t_\tau}{t_\nu} = \frac{\nu}{\kappa} \quad (2.20)$$

Este número es especialmente interesante en nuestro experimento porque es el que permite distinguir los mecanismos de las inestabilidades en el fluido. Cuando el número de Prandtl es  $Pr \ll 1$  entonces  $\kappa \gg \nu$  y el mecanismo principal de estabilización vendrá dado por el dominio de la disipación térmica sobre la viscosa. Las perturbaciones de temperatura relajarán más rápidamente que las de la velocidad, por lo que el fluido seguirá en movimiento después de que hayan decaído las primeras. En cambio, cuando el número de Prandtl es  $Pr \gg 1$  tenemos que  $\nu \gg \kappa$  y las perturbaciones de velocidad relajan más rápidamente que las de temperatura.

## Número de Bond

Normalmente, con las definiciones clásicas, el número de Bond es la relación entre los números de Rayleigh y Marangoni:

$$Bo = \frac{Ra}{Ma} = cte \cdot L^2 \quad (2.21)$$

Por tanto la razón entre las fuerzas gravitatorias y termocapilares varía como  $L^2$ . Si la longitud característica es la altura  $h$ , para alturas de fluido grandes el número de Bond es grande, con lo que dominan las fuerzas gravitatorias ( $Ra \gg Ma$ ). Cuando la altura es pequeña el número  $Bo$  es también pequeño y dominan las fuerzas del empuje ( $Ma \gg Ra$ ).

En algunos trabajos en vez de este número lo que se utiliza es el inverso  $Bo^{-1}$  [20, 23] o la razón entre los número de Rayleigh y Marangoni definidos en las expresiones 2.15 y 2.19, que dan lugar a un número  $Bo$  directamente proporcional a  $h^3/l_x$ . Con esta última definición, en esos experimentos que cumplen  $l_x \gg l_y$ , parece reflejarse mejor la competición que existe entre las fuerzas termocapilares y el empuje en ondas hidrotérmicas [22].

## Número de Reynolds

Una vez establecido el régimen convectivo en un fluido podemos diferenciar entre las fuerzas de origen viscoso y las de inercia. En las primeras la aceleración es  $a_\nu = \frac{\nu V}{L^2}$  donde  $V$  es una velocidad característica del fluido. La aceleración de las fuerzas de inercia es  $a_i = \frac{V^2}{L}$ . El número de Reynolds es entonces:

$$Re = \frac{a_i}{a_\nu} = \frac{V^2/L}{\nu V/L^2} = \frac{LV}{\nu} \quad (2.22)$$

Tiene gran importancia para estimar la anchura de la capa límite viscosa en contacto con la superficie de un sólido. Esta anchura “ $l$ ” depende de este número de la siguiente manera:

$$l \sim \frac{L}{\sqrt{Re}}$$

Cuando  $\nu$  es pequeña, comparada con  $LV$ , el número  $Re$  es grande y por tanto la anchura de la capa límite viscosa es pequeña.

## Número de Grashof

Es una medida de la importancia relativa de las fuerzas del empuje frente a las viscosas. Como hemos visto anteriormente el tiempo característico del empuje está expresado en la ecuación 2.16 y el tiempo característico viscoso en la 2.13. Entonces el número de Grashof es:

$$Gr = \frac{t_\nu^2}{t_{des}^2} = \frac{\alpha g (T - T_0) L^3}{\nu^2} = \frac{\alpha g \beta L^4}{\nu^2} \quad (2.23)$$

## Número de Biot

En una capa de fluido con superficie libre hay un flujo de calor entre el fluido y el aire. Esta comúnmente admitido que esta transferencia de calor se aproxima a la relación de Newton, que se expresa de la siguiente manera:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + Bi(T - T_a) = 0$$

donde  $T_a$  es la temperatura del aire a una distancia pequeña  $h_a$  de la interfaz y  $Bi$  el número de Biot [24, 25]. Dependiendo del tipo de transferencia de calor en esta interfaz líquido-aire —conductivo y/o convectivo—, se encuentra empíricamente un valor del coeficiente de este intercambio térmico: el número de Biot. En una capa límite térmica de espesor  $h_a$ , en el aire, y  $h_f$ , en el fluido, se podría suponer que el intercambio de calor es conductivo (ver figura 2.2).

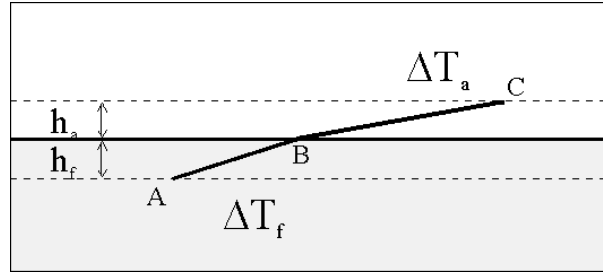


Figura 2.2: Capas de fluido y de aire en las que los perfiles de temperatura son lineales.

Teniendo en cuenta que el calor transferido desde el fluido “ $Q_f$ ” es igual al recibido por el aire “ $Q_a$ ”, a partir de la ley de Fourier tenemos que:

$$Q_a = Q_f = \chi_a \frac{\Delta T_a}{h_a} = \chi_f \frac{\Delta T_f}{h_f}$$

donde  $\Delta T_a = |T_B - T_C|$  y  $\Delta T_f = |T_A - T_B|$  son las diferencias de temperatura en la capa de aire y en la de fluido, respectivamente. La relación entre estas diferencias de temperatura es el número de Biot, que estaba ya expresado en la ecuación 2.8:

$$Bi = \frac{\Delta T_f}{\Delta T_a} = \frac{h_f \chi_a}{\chi_f h_a}$$

Es decir, cuando la diferencia de temperatura en la capa de aire es muy pequeña respecto a  $\Delta T_f$ , el número  $Bi$  es muy grande, y la interfaz es muy conductora. Por el contrario, cuando el número  $Bi$  es pequeño, la superficie puede considerarse prácticamente aislante. Habitualmente en experimentos similares al desarrollado aquí el valor de  $Bi$  suele ser mucho menor que uno [26]. Sin embargo, hay otros trabajos en los que se discute la validez de esta expresión [27, 28].

# Capítulo 3

## Resultados anteriores

Antes de analizar el trabajo realizado, es conveniente llevar a cabo una síntesis de los trabajos anteriores en configuraciones similares. Aunque todos están dirigidos al estudio de la convección termocapilar debida a un calentamiento lateral, las condiciones teóricas y experimentales varían en gran medida de unos a otros.

En los estudios teóricos la relación entre la disipación viscosa y la térmica (número de Prandtl), es un parámetro cuyo valor causa comportamientos bien diferentes. En este sentido parece haber una frontera entre aquellos fluidos que tienen  $Pr < 15$  y aquellos con un  $Pr$  mayor.

En los experimentos la variedad de resultados es especialmente notable. Hay que tener en cuenta que las configuraciones de las celdas utilizadas varían apreciablemente en dimensiones y formas. Si llamamos  $l_x$  a la distancia entre las dos paredes cuyas temperaturas son  $T_+$  y  $T_-$  ( $T_+ > T_-$ ) —es decir, en la dirección del gradiente de temperatura—, y a  $l_y$  la distancia entre las otras dos paredes verticales colocadas perpendicularmente a las primeras, se tienen experimentos para todos los casos:  $l_x \gg l_y, l_y \gg l_x, l_x \approx l_y$ . También aquí, como en los trabajos teóricos, se encuentran diferencias de las soluciones según el valor escogido del número de Prandtl: pequeño  $Pr < 1$ , mediano  $1 < Pr < 15$ , o grande  $Pr \geq 15$ .

### 3.1 Trabajos teóricos y simulaciones

#### Smith y Davis

Estos autores realizan el primer análisis de estabilidad lineal [29] para una capa horizontal de fluido de extensión infinita, no sometida a las fuerzas gravitatorias ( $Ra = 0$ ). Consideran dos casos: cuando el flujo es abierto y tiene un único sentido hacia la dirección  $x$  positiva —flujo lineal—, y cuando el flujo es cerrado y el sentido es de ida y vuelta en este mismo eje —flujo de retorno— (figura



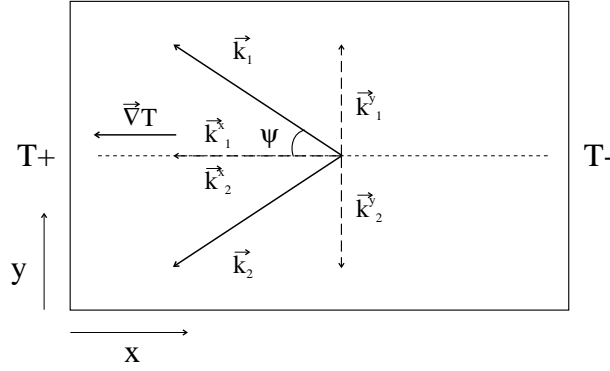


Figura 3.1: Componentes de los vectores de onda  $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$ .

3.2).

El flujo lineal conduce el fluido desde el extremo cuya temperatura es  $T_+$  hacia aquél con temperatura  $T_-$ . Es decir, en sentido contrario al gradiente de temperatura. Este flujo es una solución del estado básico determinado por las ecuaciones de Navier-Stokes (2.4), de balance de la energía (2.5) y de la continuidad (2.6). Los campos de velocidad y de temperatura que se encuentran en este caso son los siguientes:

$$\vec{u} = (u_x, u_y, u_z) = (z, 0, 0)$$

$$T = -x + \frac{1}{6}Ma(1 - z^3)$$

Las coordenadas  $x, y, z$  escritas aquí y en todo nuestro experimento corresponden a las definidas en la figura 2.1.

Cuando el fondo del contenedor no es conductor y la superficie no es deformable, se encuentran las siguientes soluciones (colocando las paredes verticales en el infinito):

- \*  $Pr < 0.6$ : Un par de ondas viajeras hidrotermales simétricas ( $\vec{k}_1$  y  $\vec{k}_2$ ), formando ángulos  $\pm\psi$  con el gradiente de temperatura ( $k_1^x = k_2^x, k_1^y = -k_2^y$ ) (figura 3.1). Cuando el número de  $Pr$  tiende a cero el ángulo tiende a  $90^\circ$ .
- \*  $0.6 < Pr < 1.6$ : Un par de ondas viajeras hidrotermales propagándose en la misma dirección que el flujo superficial (contrario al gradiente de temperatura,  $\psi = 180^\circ$ ).
- \*  $Pr > 1.6$ : Rollos estacionarios longitudinales, es decir, con su eje paralelo al gradiente.

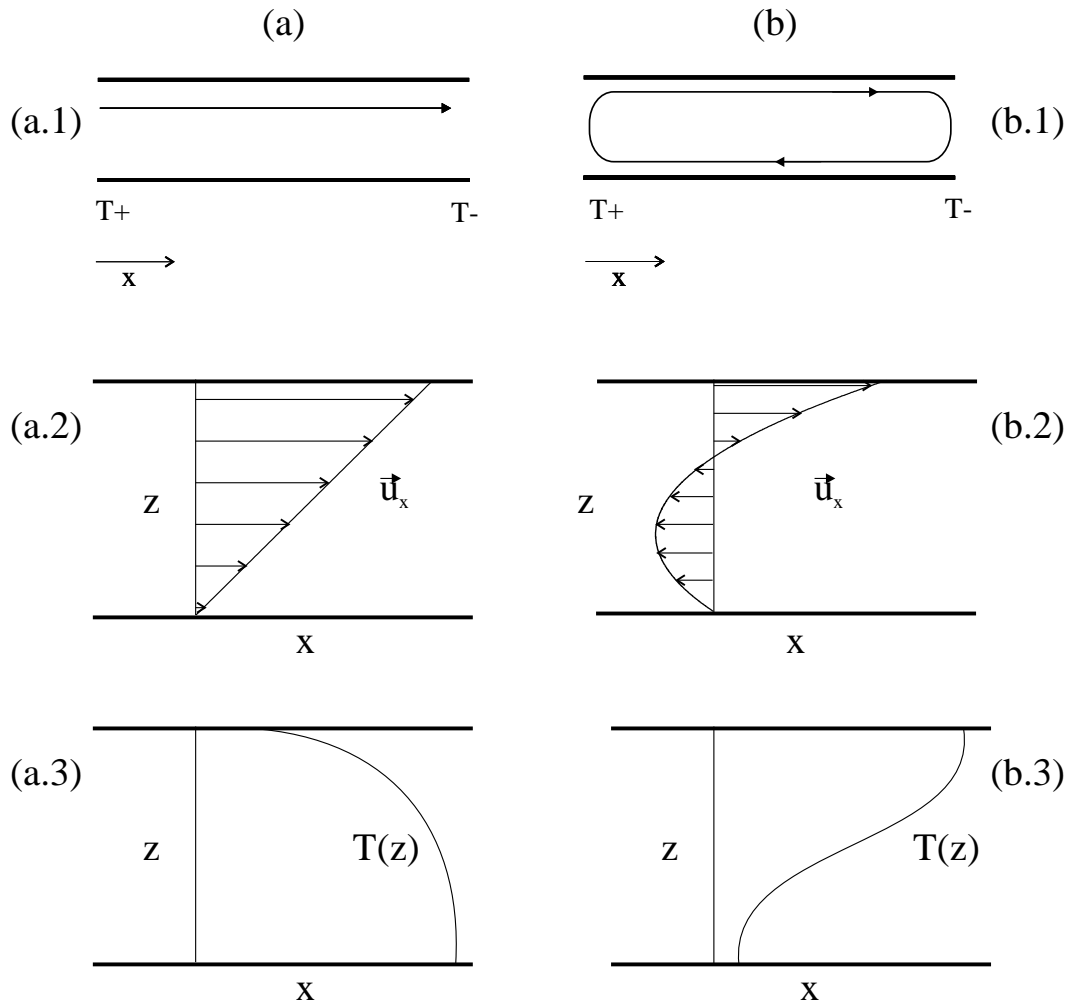


Figura 3.2: (a): Esquema básico del flujo lineal (a.1), campo de velocidad (a.2) y campo de temperatura (a.3); (b): Esquema del flujo de retorno (b.1), campo de velocidad (b.2) y campo de temperatura (b.3).

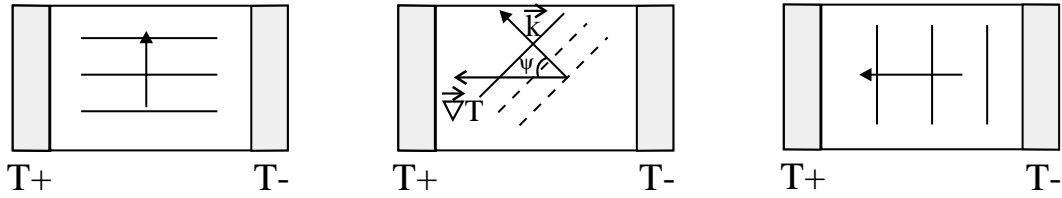


Figura 3.3: Propagación de las ondas hidrotermales para números  $Pr$  pequeños (izquierda), grandes (derecha) y medianos (centro). El ángulo  $\psi$  señala el ángulo comprendido entre el vector de onda y el gradiente de temperatura.

Las ondas que estos autores llaman aquí *hidrotermales* reciben su nombre porque tienen un origen térmico distinto del mecánico que origina las ondas de superficie.

El flujo de retorno lleva el fluido desde el lado caliente al frío por la superficie y del lado frío al caliente por el fondo, conservándose la masa en cualquier plano vertical. Las ecuaciones de la temperatura y la velocidad son las siguientes (figura 3.2):

$$\vec{u}_x = \frac{3}{4}z^2 - \frac{1}{2}z; \quad u_y = u_z = 0 \quad (3.1)$$

$$T = -x + Ma \left[ \frac{1}{16}(1 - z^4) - \frac{1}{12}(1 - z^3) \right]$$

Para todo número de Prandtl aparecen dos ondas hidrotermales cuyo vector de onda forma ángulos  $\pm\psi$  con el gradiente. El ángulo varía de la forma:

- \*  $Pr \rightarrow 0$  entonces  $\psi \rightarrow 90^\circ$
- \*  $Pr \rightarrow \infty$  entonces  $\psi \rightarrow 8^\circ$  (ver figura 3.3).

Estas soluciones surgen cuando el número de Marangoni supera cierto valor que es función del número  $Pr$ . En particular, para el flujo de retorno y un número de Prandtl intermedio  $-Pr \simeq 10$ — tenemos que  $Ma \simeq 300$ . También se deduce que los valores del número de onda y del ángulo de propagación  $\psi$  de las ondas dependen del número de Prandtl.

En un trabajo posterior Smith [30] da una posible explicación fenomenológica de los mecanismos de aparición de las ondas. Como el flujo de retorno se adecúa más a la realidad del experimento, consideramos este tipo de flujo en esta explicación. Ésta no pretende ser cuantitativa sino que indica lo que puede ocurrir para que se establezcan las ondas, sin descartar otras posibles causas.

Según el valor del número de Prandtl sea grande o pequeño se dan dos mecanismos diferentes:

- Mecanismo para números  $Pr$  pequeños.

Cuando el número de Prandtl es pequeño las fuerzas de inercia dominan sobre las fuerzas viscosas, pues la viscosidad es pequeña comparada con la difusividad térmica. Puede verse un esquema gráfico de este mecanismo en la figura 3.4. En el dibujo (a) de este diagrama las flechas indican la velocidad del flujo básico que es simétrico en la dirección  $y$ . Las líneas continuas representan el flujo superficial y las discontinuas el de retorno.

Supongamos que la perturbación original del estado básico sea una línea caliente paralela a la dirección  $x$  (figura 3.4 (b)). Debido a la variación de la tensión superficial con la temperatura, la línea caliente está sometida a una tensión menor que en los alrededores, lo cual genera una fuerza que induce un flujo superficial, perpendicular a la línea caliente y hacia fuera. Como ha de conservarse la masa, este flujo ocasiona otro ascendente justo debajo de la línea, desde el interior del volumen del fluido (figura 3.4 (b)). Este flujo ascendente arrastra fluido más frío y con una velocidad horizontal en la dirección  $x$  más pequeña que la de la superficie, ya que el campo de temperatura del estado básico y la velocidad tienen un valor menor debajo de la superficie. Visto en el sistema de referencia del fluido, se forma entonces un flujo contrario al flujo básico. Y visto desde un sistema de referencia situado en el exterior del fluido el flujo se frena (fig. 3.4 (c)). El enfriamiento, provocado por el flujo ascendente, reduce la temperatura de la línea y consigue enseguida que ésta sea eliminada. Sin embargo, como el número de Prandtl es pequeño, las fuerzas viscosas son también pequeñas y no pueden frenar el flujo contrario al flujo básico en la superficie. Al seguir subiendo fluido desde debajo continúa enfriándose la línea haciendo que se sobrepase la temperatura de equilibrio y se forme una línea fría. Ahora esta línea fría origina un flujo superficial hacia ella, como consecuencia de la termocapilaridad, pues la tensión de la línea fría es mayor que la del entorno. Como resultado de la conservación de la masa tiene lugar un flujo descendente (figura 3.4 (d)), de manera inversa a lo que pasa con la línea caliente. Debido a la tensión superficial el flujo es acelerado en la dirección del flujo básico (hacia la pared fría). Rápidamente el flujo contrario es eliminado y se consigue un mínimo del campo de temperatura. A partir de aquí, la línea comienza a calentarse, queda eliminada la fría y, debido a la inercia, otra vez se sobrepasa el punto de equilibrio de temperatura, formándose otra vez una línea caliente (figura 3.4 (e)). Si el gradiente de temperatura impuesto es lo suficientemente grande las pérdidas de energía por conducción son menores que la energía que llega a la línea caliente por convección en la dirección del flujo. Así, la siguiente línea tendrá una temperatura mayor que la anterior y el proceso será amplificado. Los efectos de la inercia

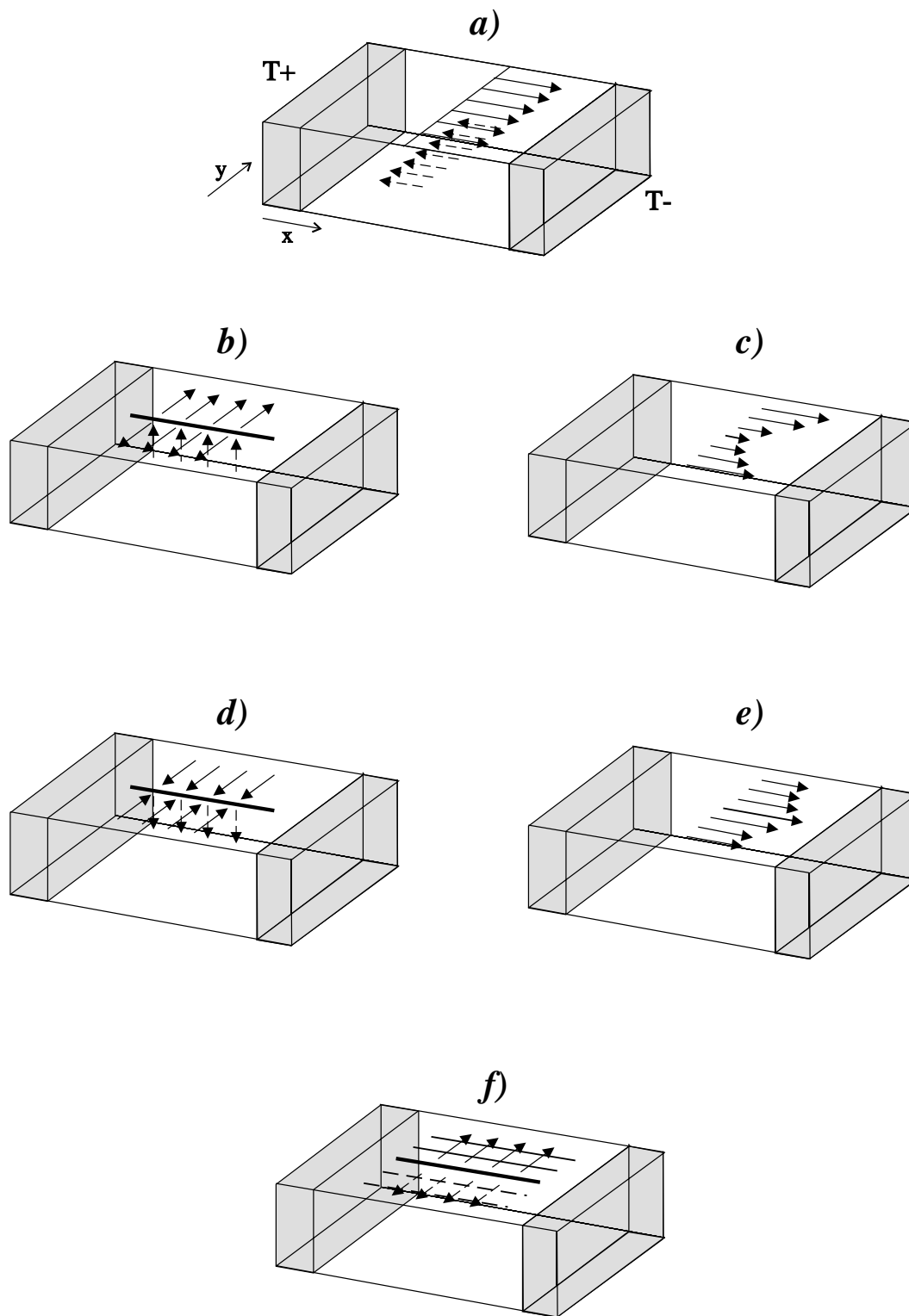


Figura 3.4: Mecanismo de inestabilidad para número  $Pr \rightarrow 0$ .

facilitan el acoplamiento entre el flujo de base y el flujo vertical, de tal manera que se puede extraer energía del campo horizontal de temperatura del estado básico y la perturbación progresa. Por tanto, sobrevive la inestabilidad que viaja en la dirección perpendicular al flujo de base, y se tienen las ondas hidrotermales. El vector de onda forma  $90^\circ$  con la dirección del gradiente (figura 3.4 (f)). Evidentemente, unas fuerzas viscosas lo suficientemente grandes ( $Pr$  grande) harían que este proceso no fuera posible, pues reducirían la inercia del fluido al disipar la energía, quedando así amortiguadas rápidamente las perturbaciones de velocidad en cuanto las fuerzas que las generan desaparezcan.

- Mecanismo para números  $Pr$  grandes.

Los efectos viscosos son ahora los que dominan en el flujo frente a las fuerzas de inercia. Si consideramos primero una línea caliente en la dirección  $x$ , las fuerzas termocapilares y la continuidad harían que ascendiera fluido más frío pero, debido a la ausencia de fuerzas de inercia la perturbación de la velocidad se amortigua rápidamente y la temperatura se hace homogénea. Por tanto, la línea se enfriaría y desaparecería, eliminándose la perturbación. Es decir, las fuerzas viscosas impiden que el movimiento de inercia continúe una vez que desaparece la línea, y la perturbación no progresa. Por eso, cuando surge una inestabilidad en forma de línea más caliente, se enfría, desaparece, y no se llega a formar una línea fría al no sobrepasarse el equilibrio de temperatura.

En cambio, si consideramos una línea caliente en la dirección perpendicular (dirección  $y$ ), la situación es distinta (figura 3.5 a y b). La termocapilaridad y la conservación de la masa causan que el flujo ascendente enfríe la línea, de la manera que ya se explicó en el apartado anterior. Debido a la continuidad de la masa, a la vez que sube fluido enfriando la línea, baja fluido desde la superficie con una temperatura mayor que la que tiene el fluido en el interior, pues la temperatura del estado básico disminuye con la profundidad. Este mecanismo de calentamiento del volumen del fluido a través de la convección vertical constituye la forma en la que se extrae energía desde el estado básico de la temperatura hacia la perturbación. De esta manera, se formarían zonas calientes en el interior del fluido, justo debajo de la superficie fría (figura 3.5 (c)). Sin embargo, las perturbaciones de temperatura del flujo descendente interactúan con el campo de velocidades del flujo de base, que trae fluido hacia la pared fría, y esto origina que las regiones calientes se desplacen hacia la derecha y más abajo (véase la figura 3.5 (d)). Es decir, la posición de la zona caliente depende de un equilibrio entre el enfriamiento por la convección del flujo básico, el calentamiento por el flujo vertical descendente y la conducción en la capa de fluido. La posición final de esa zona es a media

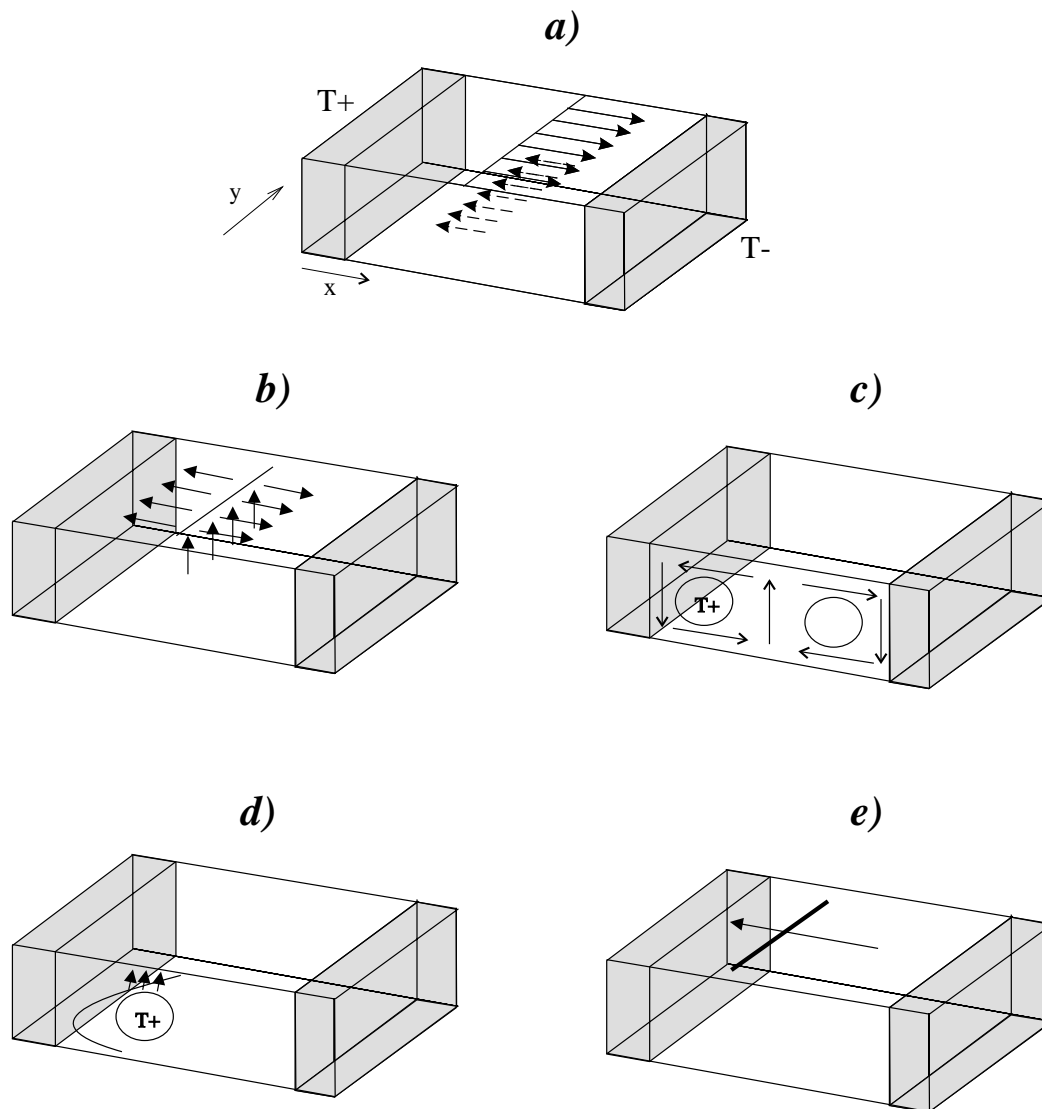


Figura 3.5: Mecanismo de inestabilidad para número  $Pr \rightarrow \infty$ . La circunferencia que contiene  $T_+$  indica las zonas calientes del interior del fluido.

profundidad de la capa.

Cuando el número de Marangoni es lo suficientemente grande el flujo vertical descendente extrae la energía necesaria del campo vertical de temperatura del estado básico, causando que la temperatura de la región caliente del interior sea muy elevada. Entonces, al haber tanta diferencia de temperatura entre esta región del interior y la superficie, se calienta por conducción el fluido situado en la superficie (figura 3.5 (d)). La línea caliente anterior decrece su temperatura, debido al flujo ascendente de fluido frío, y la nueva línea aparece a la izquierda de la primera como consecuencia del calentamiento conductivo (figura 3.5 (e)). Los efectos viscosos hacen que el flujo ascendente se sitúe justo debajo del máximo de temperatura y el proceso se repite propagándose la inestabilidad en la dirección contraria al flujo de base en la superficie. La clave del mecanismo está en la zona caliente en el interior, pues es la que provoca que la inestabilidad se propague a la superficie al calentar ésta por conducción. Debido a esta zona caliente interna la amplitud de la temperatura es máxima cerca del fondo. La energía se extrae del campo básico vertical de temperatura a través de la convección vertical. Las ondas resultantes se propagan con su vector de onda casi alineado con el gradiente de temperatura.

- Mecanismo para números  $Pr$  intermedios.

En este caso el mecanismo que origina las ondas sería una combinación de los dos anteriores y éstas se propagarían en una dirección contraria al flujo básico en la superficie (dirección del eje  $-x$ ), formando cierto ángulo con el gradiente. Han de tenerse en cuenta las fuerzas viscosas y las de inercia, pues actúan las dos inestabilidades antes explicadas.

Unos años después Smith [31] lleva a cabo un análisis de estabilidad débilmente no lineal utilizando el método de escalas múltiples. Las ecuaciones que encuentra son una versión generalizada del modelo de Ginzburg-Landau [32]. Deduce que, para la mayoría de los valores del número de Prandtl y del número de Biot, sólo es estable una de las dos ondas oblicuas. Para los valores  $Pr = 0.001$  o  $Pr = 0.01$  y  $Bi = 1$  ambas ondas son estables.

En los resultados que siguen de otros autores se consideran las soluciones para el flujo de retorno, que es más cercano a las condiciones experimentales.

## Laure y Roux

Estudian la estabilidad lineal de un flujo de retorno con una longitud infinita en la dirección  $x$ , cuando los límites superior e inferior de la capa de fluido son o bien conductores, o bien aislantes [33]. Se tienen en cuenta ambas fuerzas:



interfaciales ( $Ma \neq 0$ ) y empuje ( $Ra \neq 0$ ). El rango del número de Prandtl considerado va desde  $Pr = 0.001$  hasta  $Pr = 1$ . Obtienen modos oscilatorios bidimensionales cuyo origen es principalmente térmico. Tras realizar un análisis débilmente no lineal observan que la evolución de las perturbaciones corresponde a ondas viajeras propagándose en sentido contrario al gradiente de temperatura (del lado  $T_+$  al  $T_-$ ).

### Parmentier *et al.*

Mediante una formulación matemática en tres dimensiones estos autores determinan las ecuaciones linealizadas de la perturbación inducida por un gradiente horizontal de temperatura [34]. Como el trabajo anterior, tienen en cuenta el acoplo entre las inestabilidades termocapilares y las que provienen del empuje, pero amplían el rango de fluidos con números de Prandtl entre  $10^{-2}$  y  $10$ . Consideran fondo y superficie adiabáticos. Para el caso  $Ra = 0$  y  $Ma \neq 0$  recuperan los resultados de Smith y Davis [29], y para  $Ra \neq 0$  y  $Ma = 0$  los de Laure y Roux [33]. Cuando  $Ra \neq 0$  y  $Ma \neq 0$  no encuentran modos estacionarios sino únicamente ondas viajeras, que para fluidos con número  $Pr$  intermedio forman un ángulo algo mayor que el de Smith y Davis  $\psi = 33^\circ$ . Las perturbaciones en forma de onda propagándose con un ángulo  $\psi = 0^\circ$  aparecen cuando las fuerzas del empuje son dominantes, mientras que en condiciones de microgravedad y con pequeño número  $Pr$  las ondas se propagan con un ángulo  $\psi \approx 90^\circ$ . El comportamiento es dependiente de los valores del número de Prandtl.

### Mercier y Normand

Buscan un modelo que explique los resultados experimentales hallados por Daviaud y Vince [23] para un fluido con  $Pr = 7$  [20]. En particular, quieren encontrar la transición que se observa de ondas viajeras a rollos estacionarios al aumentar la altura de fluido. Para ello introducen un número de Biot — condición térmica en la superficie del fluido— y encuentran que la relación entre las fuerzas termocapilares y gravitatorias,  $Bo^{-1} = \frac{Ma}{Ra}$ , es función de este número  $Bi$ . Como condición térmica aislante en el fondo de la celda imponen una temperatura que varía linealmente a lo largo del eje  $x$ .

El análisis de la estabilidad lineal proporciona diferentes perfiles verticales de temperatura (figura 3.6) que varían de acuerdo con los valores del parámetro  $\mu = \frac{Bi}{1+Bi}$ . La forma del perfil de la temperatura muestra una dependencia con el valor del número  $Bi$  de la siguiente manera:

$$T(z) = \frac{Ra}{48} z \left[ \frac{1}{20} (8z^4 - 25z^3 + 20z^2 - 3\mu) - \frac{Ma}{Ra} (3z^3 - 4z^2 + \mu) \right]$$

Las inestabilidades que se obtienen, producidas al desestabilizarse el flujo básico, se explican a continuación.

Cuando el número  $Bi$  es grande y el empuje dominante se tienen modos estacionarios en forma de rollos longitudinales. Cuando el número  $Bi$  es pequeño y las fuerzas termocapilares son las que dominan, entonces los modos son oscilatorios en forma de ondas oblicuas. Para el régimen estudiado en el que las fuerzas termocapilares dominan sobre las gravitatorias ( $Bo^{-1} = 8$ ) y el número de Biot es  $Bi = 1$ , el ángulo de propagación encontrado para las ondas es  $\psi = 47^\circ$ .

Para  $Bi > 7$  se distinguen dos tipos de oscilaciones viajeras, según la relación entre los números  $Bi$  y  $Bo^{-1}$ , y los valores críticos adimensionales del número de onda ( $|\vec{k}|$ ), la frecuencia ( $w$ ) y ángulo de propagación ( $\psi$ ). Justo por encima de la transición entre los modos estacionarios hacia los oscilatorios aparecen los modos oscilatorios de *tipo II*, no observados experimentalmente, para los que los valores del número de onda, frecuencia y ángulo, respectivamente, al variar  $Bo^{-1}$ , son:  $5.5 < |\vec{k}| < 8$ ,  $100 < w < 200$ ,  $160^\circ \leq \psi \leq 180^\circ$ . La oscilación de *tipo I* tiene un número de onda y una frecuencia menores,  $3 < |\vec{k}| < 5.5$ ,  $w < 100$  y un ángulo  $\psi < 80^\circ$ . Las características y el ángulo encontrados para la onda de *tipo I* están en buen acuerdo con los de Smith y Davis [29] y Parmentier *et al.* [34].

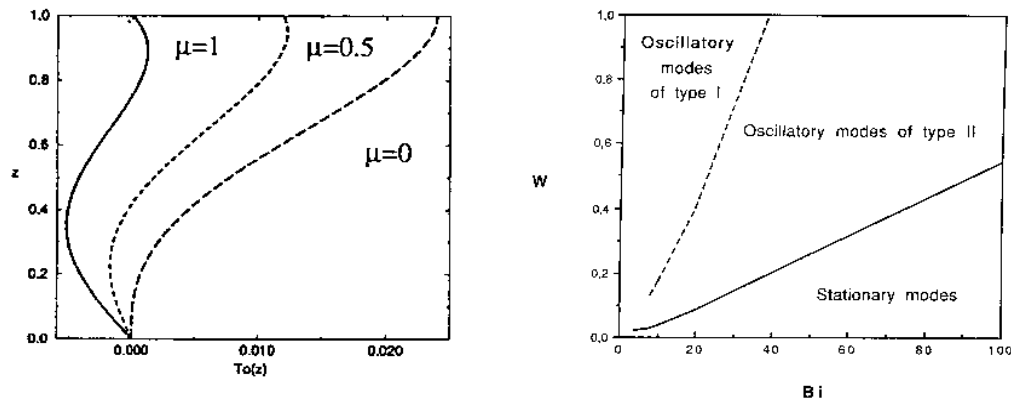


Figura 3.6: Análisis de Mercier y Normand [20]. Izquierda: Perfiles verticales de temperatura para distintos valores de  $\mu = \frac{Bi}{1+Bi}$ . Derecha: Transición entre los modos estacionarios y oscilatorios (línea continua) y entre los dos tipos de modos oscilatorios (línea discontinua), según la relación entre  $W = Bo^{-1}$  y  $Bi$ .

En la tabla 3.1 se ofrece un resumen de los principales resultados teóricos que se acaban de explicar. Una agrupación de estos trabajos también puede leerse en la referencia [35].

	Fuerzas	Tipo de análisis	Cond. de contorno	Pr
<i>SD</i>	Interfaciales	Lineal	Fondo aislante	$0 - \infty$
<i>S</i>	Interfaciales	Débilmente no lineal	Fondo aislante	$0 - \infty$
<i>LR</i>	Empuje e interfaciales	Lineal y débilmente no lineal	Fondo y superficie conductores y/o aislantes	$0.001 - 1$
<i>P</i>	Empuje e interfaciales	Lineal	Fondo y superficie aislantes	$0.01 - 10$
<i>MN</i>	Empuje e interfaciales	Lineal	Fondo y superficie aislantes	7

	Inestabilidades obtenidas
<i>SD</i>	Flujo lineal: 2 ondas oblicuas. Rollos estacionarios longitudinales Flujo de retorno: 2 ondas viajeras oblicuas ( $\pm\psi$ )
<i>S</i>	En la mayoría de los casos solamente es estable una onda oblicua
<i>LR</i>	Modos oscilatorios 2D y 3D Ondas viajeras en la dirección del gradiente de temperatura
<i>P</i>	Sólo ondas viajeras oblicuas
<i>MN</i>	Si $Bi$ grande y empuje dominante: Rollos longitudinales estacionarios Si $Bi$ pequeño y fuerzas interfaciales dominantes: Ondas oblicuas viajeras

Tabla 3.1: Resumen de los principales resultados teóricos. *SD*: Smith y Davis [29]; *S*: Smith [31]; *LR*: Laure y Roux [33]; *P*: Parmentier *et al.* [34]; *MN*: Mercier y Normand [20].

## Simulaciones de la desestabilización del flujo básico

Se agrupan en este apartado los estudios numéricos dirigidos a tratar la desestabilización del flujo bidimensional en tridimensional y los posibles mecanismos dependientes del valor del número de Marangoni. Los resultados de algunos estudios numéricos [36, 37, 38] ponen de manifiesto también la extremada sensibilidad del flujo termocapilar al valor del número  $Pr$ .

Utilizando un número  $Pr = 6.78$ , Peltier y Biringen [39] encuentran una pulsación del flujo básico para un valor crítico del número de Marangoni que es función de la relación de aspecto  $\Gamma_x = l_x/h$ . Hallan un valor mínimo  $\Gamma_x = 2.3$  a partir del cual el flujo es oscilatorio (figura 3.7). Es decir, para que se puedan observar inestabilidades oscilatorias la distancia  $l_x$  tiene que ser como mínimo 2.3 veces la altura del fluido. Los autores van algo más lejos al explicar el mecanismo que origina la aparición de la pulsación: la interacción de un dedo frío de fluido, que surge en el lado caliente, con un rollo central más grande. Este dedo frío hace que el rollo central se retraiga y se forme otro rollo más cerca de la pared fría. Después el dedo va desapareciendo y el rollo central vuelve a ocupar toda la celda. El proceso se repite y da lugar a oscilaciones.

Aunque el mecanismo de esta oscilación se basa en la presencia de capas límites térmicas cerca de las paredes, los autores no llegan a investigar situaciones en las que  $h \ll l_x$  (por tanto  $\Gamma_x$  grande), que son los casos para los que se obtienen ondas hidrotermales.

En otro trabajo, Priede y Gerbeth [40], también muestran que el umbral de las ondas está frecuentemente influido por las condiciones de contorno (fondo y superficie conductores o aislantes).

Por último, como veremos más adelante, la simulación llevada a cabo por Xu y Zebib [41] proporciona unos resultados bastante similares a los que obtenemos en nuestro experimento. Cuando el número de Prandtl es  $Pr = 6.78$  obtienen la misma dependencia entre  $\Gamma_x$  y  $Ma$  que la mostrada en la figura 3.7, pero cuando  $Pr < 6.78$  obtienen unas curvas equivalentes en las que los valores mínimos de  $Ma$  y  $\Gamma_x$  son mayores que en el caso anterior: la mínima relación de aspecto  $\Gamma_x$  para obtener modos oscilatorios es mayor que 2.3 al disminuir el  $Pr$ . Para los valores de los parámetros  $\Gamma_x = 20$  y  $Pr = 10$  se muestra que las ondas viajeras son generadas cerca del centro de la celda y viajan hacia el lado caliente. Al incrementar la diferencia de temperatura —y por tanto el número  $Ma$ — las ondas van ocupando toda la celda hasta que la llenan completamente. En el umbral de aparición de las ondas, en el centro de la celda, la variación de la temperatura es lineal (gradiente de temperatura constante) y el número crítico  $Ma = 283$  es semejante al calculado por Smith y Davis [29]. Además, se observa que para  $\Gamma_x = 3$  y  $Pr = 4.4$  el confinamiento de la cavidad desplaza el umbral de las ondas debido probablemente a efectos tridimensionales (figura 3.8).

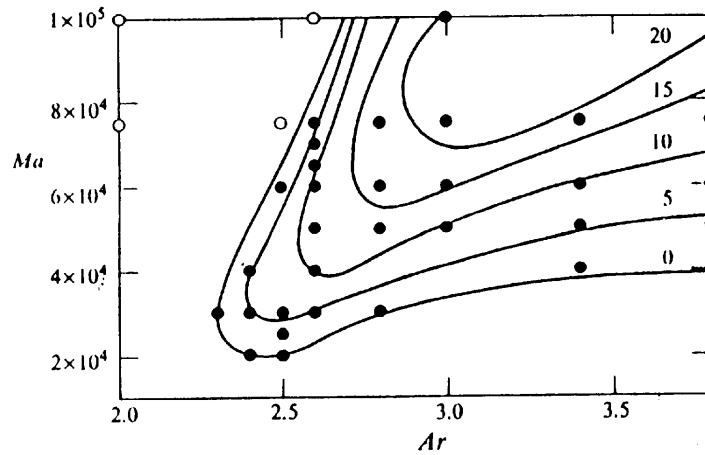


Figura 3.7: Peltier y Biringen [39]. Valores del número de Marangoni, en el umbral de los modos oscilatorios, para una relación de aspecto variable ( $Ar = \Gamma_x$ ). Los valores numéricos sobre cada curva representan incrementos de cinco en cinco de la amplitud de las fluctuaciones.

## 3.2 Trabajos experimentales

Hasta ahora la mayoría de los trabajos experimentales se han encaminado a la determinación del diagrama de estabilidad y al estudio de posibles mecanismos que ocasionan la aparición de modos estacionarios y oscilatorios. Los parámetros que influyen en la selección de las estructuras son numerosos: número de Prandtl, diferencia de temperatura entre los extremos de la celda, condiciones térmicas en el fondo y en la superficie, relaciones de aspecto. Así, la variedad de experimentos que tienen en cuenta alguno de estos parámetros es elevada.

Sin embargo, debido a las dificultades experimentales, no todos los casos posibles han sido abordados de manera sistemática. Por ejemplo, existe dificultad para tratar con fluidos con  $Pr < 1$  (metales líquidos), pues no son transparentes y además pueden aparecer campos electromagnéticos al moverse el fluido. A pesar de eso en algunos experimentos han sido utilizados este tipo de fluidos [42], recogándose oscilaciones de temperatura en la superficie.

En lo que respecta a la influencia de la geometría de la celda, hasta ahora no se ha hecho un estudio sistemático para averiguar esta influencia.

Se seleccionan seguidamente los que entre esta variedad reúnen resultados más relevantes.

### Schwabe *et al.*

En este experimento se utilizan celdas con geometría anular y rectangular, con un fluido cuyo número de Prandtl es 17 [14]. La altura de la capa de fluido es

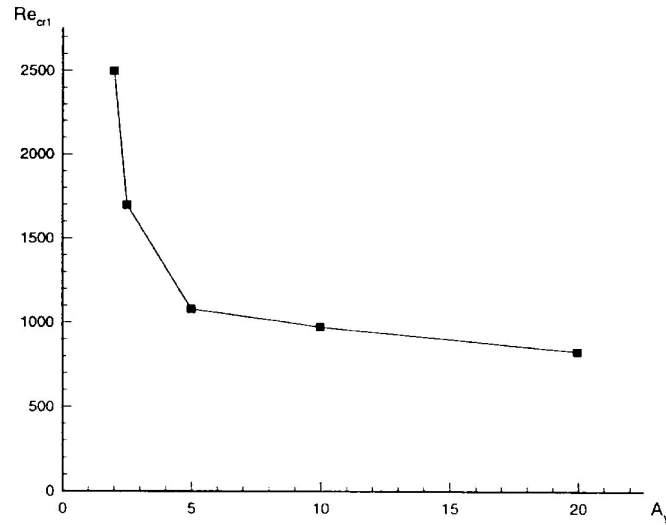


Figura 3.8: Xu y Zebib [41]. Dependencia del número de Reynolds ( $Re = \frac{Ma}{Pr}$ ) con la relación de aspecto en el eje  $y$ . El parámetro  $A_y$  de la figura es lo que aquí llamamos  $\Gamma_y$ .

variable con valores en torno a 1.4 mm, por lo que los efectos del empuje frente a los termocapilares son pequeños. Tanto para fondo conductor como aislante, observan una transición, al aumentar la diferencia de temperatura horizontal, desde un rollo estacionario hacia una estructura dependiente del tiempo — ondas viajeras— pasando por un estado multicelular de rollos estacionarios corrotativos.

En el caso de las ondas viajeras en la configuración anular (fondo conductor), es especialmente interesante la obtención de dos inestabilidades con valores muy diferentes del número de onda, frecuencia y ángulo de propagación. Para una altura de fluido  $h < 1.4$  mm la inestabilidad encontrada tiene una longitud de onda corta y una frecuencia pequeña (*Short Wavelength Instability*, SWI), y la dirección de propagación es azimutal. En cambio, para  $h > 1.4$  mm la longitud de onda es grande, la frecuencia es cuatro veces la de la inestabilidad SWI, y la dirección de propagación es radial, y también azimutal cuando aumenta la diferencia de temperatura más allá del umbral (*Long Wavelength Instability*, LWI). A partir de estos valores identifican la inestabilidad SWI como la encontrada por Smith y Davis [29]: las ondas hidrotermales. Sin embargo, los valores del número de Marangoni en el umbral son muy superiores a los hallados por Smith y Davis, y el ángulo de propagación  $\psi = 90^\circ$  es claramente mayor que el teórico, según Smith y Davis (para  $Pr = 17$  sería  $\psi \approx 15^\circ$ ).

## Villers y Platten

Para una celda rectangular de dimensiones  $l_x = 30$  mm y  $l_y = 10$  mm, y acetona ( $Pr = 4.4$ ), obtienen una transición de convección estacionaria unicelular a multicelular y después a una oscilatoria, aunque no viajera [43]. Se observa que la transición depende de los valores de la altura de fluido y de la diferencia de temperatura  $\Delta T = T_+ - T_-$ . El estado multicelular está formado por rollos corrotativos (giran según la dirección del fluido que sube por el lado más caliente y baja por el más frío), que surgen de la desestabilización del flujo primario y su número se modifica al variar la relación de aspecto (cuando se cambia la altura de fluido). Básicamente, el trabajo se centra en la obtención del perfil de velocidad mediante Velocimetría Laser Doppler.

Probablemente, la imposibilidad de observar ondas viajeras se deba al confinamiento provocado por las paredes laterales, aunque no se determina cuál es exactamente esta influencia. Cuando el parámetro aumenta (altura  $h$ ), aparece una segunda inestabilidad que evoluciona hacia una estructura compleja dependiente del tiempo. En algunas simulaciones con relación de aspecto grandes observan unos rollos viajeros. La discrepancia entre el comportamiento obtenido entre cavidades de gran longitud y aquellas más estrechas es más acusada cuando el fluido tiene un número de Prandtl más pequeño.

## Ezersky *et al.*

Este grupo ha llevado a cabo dos experimentos: uno con una configuración anular [44] y otro con una celda rectangular [45]. Las dimensiones de esta última son  $l_x = 70$  mm y  $l_y = 50$  mm y los fluidos en ambos casos tienen un número  $Pr$  entre 30 y 50.

En el primer caso, para  $h < 0.3$  cm se detectan dos bifurcaciones: primero una en la que un único rollo toroidal, que aparece nada más imponer una diferencia de temperatura, evoluciona hacia varios rollos estacionarios concéntricos que aparecen cerca de la zona donde el fluido tiene mayor temperatura, de manera similar a los rollos corrotativos que obtienen Villers y Platten. La segunda bifurcación tiene lugar cuando los rollos desaparecen y surgen ondas termocapilares, también concéntricas, propagándose desde el centro hacia el exterior, en dirección radial. Si la altura es  $h > 0.3$  cm no se observan rollos concéntricos, y la transición tiene lugar entonces directamente entre el rollo toroidal y las ondas que viajan en la dirección contraria al gradiente de temperatura (desde el centro hacia el exterior).

La cavidad rectangular del segundo experimento ha sido provista en unas ocasiones de un fondo y paredes conductores y en otras de un fondo y paredes aislantes. La diferencia en los resultados para cada caso es la curvatura del frente de onda, que en un caso es cóncava y en otro convexa, aunque en ambos

casos las ondas se propagan en la dirección contraria al gradiente de temperatura ( $\psi = 180^\circ$ ). Aunque estas ondas son de origen térmico el mecanismo de inestabilidad que las causa parece ser distinto del descrito por Smith y Davis. Según otro trabajo realizado algo después por Garcimartín *et al.* [46] este tipo de ondas pueden provenir de una inestabilidad de la capa límite térmica vertical del lado caliente. Efectivamente, a partir de estos resultados se podría pensar en un tipo de inestabilidad diferente, cuando los fluidos tienen números de Prandtl elevados, de aquella que aparece cuando el número  $Pr$  es pequeño.

### De Saedeleer *et al.*

Un experimento en el que se consideran varias distancias ( $l_x = 30$ ,  $l_x = 50$ ,  $l_x = 74$ ) es el llevado a cabo por De Saedeleer *et al.* [47] con decano ( $Pr = 15$ ). En este trabajo se pretende averiguar hasta qué punto la teoría que considera capas de fluido de longitud infinita es válida para valores de  $l_x$  finitos. En él se determina el campo de velocidades y se obtienen unos rollos estacionarios que surgen cerca de la pared caliente con su eje perpendicular al gradiente de temperatura.

A medida que aumenta el gradiente de temperatura los rollos van ocupando una zona más grande de la celda y crece su amplitud cerca del lado caliente. Como en otros trabajos aquí también se pone énfasis en la influencia del confinamiento de la celda, en particular al encontrar rollos estacionarios transversales no predichos por la teoría de estabilidad de una capa infinita. Sin embargo, no se determina cómo afecta cuantitativamente a la aparición o retraso de las inestabilidades.

### Daviaud y Vince

La longitud de este contenedor, rectangular y cerrado, es muy corta en la dirección  $x$  comparada con la distancia en el eje  $y$ :  $l_x = 10$  mm y  $l_y = 200$  mm [23]. Para una altura  $h < 2.8$  mm se observan ondas propagándose en dirección aproximadamente perpendicular al gradiente ( $\psi \simeq 80^\circ$ ). Para  $h > 2.8$  mm se obtienen rollos estacionarios con su eje paralelo al gradiente de temperatura. Justo en la transición  $h = 2.8$  mm, la relación entre el número de Marangoni y el de Rayleigh es  $W = \frac{Ma}{Ra} = cte \cdot h^{-2} = 1$ . Por tanto, cuando las fuerzas del empuje dominan  $W \ll 1$  se tienen modos estacionarios. Al contrario, cuando  $W \gg 1$  (dominan las fuerzas interfaciales), se tienen ondas viajeras. En la figura 3.9 se muestra el umbral de las ondas y de los modos estacionarios para una altura de fluido variable. La diferencia con la mayoría de los estudios teóricos, en los que  $Ra = 0$ , es que en éstos no se encuentran modos estacionarios (ver por ejemplo [29]). Sin embargo, como ya se ha dicho, otros autores [20] que llevan a cabo un análisis de estabilidad lineal, teniendo



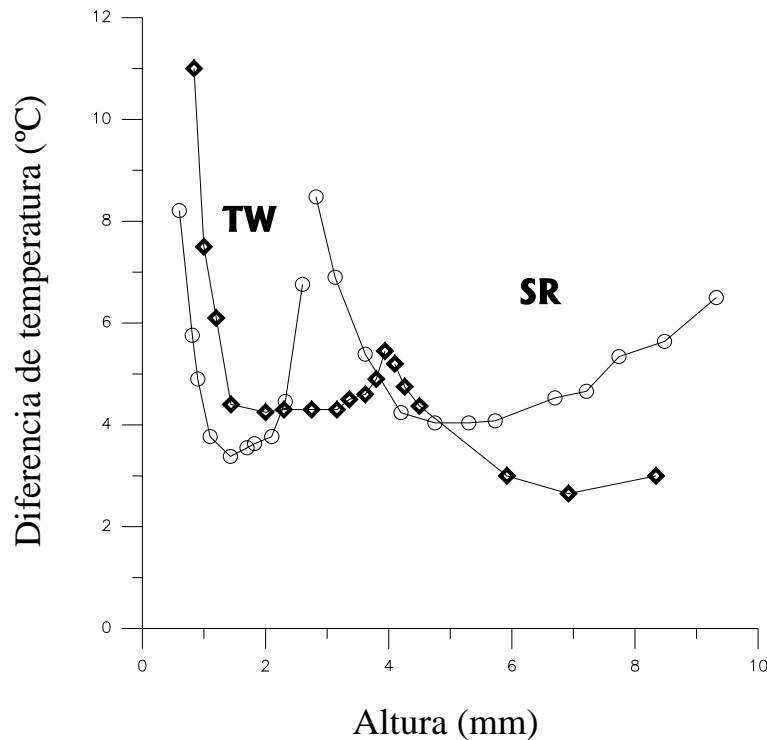


Figura 3.9: Círculos: Umbrales de las ondas hidrotermales encontrados por Daviaud y Vince [23] para  $l_x = 10$  mm y  $l_y = 200$  mm. Rombos: Umbrales para estas ondas cuando  $l_x = 30$  mm y  $l_y = 250$  mm encontrados por Burguete *et al.* [22]. *TW*: ondas viajeras (*Travelling Waves*); *SR*: rollos estacionarios (*Stationary Rolls*).

en cuenta el valor de  $Ra$ , muestran que el número de Biot y la relación entre los números  $Ma$  y  $Ra$  influyen en la selección de la estructura, que en algunos casos es estacionaria.

El número de Marangoni en el umbral es muy superior al deducido analíticamente, lo cual puede deberse a la cercanía tan grande entre las paredes caliente y fría ( $l_x = 10$  mm). Los resultados para  $\psi$  y  $|\vec{k}|$  parecen encajar más bien con los encontrados por Smith y Davis cuando el flujo es lineal y no de retorno.

### Burguete *et al.*

Con un fluido que tiene número  $Pr = 10$  [22] estudian las inestabilidades viajeras y estacionarias que surgen en tres contenedores con geometrías diferentes:  $l_x = 10, 20$  y  $30$  mm,  $l_y = 250$  mm, y ven su buen acuerdo con los resultados de Smith y Davis [29] y Mercier y Normand [20]. Uno de los resultados más relevantes es el hallazgo del mismo comportamiento de las características de las ondas  $(\Delta T_{umbral}, |\vec{k}|, \omega)$  cuando se considera la razón  $h^3/l_x$  como parámetro

del sistema. Esta elección proviene de que cuando la altura de fluido  $h$  es muy pequeña dominan las fuerzas interfaciales y entonces la diferencia de temperatura efectiva en la capa de fluido es la diferencia de temperatura horizontal. En cambio, para alturas grandes el empuje tiene gran influencia en la dinámica y ha de escogerse la diferencia de temperatura vertical en la capa de fluido. De esta manera queda más clara la competición entre las fuerzas de superficie y el empuje.

Estos autores también observan que el origen de las ondas para alturas de fluido pequeñas es una fuente puntual, mientras que para grandes alturas la fuente es lineal [22] (ambas en la vecindad de la pared con menor temperatura).

### Riley y Neitzel

La caracterización de las inestabilidades estacionarias y oscilatorias en este caso va dirigida a la supresión de las ondas hidrotermales para mejorar la calidad en la técnica de crecimiento de cristales [48]. Los autores estudian el comportamiento de un fluido con  $Pr = 13.9$  introducido en un contenedor con relaciones de aspecto variables  $12 < \Gamma_x < 40$  y  $20 < \Gamma_y < 67$ . Para grandes relaciones de aspecto se minimizan los efectos de las paredes verticales. Obtienen ondas hidrotermales propagándose oblicuamente que provienen de una desestabilización del flujo básico. A diferencia de otros autores, aseguran que las oscilaciones de temperatura que provienen de una desestabilización de un flujo estacionario multicelular —y no de uno unicelular— no son ondas hidrotermales, ya que esta transición ocurre para números de Rayleigh demasiado elevados, y así el empuje jugaría un papel principal en la desestabilización. Solamente las ondas oblicuas observadas a partir de la bifurcación del flujo básico unicelular serían ondas hidrotermales.

Para mayor claridad se muestran en la tabla 3.2 las geometrías de los principales experimentos explicados en este capítulo y en la tabla 3.3 los ángulos de propagación de las ondas.

EXPERIMENTO	GEOMETRÍA	$l_x$ (mm)	$l_y$ (mm)	$Pr$
Villers y Platten	rectangular	30	10	4.4
Braunsfurth y Homsy	rectangular	10.61	10.18	4.44
Gillon y Homsy	rectangular	10	38	8.4
Mukolobwicz <i>et al.</i>	anular	10	500	10
Favre y Blumenfeld	anular	35	10	10
Daviaud y Vince	rectangular	10	200	10
Burguete <i>et al.</i>	rectangular	10, 20, 30	250	10
Riley y Neitzel	rectangular	30	30	13.9
De Saedeleer <i>et al.</i>	rectangular	74	10	15
Garcimartín <i>et al.</i>	rectangular	100	10	10,15,30
Schwabe <i>et al.</i>	anular	57	305	17
Kamotani <i>et al.</i> [49]	anular	2-15	6-47	27
Ezersky <i>et al.</i>	anular	40	188	30-50
Ezersky <i>et al.</i>	rectangular	70	50	30-50

Tabla 3.2: Dimensiones de los principales experimentos ordenados según el valor del número  $Pr$ . Para la geometría anular:  $l_y = \pi(R_0 + R_i)$ ,  $l_x = (R_0 - R_i)$ , siendo  $R_0$  y  $R_i$  los radios externo e interno.

TEÓRICOS	$Pr$	Ángulo $\psi$
Smith y Davis	10	$20^\circ$
Parmentier <i>et al.</i>	7	$33^\circ$
Mercier y Normand	7	$\sim 47^\circ$

EXPERIMENTALES	$Pr$	Ángulo $\psi$
Garcimartín <i>et al.</i>	10,15,30	$0^\circ$
Ezersky <i>et al.</i>	30-50	$0^\circ$
Ezersky <i>et al.</i>	30-50	$0^\circ$
Schwabe <i>et al.</i>	17	$90^\circ$
Riley y Neitzel	13.9	$23^\circ$
Burguete <i>et al.</i>	10	$\sim 30^\circ$
Daviaud y Vince	10	$80^\circ$

Tabla 3.3: Algunos valores de los ángulos obtenidos en trabajos teóricos y experimentales.

# Capítulo 4

## Objetivos y problemas tratados

A partir de los análisis de estabilidad y de los experimentos ya realizados puede observarse que existe un comportamiento cualitativamente distinto entre los fluidos que tienen un  $Pr$  grande ( $Pr > 15$ ) y aquellos con  $Pr$  pequeño ( $Pr < 1$ ). Esto nos lleva a pensar que para fluidos con  $Pr$  intermedio podría darse una combinación de los mecanismos que gobiernan ambos comportamientos. Utilizaremos, pues, fluidos cuyo  $Pr$  tenga estos valores intermedios ( $1 < Pr < 15$ ).

Como las fuerzas interfaciales juegan un papel principal en el origen de las ondas, la relación que se busca entre el número de Marangoni y de Rayleigh es  $Ma \gg Ra$ , y la altura de fluido escogida debe ser pequeña. La mayoría de los trabajos que se han mencionado, y el nuestro también, se centran por tanto en los casos en que  $0 \text{ mm} < h < 3.5 \text{ mm}$  puesto que con estas condiciones las fuerzas termocapilares dominan al empuje.

Ya que el origen de las ondas es térmico, un primer paso para averiguar el mecanismo de inestabilidad es obtener el comportamiento del campo de temperatura. En particular, es interesante conocer cómo surge la oscilación de temperatura, dónde aparece la máxima amplitud, cómo se propaga y si es un fenómeno localizado o se extiende a toda la capa de fluido. Un aspecto que ha de ser aclarado es si las ondas afectan solamente a la superficie o a todo el volumen del fluido.

Habitualmente, en los trabajos analíticos y numéricos se considera una distancia infinita entre las paredes verticales de la celda, lo que lleva a un desacuerdo con los resultados de los experimentos en los que lógicamente se nota la presencia de estas paredes. El gradiente no es constante cerca de ellas puesto que, debido a la existencia de capas límite, la temperatura cambia allí abruptamente. Los resultados analíticos con flujo de retorno proporcionan unos valores de la frecuencia ( $\omega$ ), del número de onda ( $|\vec{k}|$ ) y del ángulo de propagación ( $\psi$ ) dependientes del número de Prandtl para una capa de fluido de longitud infinita y  $\Delta T$  variable. Además, experimentalmente se encuentran discrepancias

entre los valores de estas soluciones  $(|\vec{k}|, \omega, \psi)$  en contenedores con dimensiones diferentes. La variedad de dimensiones y geometrías de celdas utilizadas en los experimentos dificulta tener una idea clara de cuál es la influencia que ejercen las dimensiones del contenedor sobre los umbrales. Trataremos de ver si hay alguna dependencia entre estos valores y la geometría del contenedor. También se encuentran desacuerdos entre los ángulos de propagación de las ondas obtenidos en los diferentes casos. En primer lugar, parece haber una dependencia clara con el número de Prandtl. Pero incluso cuando se utiliza el mismo fluido se obtienen valores divergentes que pueden estar ocasionados por alguna influencia de la geometría de la cavidad. Como ejemplo, en la tabla 3.3 se muestran los valores de los ángulos hallados por algunos autores.

En todos los trabajos se insiste en que es el valor del número de Marangoni, para un  $Pr$  determinado, el que dicta la aparición de modos oscilatorios. Sin embargo, este número de Marangoni, que en los trabajos analíticos es constante en el espacio, no lo es en los experimentales, ya que las paredes de la celda ocasionan que el gradiente de temperatura cambie bruscamente en su cercanía. Al medir la diferencia de temperatura  $\Delta T = T_+ - T_-$ , el gradiente es  $\beta_{global} = \frac{\Delta T}{l_x}$  y por tanto el valor del número  $Ma$  es sobreestimado respecto al calculado considerando un gradiente  $\beta = \frac{\partial T}{\partial x}$ . Tiene especial importancia averiguar si hay un valor crítico de algún parámetro local a partir del cual el flujo se desestabiliza originando ondas hidrotermales. Para obtener el valor del número  $Ma$  en el umbral de las ondas hidrotermales y armonizar teoría y experimentos hay entonces dos posibilidades. Una de ellas es realizar las medidas en el centro de la celda, lejos de las paredes, donde prácticamente el gradiente es constante, para lo cual hace falta tener una cavidad con  $l_x, l_y \gg h$ . La otra posibilidad es encontrar un número de Marangoni *local*, en cada punto del fluido. Habría entonces un valor crítico a partir del cual las ondas aparecerían localizadas en zonas del fluido cuyo número de Marangoni local superara este valor crítico.

Por último, queda todavía por aclarar la naturaleza de las inestabilidades. Si se considera la estabilidad de un paquete de ondas y se calcula la velocidad de grupo y la dirección de propagación, así como la constante de difusión, las ondas hidrotermales solamente se observan cuando se alcanza el umbral de una inestabilidad absoluta en vez de convectiva [28, 50, 51]. Esta distinción entre inestabilidad convectiva y absoluta ha sido observada de hecho en algunos experimentos [22, 52, 53]. Para describir la evolución de la amplitud utilizaremos una ecuación de amplitud de Ginzburg-Landau, de la cual se hallarán los parámetros relevantes.

## Parte II

# Sistema experimental



# Capítulo 5

## Introducción

Como hemos visto en la parte de la introducción parece haber dos mecanismos diferentes según  $Pr$  sea grande o pequeño. En varios experimentos que utilizan fluidos con un número  $Pr \geq 15$  se observa un comportamiento cualitativamente distinto de los fluidos que tienen un número de Prandtl menor: la dirección de propagación de las ondas varía apreciablemente, así como los valores de algunas características, como la frecuencia. Por tanto, utilizaremos fluidos cuyos números de Prandtl estén en este rango de valores ( $Pr = 10$  y  $Pr = 4.4$ ). Para estudiar el mecanismo de inestabilidad es fundamental averiguar el campo de temperatura en todo el volumen ya que, aunque el origen de las ondas parece ser debido a la variación de la temperatura en la superficie, la inestabilidad se propaga a todo el volumen de la capa de fluido.

Un aspecto que hemos de tener en cuenta para estar seguros de que la inestabilidad es de origen termocapilar es la altura de fluido. Se necesita que las fuerzas termocapilares dominen claramente a las termogravitatorias, lo cual se consigue con una altura de fluido pequeña. A partir de las definiciones 2.14 y 2.18 vemos que la relación entre  $Ma$  y  $Ra$  es directamente proporcional a  $h^2$ :

$$\frac{Ra}{Ma} = cte \cdot h^2$$

donde la constante depende de las propiedades del fluido. Por tanto, cuanto mayor es  $h$ , mayor es el aumento del número de  $Ra$  respecto al número de  $Ma$ , y por tanto la influencia del empuje aumenta. Cuanto menor sea  $h$  mayor es, en cambio, la influencia de las fuerzas termocapilares. Veamos entonces para una altura  $h = 1.5$  mm, que es la empleada en el experimento, cuál es la relación de ambas fuerzas. Para ello hemos hecho una estimación basándonos en el teoría de Nield [54] para un fluido calentado por debajo con superficie libre. Según ésta, para que haya convección los números de Rayleigh ( $Ra$ ) y Marangoni ( $Ma$ ) deben superar unos valores críticos  $Ra_c$  y  $Ma_c$  que, en aproximación,



cumplen la relación:

$$\frac{Ra_c}{Ra_0} + \frac{Ma_c}{Ma_0} = 1$$

donde  $Ra_0 = 695$  corresponde al valor crítico del número de Rayleigh cuando no hay tensión superficial y  $Ma_0 \simeq 90$  al número de Marangoni crítico cuando no hay gravedad. En tanto por ciento la suma de las dos fracciones es

$$\frac{Ra_c}{Ra_0}(\%) + \frac{Ma_c}{Ma_0}(\%) = 100\%$$

Con los fluidos que vamos a utilizar, en el caso  $h = 1.5$  mm, tenemos:  $\frac{Ma_c}{Ma_0} = 96.5\%$  y  $\frac{Ra_c}{Ra_0} = 3.5\%$ , para  $\nu = 0.65cSt$  y  $\frac{Ma_c}{Ma_0} = 97.4\%$  y  $\frac{Ra_c}{Ra_0} = 2.6\%$ , para la acetona. Por tanto, en ambos fluidos las fuerzas termocapilares dominan claramente a las del empuje. Aunque estos cálculos son aplicables para un caso de calentamiento por debajo en vez de lateral, nos sirven para ver cualitativamente que los efectos de la tensión superficial son importantes.

Otro de los objetivos que nos hemos propuesto consiste en averiguar si hay alguna influencia de la geometría de la celda en los umbrales y en los ángulos de propagación de las ondas. Por este motivo una de las celdas se ha construido de tal manera que las dimensiones horizontales  $l_x$  y  $l_y$  sean variables. Además, para acercarnos al caso límite de paredes suficientemente alejadas —teóricamente en el infinito—, estas longitudes horizontales de la celda tienen unos valores máximos con relaciones de aspecto también grandes ( $\Gamma_x^{max} = l_x/h = 66 = \Gamma_y^{max} = l_y/h$ ). Esta aproximación de las condiciones experimentales a las analíticas, o a las utilizadas en las simulaciones, aumenta al colocar un fondo conductor. El fondo provoca que la variación de la temperatura en éste sea más lineal, y por tanto que el gradiente de temperatura sea prácticamente constante en la región central de la capa de fluido.

Para observar la desestabilización del flujo básico utilizaremos la técnica de ombroscopía. Este método está basado en que la variación de la luz de salida, una vez que los rayos atraviesan el fluido, es proporcional a la segunda derivada de la temperatura. Además de las medidas ópticas realizaremos medidas de temperatura con termopares colocados en el interior y en la superficie de la capa de fluido. Con esto se determinarán las amplitudes de las oscilaciones de temperatura y su evolución temporal y espacial. Para medir la temperatura en la superficie utilizaremos también un sensor infrarrojo situado a cierta distancia de ella.

# Capítulo 6

## Dispositivos experimentales

### 6.1 Fluidos

Los fluidos utilizados son aceite de silicona y acetona. El primero, suministrado por Dow Corning, tiene viscosidad cinemática pequeña,  $\nu = 0.65 \text{ cSt}$ , y difusividad térmica  $\kappa = 6.3 \cdot 10^{-8} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ , lo que da lugar a un número de Prandtl intermedio  $Pr = 10.3$ . En la tabla 6.1 se muestran el resto de las principales características físicas. En el rango de temperaturas aplicado —es decir hasta  $6 \text{ }^\circ\text{C}$  por encima y por debajo de la temperatura ambiente en el caso máximo— es válida la aproximación de Boussinesq, según la cual estas propiedades físicas mantienen sus valores constantes, excepto en los términos de la tensión superficial y del empuje que dan lugar a la convección. En la elección del fluido se ha tenido en cuenta su transparencia, que permite el paso de luz a su través, y la pequeña susceptibilidad de la tensión superficial frente a sustancias contaminantes.

La acetona, con  $Pr = 4.4$ , tiene las propiedades que se muestran en la tabla 6.2. La elección de este segundo fluido se debe a la necesidad de continuar

ACEITE DE SILICONA	Símbolo	Valor	Unidad
Viscosidad cinemática	$\nu$	0.65	$\text{cSt}$
Tensión superficial	$\sigma$	$1.59 \cdot 10^{-2}$	$\text{Nm}^{-1}$
Conductividad térmica	$\lambda$	0.1	$\text{Wm}^{-1}\text{K}^{-1}$
Difusividad térmica	$\kappa$	$6.3 \cdot 10^{-8}$	$\text{m}^2 \text{ s}^{-1}$
Densidad	$\rho$	760	$\text{Kg m}^{-3}$
Variación de la tensión superficial	$\partial_T \sigma$	$-0.08 \cdot 10^{-3} (\star)$	$\text{Nm}^{-1}\text{K}^{-1}$
Coefficiente de dilatación térmica	$\alpha$	$1.34 \cdot 10^{-3}$	$\text{K}^{-1}$

Tabla 6.1: Propiedades físicas del aceite de silicona a  $25^\circ\text{C}$ , facilitados por *Dow Corning Corporation*. El valor señalado por  $\star$  procede del experimento de Gillon and Homsy [37].

ACETONA	Símbolo	Valor	Unidad
Viscosidad cinemática	$\nu$	0.42	$cSt$
Tensión superficial	$\sigma$	$2.5 \cdot 10^{-2}$	$Nm^{-1}$
Conductividad térmica	$\lambda$	0.165	$Wm^{-1}K^{-1}$
Difusividad térmica	$\kappa$	$9.66 \cdot 10^{-8}$	$m^2s^{-1}$
Densidad	$\rho$	798	$Kgm^{-3}$
Variación de la tensión superficial	$\partial_T\sigma$	$-0.124 \cdot 10^{-3}$	$Nm^{-1}K^{-1}$
Coefficiente de dilatación térmica	$\alpha$	$1.43 \cdot 10^{-3}$	$K^{-1}$

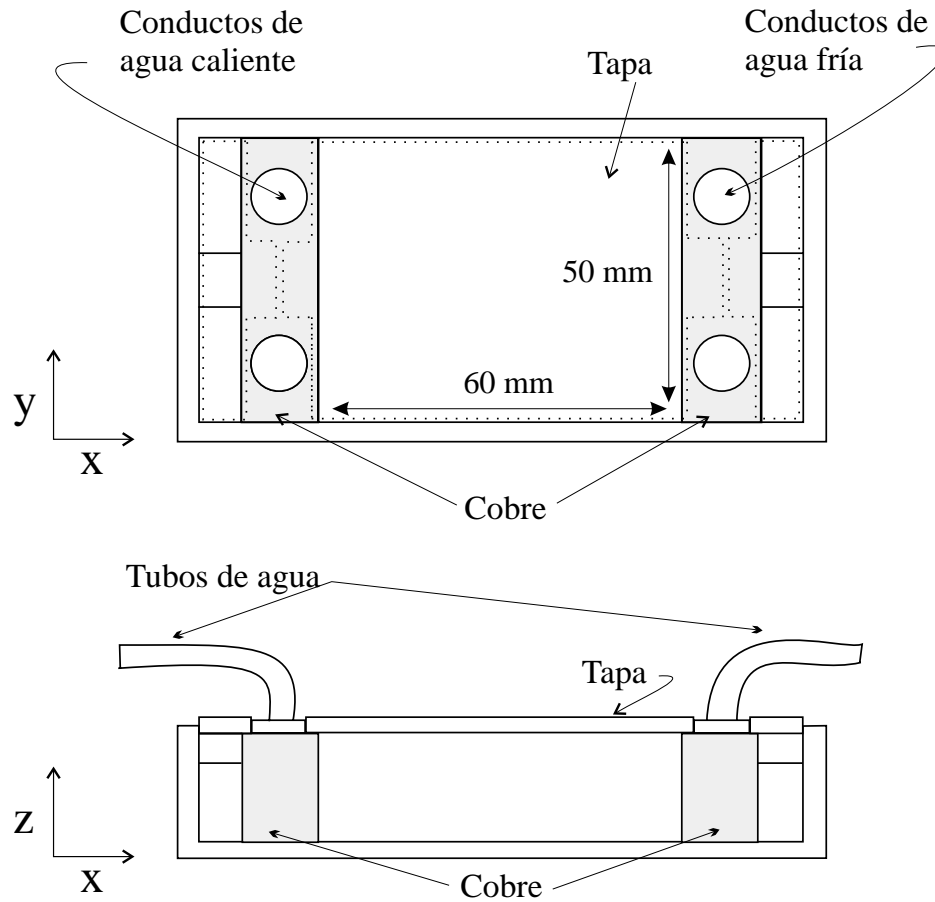
Tabla 6.2: Propiedades físicas de la acetona. Datos recogidos en *Handbook of Chemistry and Physics (CRC, 66 th edition)*.

experimentando con fluidos cuyo número de Prandtl tenga un valor intermedio y sean transparentes. Por claridad, cuando a partir de ahora no hagamos mención explícita del fluido nos referiremos al aceite de silicona. En los casos en que se haga referencia a la acetona se dirá expresamente.

## 6.2 Celda de geometría fija

Esta celda (figura 6.1) es un recipiente rectangular, abierto por arriba, en el que se introduce el fluido. El fondo y las paredes son de metacrilato, cuya conductividad térmica es  $\lambda_m = 0.17 Wm^{-1}K^{-1}$ . Dos de las paredes, enfrentadas, están formadas por dos bloques de cobre ( $\lambda_{Cu} = 401 Wm^{-1}K^{-1}$ ) de dimensiones  $50 \times 20 \times 20 mm^3$ . Debido a la diferencia apreciable en los valores de la conductividad del cobre y del metacrilato en relación con el fluido, en adelante llamaremos a estas paredes *conductoras* y a las de metacrilato *no conductoras*. Tanto la distancia entre las paredes conductoras ( $l_x$ ) como la que hay entre las paredes no conductoras ( $l_y$ ), se mantienen constantes, con valores  $l_x = 60 mm$  y  $l_y = 50 mm$ . El valor de la conductividad térmica del fondo de metacrilato es similar al de la conductividad del fluido (tabla 6.1). Sin embargo, como el sistema está en régimen convectivo, el calor disipado por convección es mucho mayor que el disipado por conducción, y por tanto puede considerarse que el fondo no impone un cambio brusco en la temperatura del fluido que lo rodea. Hemos estimado que solamente un 1 % de la potencia suministrada es disipada por conducción a través del fondo.

En la figura 6.1 puede observarse que en la parte de arriba se ha colocado una tapa, también de metacrilato, para reducir la evaporación del fluido. Con esta tapa, en las condiciones experimentales, se hizo una estimación de las pérdidas de fluido por evaporación, para una altura  $h = 2 mm$ , que resultó ser un 1 % en una hora, lo cual da un error de un 2 % durante el tiempo de ejecución del experimento.

Figura 6.1: Celda utilizada para el caso  $l_x$  y  $l_y$  fijos.

El método de regulación térmica de cada pared es el siguiente. Una corriente de agua, que proviene de un baño térmico atraviesa el bloque de cobre imponiendo a éste una temperatura determinada, que es regulada por un termostato en el baño térmico. Como la conductividad del cobre es lo suficientemente grande, esta temperatura es estable ( $\pm 0.02^\circ\text{C}$ ) en toda la pared conductora. La masa de estas piezas es lo suficientemente grande para que su capacidad calorífica sea también grande y así su temperatura no se vea afectada por las oscilaciones del fluido. En el montaje de la celda se ha introducido un termopar en cada uno de los bloques de cobre para leer la temperatura en el interior, a 2 mm de la cara interna del bloque que está en contacto con el fluido. Para evitar perturbaciones, el hueco por donde se introduce el termopar se rellena con una pasta conductora. Conociendo la lectura del termopar situado en el interior de la pared de cobre variamos la temperatura del baño y ajustamos la de la pieza de cobre en pasos de  $0.1^\circ\text{C}$ , que es el límite de la resolución del baño térmico, cuya estabilidad es  $0.02^\circ\text{C}$ . De esta manera, obtenemos una diferencia de temperatura en el eje  $x$ ,  $\Delta T = T_+ - T_-$ , donde hemos llamado  $T_+$  a la temperatura más alta y  $T_-$  a la más baja. Durante todo el experimento la temperatura ambiente ( $T_a$ ) es el promedio de  $T_+$  y  $T_-$  ( $T_a \simeq \frac{T_+ + T_-}{2} \simeq 22^\circ\text{C}$ ). Para medir esta temperatura se coloca un termopar en el aire dentro del contenedor, por encima del fluido, a la misma distancia de cada una de estas dos paredes conductoras.

Junto con la diferencia de temperatura horizontal,  $\Delta T = T_+ - T_-$ , el otro parámetro del experimento en esta celda es la altura de la capa de fluido:  $h$ . Ésta varía entre  $h = 1.25$  mm y  $h = 3.5$  mm, pues para alturas menores que 3.5 mm las fuerzas interfaciales son superiores al empuje. Cuando  $h$  es mayor que 3.5 mm las fuerzas termogravitatorias tienen un efecto considerable en la dinámica del sistema, por lo que las fuerzas termocapilares ya no son claramente dominantes. La relación de aspecto  $\Gamma_x = l_x/h$  cambia desde 17, para grandes alturas, hasta 48, cuando  $h$  es pequeña. La medición de  $h$  se realiza con un micrómetro que tiene una resolución de  $10 \mu\text{m}$ .

### 6.3 Celda de geometría variable

El motivo de la utilización de una segunda celda (figura 6.2), se debe principalmente al interés de introducir cambios de geometría, tanto en el eje  $x$  como en el eje  $y$ . Mientras que en el caso anterior  $l_x$  y  $l_y$  se mantenían constantes, ahora ambos van a tener un rango de longitudes entre 41 mm y 100 mm en ambas direcciones (tabla 6.3 y figura 6.3). Para una altura constante  $h = 1.5$  mm la relación de aspecto  $\Gamma_x$  varía entre 27 y 66.

El contenedor mostrado en la figura 6.2 es de nylon porque este material tiene una buena resistencia química a los dos fluidos utilizados. Sobre el fondo,

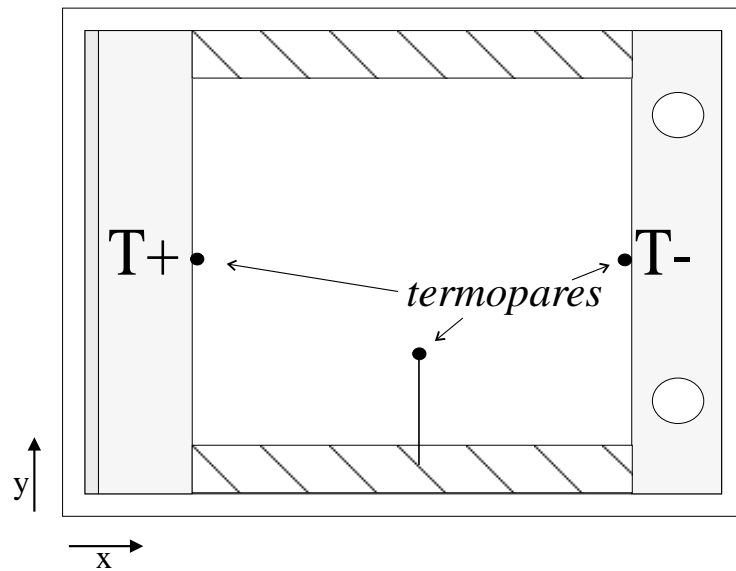
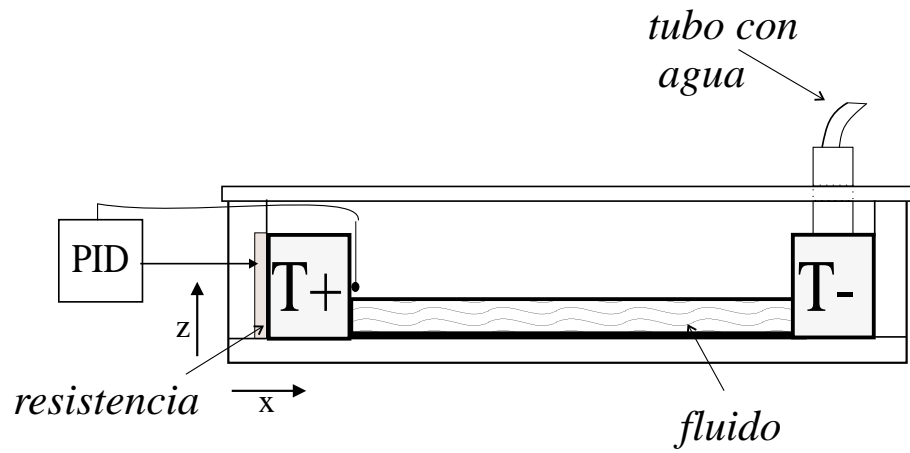


Figura 6.2: Celda con geometría variable.

$l_x = 100 \text{ mm}$
$l_y$
100 mm
95 mm
90 mm
85 mm
80 mm
75 mm
70 mm
65 mm
60 mm
55 mm
50 mm
41 mm

$l_y = 100 \text{ mm}$
$l_x$
88 mm
82 mm
75 mm
71 mm
62 mm
56 mm
50 mm
41 mm

Tabla 6.3: Valores utilizados de  $l_y$ , para  $l_x = 100 \text{ mm}$  (izquierda), y de  $l_x$ , para  $l_y = 100 \text{ mm}$  (derecha).

cuya rugosidad es menor que 0.1 mm, se ha colocado una lámina de aluminio de 8 mm de grosor, la cual favorece que en el fondo de la cavidad haya una distribución lineal de la temperatura. Este fondo está nivelado con un error del orden de  $\pm 2$  miliradianes. Los dos bloques conductores, cuyas dimensiones son  $100 \times 20 \times 20 \text{ mm}^3$  se colocan en el interior de la celda, junto a las dos paredes opuestas en el eje  $x$ . Enfrentadas en el eje  $y$  tenemos dos piezas de metacrilato (cuando el fluido es aceite de silicona) o de nylon (cuando se utiliza acetona), con dimensiones  $120 \times 20 \times 10 \text{ mm}^3$ . Con la movilidad de estas piezas se fija la distancia  $l_y$ . Sustituyendo las piezas de metacrilato por otras de la longitud adecuada, para cada caso, y desplazando una de las paredes de cobre (figura 6.3) se fija la distancia  $l_x$ . Como el caso anterior, también se hizo necesaria la construcción de una tapa transparente, esta vez de policarbonato —más flexible que el metacrilato—, que cierra herméticamente la celda mediante una junta tórica. Se estimó que la evaporación del fluido reduce la altura alrededor de un 2% durante el tiempo necesario para hacer la ejecución del experimento.

La tapa tiene una ranura en su centro que permite introducir y desplazar un termopar en el eje  $x$ , dentro del fluido, tal como aparece en el esquema de la figuras 6.4 y 6.5. Esta ranura permanece siempre cubierta por una barra transparente de metacrilato que se desliza sobre ella al mismo tiempo que el termopar. El movimiento de ambos se consigue gracias a un desplazador micrométrico motorizado controlado por ordenador. Con un programa se pueden variar el recorrido del termopar, los tiempos de espera entre medidas, el número de datos a leer y la velocidad y aceleración del motor. El motor puede también manejarse directamente con el software proporcionado con la tarjeta

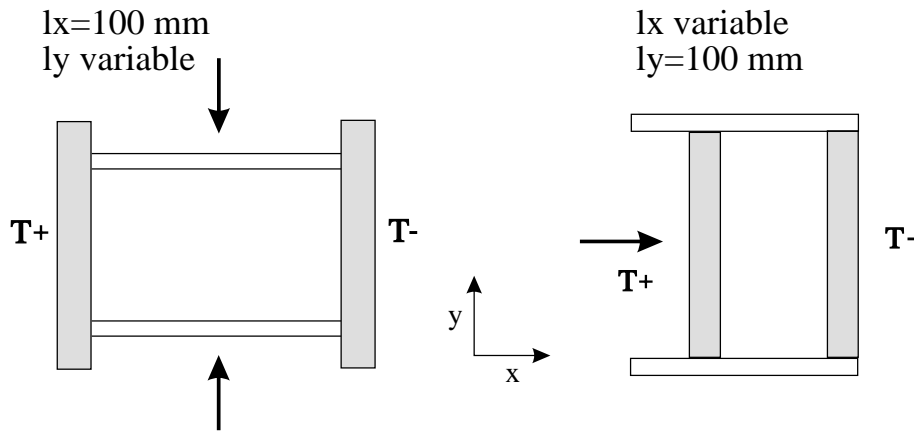


Figura 6.3: Geometrías con  $l_x$  y  $l_y$  variables.

controladora de la marca *Physic Instrumente*. Se utilizaron dos desplazadores micrométricos: uno para los ejes  $x$  e  $y$ , de 100 mm de recorrido, y otro para el eje  $z$ , de 25 mm de recorrido. Los dos tienen una resolución de 0.1 micras. Para mover el termopar en el eje  $y$  y obtener así medidas de la temperatura a lo largo de esta dirección hicieron falta otras tapas similares con varias ranuras en esta dirección. Así pudimos obtener la temperatura en cualquier punto  $(x, y, z)$  del fluido.

Adheridos a la cara interna de las paredes de cobre, sendos termopares miden su temperatura a 2 mm por encima del fluido. Otro termopar situado por encima del fluido, en el aire, mide la temperatura ambiente,  $T_a \simeq 22 \text{ }^\circ\text{C}$ . La parte externa de uno de los bloques de cobre lleva pegada una resistencia MINCO de  $30.6 \text{ } \Omega$ , con un aislante de kapton, y de dimensiones  $19.1 \times 127 \text{ mm}^2$ . La potencia suministrada en la ejecución del experimento fue de 10.2 vatios como máximo.

El control de la temperatura  $T_+$  se realiza por medio de un bucle PID (Proporcional Integral Derivativo), que es un lazo de control entre la temperatura y una resistencia eléctrica adherida al bloque de cobre. El PID tiene una precisión de  $0.1^\circ\text{C}$  y una resolución de aproximadamente una centésima de grado. Con este método el ajuste entre la temperatura leída y la de referencia se logra en un tiempo muy rápido (habitualmente unos pocos minutos). El ajuste se realiza con un controlador CN76000 de *Omega*. La idea es la siguiente. La temperatura leída por el termopar adherido al bloque es comparada con la que introducimos en el PID (temperatura de referencia). Dependiendo de la diferencia que haya, la resistencia adherida a la pieza  $T_+$  se calienta en mayor o menor grado para que la temperatura del bloque sea la de referencia. Pero este control proporcional queda mejorado con dos ajustes adicionales: integral y derivativo. El integrador acerca el valor de la temperatura del proceso a la de referencia de la manera más ajustada posible, pero para esto emplea un



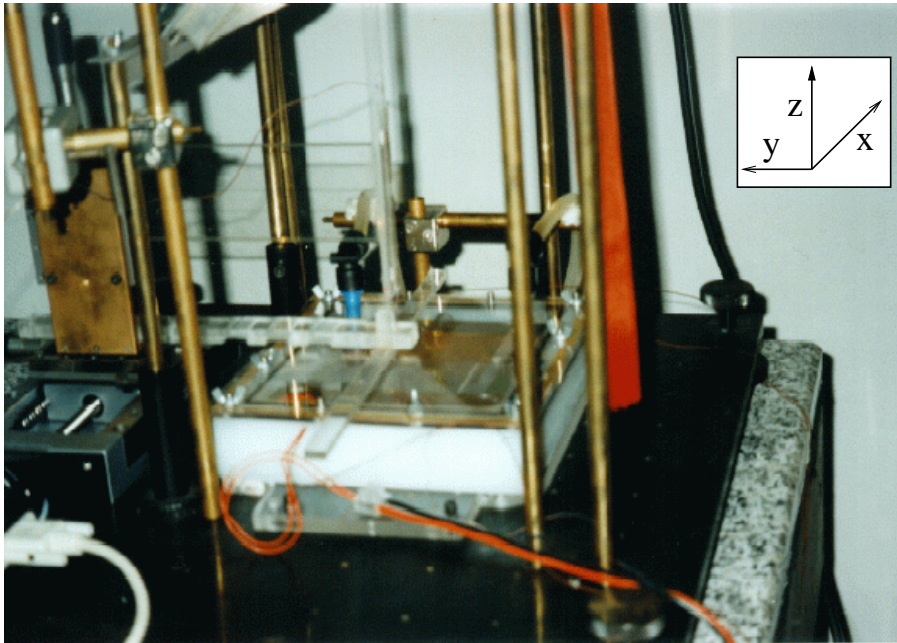


Figura 6.4: Fotografía de la celda con el desplazador motorizado.

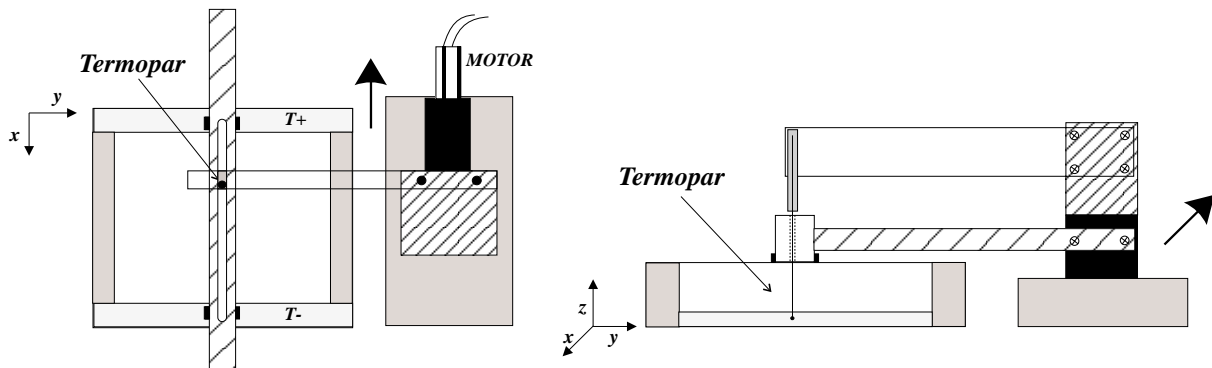


Figura 6.5: Izquierda: montaje de motor con desplazamiento micrométrico, visto desde arriba. Derecha: vista lateral del mismo montaje. El motor mueve el termopar en el sentido negativo del eje  $x$ .

tiempo grande. Por el contrario, el derivador consigue que la señal desviada se acerque rápidamente a la de referencia pero el valor de la temperatura de referencia no se alcanza con tanta precisión como lo hace el integrador. Por tanto, con la combinación de ambos parámetros se consigue un buen ajuste al valor de la temperatura deseada en el menor tiempo posible. Lógicamente la buena eficacia del procedimiento requiere una adecuada elección de los parámetros, que se puede hacer manualmente mediante un método de prueba y error.

El control de la temperatura  $T_-$  se consigue, como en la celda anterior, mediante un baño térmico regulado con un termostato. De esta forma, controlando  $T_+$  y  $T_-$  es posible ajustar  $\Delta T$  de forma que la temperatura es estable con una precisión de  $0.02^\circ\text{C}$ .



# Capítulo 7

## Técnicas experimentales

Las técnicas que se utilizan en este experimento están dirigidas fundamentalmente a obtener información del campo de temperatura. Como ya hemos mencionado a la hora de estudiar las transiciones que experimenta el sistema, dado que el origen de las ondas hidrotermales es térmico, es necesario conocer el comportamiento de la temperatura: nacimiento y evolución de oscilaciones, umbrales, características de las ondas generadas, etc.

Un primer grupo de medidas se refiere a la visualización de las ondas hidrotermales y rollos estacionarios mediante un sistema óptico que no invade el fluido. Este método fue desarrollado inicialmente en nuestro laboratorio por H. Mancini y colaboradores [55].

El segundo conjunto de medidas cuantitativas se logra introduciendo termopares en el interior del fluido. Para reducir las perturbaciones que pueda causar la intrusión del termopar se han escogido en algunos casos unos termopares extremadamente finos.

Además, en algunas ocasiones se han obtenido medidas de la temperatura de la superficie con un sensor infrarrojo colocado a cierta distancia de ella.

Una vez recogidos los datos experimentales, tanto las imágenes como la temperatura, se han utilizado filtros para extraer la información, reduciendo en lo posible las perturbaciones.

Este capítulo se divide en los métodos de visualización, las medidas de temperatura y el tratamiento de las imágenes.

### 7.1 Métodos de visualización

#### 7.1.1 Ombroscopía

Para conocer el comportamiento de la temperatura  $T(x,y)$  en la capa de fluido se busca alguna propiedad del fluido que varíe con ella. Una de estas propiedades es el índice de refracción “ $n$ ”. Cuando los rayos de luz atraviesan el

fluido experimentan una desviación de acuerdo con el cambio que se opera en  $n$  al variar la temperatura de determinadas regiones del fluido. De esta forma, la imagen de la luz al salir de la capa aporta información sobre el campo de temperatura y así se puede averiguar cómo evolucionan las oscilaciones de la temperatura. Éste es el fundamento de la técnica de ombroscopía que vamos a utilizar en nuestro sistema.

Veamos cuál es la información que podemos obtener si un haz plano atraviesa el fluido, el cual es sometido a una diferencia de temperatura  $T_+ - T_-$ . En la figura 7.1 se tiene la fuente que emite el haz de luz, el material atravesado por ella —el fluido—, un diafragma y una cámara que recoge la imagen a la salida. La fuente de luz puntual situada a la izquierda está colocada en la focal de una lente, de forma que a la salida de ésta se tiene un haz con un frente de onda plano, paralelo a la superficie del fluido. La lente de la derecha consigue, si el haz no ha sido alterado, que los rayos converjan a la salida en la focal.

La variación de la temperatura en el fluido ocasiona un cambio de densidad y del índice de refracción  $n$ , ya que, según la ecuación de Clausius-Mosotti, éste depende de la temperatura de la forma [56] :

$$\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = aT \quad (7.1)$$

donde  $a$  es una constante.

Cuando el fluido es un gas  $n^2 \simeq 1$  y entonces se puede escribir:

$$n - 1 = \xi T \quad (7.2)$$

con  $\xi$  constante.

Incluso se ha observado (ref. [56]) que para algunos líquidos (por ejemplo, acetona) esta aproximación lineal entre  $n$  y  $T$  también es válida.

Supongamos ahora una distribución sinusoidal de la temperatura en  $x$  — como veremos que es el caso— con una amplitud que varía con  $z$ . (para simplificar suponemos que la modulación únicamente ocurre en el plano  $XZ$ ). Así tenemos:

$$T(x, z) = \hat{T}(z) \cos(x/\lambda) \quad (7.3)$$

Debido a la variación de  $n$  los rayos de luz de salida se refractan con ángulos diferentes, lo cual da lugar a cambios de intensidad de la luz de salida que manifiestan a su vez cambios de temperatura. En particular, en las zonas donde haya fluido caliente rodeado de fluido frío se tiene una región con valores pequeños de  $n$  rodeada de otra región con grandes valores de  $n$ . La luz entonces diverge y se forman zonas sombreadas. Por el contrario, en las regiones con fluido más frío rodeado de caliente la situación es opuesta y la luz converge originando zonas brillantes. Supongamos que esta divergencia provoca un desplazamiento de los rayos de luz no demasiado grande. Puede demostrarse

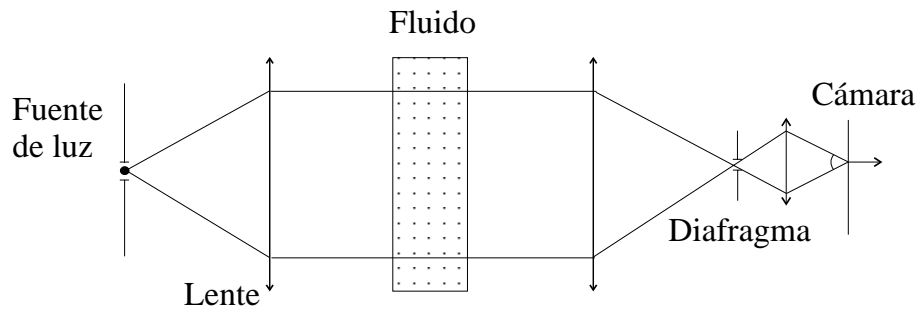


Figura 7.1: Esquema de la ombroscopía.

entonces (ref. [57, 58]) que un detector sensible a la intensidad de la luz registra una diferencia de intensidades relativa entre dos puntos, que se relaciona con el índice de refracción de la siguiente manera:

$$\frac{\Delta I}{I} = l \int_0^h \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (\ln n) dz \quad (7.4)$$

Sustituyendo el índice de refracción de la ecuación 7.2, para pequeñas fluctuaciones, queda:

$$\frac{\Delta I}{I} = -\alpha \cos(x/\lambda) \int_0^h \hat{T}(z) dz \quad (7.5)$$

donde  $\alpha = \frac{l\xi}{\lambda^2}$ . Por tanto la intensidad de luz es proporcional al promedio de las fluctuaciones de temperatura en el eje  $z$ . La deflexión de la superficie en este experimento y en otros semejantes [53] es de 10 a 15 micras.

### 7.1.2 Sistema óptico

Un esquema del sistema óptico se muestra en la figura 7.2. La fuente de luz blanca, una bombilla de 30 W con un colimador, se sitúa en el foco de un espejo esférico, de modo que la luz reflejada en éste es un haz plano, paralelo a la superficie del fluido. Antes de llegar al espejo esférico la luz alcanza un divisor de haz. Después, el haz de luz se refleja en el espejo esférico y seguidamente lo hace en el fluido. La luz de salida del fluido es otra vez reflejada en el divisor de haz y enviada a una cámara CCD atravesando antes un diafragma. La cámara recoge la figura de la ombroscopía mediante un teleobjetivo de distancia focal variable. Esta imagen se muestra en un monitor y se archiva en un ordenador PC. La imagen obtenida (ver figura 7.4) tiene unas dimensiones menores que la superficie de fluido, como consecuencia de la capilaridad, en un centímetro alrededor de las paredes del contenedor. Se forma entonces un menisco, cuya curvatura en la superficie del fluido provoca una divergencia de los rayos de luz en esa zona, sin que se llegue a la formación de imagen.

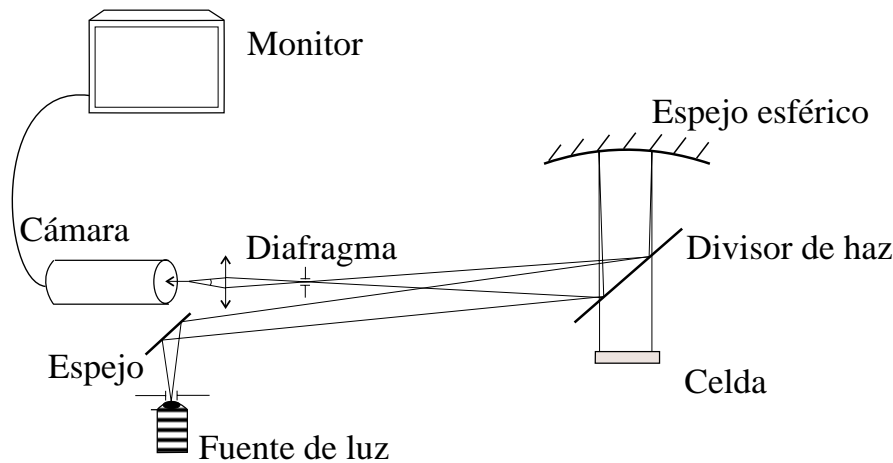


Figura 7.2: Sistema óptico.

En ocasiones, para obtener una imagen más contrastada se ha colocado un diafragma en el foco de la imagen antes de que ésta llegue a la cámara, según puede apreciarse en la figura 7.1. La idea es detectar las deformaciones del frente de onda, puesto que el diafragma realiza la función de un filtro espacial, situado en el plano de convergencia de la luz, que bloquea algunos rayos observándose con más nitidez las deformaciones. A causa de este montaje hay luz que llega a la cámara sin atravesar la celda. Además, se tiene que en la focal del sistema se observa también la luz que proviene de regiones donde no ha sido desviada. Para no obtener una zona brillante central en la imagen del fluido —debida a la alineación de las lentes con la cámara— se introduce un pequeño astigmatismo desplazando una de las lentes, de tal manera que el diafragma elimina precisamente esta mancha central antes de que llegue a la cámara. Entonces se puede apreciar con más facilidad la imagen del fluido y las oscilaciones de la temperatura.

## 7.2 Medidas de temperatura

Además de la información que se recoge con la ombroscopía de la capa de fluido, es necesario determinar con precisión cómo varía la temperatura en las direcciones  $x$ ,  $y$  y  $z$ . Como hemos visto el anterior método integra las variaciones de la temperatura en el eje  $z$ . Al introducir un termopar en el fluido se puede conocer cuál es esta variación. También se podrá estudiar así el comportamiento de la amplitud de la temperatura, cómo cambia espacialmente, en qué puntos es máxima o mínima, etc.

Para la primera celda todos los datos de la temperatura han sido obtenidos con un sistema de adquisición de datos HP75000 VXI, que tiene un multiplexor

de 16 canales de entrada para los termopares tipo T. Para la segunda celda el sistema de adquisición utilizado fue el aparato HP34790A con 22 canales de entrada para el mismo tipo de termopares.

Se pueden distinguir dos grupos de medidas de temperatura. El primero se refiere al control del parámetro  $\Delta T = T_+ - T_-$  y a la medida de  $T_a$ . El diámetro de los termopares utilizados en este caso es 0.12 mm, el tiempo de respuesta menor que 0.06 s y la precisión con la que se conoce la diferencia de temperatura es 0.02°C. Otro termopar con un diámetro 0.35 mm y tiempo de respuesta menor que 0.2 s, se coloca a media distancia respecto a las piezas de cobre, a unos milímetros por encima del fluido, cerca de una de las paredes no conductoras (ver figura 6.2). Así queda registrada la temperatura ambiente  $T_a$  del aire que rodea al fluido. Sabiendo  $T_a$ , las temperaturas  $T_+$  y  $T_-$  de los extremos de la celda son modificadas de manera que la ambiente es el promedio de aquellas.

El segundo grupo de medidas está dirigido a obtener el campo de temperatura en el interior del fluido y en la superficie. El diámetro de los termopares utilizados fue 0.025 mm. La temperatura en la superficie fue también recogida por un sensor infrarrojo tipo T situado a 10 mm por encima del fluido. A causa de la altura a la que se efectúan las medidas este sensor promedia la temperatura en una circunferencia de 20 mm de diámetro sobre la superficie del fluido. Debido a la integración que se efectúa, este sensor realiza un promedio de las variaciones rápidas de la temperatura y elimina las frecuencias altas. El motor micrométrico motorizado mueve el sensor en la dirección del eje  $x$ ,  $y$  o  $z$  para obtener los perfiles de temperatura.

En la primera celda se utilizó un termopar con el que obtuvimos series de datos de temperatura en más de 20 puntos distribuidos en todo el volumen de fluido. Cada serie registra varios minutos de la evolución de la temperatura en un punto, y típicamente se obtienen alrededor de cien períodos de onda, con lo que la frecuencia queda bien definida. Además, en cada punto  $(x, y)$  el termopar fue desplazado en el eje  $z$  para observar la variación de la temperatura en esta dirección. Para esta celda unas cuantas medidas fueron llevadas a cabo con cuatro termopares desplazados simultáneamente y nivelados a la misma altura, separados entre sí 2.5 mm en el eje  $x$  (figura 7.3). La longitud ocupada por los cuatro termopares es menor que la longitud de onda, lo que es interesante para estudiar la correlación de las ondas.

En la segunda celda el termopar de 0.025 mm de diámetro fue desplazado en los ejes  $(x, y, z)$  mediante los dos desplazadores micrométricos motorizados. Pudimos extraer de los datos los perfiles de temperatura en cada uno de esas tres direcciones, así como las amplitudes de las oscilaciones. Se explican a continuación cómo fueron realizadas las medidas.

Para conocer la temperatura a lo largo del eje  $x$  se construyó un programa que mide la temperatura de puntos espaciados 1 mm entre sí al mover el



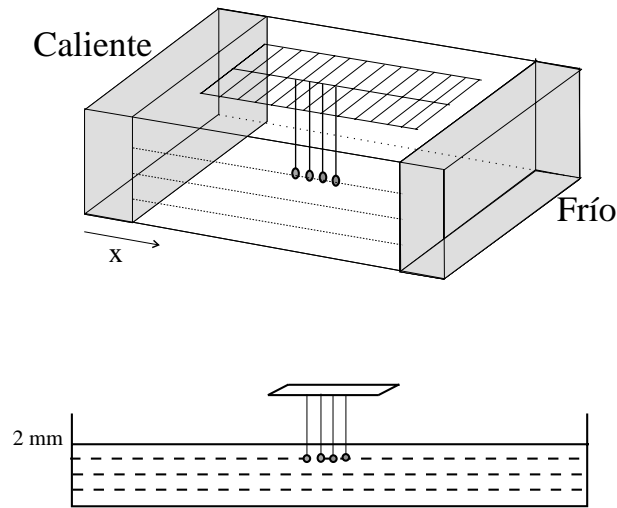


Figura 7.3: Sistema de cuatro termopares nivelados en el eje  $z$ .

termopar. El tiempo de integración del termopar es 200 ms y el tiempo entre medidas alrededor de 1 s. Después de mover el termopar 1 mm, se registra el dato y a continuación se desplaza el termopar otro milímetro. Al medir estos perfiles horizontales se obtiene un ruido en la señal menor que  $0.1\text{ }^{\circ}\text{C}$  (amplitud de la señal de temperatura de las ondas), debido a que el tiempo de adquisición de cada medida es inferior al periodo de la onda. La relación entre la amplitud de la oscilación de la onda ( $A$ ) y la diferencia de temperatura global en el perfil de temperatura ( $\Delta T$ ) es  $\frac{\Delta T}{A} \gg 1$ , por lo que el error cometido en la lectura de los datos —que es como máximo esta amplitud  $\pm A$ — es despreciable frente a la diferencia de temperatura  $\Delta T$ . Como se verá más adelante, en el capítulo de resultados, con estos datos pudimos hallar el número de Marangoni en puntos del fluido separados entre sí esa distancia. La obtención de datos en la dirección  $y$  se realizó de manera similar. Estas últimas medidas interesan para averiguar si la temperatura a lo largo del eje  $y$  es o no constante para el mismo valor de  $x$ . Para un sistema extenso esta temperatura no debería cambiar, puesto que el parámetro  $\Delta T$  es aplicado a lo largo del eje  $x$ , y entonces el sistema es unidimensional con una dinámica independiente de la coordenada  $y$ .

Los perfiles de temperatura en el eje  $z$  fueron medidos de distinta manera. Se registra una serie de datos durante varios minutos en puntos espaciados  $100\text{ }\mu\text{m}$  entre sí, desde el fondo de la celda hasta la superficie. De cada serie se obtiene una temperatura media y a partir del valor de ésta en cada punto, se traza el perfil vertical. Para comprobar que el perfil es independiente de la manera en que se mueva el termopar también se lee la temperatura desplazando el termopar desde la superficie hacia el fondo.

Para medir la variación de la amplitud de la temperatura en la dirección  $x$  fueron registradas las oscilaciones en una serie de puntos a lo largo de dicho

eje, en presencia de ondas hidrotermales localizadas cerca del extremo de temperatura  $T_+$ . En los datos de la amplitud de las oscilaciones se ha obtenido un nivel de ruido menor que  $0.02\text{ }^\circ\text{C}$ . Se han detectado las oscilaciones con valores de la amplitud desde  $0.02\text{ }^\circ\text{C}$  hasta diez veces más grandes ( $\simeq 0.2\text{ }^\circ\text{C}$ ).

### 7.3 Filtrado de imágenes

Una vez recogidas las imágenes es necesario saber a qué corresponde la información que aportan. Habitualmente los datos leídos en un experimento revelan la presencia de varios procesos físicos que interactúan entre sí, puesto que en la naturaleza los fenómenos no se dan de manera aislada. Pero además el solo hecho de medir añade en general una perturbación al proceso físico, ya que los datos se adquieren interviniendo en el sistema. En este apartado se explica el tratamiento que se confiere a las imágenes para separar en lo posible la influencia de otros fenómenos físicos presentes en el experimento.

A partir de las imágenes obtenidas mediante la ombroscopía se han construido un tipo de diagramas, llamados espacio-temporales, que recogen la evolución espacial y temporal de las estructuras convectivas. El método es el siguiente. Se escoge una línea de la imagen digitalizada, la cual contiene los píxeles con la información de los tonos de grises de la imagen en esa línea. Ésta se coloca horizontalmente en un archivo de imágenes. Seguidamente, después de cierto período, se lee la imagen del fluido en esa misma línea que, ya que la inestabilidad es viajera, habrá cambiado. Entonces ésta se archiva justo debajo de la primera línea. La operación se repite durante el tiempo deseado (habitualmente se trabaja con un período de  $0.1\text{ s}$  y  $512$  líneas, es decir,  $51.2\text{ s}$ ) con tiempos de muestreo fijo, guardando cada línea debajo de la anterior. Este tiempo de muestreo debe ser menor que el período de las ondas. Una vez acumuladas todas las líneas tendremos que el eje vertical de la imagen obtenida así es el tiempo, y el eje horizontal una dirección espacial de la celda. Con esto se puede recoger la evolución temporal de la estructura, transformarla en evolución espacial y calcular la frecuencia y la componente del vector de onda en esa dirección. Si este proceso se realiza con líneas sobre el eje  $x$  e  $y$  podemos calcular las componentes  $(k_x, k_y)$ , el módulo  $|\vec{k}|$  y el ángulo  $\psi = \arctan(k_y/k_x)$  (ver figuras 7.4 y 7.5).

El diagrama recoge también las heterogeneidades debidas, por ejemplo, a la variación de la intensidad de la fuente de luz, la cual proporciona un haz divergente con una distribución que puede considerarse gaussiana. Como la iluminación no es homogénea resulta difícil hacer medidas relativas espaciales de la amplitud de la estructura a partir de la imagen directa. Es necesario, por tanto, un filtrado que elimine este fondo. Como el fondo es estacionario y, en principio, las estructuras convectivas son dependientes del tiempo, se

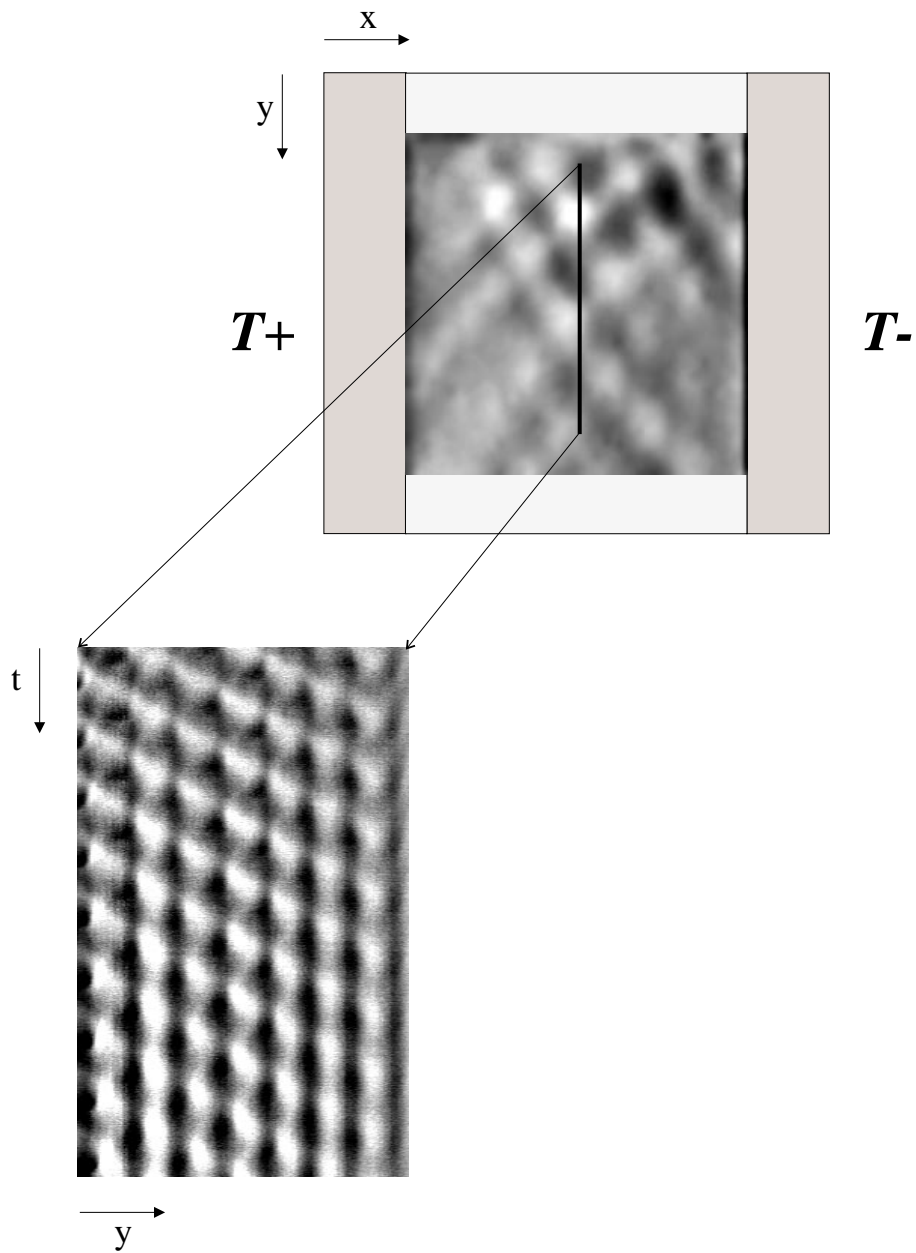


Figura 7.4: Diagrama espacio temporal en eje  $y$  realizado a partir de la imagen obtenida por la ombroscopía.

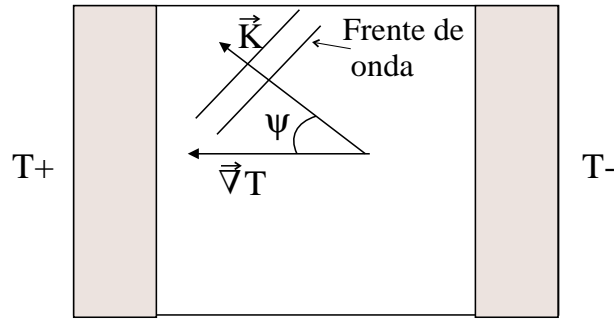


Figura 7.5: Ángulo  $\psi$  de propagación de las ondas.

puede filtrar la imagen con un promedio temporal y un cambio de escala. Una explicación detallada de este proceso se encuentra en la referencia [59].

Otra fuente de distorsión es el menisco que se forma en la zona de contacto fluido-celda. La superficie del fluido se curva en esa región creándose un efecto análogo al que provocaría una lente divergente de curvatura no constante impidiendo la formación de imagen en esa zona. Se ha medido que el menisco afecta a la imagen en una zona de unos 10 mm de la región que limita con cada pared.

### 7.3.1 Transformada de Fourier en dos dimensiones

Cuando estamos cerca del umbral de una inestabilidad el número de modos que se presentan es relativamente pequeño. En cambio, lejos del umbral la dinámica se complica y el número de modos que aparecen es bastante mayor. Supongamos que hemos obtenido el diagrama espacio-temporal de la figura 7.6 en la dirección  $y$ , cerca del umbral. Este diagrama señala la existencia de dos ondas oblicuas que crecen simultáneamente cerca de la pared caliente y viajan hacia ella.

Para eliminar las perturbaciones debidas a la variación de la intensidad luminosa, cuya frecuencia es pequeña ( $\omega \simeq 0$ ), y a la luz de fondo, se utiliza una transformada de Fourier bidimensional ( $FFT$ ) sobre el diagrama, que además permite separar el comportamiento de cada onda.

Estas ondas propagativas se pueden representar en modos de Fourier de la forma:

$$S(x, t) = [A_1(x, t)e^{i(k_1x - \omega_1t)} + A_2(x, t)e^{i(k_2x - \omega_2t)}] + c.c. \quad (7.6)$$

donde  $A_1$  y  $A_2$  son las amplitudes de cada onda, c.c. los complejos conjugados y se cumple  $k_1 = -k_2$ . Como los modos están habitualmente mezclados en la dinámica, la transformada de Fourier bidimensional ( $TF2D$ ) del diagrama espacio temporal será una mezcla de cada uno de ellos por separado:

$$TF2D(mod01) = \mathcal{A}_1(k_1, \omega_1) \otimes \delta(k_1, \omega_1)$$

$$TF2D(mod02) = \mathcal{A}_2(k_2, \omega_2) \otimes \delta(k_2, \omega_2)$$

$$TF2D(S(x, t)) = TF2D(mod01) + TF2D(mod02) + c.c.$$

donde  $\mathcal{A}_1$  y  $\mathcal{A}_2$  son las transformadas de Fourier de cada modo y  $\otimes$  el producto de convolución.

Si se realiza la transformada de Fourier sobre del diagrama espacio-temporal (figura 7.6), se encuentran unas manchas en la imagen que señalan las frecuencias de los modos en el espectro de potencias (la mitad corresponden a los complejos conjugados). La demodulación compleja [52] nos permite ahora separar la dinámica de cada modo, de la siguiente forma.

Si queremos estudiar la dinámica de una de las ondas —llamémosle modo 1—, primero se desplaza su frecuencia al centro de coordenadas del espacio de Fourier:

$$S(k) = \mathcal{A}_1(k) \otimes \delta(0) + \mathcal{A}_2(k) \otimes \delta(k_2 - k_1) = \mathcal{A}_1(k) + \mathcal{A}_2(k) \otimes \delta(k_2 - k_1)$$

Después <sup>1</sup>, se puede obtener el comportamiento de la onda aplicando un filtro pasa-bajo, con una frecuencia de corte  $k_A$  ( $k_A < \frac{k_2 - k_1}{2}$ ). Este filtro elimina del espectro de potencias los demás modos. Seguidamente se calcula la antitransformada de Fourier ( $TF2D^{-1}$ ) del modo 1 recuperando el comportamiento aislado de su amplitud compleja:  $A_1(x, t)$ .

Esto nos permite obtener el número de onda, la frecuencia y la amplitud local de cada onda:

$$A = |A(x, t)|, \quad k = k_0 + q(x, t), \quad \omega = \omega_0 + \Omega(x, t)$$

ya que la amplitud compleja es:

$$A = |A|e^{i\phi}$$

con

$$\phi(x, t) = \phi_0 + \partial_x \phi \Big|_{x_0} \cdot x + \partial_t \phi \Big|_{t_0} \cdot t = \phi_0 + qx - \Omega t$$

y suponiendo que  $\phi$  y  $|A|$  tienen un tiempo y una longitud de evolución característicos grandes con relación a  $k_0$  y  $\omega_0$  (Esto está de hecho ya implícito en la condición de no solapamiento de modos).

---

<sup>1</sup>Si los flancos de los modos en este espacio no se superponen, o lo hacen en un porcentaje despreciable.

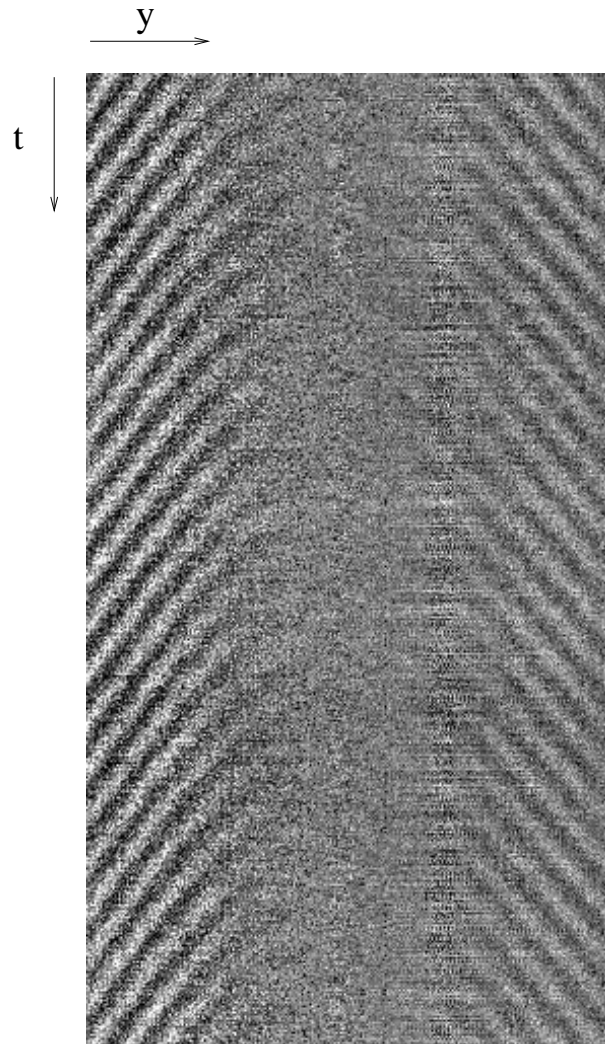


Figura 7.6: Diagrama espacio temporal de una línea vertical sobre la imagen de las dos ondas oblicuas.



**Parte III**  
**Resultados**





# Capítulo 8

## Inestabilidades convectivas

La estructura seguida en este capítulo va a estar relacionada con la secuencia de bifurcaciones observada. Para los casos en que  $h < 1.55$  mm el orden de aparición de las inestabilidades es:

Flujo básico	$\Rightarrow$	Ondas hidrotermales	$\Rightarrow$	Rollos estacionarios
	$\uparrow$		$\uparrow$	
	1 <sup>a</sup> inestabilidad		2 <sup>a</sup> inestabilidad	

Si  $1.55 \text{ mm} < h < 3.5 \text{ mm}$  el orden es:

Flujo básico	$\Rightarrow$	Rollos estacionarios	$\Rightarrow$	Ondas hidrotermales
	$\uparrow$		$\uparrow$	
	1 <sup>a</sup> inestabilidad		2 <sup>a</sup> inestabilidad	

Esta secuencia de bifurcaciones se obtiene de la siguiente manera. Para la primera celda ( $l_x$  y  $l_y$  fijos) la variación de los parámetros — $h$  y  $\Delta T$ — se realiza manteniendo  $h$  constante y cambiando  $\Delta T$ : primero se establece el flujo básico, nada más imponer una diferencia de temperatura horizontal  $\Delta T > 0$ , y después se va aumentando esta diferencia de temperatura en intervalos de  $0.2$  °C, o bien de  $0.1$  °C cuando estimamos que nos acercamos a la desestabilización del flujo básico, que da lugar a la aparición de ondas viajeras (para el primer caso). Cada vez que se realiza este aumento hay un tiempo de espera de varios minutos para que desaparezcan las situaciones transitorias. Este tiempo es suficientemente grande comparado con los tiempos de relajación viscosa ( $\tau_\nu = h^2/\nu = 6s$ ) y de difusividad térmica ( $\tau_\kappa = h^2/\kappa = 64s$ ). Para averiguar si hay histéresis se reduce la temperatura en la misma cantidad que el último aumento. Se comprueba que desaparecen las ondas, no se observa histéresis, por lo que las medidas se obtienen en régimen permanente. Después de llegar al umbral de las ondas y de realizar las medidas necesarias se cambia  $h$  y se

repite la observación.

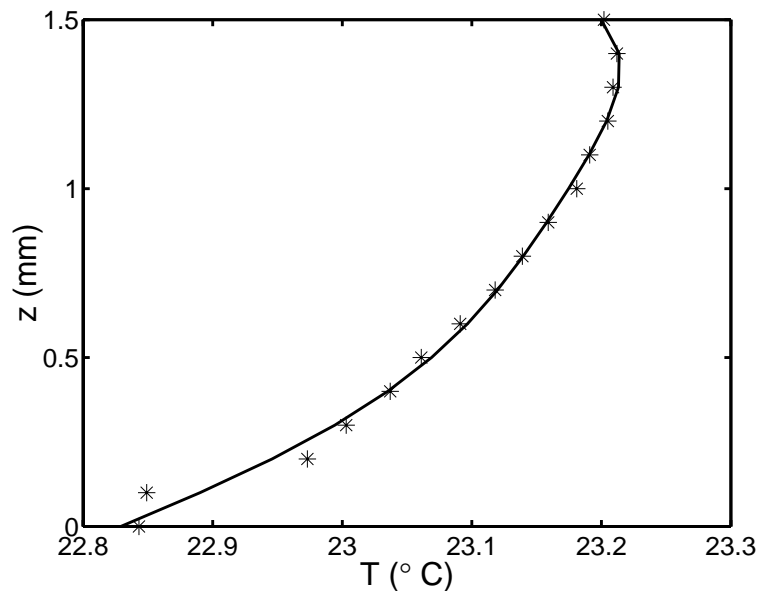


Figura 8.1: Perfil vertical de la temperatura del flujo básico (puntos \*). La línea continua señala un ajuste realizado con un polinomio de orden cinco.

Para la segunda celda los parámetros son  $l_x, l_y$  y  $\Delta T$ , con  $h = 1.5$  mm. La manera en que se efectúan los cambios de las dimensiones del contenedor es la siguiente. Manteniendo  $l_x = 100$  mm constante, se desplazan las paredes no conductoras dando a  $l_y$  los valores que figuran en la tabla 6.3 del capítulo 6. La variación de la diferencia de temperatura se lleva a cabo de la misma manera que se ha explicado para la primera celda. Igualmente, para  $l_y = 100$  mm se cambian los valores de  $l_x$  tal como figura también en la tabla 6.3 (derecha). Así, para cada pareja  $(l_x, l_y)$  se encuentra el umbral de las ondas y se realizan todas las medidas necesarias.

Ya que las ondas hidrotermales tienen su origen en la desestabilización del flujo básico dominado por las fuerzas interfaciales, los resultados que mostramos se refieren principalmente a los casos en que  $h$  es pequeña. Cuando la altura de fluido es grande ( $h \geq 1.55$  mm), es habitual en los experimentos que la primera bifurcación del flujo básico sea hacia rollos estacionarios corrotativos y posteriormente se tenga una segunda bifurcación que da lugar a la aparición de modos oscilatorios.

A diferencia de lo que ocurre en una capa calentada por debajo, en nuestro caso no existe un umbral convectivo sino que el fluido se pone en movimiento en cuanto se impone una diferencia de temperatura horizontal entre los lados del contenedor. Esto origina de inmediato un flujo básico que ocupa toda la celda a modo de un gran rollo. Veamos las características de este flujo.

## 8.1 Flujo básico

El flujo básico mueve el fluido desde el lado  $T_+$  hacia el  $T_-$  por la superficie, y en sentido contrario por el fondo, ya que la tensión superficial es mayor en la región donde el fluido es más frío. Debido a la gran distancia entre las paredes situadas en el eje  $y$  el flujo puede considerarse unidimensional, excepto cerca de cualquiera de las paredes verticales.

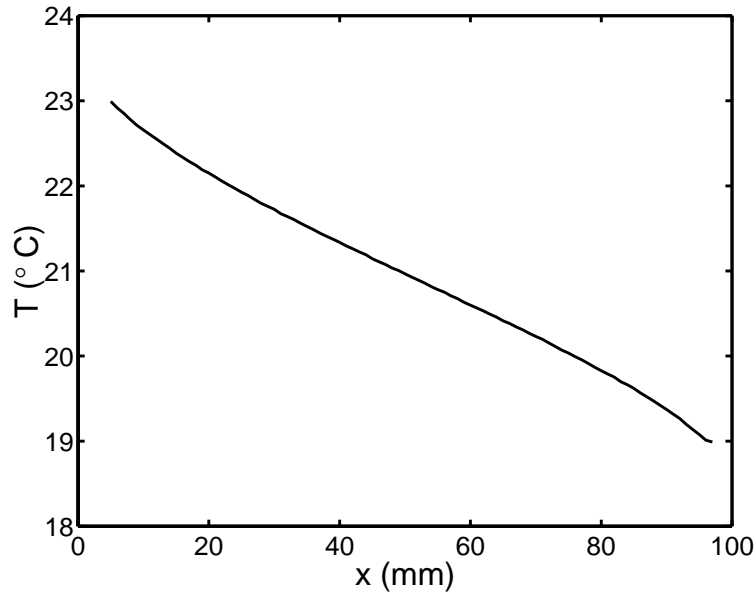


Figura 8.2: Perfil de temperatura del flujo básico en la dirección  $x$ , realizado con la temperatura de más de 90 puntos, medida con un termopar introducido en el fluido;  $l_x = 100$  mm,  $l_y = 100$  mm,  $h = 1.5$  mm.

Antes de que el flujo básico se desestabilice, la ombroscopía no nos proporciona información acerca de la estructura del flujo convectivo, por lo que se han utilizado termopares para recoger la información de la temperatura. En la figura 8.1 se muestra su variación a lo largo del eje  $z$  con  $(x, y)$  constantes, obtenida mediante el desplazamiento de un termopar. Estos perfiles verticales han sido calculados desplazando el termopar desde la superficie al fondo y desde el fondo hacia la superficie, aportando idénticos resultados. La diferencia entre la forma del perfil vertical de temperatura obtenido aquí y el calculado en los estudios teóricos (Smith y Davis [29] y Mercier y Normand [20]) puede deberse a la diferencia en las condiciones de contorno consideradas para el fondo de la celda. En nuestro caso tenemos un fondo conductor (aluminio) con una temperatura lineal, por lo que las medidas leídas muy cerca del fondo tienen una pendiente suave. En cambio, en el caso de que el fondo fuera no conductor la curva de la temperatura tendría una pendiente más elevada. En

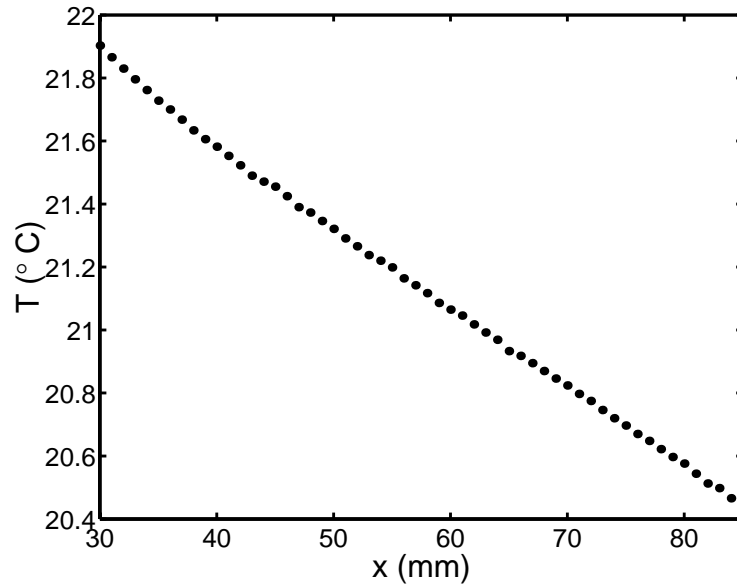


Figura 8.3: Perfil de temperatura de la superficie en la dirección  $x$ , en una región central, obtenido con un sensor infrarrojo, para las mismas condiciones mostradas en la figura 8.2.

cuanto a la pendiente encontrada en la superficie ( $\frac{\partial T}{\partial z}$ ) vemos que ésta da lugar a un número  $Bi \approx 10^{-3}$  bastante pequeño, como de hecho ha sido estimado también en otros experimentos [26].

También se han determinado los perfiles horizontales de la temperatura en la dirección  $x$ , que se muestran en la figura 8.2. Como se observa, cerca de los extremos de la celda el perfil deja de ser lineal debido a la existencia de una capa límite vertical y al cambio de sentido del flujo de retorno. En cada extremo la caída de temperatura es de un grado. Sin embargo, en la zona central el gradiente es aproximadamente constante. Como los termopares colocados en la superficie perturban el flujo al causar un menisco alrededor de su cabeza, se ha situado un sensor infrarrojo a 10 mm por encima de la superficie para obtener la temperatura en ésta. En la zona central el perfil obtenido con este aparato es lineal, como puede verse en la figura 8.3. Como el sensor integra el valor de la temperatura de una superficie grande, cerca de los extremos de la celda estas medidas no son fiables. En el centro de la celda este perfil de temperatura es similar al calculado en los análisis de Smith y Davis [29] y de Mercier y Normand [20]. Se puede pensar en un perfil también similar cuando están presentes las ondas superpuestas a este flujo básico.

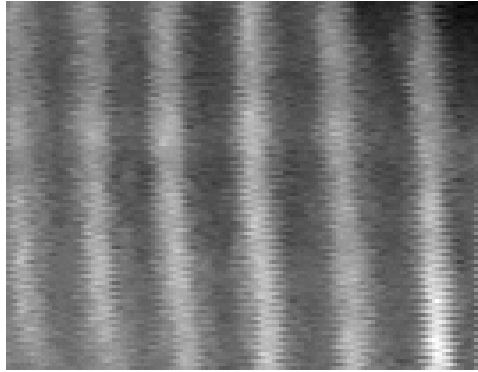


Figura 8.4: Imagen de ombroscopía de rollos corrotativos transversales en una región cerca de la pared caliente.

### 8.1.1 Ruptura del flujo básico

El diagrama de estabilidad que se obtiene al incrementar  $\Delta T$ , a partir de la desestabilización del flujo básico, es el siguiente:

- Para  $h < 1.55$  mm el flujo inicial se desestabiliza en ondas hidrotermales oblicuas.
- Para  $1.55 \leq h < 3.5$  mm. El flujo básico se rompe en rollos transversales corrotativos. Si  $\Delta T$  sigue aumentando aparecen ondas hidrotermales superpuestas a los rollos estacionarios.
- Para  $h \geq 3.5$  mm primero se observan rollos inclinados y posteriormente ondas viajeras diferentes de las ondas hidrotermales.
- Para  $h \geq 4$  mm y fondo aislante se observan, simultáneamente con los rollos transversales, unos siete u ocho débiles rollos longitudinales (con eje paralelo al gradiente), superpuestos a aquéllos. En estos casos no se observan ondas hidrotermales.

Veamos en primer lugar qué sucede cuando la altura es mayor o igual que 1.55 mm.

## 8.2 Rollos corrotativos. Umbrales

Cuando la altura de fluido es  $h > 1.55$  mm el flujo primario se desestabiliza en forma de rollos corrotativos que surgen inicialmente en escaso número (habitualmente dos o tres) cerca de la pared caliente, con sus ejes perpendiculares al gradiente de temperatura ( $|\vec{k}|$  paralelo a  $\nabla T$ ) antes de que aparezcan ondas hidrotermales. Cuando aumenta la diferencia de temperatura entre los extremos

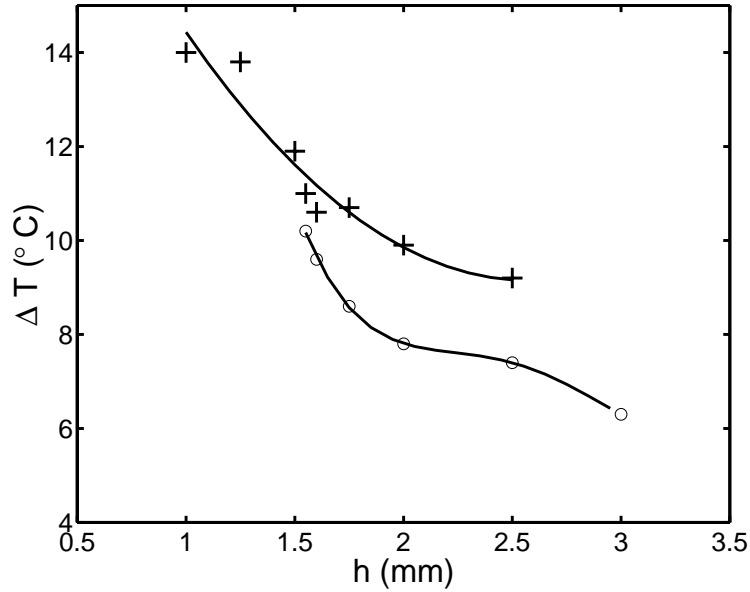


Figura 8.5: Umbrales de los rollos estacionarios (o) y de las ondas hidrotermales (+) para la celda variable, con  $l_x = 100$  mm y  $l_y = 100$  mm.

de la celda el número de rollos también aumenta, así como la zona de fluido ocupada por ellos (figura 8.4), hasta que para una determinada diferencia de temperatura todo el fluido es ocupado por los rollos.

La aparición de estos rollos estacionarios está gobernada por el incremento del empuje al aumentar la altura del fluido: el número de Rayleigh va siendo cada vez mayor respecto al número de Marangoni (para  $h = 1.75$  mm se tiene  $Ma = 460$  y  $Ra = 200$ ). Los rollos corrotativos han sido ya observados en algunos experimentos con alturas  $h \geq 2$  mm. Por ejemplo, en los trabajos de Daviaud y Vince [23] y de Burguete *et al* [22] tiene lugar una primera transición del flujo básico a ondas hidrotermales, y una segunda de ondas a rollos a partir de  $h = 1.4$  mm. Efectivamente alrededor de este punto ( $h = 1.55$  mm, en nuestro caso) se tiene en el diagrama de estabilidad la intersección entre rollos y ondas (véase figura 8.5). Para alturas  $h \geq 1.55$  mm, una vez que se obtiene la transición del flujo básico a rollos estacionarios, surge una segunda transición que consiste en la aparición de ondas superpuestas a estos rollos [60]. Una explicación satisfactoria a esta superposición de rollos y ondas viajeras no ha sido proporcionada todavía.

La aparición inicial de los rollos cerca de la pared caliente ha sido también observada en los trabajos de Ezersky [45] y Garcimartín [46, 61] para fluidos con  $Pr$  grande. En estos trabajos los rollos tienen mayor amplitud cerca de la pared caliente y cuando aumenta  $\Delta T$  empiezan a oscilar hasta que se originan unas ondas que se propagan del lado  $T_+$  al  $T_-$ .

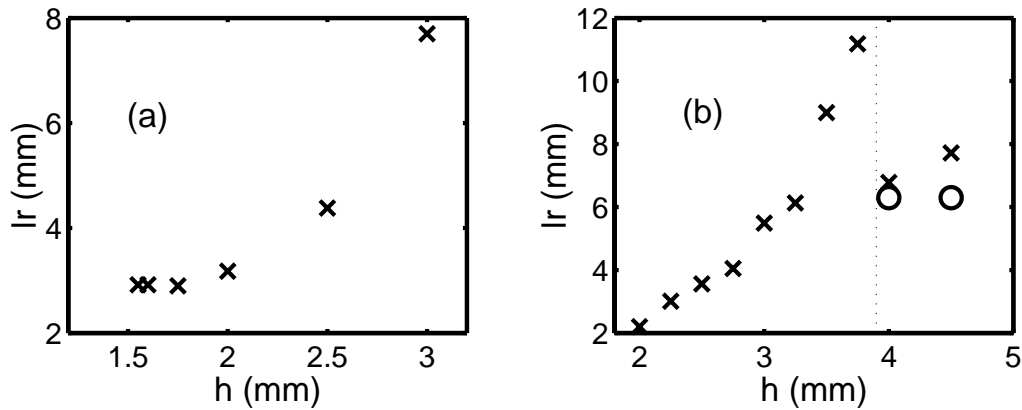


Figura 8.6: Símbolo +: Dependencia de la anchura de los rollos transversales con  $h$  para celda con fondo conductor (a) y aislante (b). Símbolo o: Rollos longitudinales.

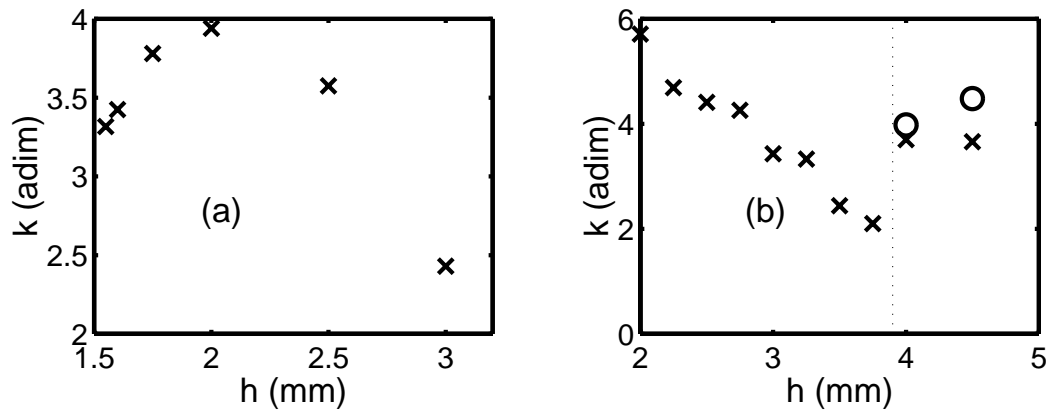


Figura 8.7: Número de onda adimensional de los rollos; (a): fondo conductor; (b): fondo adiabático.

Aunque el estudio de las formación de estructuras estacionarias no ha sido el principal objetivo de esta tesis, se han encontrado algunos resultados respecto a los rollos que suscitan varias preguntas. Se muestran a continuación estos resultados.

### 8.2.1 Variación de la anchura y número de los rollos

Si se considera la relación entre la altura de fluido ( $h$ ) y la anchura de los rollos ( $l_r$ ) observados en el umbral, se tienen dos casos, según el fondo de la celda sea conductor —aluminio— o aislante —nylon—, que se muestran en la figuras 8.6 y 8.7. A medida que la altura de fluido es más grande la anchura de los rollos aumenta, lo cual parece lógico puesto que el estiramiento de la longitud vertical de los rollos lleva consigo una prolongación de la longitud en



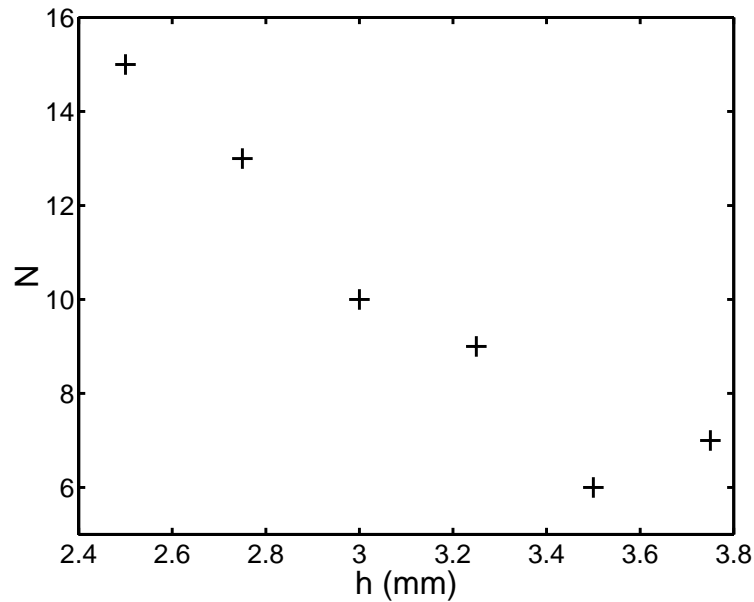


Figura 8.8: Número de rollos ( $N$ ) según la altura de fluido.

la dirección horizontal. Este comportamiento puede tener su explicación en el incremento del empuje al aumentar la altura de la capa de fluido. Cuando la capa de fluido tiene una altura muy pequeña el flujo primario se desestabiliza rápidamente en rollos corrotativos mucho más pequeños que el rollo del flujo básico. En cambio, si la altura  $h$  aumenta el empuje tiene cada vez más peso en la dinámica del flujo frente a las fuerzas termocapilares, reduciendo el número de rollos en los que se divide el rollo inicial. Aproximadamente el mismo comportamiento se encuentra cuando el fondo es aislante (figura 8.6 (b)).

Al aumentar la altura el número de rollos que se obtiene es menor, según puede verse en la figura 8.8. En este caso la relación entre la altura y el número de rollos es aproximadamente lineal. Esto se debe a que al aumentar su anchura caben menos en la misma celda.

### 8.2.2 Rollos inclinados

Por último, además de rollos transversales y longitudinales, también ha sido observada una estructura estacionaria en forma de rollos oblicuos (figura 8.9) cuando  $h \geq 3.5$  mm y  $\Delta T > \Delta T_{(\text{rollos})}$ . Esta inclinación podría estar ocasionada por la influencia que ejercen las paredes sobre la orientación de los rollos según el valor de la conductividad de aquéllas.

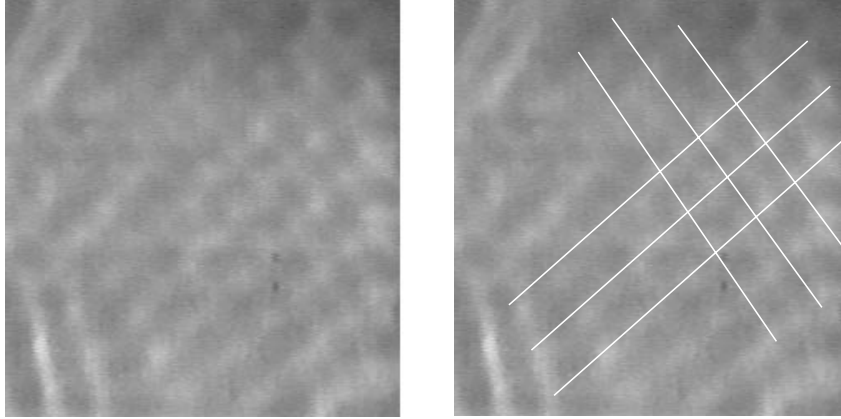


Figura 8.9: Imagen de ombroscopía de rollos inclinados para fondo aislante,  $h = 3.5$  mm y  $\Delta T = 8.7^\circ\text{C}$ . Las líneas en blanco de la imagen derecha señalan la dirección de los ejes de los rollos.

## 8.3 Ondas hidrotermales

### 8.3.1 Umbrales

Como se ha indicado, para una altura  $h \leq 1.55$  mm, a partir de una determinada diferencia de temperatura el flujo básico se desestabiliza en forma de modos viajeros. Un par de ondas surgen cerca de la pared caliente y viajan hacia ella formando un ángulo  $\psi$  con el gradiente de temperatura. Son simétricas respecto de la dirección del gradiente, como puede observarse en la figura 8.10. La diferencia de temperatura  $\Delta T_c$  para la cual se empiezan a observar las ondas mediante la ombroscopía, fue la misma que la obtenida introduciendo termopares en el fluido para detectar el nacimiento de las ondas <sup>1</sup>. La resolución de los diagramas espacio temporales para una determinada estructura de ondas es comparable a la de los termopares (en torno a  $0.02^\circ\text{C}$ ). Por debajo de  $0.02^\circ\text{C}$  los métodos no nos permiten encontrar oscilaciones, por lo que el umbral estará ligeramente sobreestimado. Como el menisco afecta a una zona de 10 mm alrededor de las paredes —tanto de las conductoras como de las no conductoras— las ondas solo se pueden observar a partir de esta distancia. Cuando se alcanza el umbral de las ondas hidrotermales éstas surgen en una región cerca del lado caliente ( $T_+$ ) y de las dos paredes adiabáticas. Conforme aumenta  $\Delta T$  las ondas van invadiendo la celda hasta que la cubren por completo (figura 8.11). En este caso la pared aislante ocasiona que el frente de onda se curve al acercarse a ella, como ya puso de manifiesto Ezersky *et al.*

<sup>1</sup>En este caso se recoge una serie temporal y se detecta la presencia de una frecuencia fundamental con una determinada amplitud.

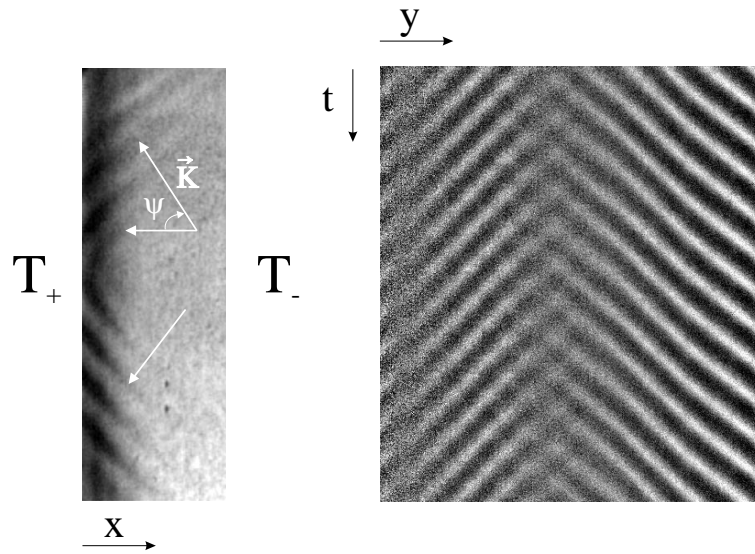


Figura 8.10: Imagen de ombroscopía de las ondas (izquierda). A la derecha, diagrama espacio temporal en la dirección  $y$ .

[45].

En la figura 8.12 se muestran los umbrales determinados para alturas variables en la celda de geometría fija, y en la figura 8.13 los umbrales para la celda de geometría variable. Bajo la curva de las figuras 8.12 y 8.13 el estado estable es el flujo básico, y por encima de estas curvas este flujo se desestabiliza originándose las ondas hidrotermales. Para alturas menores que 1 mm el volumen de fluido en la zona del menisco es bastante grande comparado con el volumen de la capa de fluido, por lo que en esta situación el menisco tiene un gran influencia en la dinámica del sistema.

Cuando  $h \geq 3.5$  mm la relación entre el número  $Ma$  y el  $Ra$  cambia notablemente y el número de Bond crece considerablemente. El empuje entonces es la fuerza dominante y las ondas viajeras que se obtienen contienen características con valores muy diferentes a los de las ondas hidrotermales. La dirección de propagación de esta nueva inestabilidad es también claramente distinta de la de las ondas hidrotermales: viajan desde el lado caliente al frío con su vector de onda formando  $\psi = 180^\circ$  con el gradiente de temperatura. Este tipo de estructura viajera tiene, en cambio, características similares a las de las ondas encontradas en otros experimentos. Según algunos trabajos [46] provienen de la desestabilización de la capa límite caliente [62].

Las ondas que se observan cuando  $h \leq 1.55$  mm, inicialmente cerca de las paredes situadas a cierta distancia en el eje  $y$  (modos de pared [50]), son originadas en una fuente en el centro de la celda y arrastradas hasta las paredes. Dependiendo del tipo de inestabilidad las ondas se podrán observar o no en el sistema antes de que queden absorbidas al alcanzar las paredes. Si la

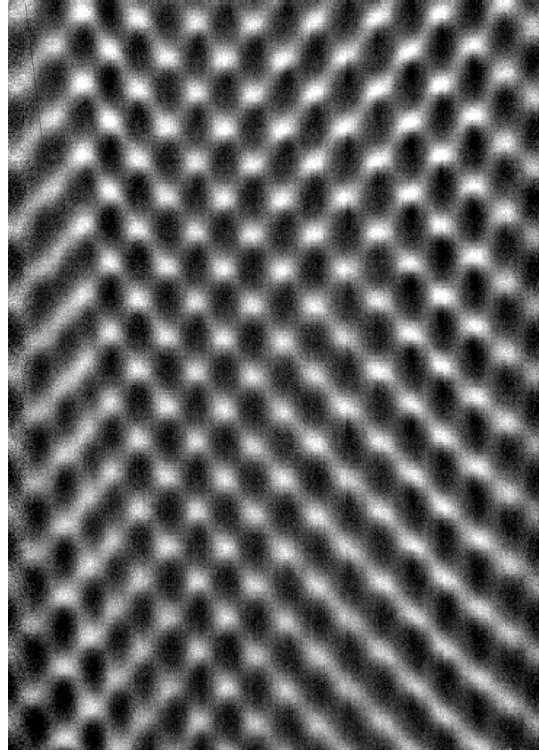


Figura 8.11: Diagrama espacio temporal de las ondas hidrotermales cuando  $\Delta T \gg \Delta T_c$ .

velocidad de grupo es diferente de cero en el sistema, para valores próximos al umbral las perturbaciones son arrastradas de forma que mueren en la pared (supuesta absorbente) antes de que puedan ser observadas (inestabilidad *convectiva*). Para valores lejanos al umbral se encuentra que las perturbaciones crecen localmente, es decir, son inestabilidades *absolutas*, y pueden ser observadas. En nuestro caso se ha obtenido que las componentes de la velocidad de grupo ( $v^{gr}$ ,  $v_x^{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k_x}$  y  $v_y^{gr} = \frac{\partial \omega}{\partial k_y}$ ) son:  $v_x^{gr} \sim v_x^{ph}$  y  $v_y^{gr} \sim \frac{2}{3}v_y^{ph}$ , donde  $ph$  indica la velocidad de fase y  $gr$  la de grupo.

Estos valores han sido obtenidos a partir del diagrama espacio temporal y de la demodulación compleja (cfr. capítulo 6). La ecuación para la fase  $\phi$  del paquete de ondas, para todo  $t$  e  $y$  se calcula, sabiendo que:

$$\phi(t, y) = \phi_0 + \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y_0} \cdot y + \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t_0} \cdot t + \dots$$

donde el número de onda local es  $q = \left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y_0}$  y la frecuencia  $-\Omega = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{t_0}$ . Como  $k = k_0 + q$  y  $\omega = \omega_0 + \Omega$  podemos obtener la relación de dispersión  $\omega = f(k)$ . La velocidad de grupo es:  $v^{gr} = \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}$ , que es la pendiente de la curva de  $\omega$

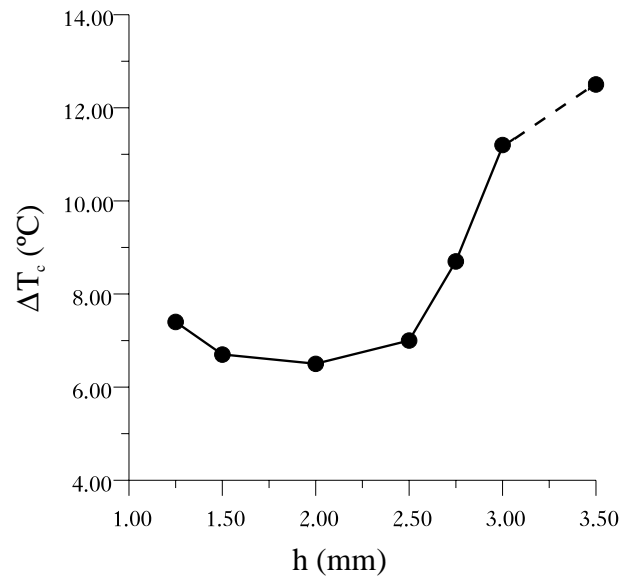


Figura 8.12: Umbral de las ondas hidrotermales para la celda fija. En el punto  $h=3.5$  mm (línea discontinua) el número  $Ra$  es del mismo orden que el  $Ma$  y se observan además otras inestabilidades que hacen difícil ver con claridad las ondas hidrotermales.

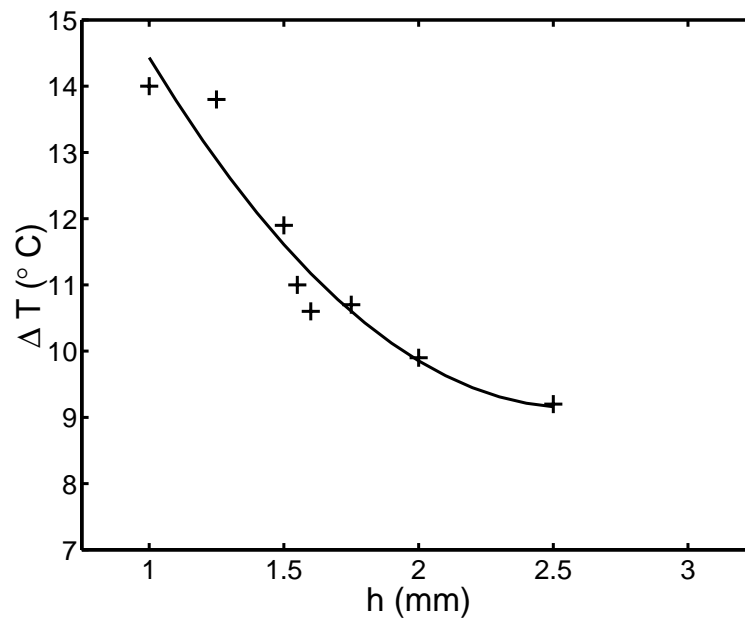


Figura 8.13: Umbral de las ondas para la celda variable, con longitudes definidas  $l_x=100$  mm,  $l_y=100$  mm.

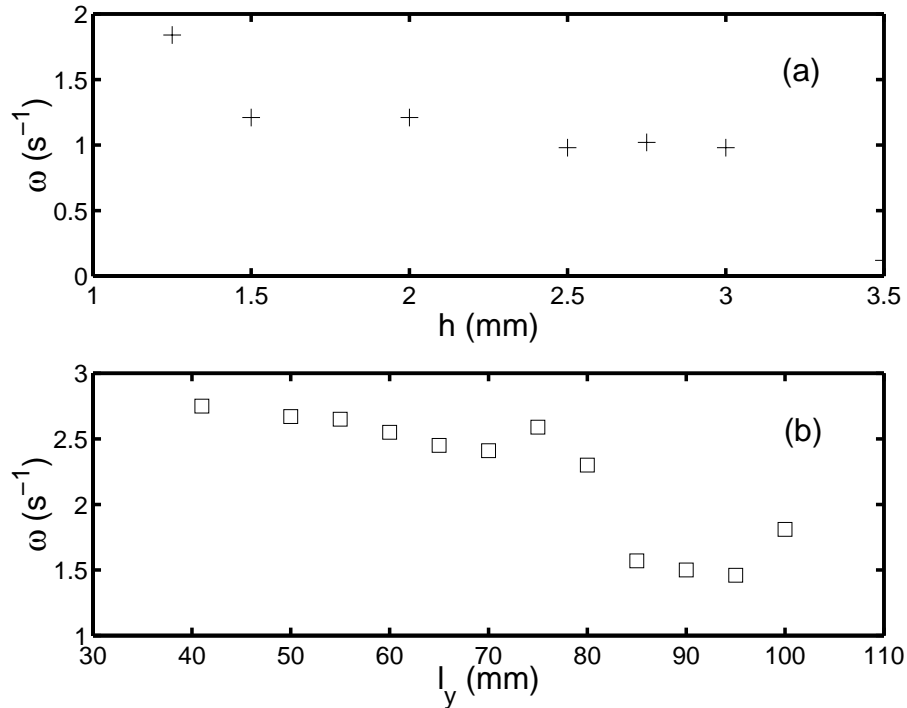


Figura 8.14: Valores de la frecuencia; (a): Dependencia con  $h$  para la celda fija; (b): Dependencia con  $l_y$  para la celda variable con  $l_x = 100$  mm y  $h = 1.5$  mm.

en función de  $k$ . Una explicación más detallada se encuentra en el Apéndice A.

### 8.3.2 Características físicas

Las principales características pueden hallarse con los diagramas espacio temporales encontrados en ambas direcciones  $x$  e  $y$ , semejantes al que está representado en la figura 8.10.

Se ha determinado la dependencia de la frecuencia angular  $\omega$  con la altura  $h$  para la celda fija (figura 8.14 (a)) y para la celda variable (figura 8.14 (b)). En esta figura puede verse el aumento de la frecuencia en función de la disminución de la distancia  $l_y$ . Esto podría ser la causa de las diferencias encontradas en diversos experimentos con contenedores de distinta longitud. La frecuencia angular media de las ondas para el caso anterior es alrededor de 1.3 Hz, lo que corresponde a un período entre 4 y 5 segundos. Este valor es muy diferente al observado en Ezersky *et al* [45], lo cual pone de manifiesto una vez más que la inestabilidad encontrada por estos autores es diferente de las ondas hidrotermales. En cambio, los valores adimensionalizados con el tiempo  $t = h^2/\nu$  (figura 8.15(a)) son similares a los hallados en otros trabajos (Daviaud

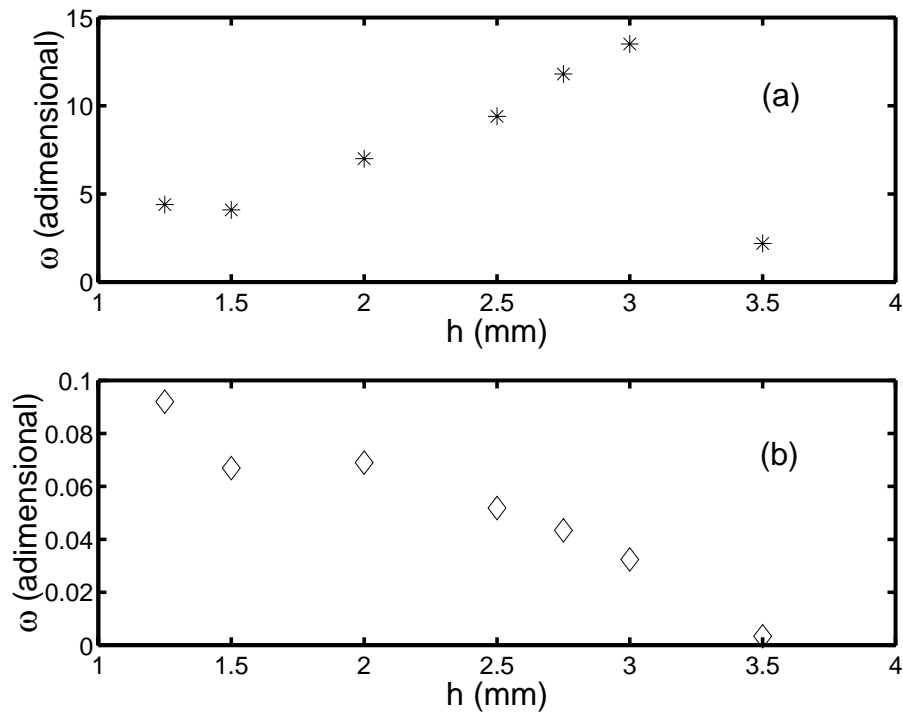


Figura 8.15: Valores de la frecuencia; (a): Valores adimensionalizados con el tiempo  $t = h^2/\nu$ ; (b): Valores adimensionales utilizando el tiempo definido por Smith y Davis [29].

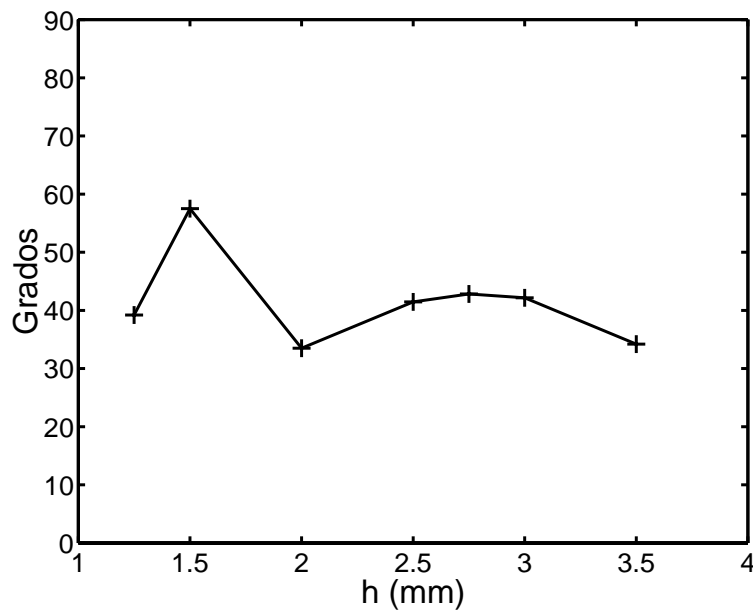


Figura 8.16: Ángulo de propagación de las ondas hidrotermales en función de la altura de fluido.

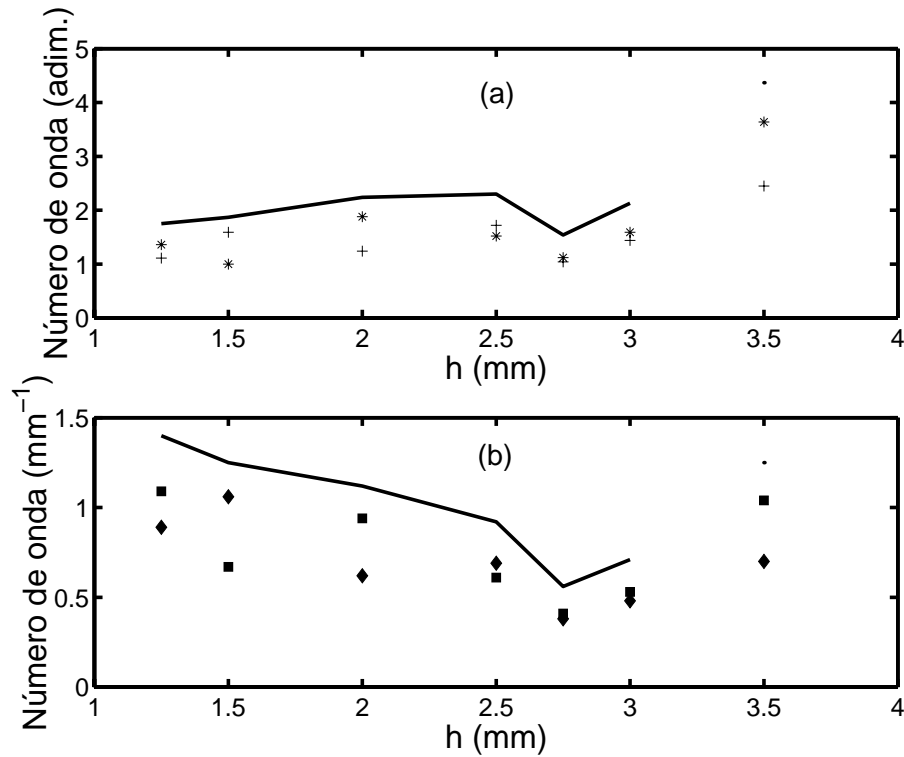


Figura 8.17: (a): Número de onda adimensional  $|\vec{k}|$  (línea continua), componente  $k_x$  (+) y componente  $k_y$  (\*); (b): Número de onda  $|\vec{k}|$  (línea continua), componente  $k_x$  (símbolo  $\diamond$ ) y componente  $k_y$  (símbolo *cuadrado*). El número de onda en ambos casos, (a) y (b), ha sido calculado a partir de los valores obtenidos de sus componentes  $k_x$  y  $k_y$ .

y Vince [23] y Mercier y Normand [20]). Para comparar con los resultados calculados por Smith y Davis [29] hemos adimensionalizado la frecuencia con el tiempo característico que ellos definen  $t = \frac{\mu}{|\frac{\partial \sigma}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial x}|}$ . La frecuencia obtenida en este caso ( $\omega_{adim} < 0.15$ , figura 8.15(b)) muestra valores menores que la calculada por aquellos autores ( $\omega_{adim} = 0.2$ ). Hay que tener en cuenta que en su trabajo se supone una capa de longitud infinita y un gradiente de temperatura constante, y además se considera  $Ra = 0$ .

Para la celda fija el ángulo hallado está entre  $30^\circ$  y  $57^\circ$  al variar  $h$  (figura 8.16). El valor del número de onda adimensional (figura 8.17(a)) está en torno a  $|\vec{k}| = 2.2$ , que es cercano al encontrado por varios autores (Smith y Davis [29], Parmetier *et al* [34] y Mercier y Normand [20]). El número de onda para  $h = 3.5$  mm puede tener un gran error, ya que para esa altura se observan otras inestabilidades viajeras mezcladas con las ondas hidrotermales.



### 8.3.3 Amplitud de las oscilaciones de la temperatura

En primer lugar hay que averiguar si existen ondas de temperatura y además, directamente relacionado con el mecanismo de inestabilidad de las ondas, determinar el campo de temperatura. Como las fuerzas interfaciales son las

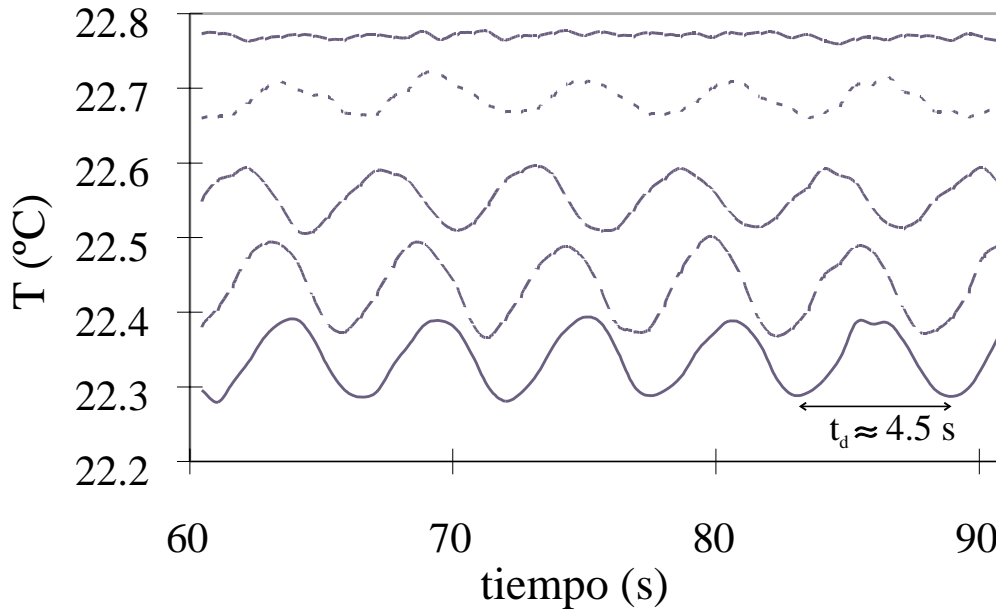


Figura 8.18: Señal de la temperatura medida por un termopar en  $x, y$  constantes,  $z$  variable. La serie superior corresponde a la temperatura de la superficie ( $z = 2$  mm) y las siguientes series a la temperatura leída al reducir  $z$  en pasos de 0.5 mm, hasta el fondo ( $z = 0$  mm). El valor de  $t_d$  es el periodo de las ondas.

que dominan en el flujo, la primera cuestión reside en saber si la perturbación afecta a la superficie o a todo el volumen de fluido. Para ello medimos la temperatura en un número suficiente de puntos del interior y en puntos de la superficie del fluido, para una altura de fluido  $h = 2$  mm en la celda de geometría fija. Lógicamente todas las medidas se realizan en la parte central, suficientemente lejos de las paredes de la celda para reducir su influencia.

Interesa también saber cómo es la variación de la temperatura en la dirección  $z$  y en la dirección  $x$ . La primera, en  $z$ , para averiguar si la perturbación afecta solamente a la superficie ( $z = h$ ) o a todo el volumen ( $z$  variable). La segunda, en  $x$ , porque en esta dirección se impone la diferencia de temperatura.

#### Variación en la dirección $z$

Para observar la variación de esta amplitud con la profundidad se sumerge un termopar en puntos  $(x, y)$  constantes a varias alturas,  $z = 0$  (fondo), 0.5, 1, 1.5 y 2 mm (superficie), que recoge series de temperatura en cada punto durante

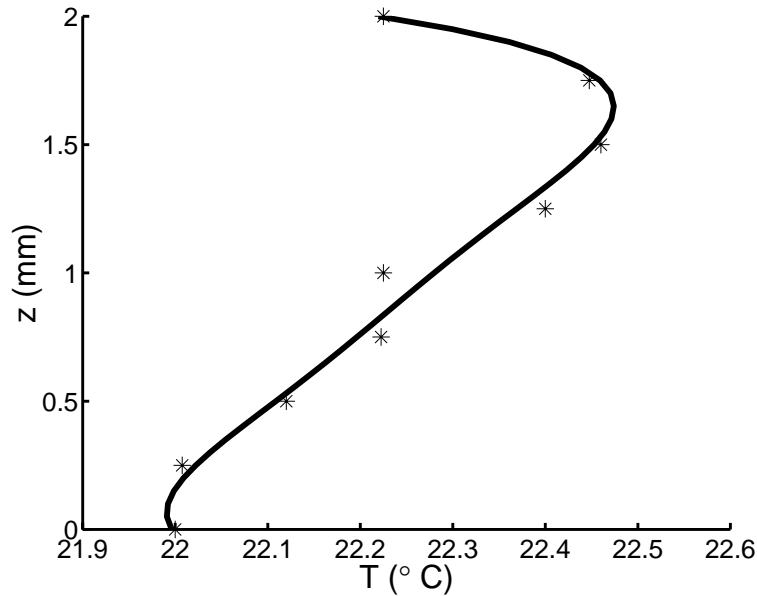


Figura 8.19: Perfil vertical de temperatura para la celda fija y  $h = 2$  mm (puntos \*). La línea continua es un ajuste de los datos con un polinomio de orden cinco, que es la dependencia que encuentran Mercier y Normand [20]. En ese polinomio el número de parámetros libres a ajustar son tres.

un tiempo de varios minutos (figura 8.18). Como se ve, la amplitud es mínima en la superficie y máxima cerca del fondo (unos  $0.07$  °C), y se puede describir con la ecuación:

$$T(x, z, t) = \hat{T}(z) \cos(kx - wt)$$

Por tanto, aunque el origen de estas ondas reside en las fuerzas termocapilares —según se explica en la ref. [29]— el desarrollo de la perturbación tiene lugar en todo el volumen de la capa de fluido: es un fenómeno de volumen [60]. Según explica Smith [30], una región del interior del fluido con temperatura más elevada que su entorno es arrastrada por el flujo de retorno hacia la pared caliente calentando por conducción la superficie. Esta zona del interior tiene una amplitud de temperatura máxima cerca del fondo y mínima en la superficie. El mecanismo de inestabilidad que tiene lugar cuando  $Pr \rightarrow \infty$ , daría ocasión a la propagación de una onda en la dirección del gradiente de temperatura ( $\psi \rightarrow 0^\circ$ ). Sin embargo, como el fluido tiene un  $Pr$  intermedio el ángulo resultante entre  $\vec{k}$  y  $\vec{\nabla}T$  es mayor ( $\psi = 35^\circ$  es el medido aquí para  $h = 2$  mm [60]) y se tienen dos ondas oblicuas. Por tanto, estaríamos en la situación descrita para el mecanismo cuando  $Pr$  es intermedio: ondas hidrotermales propagándose con una dirección oblicua. Efectivamente, comparando las isothermas que se encuentran en el trabajo de Smith [30], figura 5, con los

encontrados en nuestro experimento, el acuerdo es bastante bueno. La diferencia entre los valores del ángulo de propagación hallados por Smith y Davis [29] ( $\psi \approx 20^\circ$ ), para  $Pr = 10$ , y el nuestro puede deberse a que estos autores no incorporan el empuje en su modelo. En cambio, Parmentier *et al.* añaden esta fuerza obteniendo un ángulo  $\psi = 33^\circ$ , que es más cercano al que se encuentra aquí.

Para la celda de geometría fija también se obtuvo un perfil de temperatura en el eje  $z$ , promediando en cada punto los datos de la serie temporal de la temperatura. El resultado (figura 8.19) muestra que en el fondo la componente  $z$  del gradiente es pequeña y por el contrario en la superficie es grande. A título indicativo una estimación del número de Biot para este caso es  $Bi \approx 10^{-2}$ .

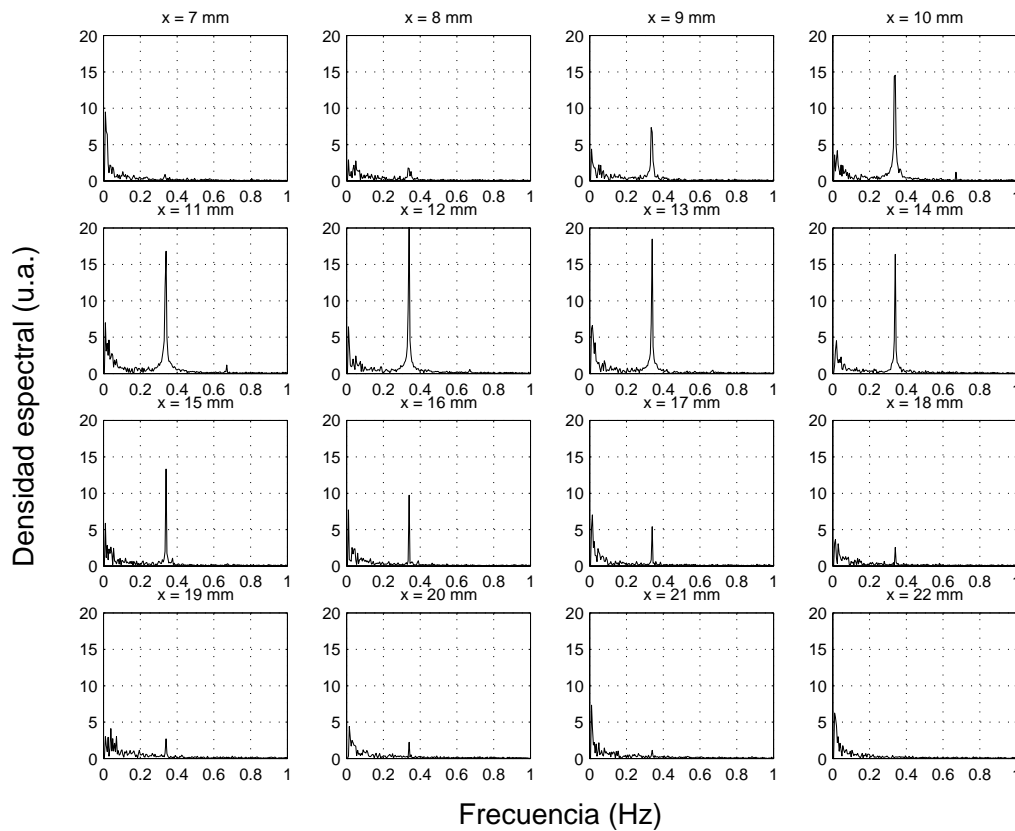


Figura 8.20: Variación de los picos de frecuencia y amplitudes de las ondas hidrotérmicas en puntos cercanos a la pared caliente.

### Variación en la dirección $x$

Las ondas no surgen simultáneamente ocupando toda la cavidad sino que a medida que aumenta la diferencia de temperatura van extendiéndose desde

cerca del lado caliente hasta que ocupan toda la capa. Es interesante averiguar entonces cómo varía la amplitud de la temperatura de las ondas a medida que van apareciendo, ya que puede ser esencial a la hora de estudiar el tipo de transición.

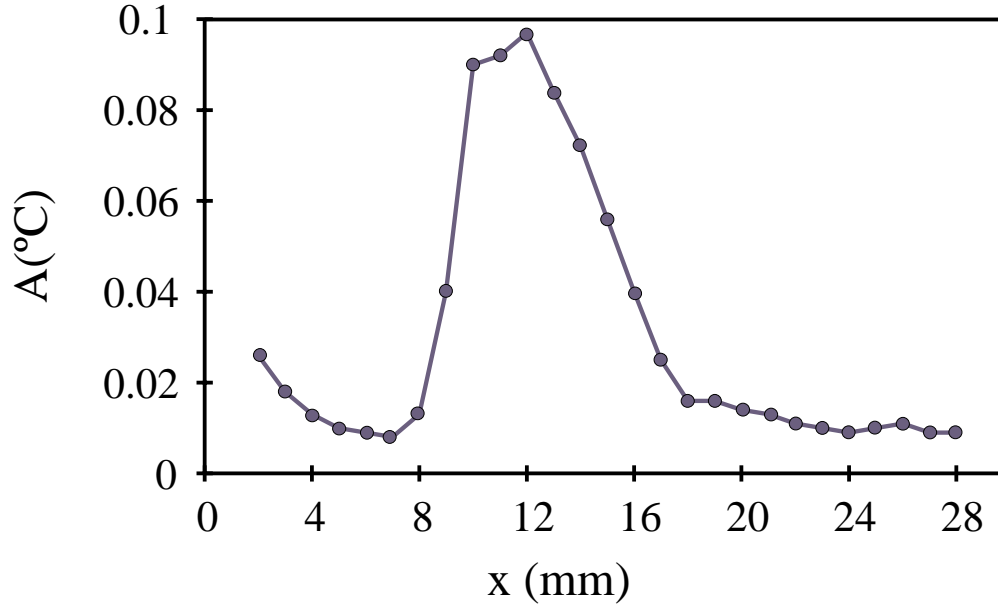


Figura 8.21: Variación de la amplitud de la temperatura en la dirección  $x$  cerca de la pared caliente. El valor de  $A$  es la amplitud pico a pico.

Para conocer esta variación se recogen los datos de la temperatura en puntos espaciados 1 mm en la dirección  $x$ , desde  $x = 2$  mm hasta  $x = 28$  mm. Hasta los puntos con  $x \approx 9$  mm el menisco influye considerablemente y en  $x \approx 20$  mm no se observan ondas. En cada punto se obtiene una serie temporal de la temperatura. Después se realiza la transformada de Fourier y se encuentra si hay algún pico en el espacio de frecuencias con gran amplitud. Como puede observarse en la figura 8.20 a medida que nos alejamos de la pared  $T_+$  ( $x = 0$ ) surge una frecuencia con una amplitud creciente, con un máximo en  $x = 12$  mm. Después esta amplitud va decreciendo hasta anularse prácticamente ( $x \approx 20$  mm). La variación de la amplitud con la distancia puede verse en la figura 8.21.

El mismo resultado ha sido encontrado en la simulación llevada a cabo por Xu y Zebib [41]. Estos autores proponen que las oscilaciones de la temperatura cerca de la pared  $T_+$  tienen una amplitud mayor que en el resto de la celda, y que a medida que aumenta la diferencia de temperatura horizontal, la región de las ondas va creciendo hasta llenar toda la capa de fluido.

Sería interesante saber cómo es el crecimiento de esta amplitud con el parámetro que señala el umbral ( $\epsilon = \frac{\Delta T - \Delta T_c}{\Delta T_c}$ ). Sabiendo esto, como en la dirección

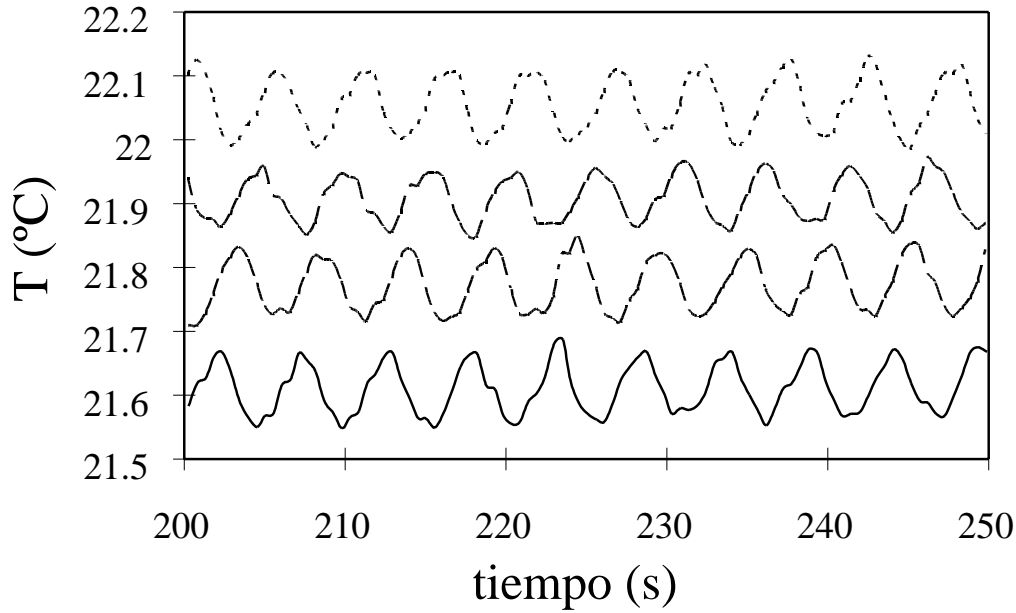


Figura 8.22: Señal de la temperatura del interior del fluido, obtenida con cuatro termopares alineados en la dirección  $x$ , nivelados a la misma altura  $z = 0.5$  mm.

y la dinámica es homogénea, podríamos estudiar de que tipo es la bifurcación. Además, también se puede conocer la tasa de crecimiento espacial ( $s_x$ ) suponiendo que estamos suficientemente cerca del umbral ( $\partial_t A = 0$ ,  $|A| \sim 0$ ) donde la variación de la amplitud  $A$  es lineal:  $\partial_x A = s_x A$ . Entonces, se tiene la ecuación de amplitud más simple:

$$\tau_0 v_x^{gr} \partial_x A = \epsilon A$$

$$\tau_0 v_x^{gr} s_x A = \epsilon A$$

luego la tasa es:

$$s_x = \frac{\epsilon}{\tau_0 v_x^{gr}}$$

donde  $\tau_0$  es el tiempo característico. Cuando las ondas llenan completamente la capa de fluido (situación alejada del umbral), se obtienen unas señales de temperatura con amplitud constante en torno a  $0.07$  °C, para  $z = 0.5$  mm, en el centro de la celda (figura 8.22).

### 8.3.4 Mecanismos de inestabilidad

Una de las explicaciones de este mecanismo que parece estar de acuerdo con los datos experimentales es la propuesta por Smith y Davis ya explicada en detalle en el capítulo de la introducción y referenciada aquí. Según ésta habría básicamente dos mecanismos diferentes cuando el número  $Pr$  es grande o

pequeño. Uno basado en el dominio de las fuerzas de inercia ( $Pr$  pequeño) y el otro en el dominio de las fuerzas viscosas ( $Pr$  grande). Cuando  $Pr$  tiene un valor moderado —como es nuestro caso— se tendría una combinación de ambos mecanismos: las ondas viajarían formando un ángulo con el gradiente de temperatura y habría una competición entre ambas fuerzas. Esta explicación está en buen acuerdo con algunos valores de las propiedades físicas encontrados (fundamentalmente con el número de onda). Además, como veremos más adelante, aunque el ángulo de propagación difiere del encontrado en nuestro trabajo, las ondas viajan oblicuamente hacia la pared caliente, tal como sugieren estos autores. El que las oscilaciones de temperatura obtenidas en todo el volumen de la capa de fluido tengan una amplitud máxima cerca del fondo, también parecen estar de acuerdo con este mecanismo.

Según otros trabajos [44, 45, 46] en los que el número  $Pr$  es grande, las inestabilidades viajeras encontradas surgen a partir de la desestabilización de la capa límite caliente. Las ondas que aparecen en estos casos tienen propiedades bastante diferentes a las estudiadas aquí, especialmente en lo referente a la dirección de propagación que es en sentido contrario a la de las ondas hidrotermales.

Por otra parte, si la velocidad de grupo es distinta de cero, al trabajar con una celda fija sólo se puede observar el umbral absoluto y no el convectivo. Tan pronto como nos alejamos del umbral, el rango de números de onda posibles es amplio ( $-\frac{\sqrt{c}}{\xi_0} < q < \frac{\sqrt{c}}{\xi_0}$ , ref. Apéndice A). Esto implica que aparece un paquete de ondas. El paquete de ondas viaja con una velocidad de grupo que tiene un valor y una dirección en principio distintas de las de la velocidad de fase. El umbral convectivo se alcanza cuando una perturbación crece en el flujo primario y a consecuencia de su velocidad de grupo se propaga y muere en las paredes de la celda. Existe sólo durante un tiempo transitorio y, debido a su pequeña tasa de crecimiento espacial, no perdura [28, 50]. En cambio, la inestabilidad absoluta no es arrastrada por el flujo y crece espacialmente.

El tren de ondas observado se propaga del lado frío al caliente. Según algunos estudios [22, 23, 63] puede ocurrir que las ondas surjan de una fuente puntual cuando la altura de fluido es pequeña ( $h = 1.6$  mm), que es este caso. Se tendrían así dos ondas viajando simultáneamente con un ángulo de inclinación respecto al gradiente de temperatura, tal como hemos observado.

Otro mecanismo posible tiene como parámetro crítico el gradiente de temperatura local. Es decir, las ondas serían estables y localizadas en las regiones de la capa de fluido en las que el valor del número de Marangoni supere un valor umbral. Los resultados que apoyan este mecanismo se verán en el capítulo 9.

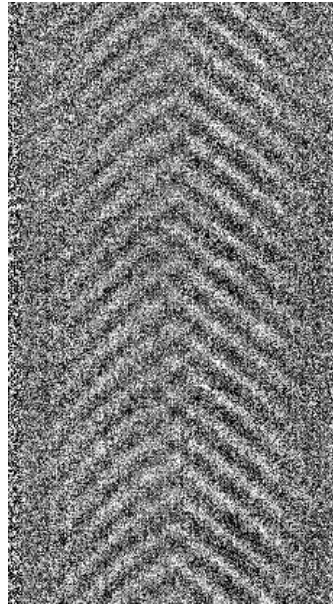


Figura 8.23: Diagrama espacio temporal de las ondas hidrotermales observadas en acetona.

## 8.4 Inestabilidades para $Pr = 4.4$

En este último apartado se muestran algunos resultados para un fluido, acetona, con un número  $Pr = 4.4$ . Como el fluido anterior, este valor está comprendido en el rango de números de Prandtl intermedios, por lo que en principio las características de las ondas hidrotermales serán similares. Por este motivo no hemos llevado a cabo un estudio tan exhaustivo como el realizado con el primer fluido. Simplemente, a modo de comparación se indican los umbrales encontrados, los valores de la frecuencia, número de onda y ángulo de propagación.

### 8.4.1 Umbrales y características de las ondas

Se han determinado los valores de  $\Delta T_c$  en el umbral para  $l_x = 50$  mm y varias longitudes  $l_y$ , con resultados similares a los hallados para el fluido anterior. Como ejemplo en la figura 8.23 se muestra un diagrama espacio temporal de las ondas hidrotermales cerca del umbral.

Los valores de la frecuencia y del número de onda se mantienen prácticamente constantes (figuras 8.24 (a) y 8.25 (a)):  $|\vec{k}|_{medio} \simeq 1.69 \text{ mm}^{-1}$  y  $\omega_{medio} \simeq 2.65 \text{ s}^{-1}$ . Sin embargo, tanto la frecuencia adimensional como el número de onda adimensional aumentan con  $l_y$ . La primera ha sido adimensionalizada con  $l_y^2/\nu$ . El número de onda adimensional se calculó multiplicando el valor dimensional por  $l_y$ . Como se puede ver, comparando los resultados, la frecuencia

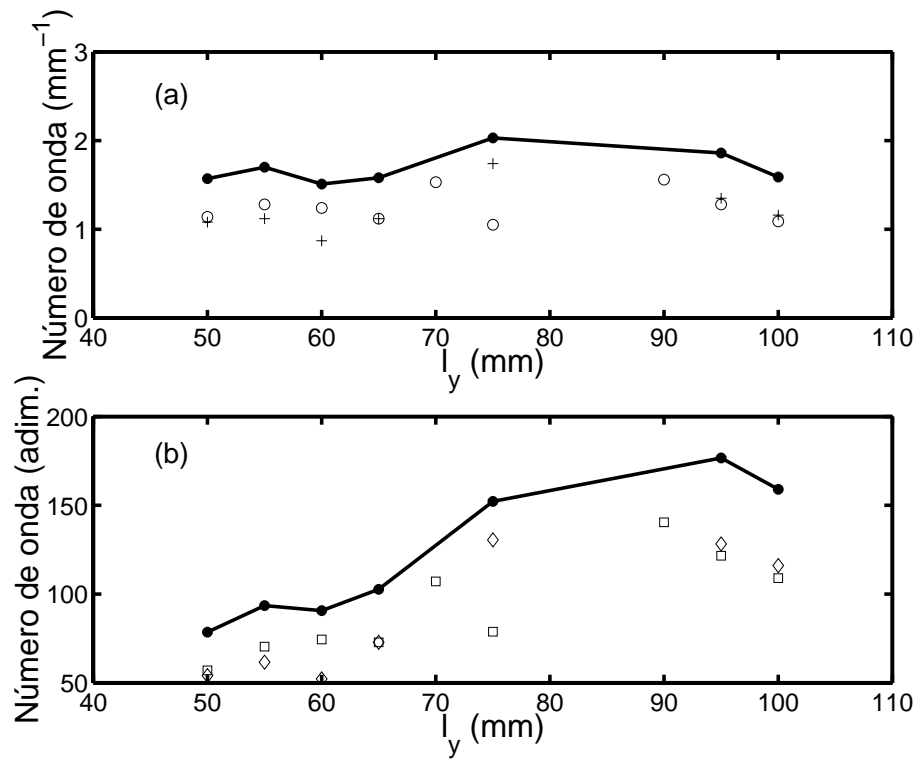


Figura 8.24: (a): Número de onda (línea continua) y componentes del vector de onda para acetona. La componente  $k_x$  está indicada por el símbolo + y la componente  $k_y$  por el símbolo o; (b): Valores adimensionales de la componente  $k_x$  (◊), de la componente  $k_y$  (cuadrados) y del número de onda (línea continua).

no varía apreciablemente respecto al caso en el que se utiliza aceite de silicona, y el número de onda es algo menor en este caso, lo cual está en buen acuerdo con lo obtenido por Smith y Davis [29] para este número de Prandtl. Estos autores predicen también un ángulo de unos  $40^\circ$  (para  $Pr = 4.4$ ) y los valores que se encuentran en este experimento están entre  $30^\circ$  y  $55^\circ$  (figura 8.26).

No ha sido posible comparar estos valores con otros experimentos puesto que el único que utiliza acetona del que tenemos noticia —el de Villers y Platten [43]— ha estado más dirigido hacia la obtención del campo de velocidad, y además en él no se estudia el comportamiento de ondas viajeras.



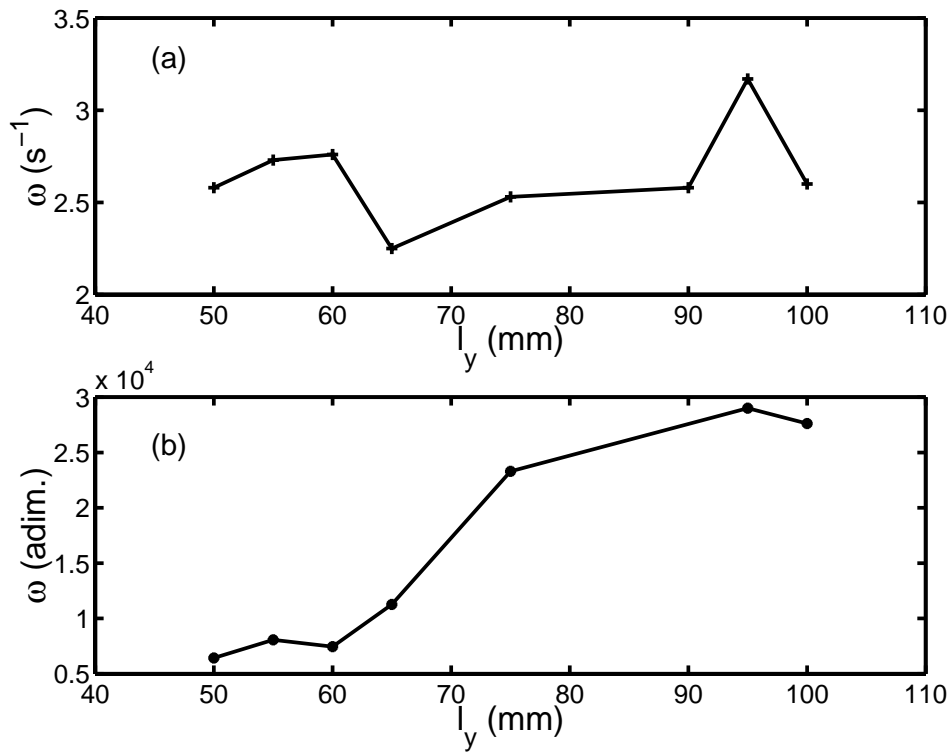


Figura 8.25: Frecuencia dimensional (a) y adimensional (b) de las ondas hidrotérmicas, para acetona.

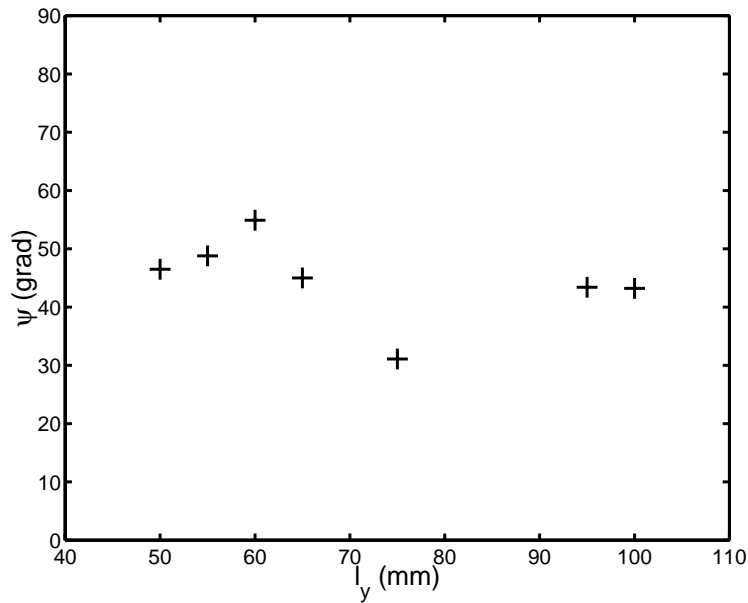


Figura 8.26: Variación del ángulo de propagación para distintos valores de  $l_y$ .

# Capítulo 9

## Influencia de la geometría

Tratamos en este capítulo de estudiar el efecto del confinamiento en las ondas hidrotermales. Se pretende, por un lado, conocer la influencia de estos límites en el mecanismo de desestabilización y en las características de las inestabilidades y, por otro lado, explicar los diferentes resultados obtenidos en experimentos con geometrías variadas. En lo que sigue se mantiene una altura constante  $h = 1.5$  mm.

### 9.1 Confinamiento en la dirección $x$

#### 9.1.1 Umbral de las ondas

Manteniendo constante la distancia  $l_y$  a 100 mm se varía ahora  $l_x$  y en cada caso  $(l_x, l_y)$  se halla el umbral de aparición de las ondas hidrotermales. Como se observa en la figura 9.1 a medida que crece  $l_x$  el umbral  $\Delta T_c$  aumenta en relación lineal. Si el parámetro que señala la aparición de las ondas es el gradiente de temperatura parece lógico que al variar  $l_x$  también tenga que cambiar  $\Delta T_c$  de forma lineal para que el gradiente permanezca constante. Sin embargo, para cada caso  $(l_x, l_y)$ , este valor global del gradiente no es totalmente constante en toda la celda. Por un lado, en un caso ideal cuando la distancia  $l_x$  se reduce hasta un valor  $l_x = 0$ , se obtendría una diferencia de temperatura  $\Delta T_c = 0^\circ\text{C}$ . Por el contrario, según lo que se observa en la figura 9.2 (a), cuando  $l_x \rightarrow 0$ , se obtiene  $\Delta T_c \sim 4^\circ\text{C}$ . Esto significa que hay una caída de la temperatura cerca de las paredes conductoras que ocasiona que para cualquier valor de  $l_x$  el gradiente efectivo en la celda sea menor que  $\frac{\Delta T_c}{l_x}$ . Esto explica que la recta de la gráfica 9.1 no corte al eje  $\Delta T_c$  en el punto  $\Delta T_c = 0$  cuando  $l_x = 0$ . Por otro lado, se observa (figura 9.2) que el perfil de la temperatura es casi lineal pero no del todo: depende de  $x$  de la forma  $\frac{\partial T}{\partial x}(x)$ . Por tanto,  $\beta = \beta(x)$ . Así, puede ocurrir que en algunos puntos del fluido el valor de  $\beta$  supere el crítico en el umbral mientras que en otros tenga un valor por debajo

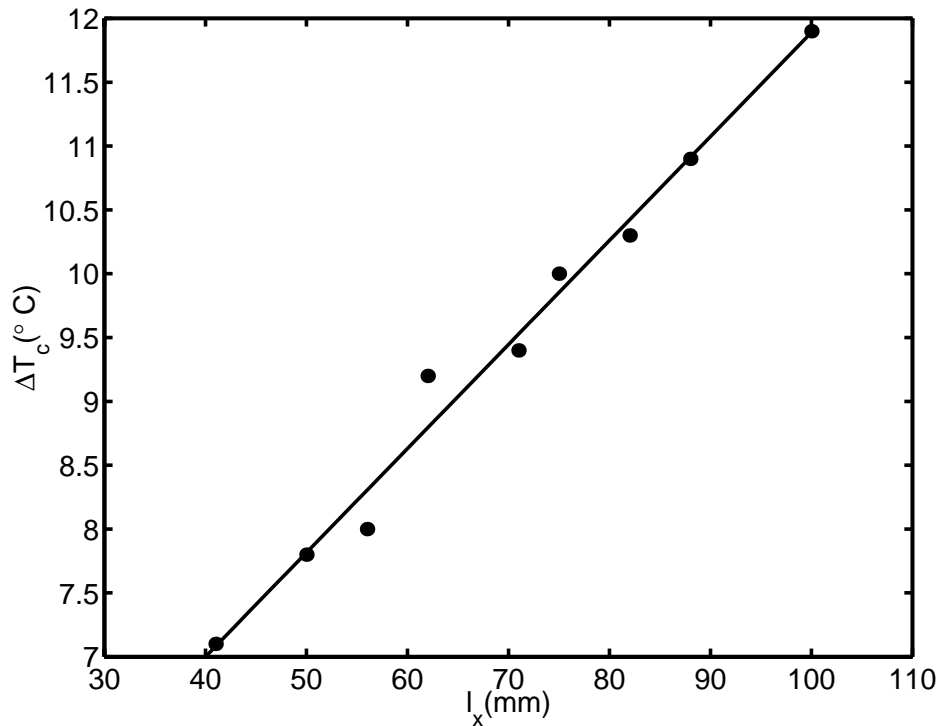


Figura 9.1: Diferencia de temperatura en el umbral al variar  $l_x$  con  $l_y = 100$  mm. Los puntos  $\bullet$  corresponden a los valores encontrados y la recta a un ajuste lineal.

del umbral.

Nos planteamos entonces la posibilidad de encontrar un valor local del gradiente de temperatura a partir del cual se originan las ondas hidrotermales. Por un lado, con este gradiente local la influencia de las paredes sobre el gradiente de temperatura quedaría desligada de la obtención de este parámetro local: el gradiente considerado no sería el global en toda la celda sino en cada punto del fluido.

### 9.1.2 Perfiles de temperatura

Antes de proceder al cálculo de ese parámetro local es necesario encontrar el campo de temperatura del fluido. Para averiguar si el gradiente local depende de  $z$  se han hallado varios perfiles de temperatura en la dirección  $x$  moviendo el termopar en la dirección  $z$ . La variación de la componente  $x$  del gradiente horizontal de temperatura en distintos puntos estuvo en torno al 2%, por lo que se puede considerar que el gradiente horizontal es prácticamente el mismo para distintos valores de  $z$ , excepto, una vez más, cerca de las paredes (es decir, aproximadamente en una región  $10 < x < 90$  mm, figura 9.2 (a)). Desplazando

el termopar en la dirección  $y$  se obtienen varios perfiles de temperatura en este eje, como aparece en la figura 9.2 (b). La variación máxima de la temperatura en esta dirección es de  $0.15^\circ\text{C}$  en una zona limítrofe a las paredes adiabáticas  $l_d \simeq 15$  mm. En la región central la temperatura fluctúa solamente  $0.02^\circ\text{C}$ . Por tanto, se puede decir que el gradiente de temperatura en cada punto  $x_i$  del fluido y en una zona suficientemente alejada de las paredes, solamente tiene componente  $x$ ,  $\beta_L(x_i) = \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{x=x_i}$

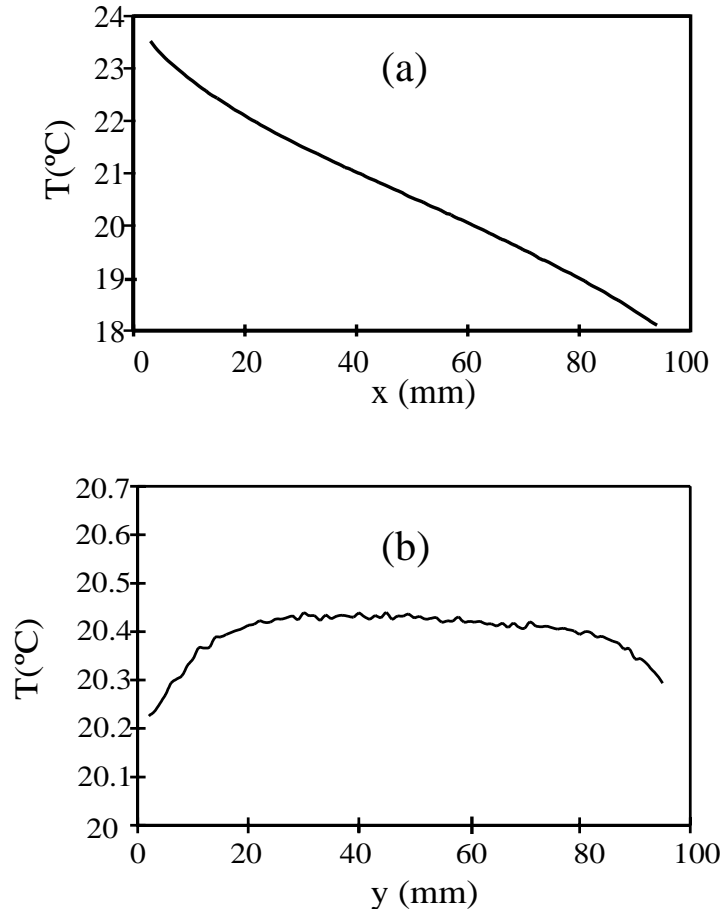


Figura 9.2: Perfiles de temperatura en la dirección  $x$  (a) y en la dirección  $y$  (b), para  $l_x = 100$  mm y  $l_y = 100$  mm.

Se determina entonces el campo de temperatura en el plano  $XY$ , cerca del umbral de las ondas, en cada una de las configuraciones de la cavidad (en el rango de valores de  $l_x$  y  $l_y$ ). En la dirección  $x$  la variación de temperatura es lineal, excepto en una región de unos 10 mm colindantes con cada una de las paredes conductoras  $T_+$  y  $T_-$  (figura 9.2 (a)). En cada una de estas zonas la temperatura varía unos  $3^\circ\text{C}$ . Por tanto el gradiente central  $|\vec{\nabla}T|_{x=l_x/2}$  es menor que el gradiente total en toda la capa de fluido:  $\Delta T/l_x$ . En la figura

mencionada la longitud en la dirección del gradiente de temperatura es  $l_x = 100$  mm y se han registrado más de 90 puntos. Para otros valores de  $l_x$  el número de datos es menor pero se observa que la temperatura es también lineal lejos de los extremos de la celda.

## 9.2 Número de Marangoni local

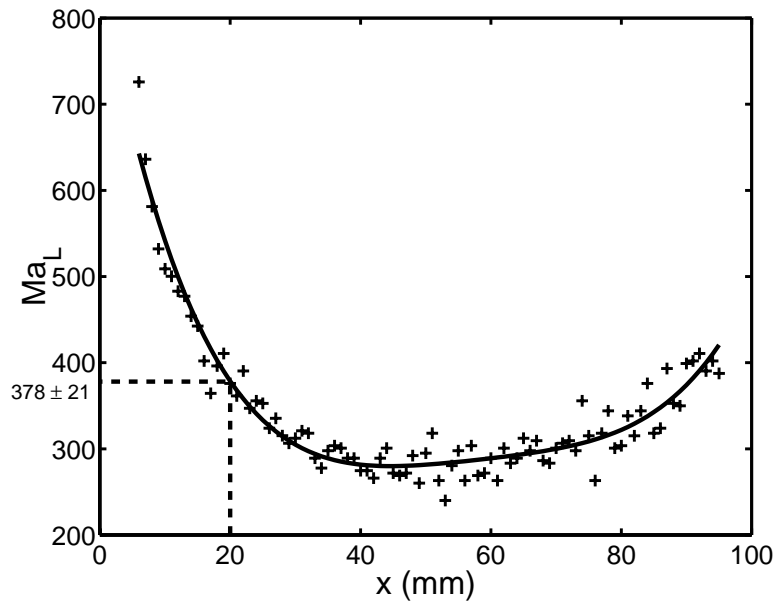


Figura 9.3: Número de Marangoni local calculado a partir del perfil de la figura 9.2 (a). La línea continua representa un ajuste con un polinomio de orden cuatro. El valor  $Ma_L = 378$ , dado por la línea discontinua, corresponde al valor del número de Marangoni local en el umbral de las ondas, y su error  $\pm 21$  es la desviación estándar.

Existe un desacuerdo entre el número de Marangoni calculado en los trabajos de tipo teórico y los encontrados en los experimentos. Habitualmente en los primeros suele considerarse una capa de longitud infinita y un gradiente de temperatura constante, mientras que en los segundos la temperatura varía abruptamente cerca de las paredes del contenedor, esta temperatura no es lineal en toda la celda y el gradiente no es constante. Así resulta que este parámetro de estabilidad en estos casos, hallado a partir de la relación  $Ma = \frac{T_+ - T_-}{l_x}$ , tiene valores diferentes al calculado en los análisis. En algunos experimentos, debido a la corta longitud del contenedor en la dirección del gradiente se encuentran números de Marangoni que divergen apreciablemente del teórico.

Cualitativamente lo que se tiene cuando se alcanza la diferencia de temperatura crítica  $\Delta T_c$  es el nacimiento de las ondas hidrotermales simétricas en

$y$  y se propagan en la dirección  $-x$  en una zona del fluido cercana a la pared caliente. A medida que se incrementa la diferencia de temperatura las ondas van ocupando una región de fluido mayor. Ya que este fenómeno parece estar inicialmente localizado (a posteriori las ondas cubren todo el volumen de fluido) cabe plantearse entonces si hay algún parámetro de tipo local que dicte su aparición. Además, como hemos visto, el gradiente depende de  $x$ ,  $\beta(x)$  y por tanto también el número de Marangoni  $Ma(x)$ .

A partir del perfil de temperatura obtenido (figura 9.2 (a)) se determinan los valores del número de Marangoni de acuerdo con la definición del gradiente:

$$\beta_L = \left| \frac{dT}{dx} \right|$$

Se obtiene así un número de Marangoni *local*  $Ma_L$ , como puede verse en la figura 9.3 para  $l_x = 100$  mm y  $l_y = 100$  mm. Para determinar el valor de gradiente local, hemos obtenido la temperatura en puntos separados 1 mm, con lo que  $\left| \frac{dT}{dx} \right|_{x=x_0} \sim \frac{\Delta T}{\Delta x} = \frac{\Delta T(\Delta x + x_0) - \Delta T(x_0 - \Delta x)}{2\Delta x}$ . En la figura mencionada se observa que cuando  $Ma_L$  es aproximadamente igual a  $378 \pm 21$  surgen las ondas. Según se aumenta  $\Delta T$  la curva se desplaza hacia arriba de tal manera que existen más puntos cuyo número de Marangoni local supera el valor crítico  $Ma_L = 378$  y la región ocupada por las ondas va siendo cada vez mayor. Este valor de  $Ma_L$  es similar al de Smith y Davis [29] ( $Ma \sim 380$ ).

Es por tanto este parámetro local el que define el umbral de aparición de las ondas hidrotermales [64]. De esta manera quedaría explicada la diferencia entre los valores del número de Marangoni obtenidos en otros trabajos experimentales, que sería superior a 378, y los valores teóricos.

## 9.3 Confinamiento en la dirección $y$

### 9.3.1 Efecto del tamaño finito

Para estudiar cómo afecta este confinamiento se mantiene constante la distancia  $l_x = 100$  mm cambiando el valor de  $l_y$  entre 41 mm y 100 mm. Para cada caso se determina el umbral de aparición de las ondas hidrotermales, los valores del número de onda y de las componentes del vector de onda, así como la frecuencia y el ángulo de propagación. Los resultados concernientes a la frecuencia quedaron explicados en el capítulo 8.

En primer lugar se observa que a medida que disminuye la distancia entre las paredes no conductoras,  $l_y$ , el umbral de las ondas aumenta: hay un efecto de amortiguamiento en esta dirección (figura 9.4). Esto fue observado anteriormente solamente en algunas simulaciones [41] y puede ser explicado a partir del incremento que sufre el umbral a causa de tener una celda finita  $l_y$ .

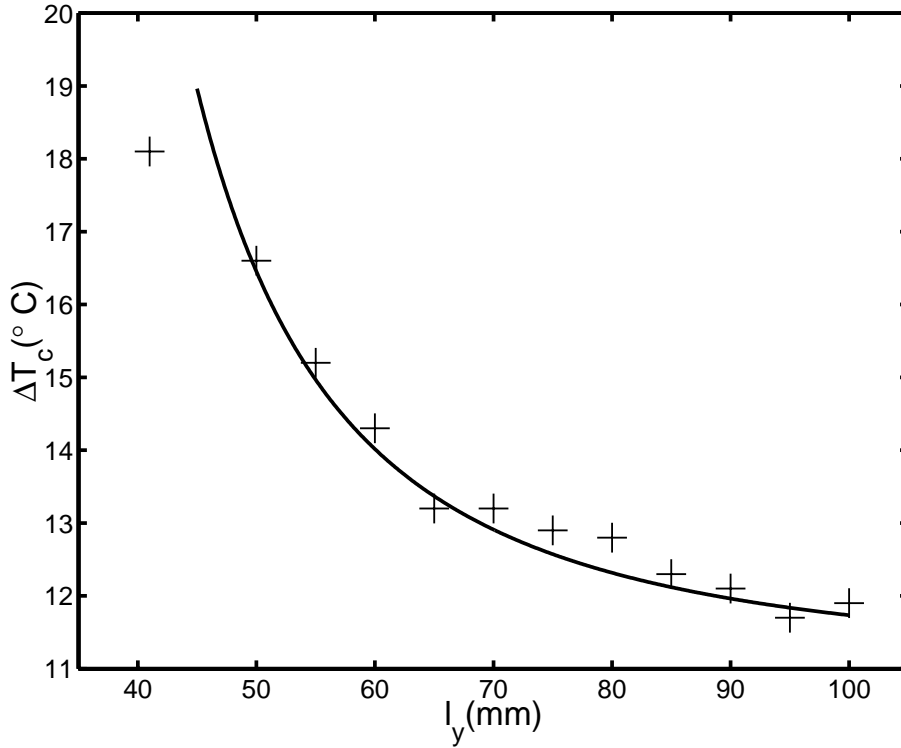


Figura 9.4: Dependencia de la diferencia de temperatura en el umbral ( $\Delta T_c$ ) con la longitud entre las paredes no conductoras ( $l_y$ ), manteniendo  $l_x = 100$  mm y  $h = 1.5$  mm. El símbolo + corresponde a los datos obtenidos y la línea continua a un ajuste en función de  $l_y^{-2}$ .

En la dirección  $y$  el comportamiento de la amplitud es homogéneo y puede ser descrito con una ecuación de amplitud [65, 66]. Supongamos que la bifurcación que sufre la onda  $S(y, t) = A(y, t)e^{i(k_c y - \omega t)} + c.c.$ , que se propaga en esa dirección, es supercrítica [67]. La ecuación de la amplitud compleja, considerando  $v_g = 0$ , se puede escribir como:

$$\partial_t A = \epsilon A - g(1 + ic_1)|A|^2 A + \xi_0^2(1 + ic_2)\partial_{yy} A \quad (9.1)$$

donde el primer término del miembro de la derecha describe la desestabilización lineal, el segundo la saturación no lineal, del orden más bajo para describir una bifurcación supercrítica, y el tercero la difusión espacial ( $\xi_0$  es la longitud de correlación). Los coeficientes  $c_1$  y  $c_2$  dan cuenta de la dispersión. La amplitud crece cuando  $\epsilon$  comienza a tener valores positivos. Es decir, se llega al umbral cuando  $\epsilon = 0$ .

Se busca entonces la solución más simple de esta ecuación. Como  $A$  depende de  $y$  y  $t$ , la solución más simple corresponde a ondas planas, con un número de onda  $q \ll k_c$  (así la evolución de  $A$  es muy lenta frente a la de  $k_c$ ). Además,

se buscan las soluciones estacionarias ( $\partial_t A = 0$ ). Es decir,

$$A(y) = B e^{iqy}$$

con  $B$  real. Sustituyendo en la ecuación A.4,

$$0 = \epsilon - gB^2 - q^2 \xi_0^2$$

de donde,

$$B^2 = \frac{\epsilon}{g} - \frac{\xi_0^2}{g} q^2$$

De aquí se deduce que en el umbral solo puede existir una onda plana de amplitud cero,  $B^2 = 0 - \frac{\xi_0^2}{g} q^2$ , ya que la única solución para  $B$  real es  $B = 0$  cuando  $q = 0$ . Por tanto,  $\epsilon_c = 0$  es el valor del umbral de aparición de ondas planas.

Más lejos del umbral  $\epsilon_c$  se tendrán los siguientes valores posibles de  $q$  que hacen que  $B$  sea real:

$$-\frac{\sqrt{\epsilon}}{\xi_0} < q < \frac{\sqrt{\epsilon}}{\xi_0}$$

Teniendo en cuenta que la celda tiene una longitud  $l_y$  en la dirección  $y$ , la amplitud de la onda cerca de los extremos  $y = 0$  y  $y = l_y$  decae a cero debido al amortiguamiento producido por la disipación. De hecho, las ondas surgen y mueren en algún punto del interior del fluido cercano a estas paredes. Sin embargo, hemos elegido una onda plana con amplitud  $B$  constante en todo  $y$ , por lo que esta amplitud  $A$  no puede caer a cero en esos extremos con un  $q = 0$  ( $\lambda \rightarrow \infty$ ). Por tanto, en el umbral, para  $\epsilon_c = 0$  dichas ondas planas no puede existir.

La primera solución que se obtendrá será aquella en la que  $A = 0$  en los bordes de la celda. El caso más simple es aquel donde  $l_y = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow q = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\pi}{l_y}$ :

$$A(y) = B e^{iqy} \rightarrow A(y) = B e^{(i\pi y/l_y)} + c.c.$$

Por lo tanto la primera onda que se observa será del tipo:

$$S(y, t) = B e^{iqy} e^{i(k_c y - \omega t)}$$

Sustituyendo  $A(y)$  en la ecuación de amplitud A.4, en aproximación lineal, se tiene que para poder verla habrá que alcanzar un valor de  $\epsilon$ :

$$\epsilon \geq \xi_0^2 \pi^2 / l_y^2$$

Es decir, el umbral se habrá desplazado, y ahora será  $\epsilon^*$ :



$$\epsilon^* = \epsilon_c + (\xi_0 \pi / l_y)^2 = (\xi_0 \pi / l_y)^2$$

De esta manera, cuanto mas pequeña es la distancia  $l_y$  mayor es el valor de  $\epsilon^*$ . Mientras que el efecto de celda finita favorece de esta forma la estabilidad del estado básico [50, 68], si se considera una capa de longitud infinita,  $l_y \rightarrow \infty$ , se recupera el resultado anterior  $\epsilon^* = \epsilon_c = 0$ .

En el experimento, el parámetro que señala la transición de un estado a otro es el gradiente de temperatura  $\beta = \frac{\partial T}{\partial x}$ , por lo que aparecerán ondas cuando  $\beta > \beta_\infty$ , donde  $\beta_\infty$  corresponde al caso de una capa de fluido de longitud infinita. Si adimensionalizamos el parámetro que define el umbral queda:

$$\epsilon = \frac{\beta - \beta_\infty}{\beta_\infty}$$

y se tiene:

$$\beta = \beta_\infty(1 + \epsilon) = \beta_\infty(1 + \xi_0^2 \pi^2 / l_y^2)$$

De acuerdo con esto en la figura 9.4 se ha realizado un ajuste  $\Delta T_c(l_y) = \Delta T_\infty(1 + \pi^2 \xi_0^2 / s_y^2)$  donde  $s_y = l_y - 2l_d$  es la distancia en que los parámetros son constantes (sistema homogéneo). la distancia  $l_d \approx 15$  mm, figura 9.2 (b), corresponde a la longitud en la cual el gradiente varía bruscamente. Con este ajuste se halló una longitud de correlación  $\xi_0^2 \sim \lambda$ , con lo que realmente la relación de aspecto cumple  $\Gamma = \frac{l_x}{\xi_0}, \frac{l_y}{\xi_0} \gg 1$ .

### 9.3.2 Variación de las características físicas de las ondas

Se detalla en este apartado la influencia que ejerce la geometría del contenedor sobre los valores del ángulo de propagación y el número de onda. Las ondas que aparecen son simétricas en  $y$  y tienen un rango  $\psi$  de valores entre  $35^\circ$  y  $52^\circ$ . Al aumentar la distancia  $l_y$  el ángulo disminuye (figura 9.5 (a)). Además, para el caso  $l_x \ll l_y$  el ángulo tiene un valor ligeramente superior a  $30^\circ$ , diferente al encontrado en otros experimentos ( $\psi \sim 90^\circ$  en los trabajos de Schwabe *et al* [14] y Daviaud y Vince [23]), probablemente debido al estrechamiento de su celda en la dirección  $x$ . En cambio, nuestro valor está en buen acuerdo con lo observado en el trabajo [22] para los casos  $l_x = 20$  mm,  $l_y = 30$  mm y  $l_y = 250$  mm. Estos autores hallan un ángulo  $\phi = 180^\circ - \psi = 2.6$  rad, que corresponde a  $\psi \simeq 31^\circ$ . Si  $l_x$  es similar a  $l_y$  el ángulo está entre  $30^\circ$  y  $40^\circ$ , lo que está de acuerdo con los valores de Riley y Neitzel [48].

El número de onda muestra una variación desde  $|\vec{k}| = 2.3$  mm<sup>-1</sup> hasta  $|\vec{k}| = 1.5$  mm<sup>-1</sup>, disminuyendo claramente cuando  $l_y$  crece por encima de 65 mm. Alcanza su valor mínimo  $|\vec{k}| = 1.5$  mm<sup>-1</sup> en  $l_y = 95$  mm. Estos valores se ajustan bastante bien a los hallados en otros experimentos y análisis teóricos

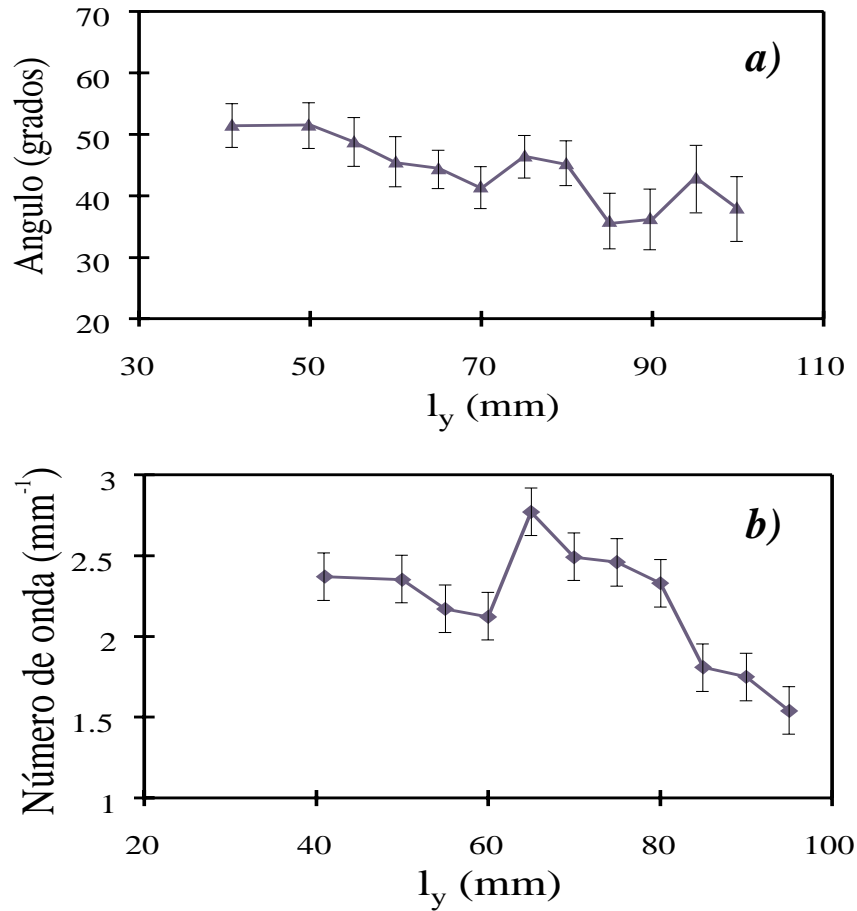


Figura 9.5: Valores del ángulo (a) y del número de onda (b) para  $l_x = 100$  mm,  $h = 1.5$  mm y  $l_y$  variable.

[20, 29, 34]. Si  $l_y$  aumenta, la componente  $\vec{k}_x$  del vector de onda cambia desde  $2 \text{ mm}^{-1}$  hasta  $1.1 \text{ mm}^{-1}$  y la componente  $\vec{k}_y$  decrece desde  $2 \text{ mm}^{-1}$  hasta  $0.94 \text{ mm}^{-1}$ .

A partir de la relación de dispersión  $\omega(k_{x,y})$  obtenida en las direcciones  $x$  e  $y$  se ha calculado la velocidad de grupo del paquete de ondas. La componente  $x$  de esta velocidad,  $v_x^{gr}$ , es similar a la componente de la velocidad de fase en la misma dirección,  $v_x^{ph}$ , mientras que en la dirección  $y$  se tiene que  $v_y^{gr} \sim \frac{2}{3}v_y^{ph}$ . Este resultado pone de manifiesto que el paquete de onda se propaga desde el lado frío al caliente y que las ondas son originadas en una fuente en el centro de la celda.

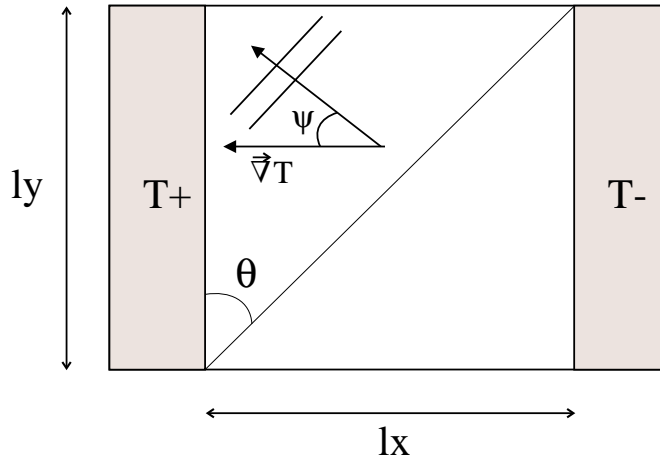


Figura 9.6: Ángulo  $\theta$  que forma la diagonal de la celda, y ángulo  $\psi$  de propagación de las ondas.

#### 9.4 Influencia de la relación de aspecto $l_x/l_y$

Un aspecto que merece atención cuando se tienen en cuenta las dimensiones de la celda experimental consiste en averiguar si la geometría impone algún tipo de dependencia con la dirección de propagación de las ondas. Ya hemos visto que los ángulos de propagación ciertamente varían según sea la relación entre  $l_x$  y  $l_y$  (cfr. apartado 9.3.2), pero hasta ahora no hemos dado alguna ley o relación entre estas longitudes y el ángulo de propagación.

Si se tiene en cuenta el ángulo  $\theta = \arctan(l_x/l_y)$  que forma la diagonal de la celda y el ángulo de propagación de las ondas  $\psi = \arctan(k_y/k_x)$  se encuentra que ambos están ligados por una relación lineal (figura 9.6):

$$\psi = 0.42 \cdot \theta + 0.53$$

con  $\psi$  y  $\theta$  en radianes. Esta relación ha sido obtenida a partir de un ajuste de los datos de la figura 9.7. Extrapolando este resultado para los casos límite, se tiene que cuando  $l_x \gg l_y$  el ángulo  $\theta$  es  $\pi/2$  y  $\psi$  aumenta hasta casi 1.18 rad ( $70^\circ$ ). En cambio, cuando  $l_x \ll l_y$ ,  $\theta$  tiende a 0 y  $\psi$  disminuye hasta 0.53 rad ( $30^\circ$ ).

Este resultado difiere de lo observado en algunos experimentos, como los del grupo de Daviaud *et al.* [23], en los que para una relación  $l_x \ll l_y$  el ángulo tiene un valor cercano a  $90^\circ$ , debido probablemente al gran confinamiento en la dirección  $x$ . En cambio, como se puede ver en la figura 9.7, el ángulo hallado en el experimento de Burguete *et al* [22] está de acuerdo con nuestro resultado.

Según lo visto, las ondas hidrotermales en sistemas confinados tendrían un ángulo de propagación que no depende solamente del número  $Pr$  del fluido, o de las fuerzas consideradas, sino también de la relación de aspecto  $l_x/l_y$  del

contenedor. Esto puede ser la causa de la diferencia entre los ángulos obtenidos en los experimentos con el mismo fluido para alturas similares.

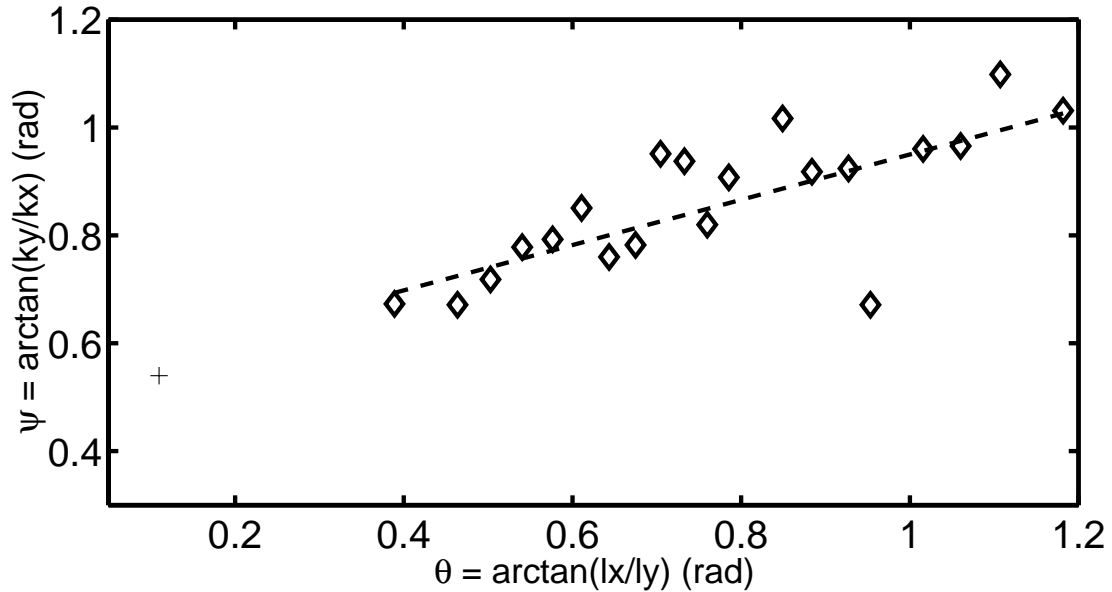


Figura 9.7: Dependencia del ángulo de propagación de las ondas hidrotermales ( $\psi = \arctan(k_y/k_x)$ ) con la diagonal de la cavidad  $\theta = \arctan(l_x/l_y)$ . La recta discontinua es un ajuste lineal de los datos mostrados con el símbolo  $\diamond$ . El punto  $+$  corresponde al experimento de Burguete *et al.* [22].

Otro aspecto interesante relacionado con la geometría consiste en estudiar el diagrama de estabilidad en función de la relación entre  $l_x$  y  $l_y$ . Para una altura  $h = 1.5$  mm se tiene una transición, para una diferencia de temperatura determinada  $\Delta T_c$ , entre el flujo básico y las ondas hidrotermales (figura 9.8). Según este resultado, no solamente la altura de fluido (o la relación entre los números  $Ma$  y  $Ra$ ) y la diferencia de temperatura son parámetros críticos en este problema, sino también las dimensiones de la cavidad. Hasta ahora, en la mayoría de los experimentos se había trabajado con una configuración invariable (en cada caso), con lo que no se había tenido en cuenta la posibilidad de que el confinamiento jugara un papel decisivo a la hora de la selección de la estructura. Como se observa en la figura citada, los resultados de algunos trabajos que utilizan varias longitudes  $l_x$  son compatibles con lo que se ha encontrado en este experimento. El resultado divergente señalado por el símbolo  $\diamond$  en la figura puede ser debido a que en ese caso el fondo de la celda no es buen conductor, mientras que el resto de los puntos  $+$  se encuentran cuando el fondo es conductor y el gradiente constante.

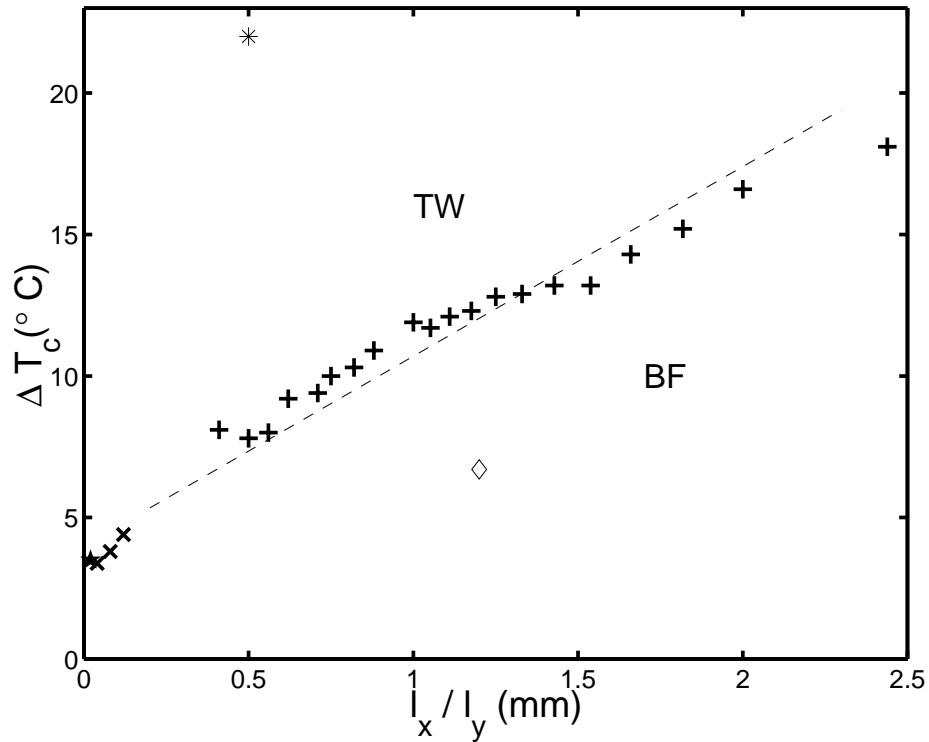


Figura 9.8: Diagrama de estabilidad. Los símbolos + separan la transición entre el flujo básico (BF) y las ondas hidrotermales (TW) dependiendo de la relación  $l_x/l_y$ . La línea discontinua indica solamente la separación entre estas dos regiones. El símbolo  $\diamond$  muestra un resultado encontrado en otra celda [60] y el símbolo \* para un fluido con un número de Prandtl bastante mayor ( $Pr = 17$ ). Los resultados señalados por el símbolo  $\times$  han sido encontrados recientemente por Burguete *et al.* [22]

**Parte IV**  
**Conclusiones**



# Capítulo 10

## Conclusiones

Las conclusiones se pueden agrupar en dos apartados. El primero hace referencia a los estados estables que se alcanzan en el sistema y, más en particular, al comportamiento de las ondas hidrotérmicas y al mecanismo de inestabilidad que las origina. El segundo se centra en el estudio de la influencia que ejerce el confinamiento sobre las ondas hidrotérmicas.

En primer lugar, se ha puesto de manifiesto que el mecanismo de inestabilidad mediante el que aparecen las ondas hidrotérmicas para fluidos con número de Prandtl intermedio está de acuerdo con el descrito por Smith y Davis: las ondas se propagan con un ángulo respecto al gradiente de temperatura y la amplitud de las oscilaciones de la temperatura es máxima cerca del fondo. Las ondas hidrotérmicas son un fenómeno de volumen, incluso si sólo se tiene en cuenta la tensión superficial. Este mecanismo y los valores de la frecuencia, del número de onda y del ángulo de propagación están en buen acuerdo con la gran mayoría de los trabajos teóricos y experimentales.

Las ondas solamente se originan cuando las fuerzas interfaciales dominan en el flujo (el número de Marangoni es mucho más grande que el número de Rayleigh), es decir para alturas de fluido  $h \leq 3$  mm. Para valores  $h \leq 1.55$  mm el flujo básico se desestabiliza en ondas hidrotérmicas.

Cuando  $1.55 < h \leq 3$  mm el flujo básico pierde su estabilidad en forma de rollos estacionarios corrotativos y para una diferencia de temperatura mayor surgen ondas hidrotérmicas superpuestas a estos rollos. Se ha obtenido el comportamiento del número de onda de los rollos al variar  $h$ , así como la relación entre el número de rollos y la altura de fluido. Los umbrales de estos rollos han sido medidos. También han sido determinadas otras estructuras estacionarias cuando  $h \geq 3.5$  mm: rollos longitudinales e inclinados.

Para evaluar la influencia del número de Prandtl en la aparición de las ondas, se ha utilizado otro fluido con  $Pr = 4.4$  intermedio. El número de onda en este caso muestra valores ligeramente menores que para  $Pr = 10$ , que están de acuerdo con las predicciones de los análisis de estabilidad. Sin embargo, no



se han encontrado diferencias significativas.

En el umbral las ondas surgen localizadas en una región cercana a la pared caliente y a las paredes adiabáticas. Cuando aumenta suficientemente la diferencia de temperatura horizontal las ondas invaden toda la capa de fluido. La variación de la amplitud de las oscilaciones de la temperatura ha mostrado que esta amplitud alcanza un máximo cerca de la pared caliente y que decrece al aumentar la distancia a esta pared.

El estudio de la temperatura en la dirección  $x$  lleva a la obtención de un gradiente de temperatura no constante en esta dirección, debido a la caída brusca de la temperatura en la proximidad de las paredes conductoras. Esto ocasiona que el número de Marangoni en el umbral, en toda la celda, esté sobreestimado y deba considerarse un número  $Ma$  local, hallado en la región donde empiezan a observarse las ondas. Este número de Marangoni local tiene un valor en el umbral similar al calculado en los trabajos teóricos. En esta dirección  $x$  no es posible aplicar modelos puesto que los parámetros dependen de  $x$ . Esto explica el crecimiento de la amplitud  $A(x)$ , puesto que  $\epsilon = \frac{Ma(x) - Ma_L}{Ma_L}$ , pero a causa del ruido experimental no se ha podido determinar si la amplitud sigue una ley del tipo  $A = \epsilon^{1/2}$ . Para ello haría falta que la precisión en la medida de  $\Delta T_c$  fuera de un miligrado.

De acuerdo con la naturaleza absoluta de la inestabilidad, ha sido medida la velocidad de grupo resultando ser distinta de cero. Como consecuencia, en el umbral es de esperar que la inestabilidad sea convectiva y las perturbaciones sean arrastradas. Debido al tamaño finito de la celda estas perturbaciones son eliminadas al llegar a las paredes, por lo que solamente serán observables las ondas cuando se supere el umbral absoluto. Estas observaciones parecen acordes con los llamados modos de pared, aunque no se puedan realizar comparaciones cuantitativas.

Las dimensiones de la celda influyen de una manera relevante sobre el umbral y las características físicas de las ondas. Aunque subsisten algunas discrepancias, los ángulos de propagación de las ondas obtenidos en otros trabajos han sido bien explicados al encontrar los valores del ángulo para los casos:  $l_x \simeq l_y$ ,  $l_x \gg l_y$ ,  $l_x \ll l_y$ . El valor de la frecuencia es más grande conforme se reduce la distancia  $l_y$ . El confinamiento en la dirección  $y$  causa un desplazamiento del umbral que ha sido determinado, lo cual muestra la diferencia al comparar los resultados teóricos ( $l_y \rightarrow \infty$ ) y los experimentales ( $l_y$  finito). Esto permite asociar a la dinámica de las ondas en la dirección  $y$  un modelo de dinámica unidimensional de tipo general (ecuación de Ginzburg-Landau compleja).

Se ha observado que la relación de aspecto  $l_x/l_y$  juega un papel fundamental en el diagrama de estabilidad. A partir de un determinado valor de esta relación el flujo básico se desestabiliza apareciendo ondas hidrotermales. Este resultado está de acuerdo con lo obtenido en otros experimentos y puede

ser debido al confinamiento de la pared que ocasiona un desplazamiento del umbral, análogamente a lo que se muestra en la figura 9.4.

Existe una relación lineal entre el ángulo de propagación de las ondas y el ángulo formado por la diagonal del contenedor. Según esta relación el ángulo  $\psi$  de las ondas varía entre  $30^\circ$  y  $70^\circ$ . La explicación de este resultado puede estar basada en el confinamiento relativo que influye en cada uno de los mecanismos que generan las ondas hidrotermales (cuando las ondas viajan en dirección perpendicular o paralela al gradiente de temperatura).

## 10.1 Cuestiones abiertas

Queda pendiente una explicación de la existencia de rollos oblicuos cuando la altura de fluido es grande. Como se ha apuntado, las condiciones térmicas del contenedor podrían quizá modificar la orientación de los ejes de los rollos.

Están por estudiar las causas que provocan la transición entre el flujo básico y ondas hidrotermales cuando la relación  $l_x/l_y$  alcanza un determinado valor. Tampoco se conoce el motivo de la dependencia lineal entre el ángulo de propagación de las ondas ( $\psi$ ) y el que forma la diagonal de la celda ( $\theta$ ).

Por último, sería interesante averiguar cuál es el comportamiento del sistema lejos del umbral, en la transición entre un estado estable y el caos. Con un modelo adecuado cabría la posibilidad de comparar estos dos regímenes.



**Parte V**  
**Apéndice**



# Apéndice A

## Ondas planas en una ecuación de amplitud

En nuestro experimento, tal y como se ha visto, los parámetros que controlan la dinámica son homogéneos en la dirección  $y$  y varían en la dirección  $x$ . Esto hace que las ondas aparezcan en una región determinada en  $x$ , y con una dinámica en  $y$  que puede considerarse unidimensional (se tiene un único número de onda predominante).

En esa dirección existe simetría de traslación ( $y \rightarrow y + \Delta y$ ) y de reflexión ( $y \rightarrow -y$ ), así como la simetría  $t \rightarrow -t$  en el problema. Además, las ondas tienen la simetría  $A \rightarrow Ae^{i\phi}$  [69]. Como se ha demostrado en otros trabajos ,ref. [22, 67], estas ondas aparecen vía una bifurcación supercrítica.

En estas condiciones, un modelo que puede describir la dinámica es la ecuación compleja de Ginzburg-Landau. Esta ecuación expresa la evolución de la amplitud  $A$  del paquete de ondas  $S(y, t) = A(y, t)e^{i(k_0 y - w_0 t)}$ :

$$\tau_0(\partial_t + v_g \partial_y)A = \epsilon A + \xi_0^2(1 + ic_1)\partial_{yy}A - g(1 + ic_2)|A|^2 A \quad (\text{A.1})$$

donde  $\tau_0$  es el tiempo característico de la evolución,  $v_g$  la velocidad de grupo,  $\xi_0$  la longitud de correlación,  $\epsilon$  la distancia al umbral,  $g$  la saturación,  $c_1$  determina la dispersión lineal y  $c_2$  la dispersión no lineal. Esta ecuación compleja supone que la escala de variación espacial y temporal de  $A$  (envolvente de la onda) es lenta con respecto a la oscilación de base.

La amplitud compleja se descompone en módulo y fase:

$$A(y, t) = |A(y, t)|e^{i\phi(y, t)} \quad (\text{A.2})$$

Si introducimos la expresión A.2 en A.1 podemos separar la dinámica del módulo de la amplitud y de la fase. Así, se obtiene:

$$\tau_0(\partial_t |A| + v_g \partial_y |A|) + i|A|\tau_0(\partial_t \phi + v_g \partial_y \phi) =$$

$$= \epsilon|A| + \xi_0^2(1 + ic_1)(\partial_{yy}|A| + 2i\partial_y\phi\partial|A| - |A|(\partial_y\phi)^2 + i|A|\partial_{yy}\phi) - g(1 + ic_2)|A|^3$$

La parte real de esta ecuación es la ecuación de amplitud:

$$\tau_0(\partial_t|A| + v_g\partial_y|A|) = \epsilon|A| + \xi_0^2\partial_{yy}|A| - \xi_0^2|A|(\partial_y\phi)^2 - 2\xi_0^2c_1\partial_y\phi\partial_y|A| - \xi_0^2c_1|A|\partial_{yy}\phi - g|A|^3$$

Y la parte imaginaria es la ecuación de fase:

$$\tau_0(\partial_t\phi + v_g\partial_y\phi) = \xi_0^2c_1 \left[ \frac{\partial_{yy}|A|}{|A|} - (\partial_y\phi)^2 \right] + \xi_0^2 2 \frac{\partial_y\phi\partial_y|A|}{|A|} + \xi_0^2\partial_{yy}\phi - gc_2|A|^2$$

Desarrollando  $\phi(y, t)$  en serie, se obtiene:

$$\phi(y, t) = \phi_0 + (\partial_y\phi)|_{y_0}(y - y_0) + (\partial_t\phi)|_{t_0}(t - t_0) + \dots \simeq \phi_0 + \partial_y\phi|_{y_0}y + \partial_t\phi|_{t_0}t + O(2)$$

Ya que la variación de la amplitud es pequeña y lenta, nos quedamos con los términos de orden uno. Por tanto:

$$A = |A|e^{i\phi} = |A|e^{i(\phi_0 + \partial_y\phi y + \partial_t\phi t)}$$

Luego la función del paquete de ondas  $S(y, t)$  será:

$$\begin{aligned} S(y, t) &= |A|e^{i\phi}e^{i(k_0y - \omega_0t)} = |A|e^{i(\phi_0 + \partial_y\phi y + \partial_t\phi t)}e^{i(k_0y - \omega_0t)} \\ &= |A|e^{i[(k_0 + \partial_y\phi)y - (\omega_0 + \partial_t\phi)t]} \\ &= |A|e^{i[(k_0 + q)y - (\omega_0 + \Omega)t]} \end{aligned}$$

donde  $q = \partial_y\phi$  y  $\Omega = -\partial_t\phi$ , entonces tendremos una onda cuyo número de onda varía espacialmente tal que  $k(y, t) = k_0 + q(y, t)$  y su frecuencia lo hace de la manera  $\omega(y, t) = \omega_0 + \Omega(y, t)$ . Sustituyendo  $q$  y  $\Omega$  en la ecuación de fase y en la ecuación de amplitud se encuentra, respectivamente:

$$\tau_0(-\Omega + v_gq) = \xi_0^2c_1 \left[ \frac{\partial_{yy}|A|}{|A|} - q^2 \right] + \xi_0^2 2 \frac{q\partial_y|A|}{|A|} + \xi_0^2\partial_yq - gc_2|A|^2$$

$$\tau_0(\partial_t|A| + v_g\partial_y|A|) = \epsilon|A| + \xi_0^2\partial_{yy}|A| - \xi_0^2|A|q^2 - 2\xi_0^2c_1q\partial_y|A| - \xi_0^2c_1|A|\partial_yq - g|A|^3$$

Se buscan ahora soluciones estacionarias y uniformes (ondas planas):

$$\partial_t|A| = 0, \quad \partial_y|A| = 0$$

Las dos expresiones anteriores quedan entonces de la forma:

$$\tau_0(-\Omega + v_gq) = -\xi_0^2c_1q^2 - gc_2|A|^2 \quad (\text{A.3})$$

$$|A|[\epsilon - \xi_0^2 q^2 - g|A|^2] = 0 \quad (\text{A.4})$$

ya que  $\partial_y q = 0$ .

La ecuación A.4 se satisface si se cumple alguna de las dos condiciones siguientes:

$$\begin{array}{ll} |A| = 0 & \text{Solución trivial, válida para } \epsilon \leq 0 \\ \epsilon - \xi_0^2 q^2 - g|A|^2 = 0 & \text{Solución bifurcada válida para } \epsilon > 0 \end{array}$$

Por tanto,

$$|A|^2 = \frac{\epsilon}{g} - \frac{\xi_0^2}{g} q^2 \quad (\text{A.5})$$

Sustituyendo el valor de  $|A|$  de esta última ecuación en la ecuación A.3 se obtiene la relación de dispersión:

$$\Omega = v_g q + c_2 \frac{\epsilon}{\tau_0} + \frac{\xi_0^2}{\tau_0} q^2 (c_1 - c_2) \quad (\text{A.6})$$

La frecuencia  $\Omega$  contiene una parte lineal y una parte no lineal, que depende esta última de  $q^2$ .

Veamos ahora el significado de estas dos ecuaciones A.5 y A.6. Para la ecuación A.5 se tiene que cuando  $\epsilon = 0$ :

$$|A| = -\frac{\xi_0^2}{g} q^2$$

que sólo es posible si  $q = 0$  y se obtiene de nuevo la solución trivial. Si  $\epsilon \neq 0$  entonces,

$$\sqrt{\frac{\epsilon - q^2 \xi_0^2}{g}} > 0$$

Es decir,

$$-\frac{\sqrt{\epsilon}}{\xi_0} < q < \frac{\sqrt{\epsilon}}{\xi_0} \quad (\text{A.7})$$

Luego cuando  $\epsilon > 0$  existe un rango de valores posibles del número de onda  $q$  cuya amplitud es distinta de cero.

A partir de la ecuación A.6 podemos representar gráficamente la relación de dispersión (figura A.1).

En el caso particular de que la ecuación de Ginzburg-Landau sea real ( $c_1 = c_2 = 0$ ):



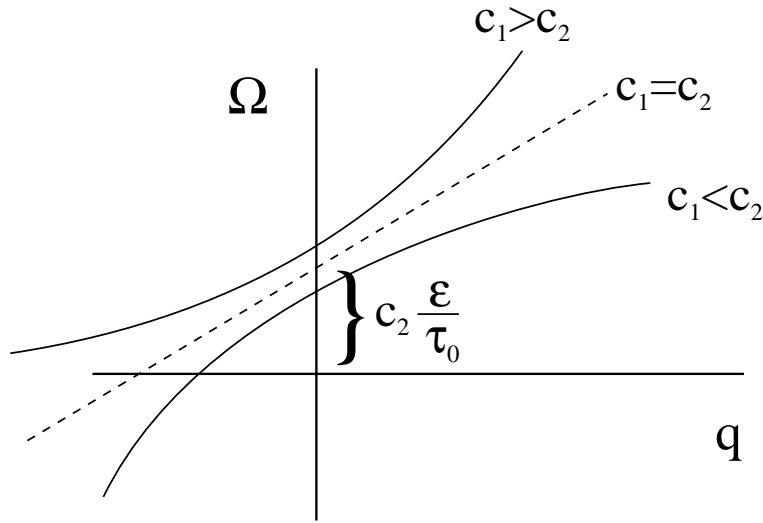


Figura A.1: Frecuencia del paquete de ondas en función del número de onda.

$$\tau_0(\partial_t + v_g \partial_y)A = \epsilon A + \xi_0^2 \partial_{yy} A - g|A|^2 A$$

Si  $c_1 = c_2$  la pendiente de la recta de la gráfica A.1 es directamente la velocidad de grupo:

$$\Omega = v_g q + c_2 \frac{\epsilon}{\tau_0}$$

Para todos los demás casos ( $c_1 \neq c_2$ ) la relación entre  $\Omega$  y  $q$  es no lineal:

$$\left. \frac{\partial \Omega}{\partial q} \right|_{q=0} = \left( v_g + 2q \frac{\xi_0^2}{\tau_0} (c_1 - c_2) \right) \Big|_{q=0} = v_g \equiv \left. \frac{\partial \omega}{\partial k} \right|_{k=k_0}$$

# Bibliografía

- [1] I. Stewart, *El segundo secreto de la vida*, Editorial Crítica, Barcelona, 1999.
- [2] I. Prigogine, *Las leyes del caos*, Editorial Critica, 1997.
- [3] H. Poincaré, *Science et méthode*, Flammarion, París, 1908.
- [4] J. M. García-Ruiz, E. Louis, P. Meakin y L. M. Sander, *Proceedings of a NATO Advanced Workshop on Growth Patterns in Physical Sciences and Biology*, Plenum Press, New York (1991).
- [5] M. van Dyke, *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford (1988).
- [6] Q. Ouyang y H. L. Swinney, *Nature*, **352**, 610 (1991).
- [7] Fotografía obtenida por Sergio Casado en nuestro laboratorio.
- [8] M. C. Cross y P. C. Hohenberg, *Pattern formation outside of equilibrium*, *Rev. Mod. Phys.* **65**(3), part II (1993).
- [9] J. P. Gollub y J. S. Langer, *Pattern formation in nonequilibrium physics*, *Rev. Modern Phys* **71**, S396 (1999).
- [10] P. Manneville, *Dissipative structures and weak turbulence*, Academic Press, 1990.
- [11] G. Müller, *Cryst. Growth* **128**, 26 (1993).
- [12] *Proc. Materials and Fluid Sciences in Microgravity*, Brussels, April 1992 (ESA.SP- 33, August 1992).
- [13] D. Schwabe y A. Scharmann, *Cryst. Growth* **46**, 125 (1979).
- [14] D. Schwabe, U. Möller, J. Schneider y A. Scharmann, *Phys. Fluids A* **4**, 2368 (1992).

- [15] E. Guyon y J-P. Hulin, *Granites et Fumées. Un peu d'ordre dans le mélange.*, Editions Odile Jacob, París, Noviembre de 1997.
- [16] H. Bénard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide*, Rev. Gen. Sci. 11, 1261 (1900).
- [17] H. Bénard, *Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent*, Ann. Chim. Phys. **23**, 62 (1901).
- [18] D. Villers y J. K. Platten, *PhysicoChem. Hydrodynam.* **8**, 173 (1987).
- [19] J. Boussinesq, *Theorie Analytique de la Chaleur*, vol II, Gauthier-Villars, Paris.
- [20] J. F. Mercier y C. Normand, *Phys. Fluids* **8**, 1433 (1996).
- [21] C. Normand, Y. Pomeau y M. G. Velarde, *Convective instability: A physicist's approach*, Rev. Modern Phys **49**, 581 (1977).
- [22] J. Burguete, N. Mukolobwiesz, F. Daviaud, N. Garnier y A. Chiffaudel, *enviado a Phys. Fluids*.
- [23] F. Daviaud y J. M. Vince, *Phys. Rev. E* **48**, 4432 (1993).
- [24] A. K. Sen y S. H. Davis, *J. Fluid Mech.* **121**, 163 (1982).
- [25] E. M. Sparrow, R. J. Goldstein y V. K. Jonsson, *J. Fluid Mech.* **18**, 33 (1964).
- [26] D. Maza, *Tesis Doctoral*, Universidad de Navarra, (1995).
- [27] C. Pérez-García, B. Echebarría y M. Bestehorn, *Phys. Rev. E*, **57**, 475 (1998).
- [28] B. Echebarría, *Tesis Doctoral*, Universidad de Navarra, (1998).
- [29] M. K. Smith y S. H. Davis, *J. Fluid Mech.* **132**, 119 (1983).
- [30] M. K. Smith, *Phys. Fluids* **29**, 3182 (1986).
- [31] M. K. Smith, *J. Fluid Mech.* **194**, 391 (1988).
- [32] W. Schöpf y W. Zimmermann, *Phys. Rev. E* **47**, 1739 (1993).
- [33] P. Laure y B. Roux, *J. Cryst. Growth* **97**, 226 (1989).
- [34] P. M. Parmentier, V. C. Regnier y G. Lebon, *Int. J. Heat Mass Transf.* **36**, 2417 (1993).

- [35] H. C. Kuhlmann, *Thermocapillary convection*, University of Bremen. Contribución en Trieste, 1997.
- [36] B. M. Carpenter y G. M. Homsy, *Phys. Fluids A* **2** (2), 137 (1990).
- [37] P. Gillon y G. M. Homsy, *Phys. Fluids* **8** (11), 2953, Noviembre de 1996.
- [38] M. G. Braunsfurth y G. M. Homsy, *Phys. Fluids* **9** (5), 1277 (1997).
- [39] L. J. Peltier, S. Biringen, *J. Fluid Mech.* **257**, 339-357 (1993).
- [40] J. Priede y G. Gerbeth, *Phys. Fluids* **9** (6), 1621 (1997).
- [41] J. Xu y A. Zebib, *J. Fluid Mech.* **364**, 187 (1998).
- [42] E. Favre, L. Blumenfeld y F. Daviaud, *Phys. Fluids* **9** (5) 1997.
- [43] D. Villers y J. K. Platten, *J. Fluid Mech.* **234**, 487-510 (1992).
- [44] A. B. Ezersky, A. Garcimartín, J. Burguete, H. L. Mancini, y C. Pérez-García, *Phys. Rev. E* **47**, 1126 (1993).
- [45] A. B. Ezersky, A. Garcimartín, H. L. Mancini y C. Pérez-García, *Phys. Rev. E* **48**, 4414 (1993).
- [46] A. Garcimartín, N. Mukolobwicz y F. Daviaud, *Phys. Rev. E* **56**, 1699 (1997).
- [47] C. De Saedeleer, A. Garcimartin, G. Chavepeyer, J. K. Platten y G. Lebon, *Phys. Fluids* **8** (3), 670 (1996).
- [48] R. J. Riley y G. P. Neitzel, *J. Fluid Mech.* **359**, Part 1, 143 (1998).  
R. J. Riley y G. P. Neitzel, *J. Fluid Mech.* **359**, Part 2, 165 (1998).
- [49] Y. Kamotani, J. H. Lee, S. Ostrach y A. Pline, *Phys. Fluids A* **4**, 955 (1992).
- [50] S.M. Tobias, M.R.E. Proctor y E. Knobloch, *Physica D* **113**, 43 (1998).
- [51] J. Priede y G. Gerbeth, *Phys. Rev. E* **56**, 4187, (1997).
- [52] J. Burguete, H. Chaté, F. Daviaud y N. Mukolobwicz, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 3252 (1999).
- [53] N. Mukolobwicz, *These de Doctorat de L'Universite de Paris XI*, (1998).
- [54] D. A. Nield, *J. Fluid. Mech.* **19**, 341 (1964).

- 
- [55] H. Mancini, *Tesis Doctoral*, Universidad de Navarra, (1994).
- [56] M. Born y E. Wolf, *Principles of Optics, 7 ed*, Cambridge University Press, Cambridge (1999).
- [57] W. Merzkirch, *Flow Visualization*, 2nd Edition, Academic Press (1987).
- [58] P. Kolodner y H. Willians, *Nonlinear evolution of spatio-temporal structures in dissipative continuous systems*, pp. 73-91, F. H. Busse y L. Kramer eds, Plenum Press, New York, 1990.
- [59] J. Burguete, *Tesis Doctoral*, Universidad de Navarra, (1995).
- [60] M. A. Pelacho y J. Burguete, *Phys. Rev. E* **59**, 835 (1999).
- [61] A. Garcimartín, *Tesis Doctoral*, Universidad de Navarra, (1994).
- [62] H. Schlichting, *Boundary-Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1987.
- [63] M. van Hecke, C. Storm, W. van Saarloos, *Phys D* **134**, 1-47 (1999).
- [64] M. A. Pelacho, A. Garcimartín y J. Burguete, *Phys. Rev. E* **62**, volumen 1, julio de 2000.
- [65] P. Huerre y P. A. Monkewitz, *Annu. Rev. Fluid Mech.* **22**, 473 (1990).
- [66] W. van Saarloos, Capítulo del libro *Spatio-Temporal Patterns in Nonequilibrium Complex Systems*, a Proceedings Volume in the Santa Fe Institute, edited by P. E. Cladis and P. Palffy-Muhoray, Addison-Wesley, 1995.
- [67] N. Mukolobwicz, A. Chifaudel y F. Daviaud, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4661 (1998).
- [68] R.J. Deissler, *J. of Stat. Phys. 3-4* **40**, 371 (1985).
- [69] J. Lega *These de Doctorat de L'Universite de Nice*, (1989).

## Resumen

En este experimento se estudian las ondas hidrotermales que surgen en una capa de fluido sometida a un calentamiento lateral. Debido a las fuerzas termocapilares, para determinados valores de los parámetros del sistema —diferencia de temperatura horizontal y altura de fluido—, el flujo básico primario se desestabiliza en forma de ondas hidrotermales. Estas ondas de temperatura afectan a todo el volumen de fluido y se propagan hacia la pared caliente formando un ángulo con el gradiente de temperatura. Si se define un número de Marangoni local, basado en un gradiente de temperatura tomado en cada punto del fluido, se encuentra que las ondas aparecen cerca de la pared caliente cuando el valor de este número supera cierto valor crítico. Se analiza también la influencia que ejerce el tamaño finito del contenedor en el umbral y en las principales propiedades de las ondas. En particular, se observa que el confinamiento ocasiona un desplazamiento del umbral y que existe una dependencia del ángulo de propagación de las ondas con las dimensiones del contenedor. La dinámica de las ondas en la dirección perpendicular al gradiente es descrita adecuadamente con un modelo de ecuación de amplitud. Por último, se determina la velocidad de grupo que impide observar la estructura antes de cruzar el umbral absoluto.

## Abstract

Hydrothermal waves that appear in a fluid layer subjected to a lateral heating are studied in this experiment. Due to thermocapillary forces the basic flow destabilizes giving rise to hydrothermal waves for given values of the parameters of the system —horizontal temperature difference and fluid height. These temperature waves affect the whole fluid volume and they travel towards the hot side forming an angle with the temperature gradient. As the value of the temperature gradient depends on the spatial coordinate of the fluid points, a local Marangoni number is defined. Waves appear near the hot side when the value of that number exceeds a particular critical value. The influence of the finite size of the container on the threshold and on the waves properties is also analyzed: the confinement produces a displacement of the threshold. There exists a dependence between the propagating angle of the waves and the container dimensions. The behaviour of the waves in the direction perpendicular to the gradient is studied using an adequate model of amplitude equations. Finally, the value of the group velocity is found. This velocity prevents the development of the travel structure before the absolute threshold is crossed.