Revista de Edificación. RE • Nº 16 • Diciembre 1993

Ecuaciones en derivadas parciales de primer orden

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO

RESUMEN. Obtención de la ecuación en derivadas parciales de primer orden a partir de la ecuación funcional y su resolución por medio de vectores paralelos de la superficie. Caso particular cuando la ecuación de la superficie viene expresada por su ecuación cartesiana.

SUMMARY. *Obtaining the equation in partial derivatives of the first order beginning with the functional equation and its solution by means of parallel surface vectors. The specific case when the surface equation is expressed by its Cartesian case.*

INDICE GENERAL

1. *Ecuación funcional* ***2.*** *Vector normal a la superficie* ***3.*** *Ecuacion diferencial de una familia de superficies. Resolución* ***4.*** *Caso práctico*

1. ECUACION FUNCIONAL

Dada una congruencia de curvas $f(x, y, z) = C_1$, $g(x, y, z) = C_2$ se llama ecuación funcional de la familia de superficies formadas por generatrices de la congruencia, a una función arbitraria, tal que:

$$\psi\,[\,f(x, y, z), g(x, y, z)] = 0 \qquad (1)$$

2. VECTOR NORMAL A LA SUPERFICIE

Diferenciando la ecuación funcional respecto f, g se obtiene:

$$\psi'_f\, d f + \psi'_g\, d g = 0 \qquad (2)$$

Diferenciando la ecuación funcional respecto x, y, z se obtiene:

$$\left[\psi'_f f'_x + \psi'_g g'_x\right] dx + \left[\psi'_f f'_y + \psi'_g g'_y\right] dy +$$

$$+\left[\psi'_f f'_z + \psi'_g g'_z\right] dz = 0 \qquad (3)$$

y utilizando la ecuación (2) se obtiene:

$$\left[f'_x\, dg - g'_x\, df\right] dx + \left[f'_y\, dg - g'_y df\right] dy +$$

$$+\left[f'_z\, dg - g'_z\, df\right] dz = 0 \qquad (4)$$

Como el vector (dx, dy, dz) es un vector de la superficie, el vector

$$\left(f'_x\, dg - g'_x\, df,\ f'_y\, dg - g'_y df,\ f'_z\, dg - g'_z\, df\right)$$

es el vector normal a la superficie.

Diferenciando las funciones f, g se obtiene:

$$df = f'_x\, dx + f'_y\, dy + f'_z\, dz \qquad (5)$$

$$dg = g'_x\, dx + g'_y\, dy + g'_z\, dz \qquad (6)$$

Sustituyendo en el vector normal a la superficie los valores de df, dg se obtiene:

$$\vec{n} = \left(J\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix} dy - J\begin{pmatrix} f & g \\ z & x \end{pmatrix} dz,\ J\begin{pmatrix} f & g \\ y & z \end{pmatrix} dz - \right.$$

$$\left. - J\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix} dx,\ J\begin{pmatrix} f & g \\ z & x \end{pmatrix} dx - J\begin{pmatrix} f & g \\ y & z \end{pmatrix} dy \right) \qquad (7)$$

Por tanto, el vector normal a la superficie se expresa como:

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ dx & dy & dz \\ J\begin{pmatrix} f & g \\ y & z \end{pmatrix} & J\begin{pmatrix} f & g \\ z & x \end{pmatrix} & J\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix} \end{vmatrix} \qquad (8)$$

3. ECUACION DIFERENCIAL DE UNA FAMILIA DE SUPERFICIES. RESOLUCION.

Si derivamos la ecuación funcional (1) con respecto a dos variables x, y elegidas como independientes en la ecuación de la superficie, obtenemos, utilizando la nomenclatura de MONGE $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ por p y $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ por q:

$$\psi'_f \left[f'_x + f'_z\, p\right] + \psi'_g \left[g'_x + g'_z\, p\right] = 0 \qquad (9)$$

$$\psi'_f \left[f'_y + f'_z\, q\right] + \psi'_g \left[g'_y + g'_z\, q\right] = 0 \qquad (10)$$

de la ecuación por eliminación de ψ'_f ψ'_g se desprende la ecuación:

$$J\begin{pmatrix} f & g \\ y & z \end{pmatrix} p + J\begin{pmatrix} f & g \\ z & x \end{pmatrix} q = J\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Esta ecuación es la ecuación en derivadas parciales lineal y de primer orden a la que satisfacen todas las superficies formadas por curvas de la congruencia. La ecuación funcional se llama integral general de dicha ecuación.

Para proceder a la inversa, es decir a partir de la ecuación en derivadas parciales obtener la ecuación funcional, podemos resolver el sistema:

$$\frac{dx}{J\begin{pmatrix} f & g \\ y & z \end{pmatrix}} = \frac{dy}{J\begin{pmatrix} f & g \\ z & x \end{pmatrix}} = \frac{dz}{J\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix}} \qquad (12)$$

ya que, tanto el vector (dx, dy, dz) como el vector

$$\left(J\begin{pmatrix} f & g \\ y & z \end{pmatrix},\ J\begin{pmatrix} f & g \\ z & x \end{pmatrix},\ J\begin{pmatrix} f & g \\ x & y \end{pmatrix} \right)$$

son vectores genéricos de la superficie, por consiguente, podemos plantear la condición de paralelismo.

4. CASO PARTICULAR

El caso en que la ecuación funcional sea $\psi\,[\,z, g\,(x, y\,)] = 0$ es aquel análogo al de la ecuación en cartesiana.

Entonces los vectores de la superficie son:

$$(dx, dy, dz) \text{ y } (-g'_y, f'_x, 0)$$

y el vector normal a la superficie

$$(g'_x, f'_y, -1)$$

La ecuación en derivadas parciales es:

$$-g'_y\, p + g'_x\, q = 0 \qquad (13)$$

El sistema resolvente es:

$$\frac{dx}{-g'_y} = \frac{dy}{-g'_x} = \frac{dz}{0} \qquad (14)$$

$$g'_x\, dx + g'_v\, dy = 0 = dg\left(x, y\right)$$

luego

$$g\,(x, y) = cte$$

de donde se obtiene que:

$$dz = 0$$

luego

$$z = cte.$$

por tanto:

$$\psi\left[\, z, g\left(x, y\right)\right] = 0 \qquad (15)$$