



Universidad de Navarra

Facultad de Ciencias

**Análisis experimental del proceso de descarga de medios  
granulares en silos**

Álvaro Janda Galán

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra

ISBN 84-8081-090-4





Universidad de Navarra  
Facultad de Ciencias

## Análisis experimental del proceso de descarga de medios granulares en silos

Memoria presentada por **D. Álvaro Janda Galán** para aspirar al grado de Doctor por la Universidad de Navarra

El presente trabajo ha sido realizado bajo mi dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada y autorizo que sea presentado ante el Tribunal que lo ha de juzgar.

Pamplona, 21 de octubre de 2010

Dr. Diego Martín Maza Ozcoidi



Declaración:

Por la presente yo, **D. Álvaro Janda Galán**, declaro que esta tesis es fruto de mi propio trabajo y que en mi conocimiento, no contiene ni material previamente publicado o escrito por otra persona, ni material que sustancialmente haya formado parte de los requerimientos para obtener cualquier otro título en cualquier centro de educación superior, excepto en los lugares del texto en los que se ha hecho referencia explícita a la fuente de la información.

De igual manera, autorizo al Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, la distribución de esta tesis y, si procede, de la "fe de erratas" correspondiente por cualquier medio, sin perjuicio de los derechos de propiedad intelectual que me corresponden.

Pamplona, 21 de octubre de 2010

D. Álvaro Janda Galán

© Álvaro Janda Galán

Derechos de edición, divulgación y publicación:

© Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra



A mis padres,





# Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecerle a mi director de tesis, Diego Maza, todo el apoyo y la paciencia que ha demostrado durante la realización de este trabajo. Así mismo, tengo que darle las gracias por aquel día de hace ya unos cuantos años, que me propuso ser alumno interno en el Departamento de Física y Matemática Aplicada. Ese primer contacto con el laboratorio terminó por despertar mi interés por la física. También, tengo mucho que agradecer a Angel Garcimartín e Iker Zuriguel, los cuales siempre han estado dispuestos a ayudarme y el trabajar con ellos ha sido un placer. A mis antiguos compañeros del grupo de medios granulares, Martín Pastor, Roberto Arévalo y Cristian Mancok, así como a los actuales, Manuel Acevedo, José Damas y Celia Lozano, les agradezco todos los buenos ratos y su ayuda en el día a día.

A mis compañeros de doctorado, tanto los que ya han concluido como los que aún continúan: Montserrat Miranda, Alberto de la Torre, Maximiliano Giuliani, Diana Gonzalez, Moorthi Pichumani, Tomas Gonzalez, Iván Martínez, Joaquín Goñi, Gerard Vidal, María Yoldi, José Guadarrama, Miguel López, Ana Šimic. Debo agradecer también a todos miembros del departamento: Sergio Ardanza-Trevijano, Jean Bragard, Javier Burguete, María Jesús Chasco, Jorge Elorza, Wenceslao González, Héctor Mancini, Carmen Palacios, Antonio Peláez, Pilar Ayúcar y Pedro Elizalde. Entre todos han hecho del departamento un lugar agradable de trabajo.

También deseo agradecer al grupo de Physique et Mécanique des Milieux Hétérogènes de la ESPCI de París por su grata acogida durante mis estancias en su laboratorio. Especialmente me gustaría dar las gracias a Eric Clément, Evelyne Kolb, Rim Haric y Pierre Cixous que hicieron que el tiempo que estuve allí fuese muy agradable.

A la Fundación Ramón Areces le agradezco las becas que me han concedido durante los años 2006, 2007, 2008 y 2009. A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra también debo agradecerle la beca que he disfrutado durante este 2010.

A mis amigos de Santo Domingo y Pamplona, que aunque directamente no hayan influido en este trabajo, sí que lo han hecho valiosamente de manera indirecta. Una mención especial merecen mis padres y mi hermana que siempre me han apoyado y se han sentido orgullosos de mí. Por último me gustaría agradecerle a Noelia toda la paciencia que ha tenido conmigo, en especial este último año, así como todo el apoyo que me ha dado y ha hecho que este duro camino fuese más llevadero.



Who could ever calculate the path of a molecule?  
How do we know that the creations of worlds are not  
determined by falling grains of sand?

Victor Hugo, *Les Misérables*



# Índice general

|   |             |
|---|-------------|
| <b>Prólogo</b>  | <b>xiii</b> |
| <b>1 Introducción</b>                                     | <b>1</b>    |
| 1.1 Características de un medio granular . . . . .        | 1           |
| 1.2 Descarga de Silos . . . . .                           | 5           |
| 1.3 Formación de atascos . . . . .                        | 7           |
| 1.4 Caudal de descarga . . . . .                          | 12          |
| 1.5 Objetivos del trabajo . . . . .                       | 18          |
| <b>2 Sistema experimental</b>                             | <b>19</b>   |
| 2.1 Montaje experimental . . . . .                        | 19          |
| 2.2 Material granular . . . . .                           | 22          |
| 2.3 Instrumentación . . . . .                             | 23          |
| 2.4 Protocolo de medida . . . . .                         | 25          |
| 2.5 Procesamiento de las imágenes . . . . .               | 27          |
| <b>3 Formación de atascos</b>                             | <b>37</b>   |
| 3.1 Tamaño de avalancha . . . . .                         | 37          |
| 3.2 Existencia de un tamaño crítico de orificio . . . . . | 42          |
| 3.3 Probabilidad de atasco . . . . .                      | 45          |
| <b>4 Flujo</b>  | <b>49</b>   |
| 4.1 Velocidad de las partículas en la salida . . . . .    | 49          |
| 4.2 Fracción de ocupación . . . . .                       | 58          |
| 4.3 Caudal en la descarga . . . . .                       | 62          |
| 4.4 Flujo resuelto en el tiempo . . . . .                 | 64          |
| <b>5 Conclusiones y perspectivas</b>                      | <b>75</b>   |
| <b>6 Conclusions and outlook</b>                          | <b>79</b>   |
| <b>Bibliografía</b>                                       | <b>83</b>   |
| <b>Summary</b>  | <b>89</b>   |
| <b>Resumen</b>  | <b>90</b>   |



# Prólogo

Un medio granular consiste en un conjunto de partículas macroscópicas que interaccionan entre sí mediante fuerzas de contacto. El tamaño de los granos que constituyen este tipo de materiales abarca desde milímetros hasta metros. Así, algunos ejemplos incluyen granos de arroz, arena, rocas e incluso el material que forma los anillos de Saturno. La característica más relevante de estos sistemas es su comportamiento altamente disipativo, aunque el coeficiente de restitución del material que están constituidos sea elevado. Esto es debido a la elevada tasa de colisiones que se producen entre las partículas, especialmente en el caso de medios granulares densos. Esta característica provoca que estos sistemas alcancen rápidamente un estado de equilibrio mecánico en ausencia de una fuente de energía externa.

Dependiendo de las condiciones experimentales, la materia granular se puede comportar de manera similar a un sólido, un líquido o un gas. Así, la arena de la playa se asemeja a un sólido al soportar nuestro peso cuando caminamos sobre ella. Sin embargo, también es capaz de fluir a través de una tubería como si de un líquido se tratase, o asemejarse a un gas de partículas al agitarla vigorosamente. Es importante destacar que a pesar de presentar tales similitudes, su dinámica en ninguno de los casos se puede describir de manera rigurosa mediante las leyes conocidas para esos tres estados de la materia.

Los medios finamente divididos tienen una gran presencia en nuestra vida cotidiana. Así, muchas veces experimentamos algunos de los fenómenos más característicos de estos materiales. Por ejemplo, la segregación (separación de las partículas de idéntica densidad según su tamaño) es la causa de que en una bolsa de pipas las más pequeñas siempre se encuentren por debajo. También, sufrimos las consecuencias de la formación de atascos al ir en coche a trabajar, y estos mismos atascos son los que hacen necesario agitar el salero para salar nuestra comida. Además, los medios granulares son empleados en numerosos procesos de la industria alimenticia, farmacéutica, de la construcción, etcétera. Un dato que da fe de su importancia en la industria es que el 10% de la energía producida en el planeta se consume en el procesamiento de materiales particulados.

Desde el punto de vista científico, el comportamiento de los medios granulares no ha pasado desapercibido. Probablemente, la primera observación fue realizada por Lucrecio hacia el año 55 A.C., asemejando el flujo de semillas de adormidera con un fluido. Posteriormente, en el Renacimiento Leonardo de Vinci realizó experimentos con pilas de arena para estudiar la fricción entre cuerpos. Sin embargo, no fue hasta el siglo XVII que Charles Coulomb [1] estableció las leyes de la fricción seca entre sólidos, las cuales posteriormente se extenderían a los medios granulares. En 1780, Ernst Chaldni se percató de varias diferencias interesantes entre el comportamiento de granos ligeros y pesados al ser vibrados sobre la superficie de un violín. De este estudio surgieron lo que hoy día se conocen como las “figuras complementarias de Chaldni”. Más tarde sus expe-



rimentos fueron repetidos y confirmados por Christian Öersted empleando polvo de lycopodium. También Michael Faraday [2] se interesó en la formación de pilas de arena inducidas por vibración.

Ya en siglo XIX, William Rankine [3], basándose en la ideas de Coulomb, examinó las implicaciones teóricas de la fricción en los materiales granulares. Así, definió los llamados “estados activo y pasivo” de Rankine. En 1884, I. Roberts [4] observó que en una estructura cuyas paredes son paralelas, la presión ejercida en la base por el grano almacenado deja de aumentar cuando la estructura se llena a una altura superior a dos veces su diámetro. Unos pocos años más tarde, H. Janssen propuso un modelo basado en un coeficiente que describe el redireccionamiento de las fuerzas hacia la pared [5]. A finales del siglo XIX, Osborne Reynolds [6] realizó una contribución fundamental a la teoría de los medios granulares enunciando el llamado *Principio de dilatancia*. Durante el siglo XX, el número de científicos e ingenieros que se han interesado por esta disciplina ha sido notable. Entre otros es necesario destacar a R. A. Bagnold con su estudio sobre la formación de dunas en el desierto [7], así como a R. L. Brown y J. C. Richards [8] con sus trabajos sobre la descarga de silos.

En las últimas décadas, el número de investigaciones realizadas sobre el comportamiento de los medios granulares ha crecido de manera exponencial. Desde el punto de vista científico, este hecho se debe a la posibilidad de estudiar un sistema complejo que se encuentra fuertemente fuera del equilibrio. Además, el número de herramientas que se pueden utilizar en su análisis es muy variado, abarcando campos como la física estadística y la mecánica de fluidos y sólidos, entre otros.

Las propiedades del flujo de los medios granulares son las responsables de numerosos problemas que aparecen en la industria. Uno de los ejemplos más típicos es la aparición de atascos durante la descarga de silos por gravedad. Un silo consiste en un contenedor donde se almacena el material que posteriormente se descarga a través de un orificio situado en la base. Eventualmente, al fluir los granos a través de la abertura pueden formarse estructuras estables, denominadas arcos, que taponan la salida. Este fenómeno provoca que en numerosas ocasiones los procesos industriales se ralenticen e incluso se detengan.

En el presente trabajo se ha estudiado precisamente la descarga por gravedad de un medio granular desde un silo. El estudio se ha centrado concretamente en la formación de atascos y su influencia sobre el caudal de material a través de la salida. Para ello, se ha construido un silo bidimensional a escala de paredes transparentes con el que se miden el tamaño y la duración de la avalanchas (por avalancha se entiende el proceso de descarga de material entre dos atascos consecutivos). A partir de los resultados obtenidos se pretende estudiar la probabilidad de atasco en función del tamaño de la abertura. Así mismo, se intentará dar una respuesta a la hipotética existencia de un tamaño crítico del orificio de salida, por encima del cual el flujo nunca no se detiene.

Se ha medido el caudal de material a través del orificio, así como la velocidad de las partículas y la fracción de compactación del medio durante la descarga. El objetivo es encontrar las escalas características de este proceso y determinar si la dinámica del flujo presenta un comportamiento universal independientemente del tamaño del orificio.

La estructura de esta memoria es la siguiente: en primer lugar se describen algunas de las propiedades y conceptos de los medios granulares necesarios para el entendimiento de los resultados obtenidos. En el mismo capítulo se resumen los trabajos más relevantes sobre el flujo y la formación de atascos en la descarga de silos. En el segundo capítulo se hace una descripción

detallada del sistema experimental, el protocolo y las técnicas empleadas en las diferentes mediciones realizadas. El capítulo tercero se centra en la probabilidad de atasco y la posible existencia de un tamaño crítico del orificio. En el cuarto capítulo se exponen los resultados obtenidos del estudio microscópico de la descarga del material y su relación con el caudal. Asimismo, también se muestra un análisis de la dinámica del flujo. Finalmente, se resumen las conclusiones y los posibles futuros estudios relacionados con este trabajo.



# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se describirán algunas de las características más importantes de los medios granulares así como conceptos que se emplearán a lo largo de esta memoria. Además, se presentarán algunos de los trabajos más relevantes que existen en la literatura sobre el flujo y la formación de atascos en la descarga de silos. Finalmente se expondrán los objetivos desarrollados a lo largo de la realización de esta tesis.

### 1.1 Características de un medio granular

Un medio granular se puede definir como un conjunto de partículas de características similares que interactúan mediante fuerzas de contacto disipativas. El tamaño de los granos que constituyen el material puede abarcar varios órdenes de magnitud: desde milímetros (granos de arroz, arena) hasta metros (rocas, anillos de Saturno). En esta clasificación se excluyen a aquellos sistemas formados por partículas de tamaño menor a  $100 \mu\text{m}$ , a las cuales comúnmente se denominan como “polvos”. En estas escalas, las fuerzas de tipo cohesivo (debidas, por ejemplo, a la humedad o a la carga electrostática) comienzan a ser de magnitud comparable al peso de los granos causando la aparición de propiedades específicas. Estas fuerzas de tipo cohesivo también están presentes en el caso de los medios granulares húmedos donde las partículas están rodeadas de un fluido.

En el caso de un medio granular seco, donde el fluido intersticial es el aire, las únicas fuerzas relevantes son las debidas al contacto de las partículas y la fricción sólida. Justamente, esta es la clase de medios finamente divididos que se tratan en este trabajo.

Dependiendo de las condiciones experimentales, este tipo de materiales puede comportarse de manera parecida a un sólido, un líquido o un gas. Por ejemplo, una pila de granos con una pendiente menor que su ángulo de reposo se comporta como un sólido: el material permanece en reposo incluso aunque las fuerzas gravitacionales creen tensiones macroscópicas en su superficie. Si dicha pila es inclinada varios grados por encima de su ángulo de reposo, los granos comienzan a fluir. Sin embargo, el flujo es claramente distinto al de un fluido puesto que solo existe en una capa delgada junto a la superficie de la pila mientras que el resto del material permanece en reposo. Así mismo, al agitar vigorosamente un medio granular, éste puede asemejarse a un gas. Sin embargo, a diferencia de los gases, la escala de energía térmica  $k_B T$  (donde  $k_B$  corresponde a la constante de Boltzman y  $T$  a la temperatura del sistema), es insignificante frente a la energía necesaria para

mantener a los granos en agitación. En la superficie terrestre, la escala de energía relevante en un medio granular es la energía potencial  $mgd$  asociada a un grano de masa  $m$  y diámetro  $d$  en presencia de la gravedad  $g$ . Típicamente para la arena, esta energía es al menos  $10^{12}$  veces  $k_B T$  (a la temperatura de la habitación). Es por ello que los medios finamente divididos se denominan como sistemas “atérmicos”.

El hecho de que la temperatura sea irrelevante tiene como consecuencia que los argumentos empleados en la termodinámica clásica no sean aplicables a este tipo de sistemas. Por ejemplo, muchos estudios han mostrado que la aplicación de vibración o rotación a un medio granular induce la separación de partículas de diferente tamaño en distintas regiones del contenedor [9–13]. Puesto que no existen fuerzas de atracción entre los granos, esta separación podría parecer que viola el principio de que la entropía debe crecer, el cual normalmente favorece el mezclado. Sin embargo, en un material granular el hecho de que  $k_B T \approx 0$  implica que las consideraciones entrópicas puedan ser fácilmente despreciables frente a los efectos dinámicos.

Un papel importante de la temperatura es que permite a un sistema explorar el espacio de las fases. En un medio granular, el hecho de que  $k_B T \approx 0$  impide dicha exploración. A menos que se apliquen perturbaciones externas, cada configuración metaestable del material perdurará indefinidamente. Así, puesto que cada configuración tiene propiedades únicas, la reproducibilidad del comportamiento de los materiales granulares, incluso a escalas grandes y desde luego cerca del límite estático donde la fricción es importante, es difícil de conseguir. Otro papel importante de la temperatura en gases o líquidos corrientes es proporcionar una escala microscópica de la velocidad. De nuevo, en los medios finamente divididos este papel está completamente suprimido y la única escala de velocidad es la impuesta por el flujo macroscópico del sistema. Es posible definir una “temperatura granular” efectiva en términos de las fluctuaciones de la velocidad alrededor de la velocidad media del flujo. Sin embargo, esta aproximación no siempre recupera los aspectos termodinámicos o hidrodinámicos debido a la naturaleza inelástica de las colisiones entre los granos.

Uno de los fenómenos más peculiares de los medios granulares es la formación de atascos, *jammimg* en inglés. En nuestra vida cotidiana experimentamos que las cosas se atascan: embotellamientos de tráfico, la sal obstruyendo los orificios de un salero, la gente intentando salir de un concierto por puertas que no son capaces de absorber un gran flujo de personas, etcétera. A otras escalas, existen también sistemas que experimentan atascos, como emulsiones, suspensiones coloidales, estructuras vítreas, formación de espumas, entre otros. Todos estos sistemas independientemente de su escala presentan similitudes dinámicas de manera que se ha propuesto que aquellos materiales que se atascan pertenecen a una categoría denominada “materia frágil” [14, 15]. La principal característica es que son capaces de adoptar una configuración mecánicamente estable que resiste a esfuerzos externos. El estado atascado se ha llegado a considerar como una nueva fase de la materia, de manera que se ha propuesto interpretar el proceso de atasco como una transición de fase termodinámica [16]. Incluso se ha descrito un hipotético diagrama de fases en función de las variables “temperatura granular”, inverso de la densidad y esfuerzo externo (ver figura 1.1). En este diagrama se muestra como las altas “temperaturas” o esfuerzos dificultan el atasco, mientras que una elevada densidad lo facilita.

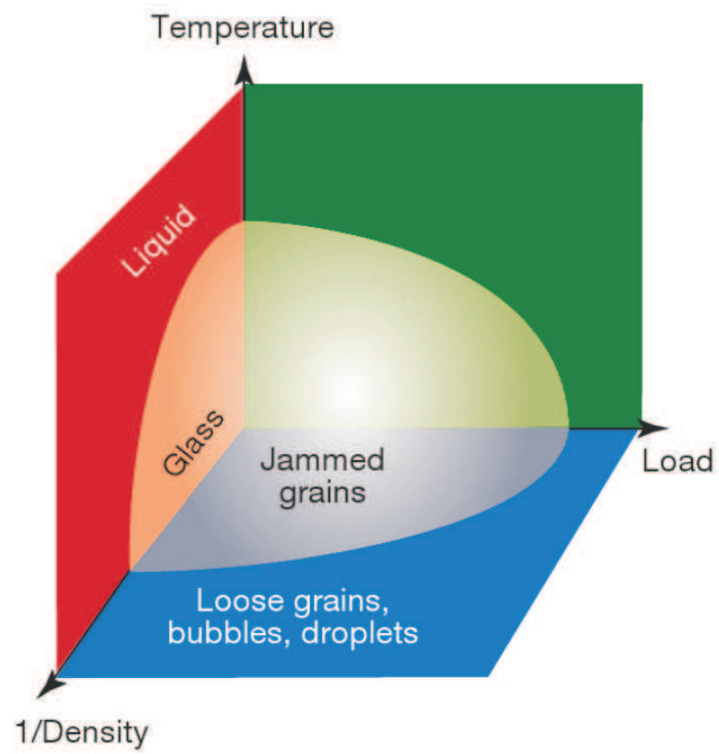


Figura 1.1: Hipotético diagrama de fases propuesto por A. Liu y S. Nagel para el estado atascado. Figura obtenida de [16].

## Fracción de compactación

Al verter un medio granular en el interior de un recipiente, las partículas se van acomodando hasta llegar a una configuración estática en la que quedan huecos entre ellas. Este hecho hace que el volumen ocupado por el material sea superior a la suma de los volúmenes individuales de cada grano. El parámetro que relaciona estos dos volúmenes se denomina fracción de compactación, “ $\phi$ ”. En el caso de un empaquetamiento bidimensional, esta magnitud se define como el cociente de la suma del área de todos los granos ( $A_p$ ) y el área total ocupada por el material considerando también los huecos ( $A_b$ ).

$$\phi = \frac{A_p}{A_b} \quad (1.1)$$

Por definición, este parámetro solo puede tomar valores menores o iguales a uno, de manera que cuanto más cerca se encuentre de la unidad, más empaquetados se encuentran los granos y por tanto menor cantidad y tamaño de los huecos. En dos dimensiones, al empaquetamiento más denso posible para discos es  $\phi = 0,902$ , que corresponde con un red triangular. Esta fracción de compactación se consigue colocando los discos ordenadamente uno a uno. Sin embargo, al situar de manera aleatoria las partículas, el mayor valor de empaquetamiento posible es  $\phi = 0,82$ , que se denomina como *random close packing* [17].

Uno de los fenómenos más sorprendentes de los medios granulares tiene origen en el cambio de la fracción de compactación, y fue formulado por O. Reynolds [6] en el denominado *Principio de dilatación*: “un medio granular altamente compactado en el interior de un envoltorio flexible incrementa su volumen cuando el envoltorio es deformado. Si el envoltorio es inextensible pero deformable, la configuración del medio granular no se puede alterar a no ser que se rompa el envoltorio o se fracture el medio granular.” En otras palabras este principio quiere decir que al ejercer una presión sobre el medio, éste puede dilatarse disminuyendo así su fracción de compactación.

Un ejemplo de este fenómeno se puede observar al pasear por la orilla del mar. Cuando caminamos sobre la arena mojada, la zona de alrededor de nuestras pisadas sorprendentemente queda seca. Esto es debido a la presión ejercida por nuestros pies, la cual hace disminuir la fracción de compactación de la arena, y por lo tanto, aumenta el tamaño de los huecos entre las partículas. Estos huecos son ocupados por el agua de la superficie que se seca. Al cesar la presión, los granos se relajan, aumenta la fracción de compactación y el agua vuelve a mojar la superficie.

## Propagación de fuerzas en un medio granular

En un medio granular estático las partículas se encuentran “apoyadas” en sus vecinas. Por tanto, existe una red de contactos entre los granos, que por lo general es altamente inhomogénea y depende fuertemente de la historia del material [18]. Esta configuración estructural hace que al aplicar una fuerza externa en el medio, ésta se transmita a través de la red de contactos de manera irregular. Las direcciones a través de donde se propaga la carga aplicada, se denominan “cadenas de fuerza”. Estos caminos se pueden observar experimentalmente empleando partículas de material birrefringente. En la figura 1.2 se muestra una fotografía de un medio granular formado por partículas de este material, donde las zonas brillantes corresponden a las cadenas de fuerza.

Esta distribución no homogénea de la carga es la causa de que la presión en un medio granular no sea hidrostática. La primera observación de este fenómeno la realizó I. Roberts [4] al medir

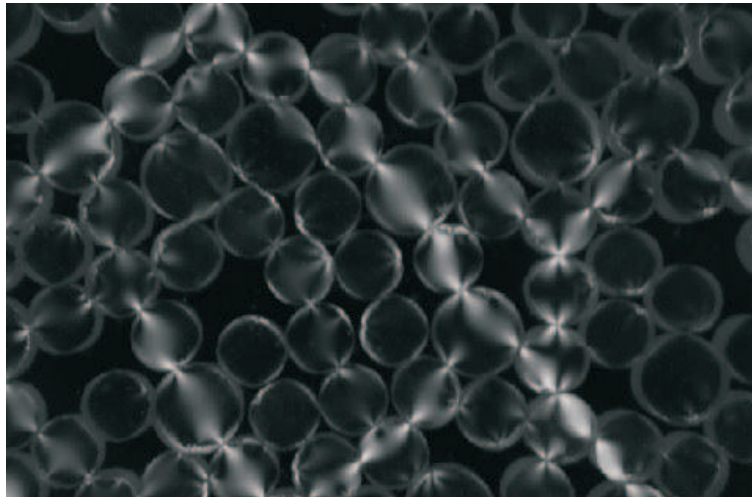


Figura 1.2: En la fotografía se muestra como una fuerza no se propaga homogéneamente en un medio granular. Debido a la birrefringencia inducida por la presión se observan zonas brillantes que corresponden a las partículas que sufren un mayor esfuerzo, es decir, “cadenas de fuerza”. Imagen obtenida por I. Zuriguel.

la presión en la base de un silo ejercida por un conjunto de granos. Al comenzar a llenar el contenedor, la presión aumentaba linealmente con la altura del material como ocurre con un fluido. Sin embargo, una vez la capa de granos alcanzaba cierta altura, el peso que sentía la base del recipiente permanecía constante. Posteriormente, H. Janssen [5] analizó teóricamente este fenómeno que hoy día se conoce como el “efecto Janssen”. La justificación propuesta se basa en que parte del peso de los granos se trasmite a las paredes a través de las cadenas de fuerza, de manera que éstas sujetan el material por fricción.

## 1.2 Descarga de Silos

Generalmente en la industria y la agricultura, los medios granulares son almacenados en lo que se conoce como silos o tolvas. Estos consisten en contenedores donde las partículas se cargan por la parte superior y se descargan a través de un orificio que se encuentra en la base. Su tamaño puede variar desde saleros que contienen unos pocos granos, hasta grandes instalaciones que almacenan varias toneladas de material. Aunque comúnmente los términos tolva y silo se utilizan indistintamente, existe una diferencia importante entre ellos dependiendo de la forma de la base. Así, en el caso de un silo, la base es plana y por tanto, las paredes del mismo mantienen una separación constante a lo largo de la vertical. Sin embargo, en una tolva las paredes contiguas al agujero presentan un cierto ángulo respecto a la horizontal.

Un aspecto práctico de gran importancia en la descarga de un silo es el tipo de flujo del material en el interior del contenedor. Su relevancia es patente al observar los numerosos estudios realizados por ingenieros [20]. Esencialmente se puede distinguir dos tipos de flujo: másico e interno o *funnel flow*. En la figura 1.5 se muestra un esquema de estos patrones.

El flujo másico se produce cuando todo material en el interior del silo se mueve de manera conjunta verticalmente. Este tipo de flujo tiene lugar cuando la fricción de las partículas con



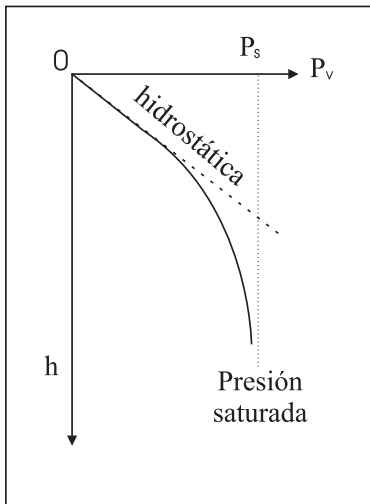


Figura 1.3: Presión vertical en función de la altura de la capa granular. La línea discontinua vertical indica la presión límite,  $P_s$ , mientras que la línea de trazos representa la presión que ejercería un fluido. Figura obtenida de [19].

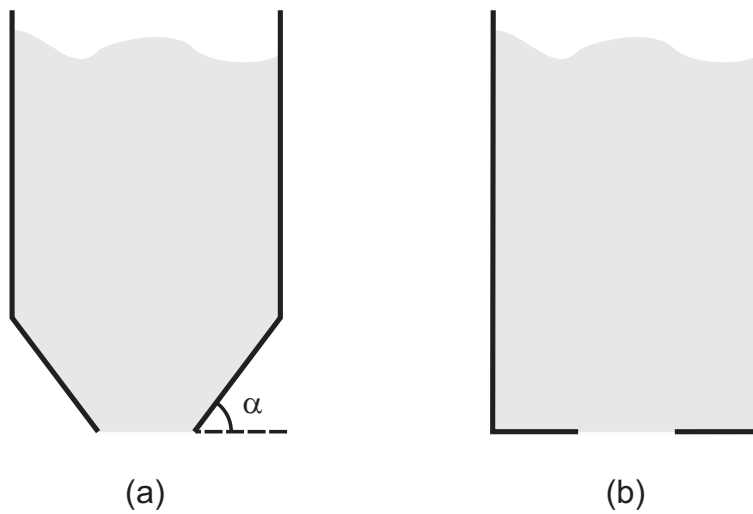


Figura 1.4: Esquema comparativo de la distinta forma de la base en el caso de una tolva (a) y un silo (b).

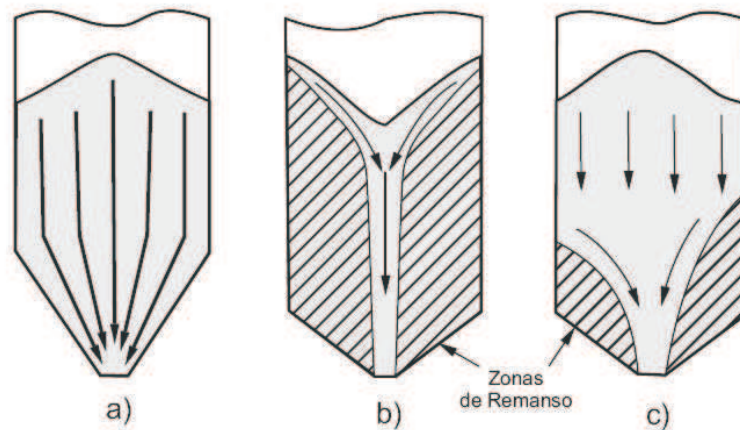


Figura 1.5: Esquema de los diferentes tipos de flujo en el interior de un silo: (a) flujo másico; (b) flujo interno; (c) flujo mixto.

las paredes del silo es inferior que la de los granos entre sí. En esta situación, las partículas se arrastran entre sí con mayor intensidad que las paredes pueden retenerlas, y por tanto, se fuerza a los granos a mantener su posición relativa durante la descarga. En este caso, el orden de salida del material es el mismo que de entrada al realizar la carga, por lo que este tipo de flujo es el más adecuado cuando el producto almacenado es perecedero.

En el flujo interno parte del material descende mientras que el resto permanece en reposo durante la descarga del silo. Esta clase de flujo ocurre cuando las paredes de la tolva no están lo suficientemente inclinadas y su fricción con el material es demasiado elevada como para que el material fluya a lo largo de ellas. Bajo estas condiciones, las partículas se deslizan más sobre ellas mismas que sobre las paredes de la tolva formándose un canal interno de flujo en el centro del silo.

En algunas ocasiones se puede dar un flujo mixto, donde el material situado en la parte superior fluye de forma másica y la zona inferior más cercana a al orificio de manera interna [21]. Justamente este es el tipo de flujo que tiene lugar en el sistema experimental empleado en este trabajo.

### 1.3 Formación de atascos

Cuando el tamaño del orificio del silo es comparable a los granos, la descarga de material se puede interrumpir debido a la formación de un arco que obtura la abertura e impide la salida de material (ver figura 1.6). Este fenómeno es lo que se denomina un atasco, y representa uno de los mayores inconvenientes en la industria. Por ello, la formación de atascos ha sido ampliamente estudiada tanto experimental como numéricamente en configuraciones bidimensionales [22–29] y tridimensionales [30–32].

La capacidad de formar arcos, también llamados puentes o bóvedas, es una de las principales características de los medios granulares. Estas estructuras se pueden definir como una disposición espacial de partículas en contacto que se sostienen entre sí [33, 34]. Los distintos granos del arco se estabilizan mutuamente compensando las fuerzas, de manera que si se elimina uno de ellos la

estructura se desmorona debido a la acción de la gravedad. Los puentes juegan un papel primordial en algunos fenómenos que se observan en los medios granulares, como la segregación [35] y la propagación no homogénea de las fuerzas [36], además de estar directamente relacionados con la fracción de compactación [37–39].

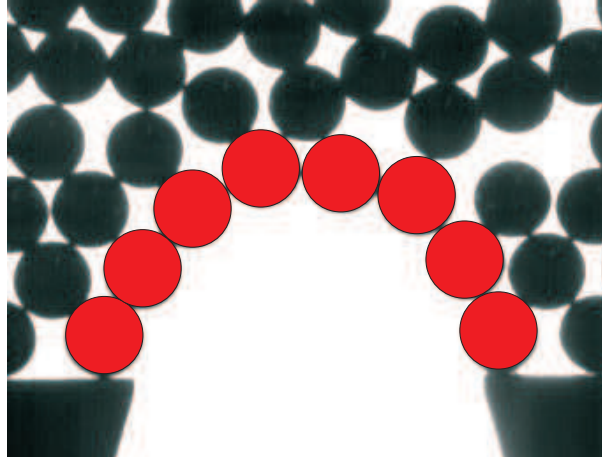


Figura 1.6: Fotografía de un arco en el orificio de descarga del silo empleado en este trabajo. En color rojo se han marcado las partículas que forman parte del arco que ha provocado un atasco.

Uno de los primeros estudios experimentales sobre la aparición de atascos y su relación con la formación de arcos fue el realizado por K. To y sus colaboradores [23]. En dicho trabajo los autores midieron la probabilidad de atasco al descargar discos contenidos en un tolva bidimensional. Como parámetro de control del experimento emplearon el cociente entre la longitud de la abertura  $R$  y el diámetro de los discos  $d$ ,  $D$ . En sus experiencias empleaban 200 discos monodispersos que hacían fluir por gravedad a través de la tolva. Para cada tamaño del orificio de salida contabilizaban el número de atascos  $N_a$  que ocurrían antes de que todas las partículas se descargasen. A partir de esta medición definían la probabilidad de atasco  $J(D)$  como  $N_a/N_t$ , donde  $N_t$  es el número de experiencias realizadas para cada abertura. Parte de los resultados de este trabajo se muestran en la figura 1.7.

El primer resultado importante es que la probabilidad de atasco decrece al aumentar el tamaño de la abertura. Además observaron que  $J(D)$  es independiente de la inclinación de las paredes de la tolva siempre y cuando no exceda un cierto umbral. Sin embargo, el resultado más relevante de este trabajo es la explicación cuantitativa de  $J(D)$  a partir de la configuración de los discos que forman el arco que taponan la salida al producirse un atasco. Para ello proponen tratar el arco como la trayectoria de un camino aleatorio con algunas restricciones.

En la figura 1.8 se muestra un esquema de la configuración de un arco formado al atascar la tolva. Si recorremos dicho arco de izquierda a derecha y definimos el vector desplazamiento desde el centro del disco  $i$  al centro del disco  $i + 1$  como  $r_i$ , podemos considerar que los vectores  $(r_1, \dots, r_{n-1})$  forman la trayectoria de un caminante dando  $n - 1$  pasos al azar de izquierda a derecha con las siguientes restricciones:

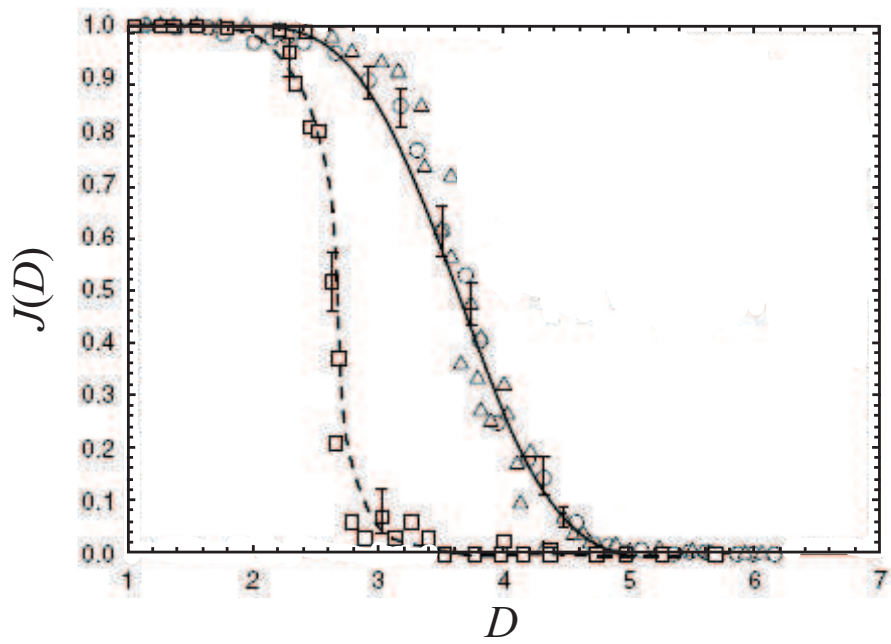


Figura 1.7: Probabilidad de atasco en función de  $D$ . Los símbolos representan a diferentes ángulos que forman las paredes de la tolva respecto a la horizontal: círculos,  $\alpha = 34^\circ$ ; triángulos,  $\alpha = 60^\circ$  y cuadrados,  $\alpha = 75^\circ$ . La línea de trazo continuo es la aproximación obtenida mediante el modelo del camino aleatorio restringido y la línea de trazos es un guía visual para los datos de  $\alpha = 75^\circ$ . Figura obtenida de [23].

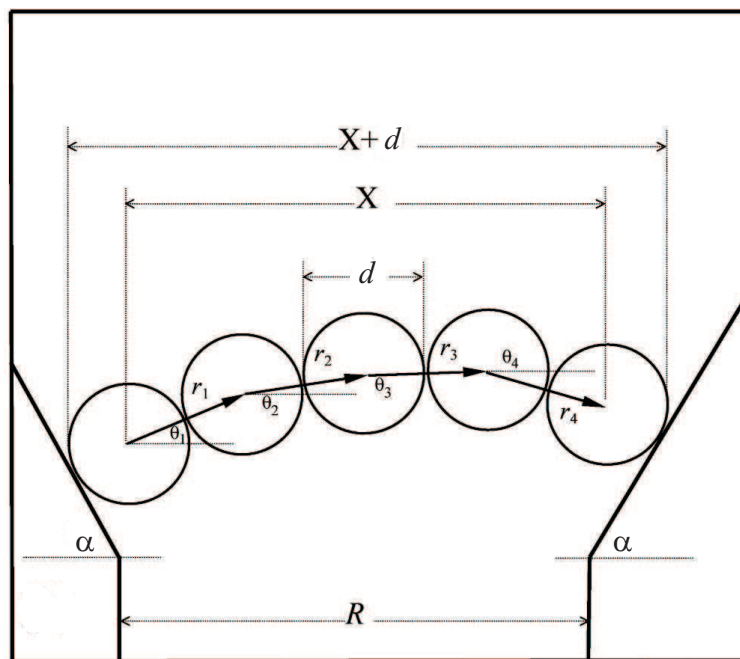


Figura 1.8: Esquema de la configuración de un arco formado en un atasco. Figura obtenida de [23].

- (i)  $\pi/2 > \theta_i > -\pi/2$ .
- (ii)  $\theta_i > \dots \theta_i > \dots \theta_{n-1}$ .
- (iii)  $\forall i \neq j, \left| \sum_{k=1}^i r_k - \sum_{k=1}^j r_k \right| \geq d$ .
- (iv)  $X + 1 > D$ .

donde  $\theta_i$  es el ángulo entre  $r_i$  y la horizontal, y  $X$  es la componente horizontal del vector de desplazamiento desde el primer disco al último, adimensionalizada con el diámetro de las partículas. La limitación (i) mantiene al caminante moviéndose de izquierda a derecha, mientras que (ii) es la condición para que el arco sea convexo. Finalmente, las restricciones (iii) y (iv) son consecuencia del tamaño finito de los discos y la necesidad de que la envergadura del arco sea mayor que el tamaño del orificio. A partir de este modelo se puede cuantificar el número de configuraciones posibles de arcos que son capaces de obstruir la salida. Según K. To y sus colaboradores, este número de configuraciones tiene que ser proporcional a la probabilidad de atasco. En la figura 1.7 se muestra la concordancia entre el modelo (línea continua) y los datos experimentales (círculos y triángulos).

En el caso de sistemas tridimensionales, el estudio de la formación de arcos es mucho más complicado. Sin embargo, la aparición de atascos se puede estudiar de un modo alternativo como se muestra en los trabajos realizados por I. Zuriguel *et al.* [30, 31]. En estos estudios se emplea un silo cilíndrico con un orificio circular en la base a través del cual se descargan las partículas alojadas en su interior. Con el fin de comprobar la influencia de las propiedades del medio granular en la probabilidad de atasco emplearon esferas de distintos tamaños y materiales. El primer resultado importante que describen es que el parámetro relevante no es el tamaño del orificio, sino su tamaño respecto al tamaño de los granos. Por ello, el tamaño del orificio  $D$  se define como su diámetro adimensional obtenido como el cociente del diámetro del orificio ( $R$ ) y el diámetro de las partículas ( $d$ ):  $D = R/d$ .

Las principales mediciones que realizaron fueron la duración y el tamaño “ $s$ ” de las avalanchas. Los autores definen avalancha como la descarga de material que tiene lugar entre dos atascos consecutivos, y por tanto, su tamaño corresponde al número de partículas que han caído. De los datos obtenidos observan que la distribución de los tamaños de avalancha para un determinado diámetro de orificio presenta un decaimiento exponencial (ver figura 1.9). Este comportamiento es común para todos los tamaños de salida, variando únicamente el parámetro característico del decaimiento. Así, al aumentar  $D$  el decaimiento es menos pronunciado indicando una mayor probabilidad de avalanchas grandes. Este tipo de distribuciones también han sido observadas al estudiar este proceso en silos sometidos a vibraciones [40, 41].

Para explicar la forma de las distribuciones, los autores proponen un modelo probabilístico simple donde se asume que la probabilidad “ $p$ ” de que una partícula atraviese la salida permanece constante durante la avalancha y es independiente de la de sus vecinas. Por lo tanto, la probabilidad de obtener una avalancha de tamaño  $s$  es el resultado de multiplicar  $s$  veces la probabilidad  $p$  de que una partícula pase a través del orificio por la probabilidad  $(1 - p)$  de que un grano atasque la salida. De esta manera, la distribución de los tamaños de avalancha  $n_D(s)$  puede representarse mediante la siguiente expresión:

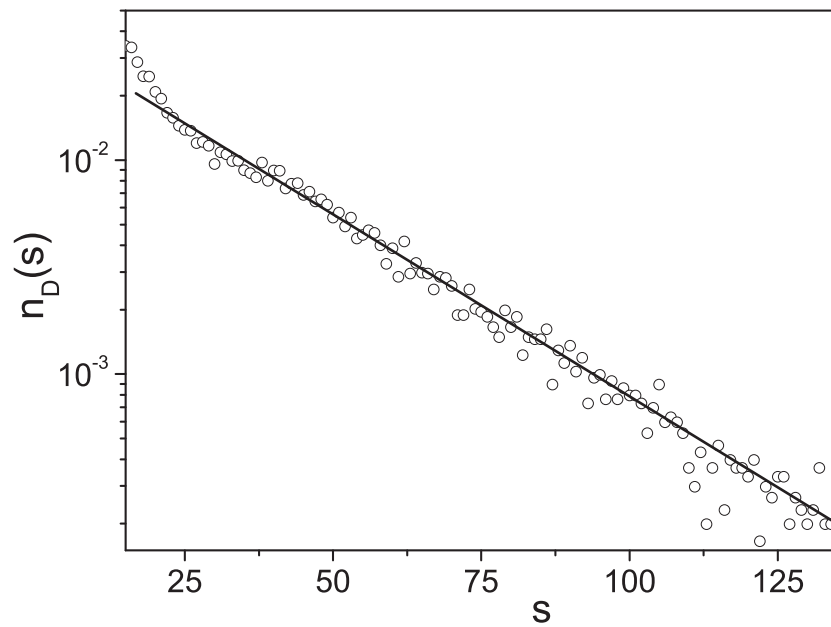


Figura 1.9: Probabilidad de encontrar una avalancha  $n_D(s)$  en función de su tamaño  $s$  en escala semilogarítmica. La línea continua negra es una guía visual para apreciar que los puntos se ajustan a una recta. Figura obtenida de [31].

$$n_D(s) = p^s(1 - p) \quad (1.2)$$

Al aplicar logaritmos a ambos lados de la ecuación anterior se obtiene una relación lineal entre  $\log(n_D(s))$  y  $s$  que reproduce el decaimiento exponencial observado:

$$\log(n_D(s)) = s \log(p) + \log(1 - p) \quad (1.3)$$

Para comparar las distribuciones de los distintos tamaños del orificio, los autores reescalan los tamaños de avalancha  $s$  mediante el tamaño medio de avalancha  $\langle s \rangle$  correspondiente a cada  $D$ . En la figura 1.10 se muestra el colapso de los histogramas reescaldos para diferentes tamaños de la abertura. Basándose en la dependencia de este parámetro característico  $\langle s \rangle$  con  $D$ , investigaron la posible existencia de un tamaño crítico  $D_c$  del orificio por encima del cual los atascos no son posibles. En sus resultados muestran que  $\langle s \rangle$  se ajusta a una ley de potencias:

$$\langle s \rangle = \frac{A}{(D_c - D)^\gamma} \quad (1.4)$$

En la figura 1.11 se muestra como la avalancha media aumenta con  $D$ , de manera que según la ecuación 1.4,  $\langle s \rangle$  se hace infinito cuando  $D$  tiende a  $D_c$ . El valor que obtuvieron para el tamaño crítico de orificio  $D_c = 4,94 \pm 0,03$  es coherente con los trabajos publicados en el campo de la ingeniería [8, 43]. Sin embargo, el elevado valor del exponente ( $\gamma = 6,9 \pm 0,2$ ) es inusual al hacer una analogía con una transición de fase.

En un trabajo posterior, K. To [26], empleando una tolva bidimensional como la anteriormente descrita, ajusta adecuadamente sus datos experimentales mediante la ecuación 1.4. Además,

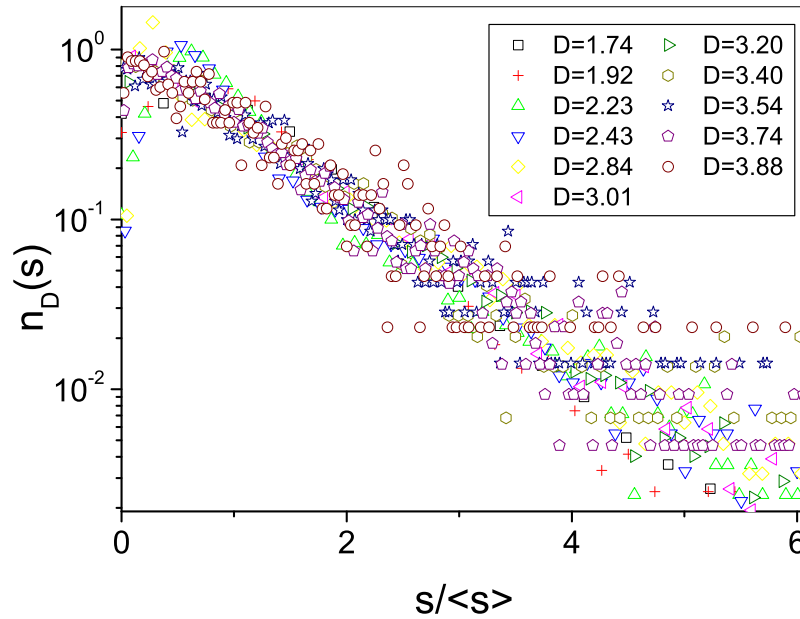


Figura 1.10: Colapso de los histogramas de tamaños de avalancha al escalarlas utilizando la avalancha media  $\langle s \rangle$ . Figura obtenida de [42].

muestra que los datos también pueden ser ajustados con una exponencial recíproca y con una exponencial cuadrática:

$$\langle s \rangle = A' e^{B/(D_c - D)} \quad (1.5)$$

$$\langle s \rangle = A'' e^{B'D^2} \quad (1.6)$$

La ecuación 1.6 presenta una peculiaridad respecto a las expresiones anteriores, ya que en ella no se incluye un tamaño crítico del orificio. Esta característica implica que, por muy grande que sea el orificio, si se espera el tiempo suficiente siempre observaremos un atasco. Esta posibilidad de ajustar la avalancha media mediante distintas expresiones, divergentes y no divergentes, supone que la existencia de un tamaño crítico de orificio no es del todo clara.

## 1.4 Caudal de descarga

El flujo de los materiales granulares en la descarga de silos se ha estudiado ampliamente durante décadas debido al gran interés en aplicaciones industriales [44–46]. A diferencia de los fluidos, cuando se descarga un silo por gravedad, la tasa de flujo no depende de la altura que alcanza la columna de material en el interior del contenedor. Esto se debe a que la presión en la base del silo satura debido al efecto Janssen [5]. En primera aproximación, también se ha demostrado

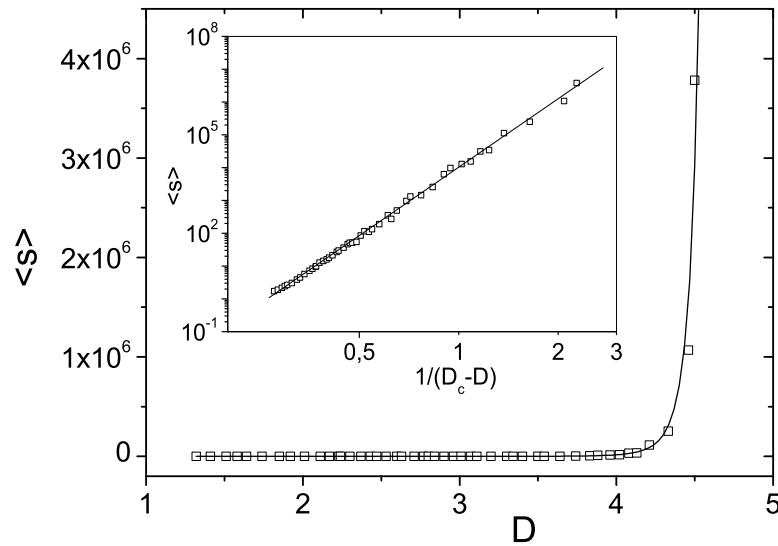


Figura 1.11: Divergencia de la avalancha media  $\langle s \rangle$  con  $D$ . Los símbolos representan los puntos experimentales y la línea de trazo continuo es el ajuste con la ecuación 1.4. En la figura insertada se representa en escala logarítmica  $\langle s \rangle$  en función de  $1/(D_c - D)$  [31].

empíricamente que el flujo es independiente de la anchura del silo  $L$  si se satisfacen dos condiciones:  $L$  sea mayor que 2,5 veces el diámetro del orificio de salida  $R$  y también que  $L > R + 30d$  [44].

La expresión más aceptada para predecir el flujo de granos a través de un orificio fue propuesta en 1961 por W. A. Beverloo *et al.* [43], según la cual el flujo  $Q$  debe ser proporcional al tamaño del orificio  $R$  elevado a la cinco medios:  $Q \propto R^{5/2}$ . Esta “ley” se basa en un análisis dimensional donde se supone que los parámetros relevantes en el flujo de descarga de un silo son el diámetro del orificio  $R$ , la densidad aparente  $\rho_b$  del material, la aceleración de la gravedad  $g$  y el coeficiente de fricción  $\mu$  entre las partículas. Por tanto, el flujo  $Q$  puede ser expresado como una función de estos parámetros:

$$Q = f(R, \rho_b, g, \mu) \quad (1.7)$$

Suponiendo que dicha función se puede descomponer en el producto de potencias de cada uno de sus parámetros relevantes se puede escribir:

$$Q = C(\mu)R^\alpha \rho_b^\beta g^\gamma \quad (1.8)$$

donde  $C$  es una función de  $\mu$  que no tiene unidades. Al reemplazar las variables por sus correspondientes unidades se obtiene:

$$MT^{-1} = L^\alpha (ML^{-3})^\beta (LT^{-2})^\gamma \quad (1.9)$$

Agrupando los exponentes asociados a cada unidad obtenemos el siguiente sistema de tres ecuaciones:



$$\begin{aligned}
 \alpha - 3\beta + \gamma &= 0 \\
 \beta &= 1 \\
 -2\gamma &= -1
 \end{aligned}
 \tag{1.10}$$

cuya única solución posible es  $\alpha = 5/2$ ,  $\beta = 1$  y  $\gamma = 1/2$ . Por tanto, sustituyendo en la ecuación 1.7 el valor obtenido para cada exponente, la expresión para el flujo es:

$$Q = C\rho_b\sqrt{g}R^{5/2} \tag{1.11}$$

Sin embargo, esta expresión no es del todo correcta. Una representación de los resultados experimentales en la forma  $Q^{2/5}$  vs  $R$  muestra que los datos siguen una relación lineal como era esperado, pero la intersección de dicha línea recta con el eje de abscisas no se produce en el origen sino en un cierto valor  $z$  (ver figura 1.12). Se encontró que dicho valor era proporcional a  $d$  para partículas de la misma forma, de manera que los autores introdujeron un nuevo factor. Finalmente, la “ley de Beverloo” queda de la siguiente manera:

$$Q = C\rho_b\sqrt{g}(R - kd)^{5/2} \tag{1.12}$$

donde  $C$  parece ser prácticamente independiente de  $\mu$  y toma valores entre 0,55 y 0,65. El valor del parámetro  $k$ , que no depende del tamaño de las partículas [47], varía en el intervalo  $1 < k < 2$  dependiendo de las propiedades de los granos y del silo.

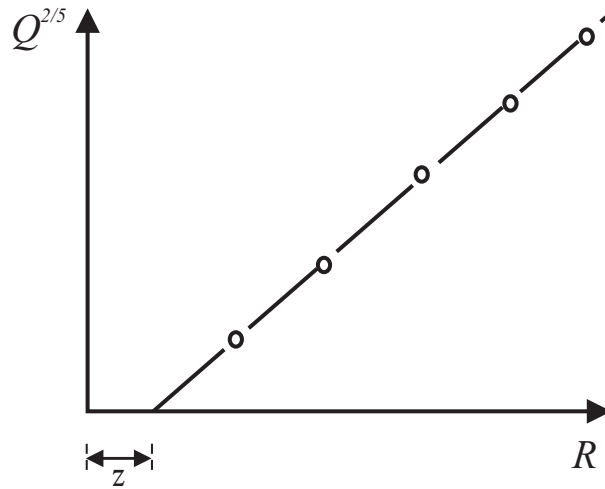


Figura 1.12: Resultados experimentales del flujo representados como recomienda W. A. Beverloo. Figura obtenida de [48].

El significado y el origen del término  $kd$  que aparece en la ecuación 1.12 ha provocado una gran controversia. La primera y más aceptada interpretación de este término fue propuesta por R. C. Brown y J. C. Richards [8] al introducir el concepto del *empty annulus*. Estos científicos intuyeron la existencia de una zona anular adyacente a la periferia del orificio a través de la cual el número de partículas que pasan es menor que en el centro. Este hecho implica una reducción

del tamaño efectivo del orificio, y por tanto, la necesidad de incluir el factor  $kd$  para corregir el tamaño de la abertura. Por otro lado, J. Y. Zhang and V. Rudolph [49] afirman que el único valor posible de  $k$  es 1, puesto que el centro de las partículas no puede acercarse al borde del orificio en una distancia de  $d/2$ . Además, estos autores proponen una nueva expresión donde se introduce un nuevo término  $c_\tau$ , cuyo valor depende de  $R$  y físicamente representa el efecto en el flujo de la cizalladura debida a la fricción entre las partículas que están fluyendo y las partículas en reposo cercanas al borde del orificio.

Otro aspecto interesante de la expresión 1.12 es la dependencia del flujo con la densidad aparente  $\rho_b$  del material. Originalmente, se pensaba que el valor de  $\rho_b$  correspondía a la densidad inicial del medio en el interior del silo. Sin embargo, se ha demostrado experimentalmente que el flujo es independiente del grado de compactación original del material [50]. Al parecer, en el inicio de la descarga la densidad del material se ajusta a un valor apropiado que se mantiene más o menos constante mientras existe flujo de partículas [44].

Con el fin de aportar una interpretación física a la relación entre el flujo de descarga y el tamaño de la abertura:  $Q \propto R^{5/2}$ , se introduce el concepto del “arco de caída libre” (*free-fall arch* en inglés) [48]. Este término hace referencia a una hipotética superficie que se extiende sobre el orificio y representa a la superficie más baja donde el material permanece empaquetado. Por encima de ella se asume que las partículas se encuentran en contacto entre sí, y por lo tanto sometidas a esfuerzos de compresión. Sin embargo, por debajo de esta superficie los granos dejan de estar en contacto y se aceleran libremente bajo la acción de la gravedad. El radio de este “arco” situado justo por encima del orificio es proporcional al tamaño  $R$  de la abertura del silo. Así, asumiendo que la velocidad  $v_z$  de las partículas a la salida se debe principalmente a su caída libre desde dicha estructura, se obtiene que  $v_z$  debe ser proporcional a  $R^{1/2}$ .

En cuanto al flujo de descarga, se puede expresar mediante la siguiente ecuación:

$$Q = \rho_b v_z A \tag{1.13}$$

donde  $A$  representa al área del orificio de salida que tiene forma circular. Así, considerando que  $\rho_b$  es constante y sabiendo que  $v_z \propto R^{1/2}$  y  $A \propto R^2$  se obtiene la relación de la ecuación 1.11. De manera análoga, en el caso de un sistema bidimensional se obtiene que  $Q \propto R^{3/2}$ , ya que en este caso  $A \propto R$ .

Es importante señalar que a pesar de que el argumento físico anteriormente descrito es coherente con la expresión de W. A. Beverloo *et al.*, el concepto del “arco de caída libre” presenta dificultades teóricas considerables como se describe en [48]. Además, no se ha encontrado una evidencia experimental clara de su existencia, sino justamente todo lo contrario [51, 52].

En un trabajo reciente, C. Mankoc y sus colaboradores [53] muestran que la expresión 1.12 no es adecuada para reproducir la funcionalidad del flujo en un amplio rango de tamaños de la salida ( $2d < R < 100d$ ). Al intentar ajustar los datos experimentales mediante la ecuación 1.12, observan que no existe ningún conjunto de valores de los parámetros  $C$  y  $k$  que resulten satisfactorios para todo el rango de tamaños de la salida. En cambio, al limitar el ajuste a un pequeño rango de  $R$ , el ajuste mediante dicha expresión es correcto, aunque los parámetros obtenidos no son válidos para extrapolar el flujo fuera de ese intervalo de tamaños de la abertura (ver figura 1.13). Ante esta situación, los autores proponen una modificación de la expresión de W. A. Beverloo:

$$Q = C' \left(1 - \frac{1}{2}e^{-b(R-d)}\right) (R-d)^{5/2} \quad (1.14)$$

en donde  $C'$  es una constante que depende del tamaño de la partícula. Como se puede observar, los autores optan por  $k = 1$  siguiendo la misma línea argumental que J. Y. Zhang *et al.* En cuanto a la introducción del término exponencial sugieren que puede estar relacionado con una dependencia de la densidad aparente con  $R$  en una zona cercana al orificio. Esta hipótesis se basa en las mediciones de la fracción de compactación  $\phi$  que realizaron mediante simulaciones numéricas. En la figura 1.14 se muestran estos datos en función de  $R$  para dos regiones cuadradas de diferente tamaño y situadas justo encima del orificio. Las líneas de trazo continuo corresponden a ajustes empleando un término como el propuesto en la expresión del flujo:  $\left(1 - \frac{1}{2}e^{-b(R-d)}\right)$ .

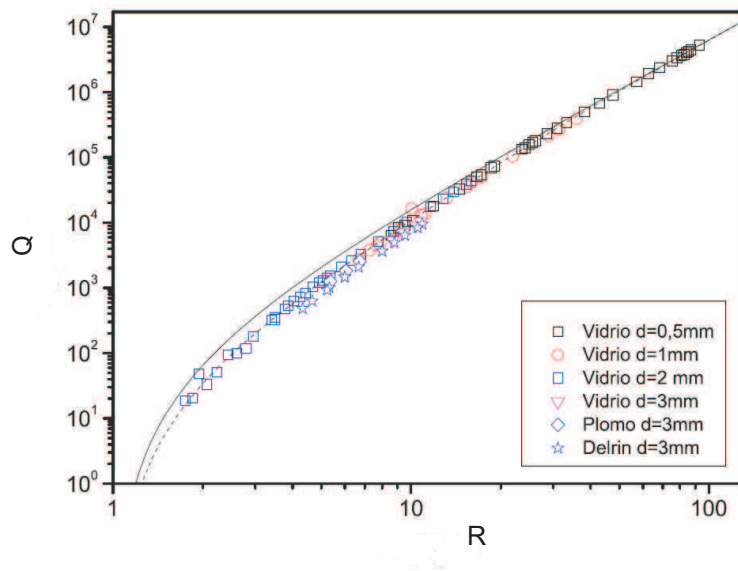


Figura 1.13: Mediciones del flujo en función del tamaño del orificio. La línea continua corresponde a la ecuación 1.12 ajustada en el intervalo  $60 < R < 90$ . La línea de trazo es el ajuste mediante la expresión 1.14. Figura obtenida de [53]

## Fluctuaciones del flujo

En la actualidad existen evidencias experimentales de que el flujo de descarga no es constante en el tiempo, sino que presenta fluctuaciones [54–58]. Se piensa que su dinámica está condicionada, entre otras cosas, por la formación de estructuras coherentes justo por encima del orificio que ralentizan temporalmente la descarga. Estas disminuciones de la tasa de flujo se conocen como “atacos parciales” y pueden ser debidos a la formación de puentes que no son lo suficientemente estables como para soportar el peso de los granos superiores y por lo tanto duran poco tiempo.

La existencia de oscilaciones en el flujo fue descrita por D. C. Hong [59] en simulaciones y por R. C. Brown y J. C. Richards [60] en experimentos. En concreto, estos últimos observaron ondas de dilatación en el medio, que producían oscilaciones periódicas de la fracción de compactación

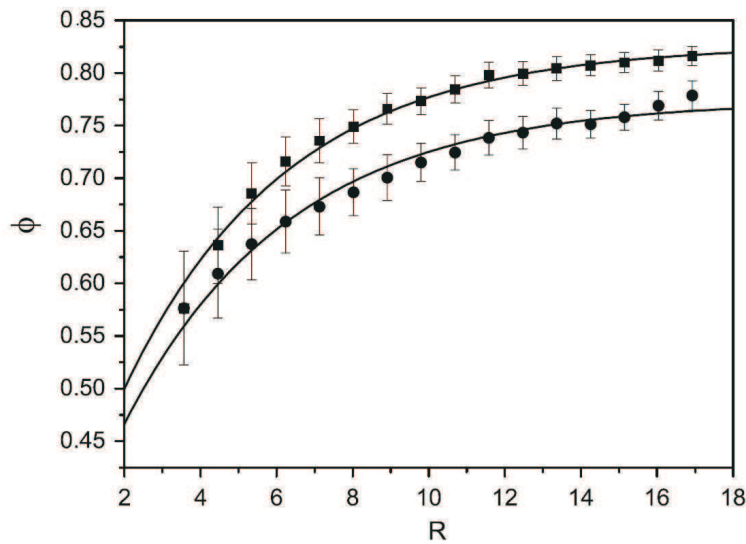


Figura 1.14: Fracción de compactación  $\phi$  en función de  $R$ . Los círculos y cuadrados corresponden a dos regiones cuadradas de diferente tamaño situadas justo encima del orificio. En ambos casos, las líneas de trazo continuo corresponden a la función  $\left(1 - \frac{1}{2}e^{-b(R-d)}\right)$ . Gráfica obtenida de [53].

cerca de la salida del silo.

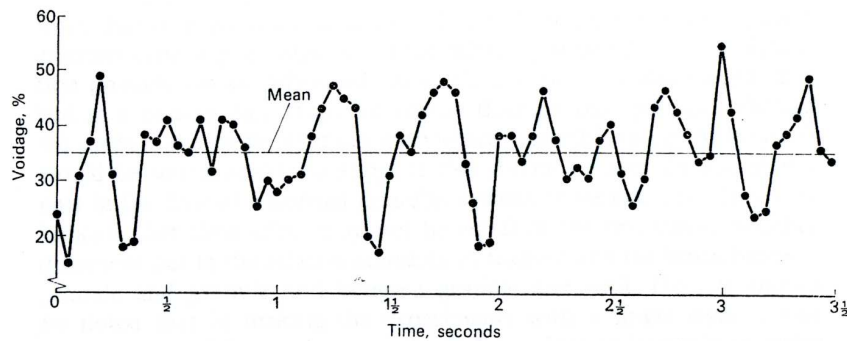


Figura 1.15: Oscilaciones de la fracción de compactación cerca del orificio durante la descarga de un silo bidimensional. Figura obtenida de [8].

En un trabajo realizado por E. Longhi y su grupo [61] encontraron un comportamiento distinto de las fluctuaciones de la presión lateral entre aberturas de salida grandes y pequeñas. Así, cuando el tamaño del orificio se acerca a valores para los cuales se producen atascos, las fluctuaciones tienden asintóticamente a una ley de potencias en  $R$ . También observaron que incluso cuando se producen atascos, existen fuerzas que van desde las paredes hacia el centro. Estas cadenas de fuerza podrían llegar a considerarse como atascos parciales, puesto que su presencia ralentiza el flujo temporalmente.

## 1.5 Objetivos del trabajo

Como ya se ha comentado anteriormente, una de las diferencias más importantes entre el flujo de un medio granular a través de un orificio y el correspondiente a un fluido es la aparición de atascos que interrumpen la descarga. Así, en el caso de un silo cilíndrico se ha propuesto la posible existencia de un tamaño crítico de la salida, por encima del cual no aparecen atascos. Sin embargo, esta característica ha sido estudiada de manera empírica, por lo que su justificación no es contundente.

Desde el punto de vista práctico la existencia o no de un tamaño crítico de la abertura no tiene una gran relevancia. Esto se debe a que para orificios grandes, el tiempo necesario para observar un atasco es tan elevado que se puede llegar a considerar infinito. Por el contrario, desde el punto de vista conceptual supone una diferencia importante, ya que su existencia implicaría la presencia de una transición de fase termodinámica.

La motivación de este trabajo se centra justamente en resolver dicha cuestión. Para ello, se ha empleado un silo de paredes planas transparentes donde se han estudiado sistemáticamente, bajo condiciones controladas y con gran resolución temporal, los mecanismos microscópicos y macroscópicos implicados en la descarga.

En primer lugar, al igual que en trabajos anteriores [26, 30, 31], la cuestión sobre la existencia de un tamaño crítico del orificio se ha abordado mediante el estudio de la probabilidad de atasco. Sin embargo, a diferencia de otros, se propone un modelo probabilístico que predice la funcionalidad de la avalancha media con el tamaño de la abertura.

En segundo lugar, lo más novedoso de este trabajo es la idea de estudiar las propiedades del flujo durante la descarga, con el fin de obtener alguna evidencia clara que nos indique si realmente existe un tamaño crítico de la salida.

## Capítulo 2

# Sistema experimental

Como se mencionó anteriormente el objetivo de este trabajo consiste en el estudio del flujo y la formación de atascos durante la descarga de un material granular desde un silo. Con este propósito se ha construido un silo de paredes transparentes que contiene una monocapa de partículas esféricas monodispersas. La descarga se realiza a través de una abertura de tamaño variable situada en la base plana del silo, cuya longitud es el parámetro de control. La geometría del contenedor se ha elegido porque permite el acceso visual a todas las partículas. Esta ventaja facilita la realización de algunas mediciones que en el caso de un sistema tridimensional necesitarían de una instrumentación y técnicas más complejas y de alto coste (microtomografía de rayos X [62–64] o tomografía de emisión de positrones [65, 66]).

Cuando las partículas son descargadas se detecta su paso a través de la abertura y son recogidas en una caja de cartón. Si el tamaño de la salida no es lo suficientemente grande, el flujo se interrumpe debido a la formación de un arco encima del orificio. Cuando este fenómeno ocurre decimos que se ha producido un atasco y a la descarga de material granular entre dos atascos consecutivos la definimos como una avalancha. En estos casos, pasado un tiempo prudencial se restablece el flujo aplicando un chorro de aire a presión que provoca la ruptura del arco que obturaba la salida.

Las principales mediciones realizadas consisten en la masa descargada y la duración de las avalanchas. El movimiento de las partículas se ha filmado en diferentes zonas del silo empleando una cámara de alta velocidad. Mediante las imágenes capturadas y su posterior tratamiento se han realizado mediciones de la fracción de compactación y de los desplazamientos de los granos.

A continuación se describirá detalladamente el montaje experimental, así como la instrumentación, técnicas y protocolo de medida seguido para realizar las diferentes mediciones.

### 2.1 Montaje experimental

#### El silo bidimensional

La base del silo consiste en una placa de hierro anonizado en la cual se ha maquinado una guía donde se colocan enfrentadas dos piezas idénticas de acero inoxidable. El hueco que delimitan las piezas tiene forma de cuchilla, de manera que la distancia entre sus cantos define el tamaño de la abertura de salida (ver figura 2.2). Esta forma de las piezas se ha elegido para asegurar que las partículas solo puedan atascarse en la parte superior del orificio. Las piezas se pueden desplazar

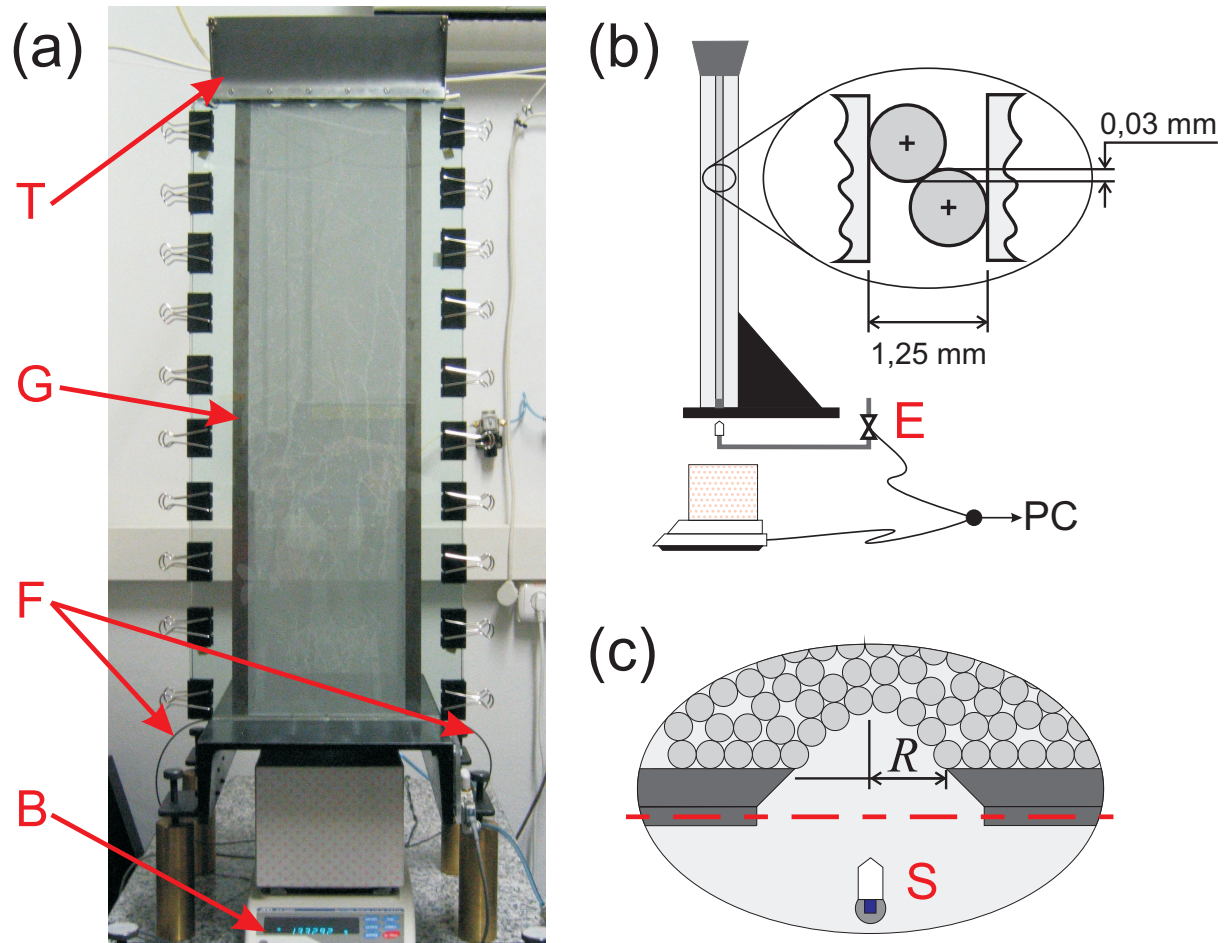


Figura 2.1: Fotografía y esquema del sistema experimental. T: tolva; G: galga; F: fibra óptica; B: balanza; E: electroválvula; S: soplador. (b) Vista lateral del silo. En la zona ampliada se muestra el solapamiento entre dos partículas en el interior del silo. Señalar que la anchura se ha exagerado para una mayor claridad. (c) Esquema de la salida del silo donde la línea en trazo discontinuo representa el eje óptico del haz de luz infrarroja del fotodetector.

a lo largo de la guía permitiendo modificar  $R$ . Una vez elegido el tamaño de la salida, las piezas quedan fijadas por debajo de la placa de hierro mediante tornillos. La medición de la longitud de la abertura se realiza mediante una fotografía con una escala. En el peor de los casos se comete un error de 0,05 mm.

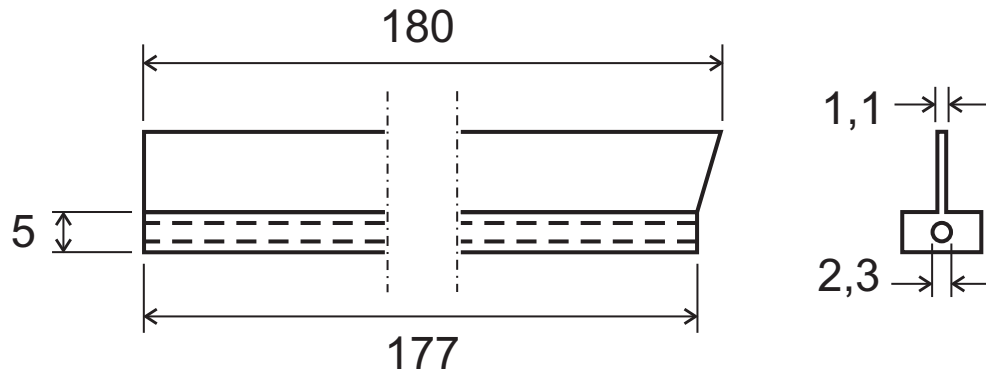


Figura 2.2: Esquema de las piezas que conforman la base del silo. De izquierda a derecha se muestran la vista frontal y el perfil. Las medidas indicadas se encuentran en mm.

Sobre la placa de hierro se apoyan dos vidrios idénticos de dimensiones  $800 \times 350$  mm. Estos vidrios se encuentran enfrentados y separados entre sí por dos galgas de acero inoxidable de espesor  $1,10 \pm 0,05$  mm que descansan sobre la base del silo. Las galgas conforman las paredes laterales del contenedor, de manera que la separación entre ellas define su ancho. En este trabajo la anchura se ha fijado en  $200 \pm 1$  mm, con el fin de que el flujo de granos y la formación de atascos sea independiente de las condiciones de borde [44]. Por detrás del cristal posterior se han pegado dos escuadras que se atornillan a la base. El otro vidrio se fija mediante pinzas de presión quedando ambos atrapados. Para medir el espesor del hueco que queda entre los vidrios se ha empleado un juego de galgas métricas. Dicho espesor se midió en diferentes zonas del silo (a través del orificio, en los laterales y en la parte superior), y en todos los lugares se obtuvo  $1,25 \pm 0,05$  mm.

El llenado del silo se realiza mediante una tolva que se encuentra acoplada a la parte superior de los vidrios. Mediante este método se consigue una introducción homogénea de los granos a lo largo del ancho del silo, a la vez que facilita el llenado y sirve como reservorio de material granular evitando que la altura de la capa de partículas varíe significativamente durante la descarga. En todas las experiencias realizadas esta altura es mayor que 600 mm (unas tres veces el ancho del silo), de manera que la altura del material no afecta a la descarga debido al efecto Janssen [5].

### Sistema para restablecer la descarga

Como se comentó anteriormente, si la abertura de descarga no es lo suficientemente grande, el flujo de partículas se interrumpe. En estos casos para restablecer el flujo es necesario aplicar una perturbación que destruya el arco que obtura el orificio. Esta perturbación puede ser de diversos tipos como la aplicación de vibraciones intensas, golpes cerca del orificio o bien el método elegido en este trabajo, la aplicación de un chorro de aire comprimido dirigido hacia la abertura de salida. Este método se ha elegido debido a las ventajas que presenta respecto a los otros mecanismos



mencionados. En primer lugar se consigue una alta reproducibilidad, aspecto que no se logra mediante la aplicación de golpes, ya que la perturbación producida se propaga a través de las cadenas de fuerza que dependen de la configuración del medio granular. En segundo lugar, la perturbación provocada se limita únicamente a una pequeña zona alrededor del orificio, sin que se altere de forma importante la fracción de compactación de todo el material granular como ocurre al aplicar vibraciones intensas [37].

El aire comprimido se transporta empleando un tubo que pasa por debajo de la base, y es aplicado en la abertura de la base del silo a través de una boquilla de teflón. El tiempo durante el cual se aplica el aire se controla mediante la apertura y el cierre de una electroválvula comandada desde el ordenador. La duración y presión típicos del aire son de 400 ms y 4 bares respectivamente. Estos valores fueron elegidos tras comprobar que eran adecuados para deshacer el atasco en todos los casos. De cualquier manera, en un trabajo anterior se reportó que estos factores apenas influyen en el proceso de descarga del material [30].

## 2.2 Material granular

A la hora de elegir el material granular es necesario considerar una serie de factores como densidad, tamaño, forma, precio, etcétera. En este trabajo se decidió emplear partículas esféricas de acero inoxidable *INOX420* cuyas propiedades se muestran en la tabla 2.1.

|  |                          |
|--|--------------------------|
| <b>Masa por partícula, <math>m</math></b>          | $4,00 \pm 0,01$ mg       |
| <b>Diámetro, <math>d</math></b>                    | $1,00 \pm 0,01$ mm       |
| <b>Densidad, <math>\rho</math></b>                 | $7,60$ g/cm <sup>3</sup> |
| <b>Esfericidad, <math>\Psi</math></b>              | $0,99 \pm 0,01$          |
| <b>Coefficiente de restitución, <math>e</math></b> | 0,92                     |
| <b>Ángulo de avalancha, <math>\theta</math></b>    | $18,5 \pm 0,1^\circ$     |

Cuadro 2.1: Propiedades del material granular empleado.

El coeficiente de restitución  $e$  fue obtenido dejando caer las partículas sobre un placa de vidrio y midiendo el tiempo entre botes consecutivos mediante un micrófono colocado sobre la placa. El ángulo  $\theta$  hace referencia a la inclinación de un plano para la cual se produce una avalancha, es decir, las partículas se deslizan por la pendiente. La medición de este ángulo se llevó a cabo inclinado progresivamente desde la horizontal un recipiente lleno de bolitas hasta que se produce una avalancha. La esfericidad  $\Psi$  se determinó a partir de la siguiente ecuación [67]:

$$\Psi = \frac{\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}}{c} \quad (2.1)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son tres diámetros de la partícula perpendiculares entre sí, y  $c$  corresponde al diámetro de mayor longitud. La medición de los diámetros se realizó mediante un micrómetro con una precisión de 0,005 mm. Esta medición se llevó a cabo para una muestra de 50 bolitas, obteniendo el valor final de esfericidad como la media aritmética de todas ellas.

La elección de este tipo de partículas está motivada en primer lugar por tratarse de un material resistente a deformaciones y al desgaste que puede producirse por el rozamiento con las distintas partes del silo. En segundo lugar, la dispersión de tamaños es muy baja, que acompañada por

su alta esfericidad permite una sencilla y robusta caracterización del tamaño de las partículas mediante su diámetro. En tercer lugar, el tamaño y la masa son los apropiados para poder despreciar el efecto de fuerzas electroestáticas y cohesivas debidas a la humedad en comparación con el peso. Al mismo tiempo, son suficientemente pequeñas y ligeras para permitir registrar avalanchas grandes sin superar el fondo de escala de la balanza y evitar la utilización de un silo de mayores dimensiones sin que ello suponga un efecto de las condiciones de borde.

Como se ha comentado anteriormente, el espesor del silo es de  $1,25 \pm 0,05$  mm, por lo que teniendo en cuenta que el diámetro de las partículas es de  $1,00 \pm 0,01$  mm, estas únicamente pueden disponerse en el interior del contenedor formando una monocapa que tendrá de espesor un 25 % superior al diámetro de las bolitas. Este hecho implica que puede existir como máximo un solapamiento de  $0,03 \pm 0,01d$  entre las partículas vistas desde frente. En la figura 2.1 (b) se muestra un esquema de la superposición entre dos esferas donde se ha exagerado el espesor del silo para una mayor claridad.

## 2.3 Instrumentación

A continuación se detallan los instrumentos empleados para la realización de este trabajo. En todos los casos, los instrumentos se controlan mediante un ordenador a través del puerto RS-232 o USB.

### Medición de la masa descargada

Para la medición de la masa descargada desde el silo se han empleado dos balanzas diferentes dependiendo del tamaño de la salida. En el caso de aberturas pequeñas ( $R < 2,5d$ ), se ha utilizado una balanza *AND GX-400*, con una resolución de 0,001 g y un peso máximo de 410 g. Esta resolución permite mantener un error relativo aceptable para estos tamaños de orificio, en los cuales la masa descargada antes de que se forme un atasco es pequeña. Sin embargo, para aberturas grandes ( $R > 2,5d$ ), el número de partículas que caen es muy elevado, por lo que se ha empleado una balanza *AND GX-4000* con un rango mayor (4100 g) y una precisión de 0,01 g.

### Medición de la duración de la avalancha

El paso de las partículas a través de la abertura se ha detectado mediante un fotosensor de paso de haz *Omron E3S-X3 CB4*. Dos segmentos de fibra óptica (*E32-TC200*) atraviesan las piezas que conforman la base del silo de manera que se encuentran enfrentadas formando un haz de luz infrarroja que pasa justo por debajo de la abertura (ver figura 2.1 (c)). Debido al pequeño tamaño de los granos, se ha tenido que colimar el haz de luz para conseguir detectar su paso a través del orificio. Para ello se han empleado dos diafragmas situados en los extremos enfrentados de la fibra óptica que estrechan el haz lo suficiente como para que el paso de una bola lo interrumpa por completo. Estas interrupciones del haz quedan registradas como caídas de voltaje en la señal de salida del fotodetector. En la figura 2.3 se muestra un señal típica recogida durante una avalancha. Los valles que aparecen representan a momentos en los cuales hay partículas atravesando el orificio. Así, la duración de la avalancha se define como el intervalo de tiempo que transcurre entre el primer y último valle.

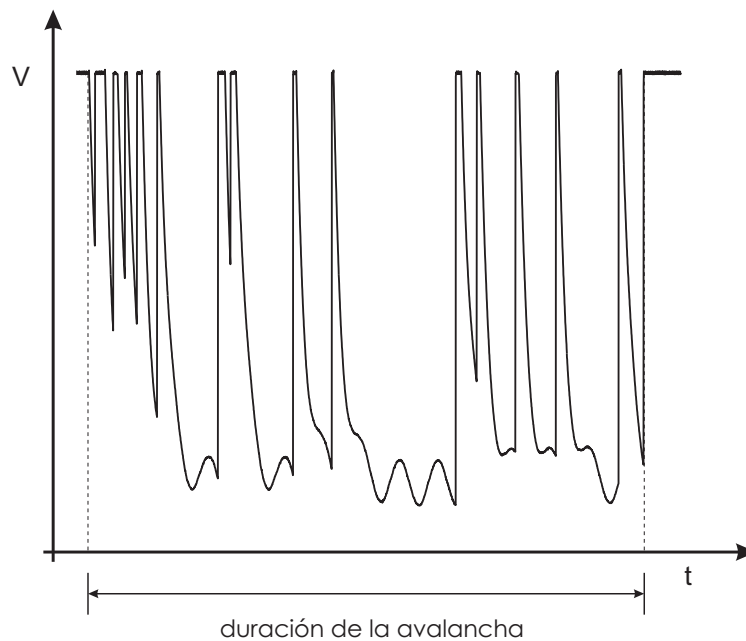


Figura 2.3: Señal del voltaje de salida del fotodetector en función del tiempo durante una avalancha. Las caídas de voltaje corresponden a momentos en los cuales hay partículas atravesando la abertura del silo. En línea de trazos se ha señalado el principio y el final de la avalancha.

La señal del fotodetector anteriormente descrita, se registra mediante un multímetro HP E1326B que se encuentra montado en un *mainframe* VXI HP75000. Las mediciones de voltaje se realizan desde antes de iniciarse una avalancha, hasta pasado un tiempo prudencial tras haber finalizado la misma. Para llevar a cabo el registro de la señal se ha empleado el modo *ráfaga* del multímetro que permite almacenar en la memoria del *mainframe* VXI hasta 25000 mediciones con una frecuencia máxima de muestreo de 13 KHz. Con el fin de optimizar la resolución temporal y la duración de las mediciones, la frecuencia de muestreo varía entre 1 y 10 KHz según la duración típica de la avalancha para cada valor de  $R$ . Tal elección, permite la detección del paso de partículas a través de la abertura, puesto que previamente se ha comprobado que el paso de un única partícula genera un caída de voltaje en la señal del fotodetector de 2,88 ms de duración.

### Adquisición de imágenes

Para filmar el movimiento de las partículas durante la descarga se ha empleado una cámara de alta velocidad *Photrom FastCam-1024 PCI 100k* con una resolución máxima de  $1024 \times 1024$  píxeles y capaz de grabar hasta  $10^6$  imágenes por segundo a baja resolución. Para sincronizar la adquisición de imágenes, la cámara posee una entrada de una señal de lógica TTL, a la cual se le envía un pulso de 5 voltios con una duración de  $5 \mu\text{s}$  y una intensidad de 10 mA. Esta señal se ha generado mediante una salida TTL que posee el *mainframe* VXI. Con en el fin de facilitar la adquisición de imágenes a diferentes alturas del silo, la cámara se encuentra montada en un desplazador vertical con recorrido suficiente para abarcar todo el alto del silo.

## 2.4 Protocolo de medida

A continuación se describe detalladamente el protocolo seguido en las diferentes mediciones realizadas. El protocolo varía ligeramente según la medición que se lleva a cabo aunque existen aspectos comunes. Entre ellos se encuentra la anchura del silo (unas 200 veces el diámetro de las partículas) y la altura de la capa granular durante la descarga (unas tres veces el ancho del silo).

### Tamaño y tiempo de las avalanchas

Debido al gran número de mediciones necesarias para obtener una estadística adecuada, el experimento está automatizado a excepción de la operación de recarga del material. Los instrumentos se controlan mediante un programa escrito en Labview que realiza las siguientes operaciones:

1. Se configuran los instrumentos y se tara la balanza.
2. Se elimina el atasco aplicando un chorro de aire a presión dirigido al orificio. Para ello, con un interruptor del banco de relés se abre la electroválvula.
3. Inmediatamente después de que cesa el chorro de aire, se comunica al multímetro que comience a recoger mediciones de voltaje de la señal de salida del fotodetector, que se almacenan en el *mainframe* VXI. Para determinar cuando ha finalizado una avalancha se recogen mediciones de la balanza en intervalos de 1,5 s. La avalancha se considera finalizada cuando tres mediciones consecutivas coinciden.
4. Una vez terminada la avalancha se descargan al ordenador las mediciones de voltaje y la masa registrada por la balanza. A partir de estas mediciones se calcula la duración y el tamaño (número de partículas) de la avalancha.
5. Si el peso de la balanza es superior a un cierto umbral preestablecido, el programa se detiene para recargar manualmente el silo. Este límite de peso ( $\approx 300$  g) es elegido para que la altura del material granular no descienda de unas 3 veces la anchura del silo. En caso de no superarse dicho peso, el proceso se repite a partir del punto 2.

Los datos obtenidos se almacenan de manera que para cada tamaño de abertura se obtiene un archivo de dos columnas (tamaño y duración) y tantas filas como avalanchas producidas. Antes de comenzar a medir se provoca un número prudencial de avalanchas para evitar que las condiciones iniciales de llenado influyan en la formación de atascos.

### Medición del caudal

En la medición del caudal se han seguido dos protocolos dependiendo del tamaño de la abertura. En el caso de orificios pequeños en los que la formación de atascos es común, el caudal se calcula como el cociente del tamaño de avalancha y su duración. En el caso de aberturas grandes, se emplea un método diferente debido a que es poco probable que el silo se atasque y por tanto la duración de las avalanchas es muy larga. El procedimiento consiste en monitorizar mediante la balanza la masa de granos descargada en intervalos de 200 ms. Así, se observa que las mediciones de la masa siguen una relación lineal con el tiempo de manera que el caudal se obtiene a partir de la pendiente de la recta que se ajusta a los datos. Este método no se emplea para orificios

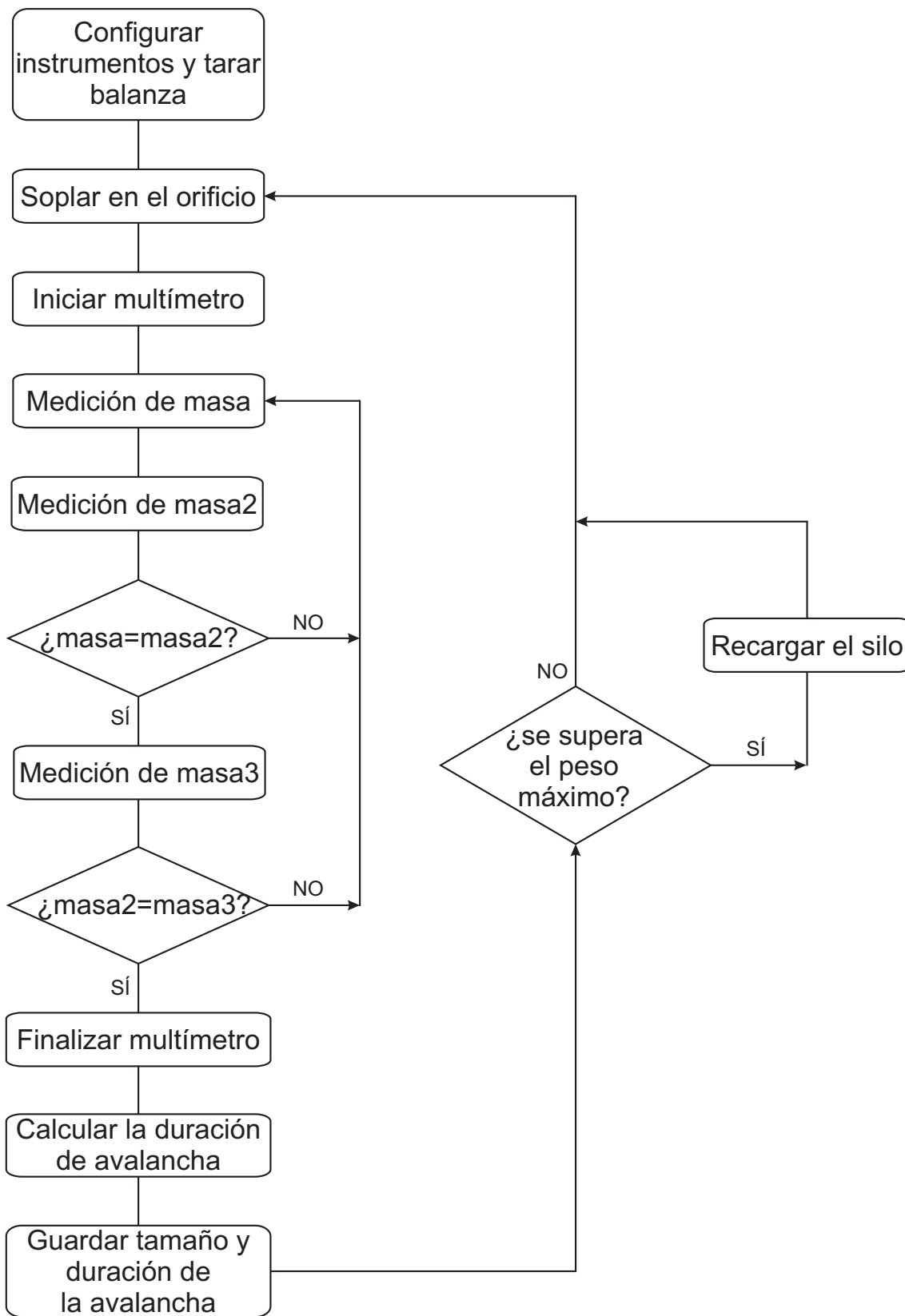


Figura 2.4: Diagrama de flujo del protocolo seguido en la medición del tamaño y duración de las avalanchas.

pequeños debido a que la duración de las avalanchas es corta y no se obtienen suficientes datos como para realizar un ajuste adecuado. De cualquier manera, en el caso de aberturas de tamaño intermedio en las cuales ambos protocolos son aplicables, se ha comprobado que el flujo medido varía menos de un 1% de un método a otro. Finalmente, el flujo medio para cada orificio se calcula como la media aritmética de todas las mediciones realizadas.

## 2.5 Procesamiento de las imágenes

En esta sección se describe el tratamiento de imágenes realizado para procesar las filmaciones. Para ello se han desarrollado diferentes programas empleando herramientas del Image Processing Toolbox de MATLAB<sup>©</sup>. En primer lugar, se lleva a cabo la localización espacial de las partículas en las imágenes. A partir de dicha determinación se han implementado diferentes algoritmos para calcular la velocidad, fracción de compactación y momento de paso de las partículas a través del orificio.

### Localización espacial de las partículas

Este proceso consiste en identificar de manera individual cada grano y asignarle una posición en la imagen. Para ello es necesario llevar a cabo una serie de operaciones que dependen del modo en que se iluminan las partículas. En algunos casos se ha optado por iluminar frontalmente de manera que cada grano refleja un *spot* brillante cuyo centroide se emplea para detectar su posición (figura 2.5). En otros casos se utiliza iluminación posterior pasando la luz a través de los huecos de la capa granular y apareciendo las partículas representadas por zonas de penumbra que se emplean para hallar su posición (figura 2.6). A continuación se describe detalladamente el proceso de localización de las esferas en ambos casos.

### Iluminación frontal

En la figura 2.5 (a) se muestra una zona ampliada de una fotografía de las partículas iluminadas frontalmente. Como se puede observar cada grano presenta un *spot* brillante aproximadamente circular que se debe a la primera reflexión de la luz sobre su superficie. Asimismo se aprecia un conjunto de puntos brillantes alrededor del borde de los granos debido a las sucesivas reflexiones en las partículas y las paredes de vidrio del silo. Para la localización de los granos se emplea el *spot* debido a la primera reflexión ya que es único en cada uno de ellos y por tanto nos permite identificarlos. En primer lugar es necesario binarizar las imágenes obtenidas de la cámara que se encuentran codificadas en 256 niveles de gris. Esta operación consiste en convertir la imagen original en una imagen en blanco y negro que nos permite diferenciar las regiones de interés. Para ello empíricamente se elige un umbral de grises  $i_g$  menor que el correspondiente a los puntos brillantes de la imagen original (ver figura 2.5 (a)). Así, los píxeles con nivel de gris mayor que  $i_g$  pasan a ser blancos mientras que al resto se les asigna el negro. El resultado de esta transformación se muestra en la figura 2.5 (b).

De las zonas que aparecen en blanco se selecciona solo aquellas cuyo número de píxeles es mayor que un cierto número. Mediante esta operación se eliminan aquellos puntos brillantes que corresponden a las reflexiones secundarias. En la figura 2.5 (c) se muestra que tras realizar esta

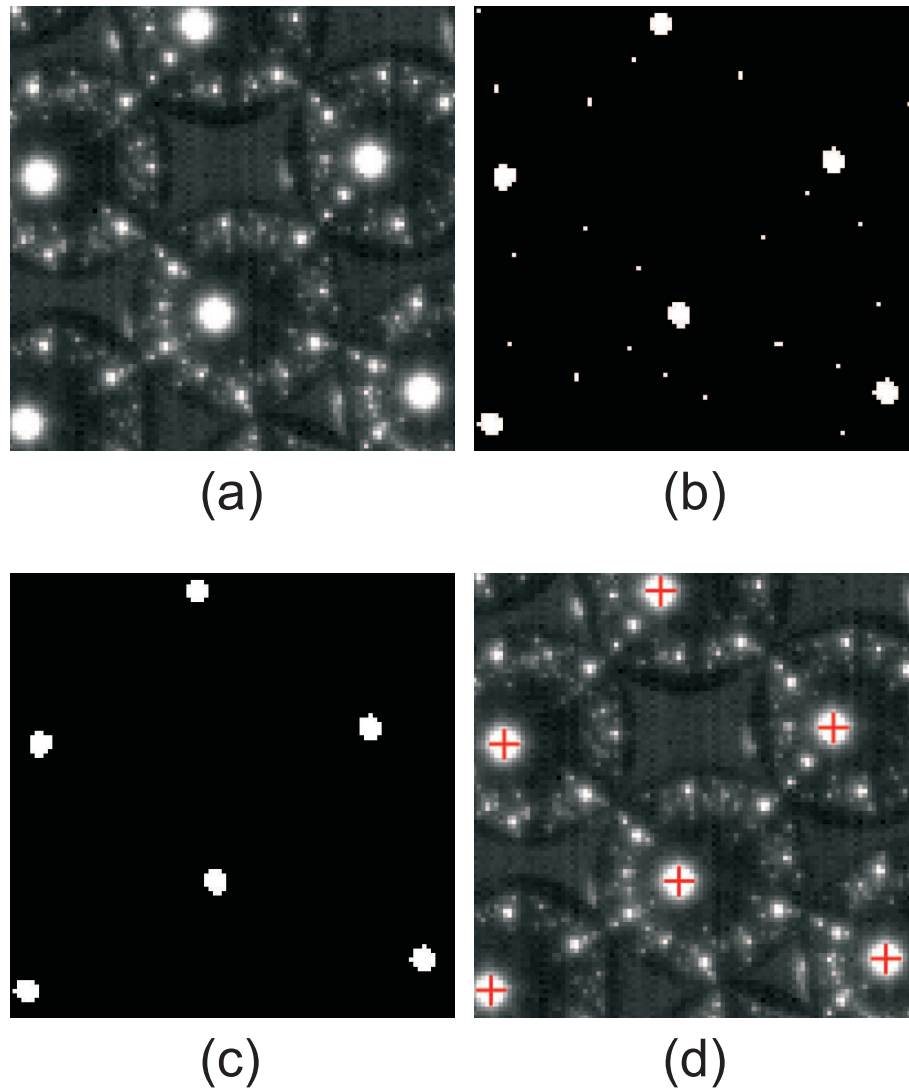


Figura 2.5: Detección del centroide de las partículas empleando iluminación frontal: (a) Fotograma original en escala de grises. (b) Imagen original binarizada. (c) Igual que (b) pero tras aplicar un criterio de tamaños. (d) Imagen original sobre la que se han representado los centroides mediante cruces rojas.

transformación únicamente aparecen en blanco las zonas correspondientes a los *spots* representativos de los granos. La determinación del centroide de estas regiones blancas es la posición que se empleará para localizar las partículas. Para ello, se emplea la siguiente relación:

$$\vec{r}_c = (x_c, y_c) = \frac{\int_A i \vec{r} d\vec{r}}{\int_A i d\vec{r}} = \left( \frac{\sum x \cdot i(x, y)}{\sum i(x, y)}, \frac{\sum y \cdot i(x, y)}{\sum i(x, y)} \right) \quad (2.2)$$

donde  $i(x, y)$  corresponde al nivel de gris de un determinado píxel en la imagen original. Mediante la expresión anterior se obtiene la posición de los centroides de los *spots* brillantes con una resolución mejor que el tamaño del píxel de la cámara (aproximadamente una centésima del diámetro de las partículas). En la figura 2.5 (d) se muestra el resultado final, donde los centroides obtenidos se representan con cruces rojas sobre la imagen original.

Hay que señalar que el centroide del punto brillante no coincide con el centro de las partículas. Sin embargo, se ha comprobado que la posición del centroide respecto al centro de las partículas no varía espacial ni temporalmente en la secuencia de imágenes adquiridas. Por lo tanto, aunque no se conozca la posición del centro de las partículas, este método permite obtener el desplazamiento, velocidad y aceleración de los granos con una gran precisión.

### Iluminación posterior

La otra manera de iluminar las partículas consiste en hacerlo desde la parte posterior. Como se puede observar en la figura 2.6 (a), la luz pasa a través de los huecos que quedan entre los granos de manera que se aprecian zonas de penumbra que corresponden a las partículas. Al igual que en el procedimiento anterior, en primer lugar se binariza la imagen respecto a un umbral adecuado  $i_g$ . En este caso el valor de  $i_g$  es elegido de manera que las zonas oscuras correspondientes a los granos tengan un nivel de grises  $i < i_g$ . En la figura 2.6 (b) se muestra la imagen binarizada donde los intersticios de la capa granular aparecen en blanco y los granos en negro. A continuación, se invierte la imagen binarizada de manera que las partículas pasan a ser representadas por píxeles blancos (figura 2.6 (c)).

En el siguiente paso se erosiona dicha imagen empleando un disco de tamaño el 80% del diámetro de las partículas en píxeles. Esta operación consiste en superimponer el centro del disco sobre cada uno de los píxeles de la imagen binarizada e invertida. Una vez centrado el disco en una posición se comprueba si algún píxel de la imagen que abarca el disco es negro. En caso positivo, todos estos píxeles pasan a ser negros. El resultado se muestra en la figura 2.6 (d) donde cada bolita está representada por un conjunto aislado de píxeles blancos. Mediante esta operación morfológica se consigue diferenciar las partículas.

Finalmente, se calcula el centroide de los *spots* blancos de la imagen erosionada mediante la ecuación 2.2 obteniendo una resolución subpíxel. En la figura 2.6 (e) se puede observar la imagen original sobre la cual se han representado con cruces rojas los centroides hallados.

A diferencia de la iluminación frontal, en este caso la posición hallada corresponde con mayor precisión al centro de las partículas. Hay que señalar que aunque el centroide se obtiene con una resolución subpíxel, el error respecto al centro real del grano es mayor. Esto es debido a que los *spots* obtenidos tras erosionar la imagen binarizada (figura 2.6 (d)) pueden no conservar



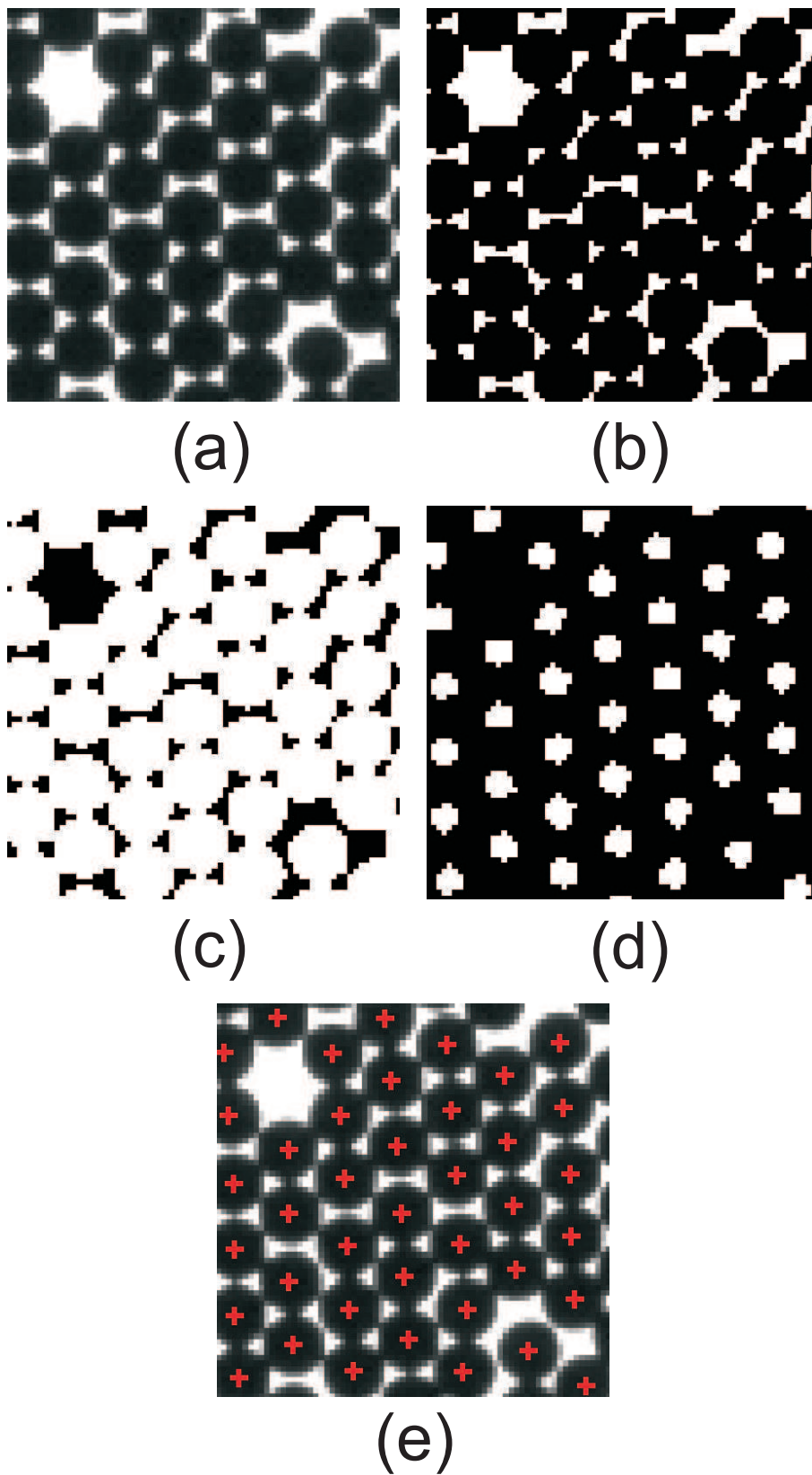


Figura 2.6: Detección del centroide de las partículas empleando iluminación posterior: (a) Fotografía original en escala de grises. (b) Imagen binarizada. (c) Igual que la imagen (b) pero invertida. (d) Imagen binarizada tras erosionarla con un disco de radio similar al de las partículas. (e) Imagen original sobre la que se han representado los centroides mediante cruces rojas.

perfectamente la forma original a causa de los contactos entre las partículas. En cualquier caso, se ha acotado el error que se comete en un 4% del diámetro de las esferas.

### Medición de los desplazamientos de las partículas y cálculo de velocidades

Una vez hallada la posición de las partículas se calcula su desplazamiento entre dos imágenes consecutivas. Para ello se ha desarrollado en MATLAB<sup>©</sup> un programa basado en técnicas de seguimiento de objetos en movimiento (*particle tracking*). La adquisición de imágenes se realiza a una frecuencia lo suficientemente alta como para asegurar que el desplazamiento de los granos entre dos imágenes sucesivas sea inferior a su propio radio.

En la figura 2.7 (a) se muestra un esquema de la posición de los centroides en la imagen N de una secuencia donde en rojo se ha marcado la partícula a seguir. Conociendo la posición de dicha partícula  $\vec{r}_i^N$  se comprueba si alguna partícula que aparece en la imagen N+1 se encuentra dentro de un círculo de radio  $\delta$ . El valor de  $\delta$  es aproximadamente 0,9 veces el radio de las partículas. Puesto que las partículas no se desplazan más de su propio radio entre dos imágenes sucesivas, en caso de encontrar un grano dentro del círculo, su posición  $\vec{r}_i^{N+1}$  es la que corresponde al desplazamiento de la misma. Conociendo la posición de la partícula en ambas fotografías podemos calcular su velocidad multiplicando la distancia recorrida  $\vec{r}_i^N - \vec{r}_i^{N+1}$  por la frecuencia de muestreo de la cámara (imágenes adquiridas por segundo).

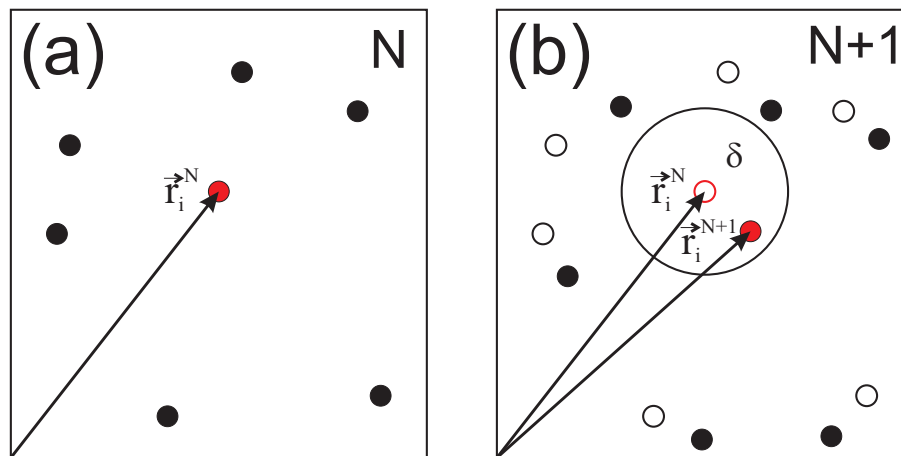


Figura 2.7: Esquema del seguimiento de las partículas en imágenes consecutivas. En (a) se muestra una serie de puntos que representan la posición de los centroides en la imagen N. En rojo se ha marcado el centroide a seguir. (b) Esquema de la situación de los centroides en la imagen N+1 (símbolos sólidos) junto con los correspondientes a la imagen N (símbolos huecos). La posición de la partícula en la imagen N+1 se ha marcado mediante el círculo sólido de color rojo que se encuentra dentro de la circunferencia de radio  $\delta$ .

Mediante el método anterior también se puede obtener la trayectoria completa de las partículas. Para ello simplemente se repite el proceso anterior para las sucesivas imágenes hasta que se llega al final de la secuencia o no se encuentra ningún grano dentro del círculo de radio  $\delta$ . Finalmente, se obtiene un archivo con las trayectorias de todas las partículas con la siguiente estructura:

|          |          |             |             |
|----------|----------|-------------|-------------|
| 1        | N        | $x_{1,N}$   | $y_{1,N}$   |
| 1        | N+1      | $x_{1,N+1}$ | $y_{1,N+1}$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$    | $\vdots$    |
| $i$      | N        | $x_{i,N}$   | $y_{i,N}$   |
| $i$      | N+1      | $x_{i,N+1}$ | $y_{i,N+1}$ |

### Medición de la fracción de compactación

Una variable importante en un medio granular es la fracción de compactación. La medición de esta magnitud se ha realizado a partir de las posiciones de las partículas en las fotografías con iluminación posterior. Esta elección se debe a que las posiciones halladas mediante ese método representan con mayor precisión el centro real de los granos.

En este trabajo, se han empleado dos métodos para calcular la fracción compactación del material granular. En ambos casos se define una región de interés de manera que en el primer caso se determina que partículas o fracción de las mismas se encuentran dentro de ella (figura 2.8). En el segundo método se construyen las celdas de voronoi de todas las partículas de la imagen, y se emplean en el cálculo únicamente aquellas cuyos vértices se encuentren dentro de la región de interés (ver figura 2.9). Hay que señalar que en ambos casos la fracción de compactación medida representa la proyección sobre el plano del empaquetamiento, que es realmente cuasibimensional (sección 2.2). Así, el área de las partículas se calcula como el correspondiente a un disco de tamaño igual al diámetro de los granos ( $\pi d^2/4$ ). Este hecho provoca que en ocasiones la fracción de compactación calculada pueda ser superior al valor del empaquetamiento hexagonal en dos dimensiones (0,902). En concreto, teniendo en cuenta el espesor de la capa granular, el valor máximo que se puede obtener es  $0,94 \pm 0,01$ . Se ha estimado que mediante ambos procedimientos el error que se comete en la determinación de la fracción de compactación es inferior al 5%. A continuación, se explican detalladamente ambos métodos.

### Determinación de partículas dentro de la región de medida

En este método se emplean los centroides de las partículas para determinar cuales o que fracción de las mismas se encuentra dentro de la región de interés. En la figura 2.8 se muestra una fotografía de la capa granular donde las líneas azules definen una caja donde se desea medir la fracción de compactación. En dicha imagen se han señalado los centroides de las partículas con diferentes símbolos para ilustrar las siguientes situaciones:

1. El grano se encuentra completamente fuera de la región de medida (o).
2. Toda la superficie de la partícula está contenida en zona de interés (\*).
3. La esfera está parcialmente dentro de la caja de medición ( $\times$ ).

De los casos anteriores, únicamente los dos últimos van a contribuir en el area ocupada por partículas en la zona de medición. Por tanto, la fracción de compactación se calcula de la siguiente manera:

$$\phi = \frac{N^* A_p + \sum_{i=1}^{N^{\times}} a_i}{A_r} \quad (2.3)$$

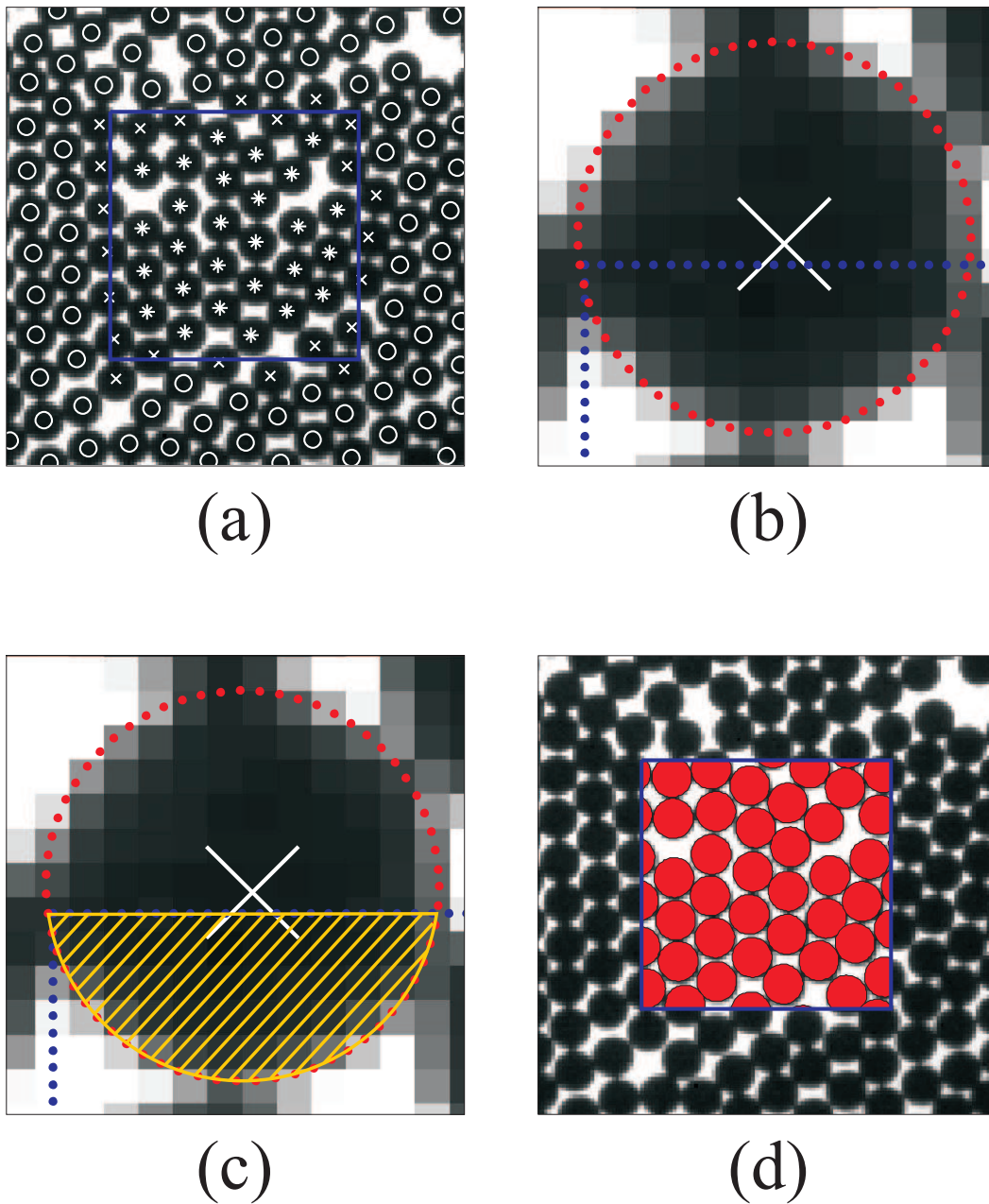


Figura 2.8: Fotografía para la determinación de la fracción de compactación. En (a) se muestra en línea continua azul la región de interés. Los diferentes símbolos de las partículas ilustran diferentes situaciones como se indica en el texto. (b) corresponde a una zona ampliada de la fotografía donde los puntos rojos representan el borde del grano y los azules los límites de la zona de medición. (c) Misma fotografía que en (b) sobre la que se ha señalado en amarillo la porción de bolita contenida en la caja. En (d) se muestra la fotografía (a) remarcando en rojo el área de la región de interés que está ocupada por partículas.

donde  $N^*$  y  $N^\times$  son respectivamente el número de partículas contenidas por completo y parcialmente en la caja,  $A_p$  es el área de una partícula ( $\pi d^2/4$ ),  $a_i$  es la porción de área de un grano que se encuentra parcialmente en el interior de la región de interés y  $A_r$  corresponde al área de la zona de medida.

Las áreas  $a_i$  de los diferentes granos contenidos parcialmente en la caja se determinan mediante la construcción de los polígonos formados por la superposición de las esferas y la región de medida. Para ello se elige una partícula como la que se muestra en la figura 2.8 (b) donde los puntos rojos corresponden a una circunferencia de radio igual a  $d/2$  en píxeles centrada en el centroide de la partícula. Nótese que los puntos azules representan a las líneas que delimitan la región de medida. A partir de los puntos rojos que se encuentran dentro de la caja y de los puntos azules que están dentro de la circunferencia, se obtiene el polígono marcado en línea continua amarilla en la figura 2.8 (c). El área de este polígono, que corresponde a la superficie ocupada por la bolita en la caja, se calcula numéricamente empleando un algoritmo basado en el teorema de Green [68].

La principal ventaja de este método respecto la construcción de las celdas de Voronoi es la posibilidad de hallar la fracción de compactación en zonas muy cercanas a la salida. Esto es debido a que el número de partículas dentro de la región de interés puede fluctuar de manera importante debido a la formación de arcos. Así, eventualmente puede darse el caso de que las celdas de Voronoi de las partículas dentro de la región no se encuentren completamente cerradas o su número no sea estadísticamente suficiente como para calcular la fracción de compactación.

### Construcción de las celdas de Voronoi

Una manera típica de hallar la fracción de compactación en medios discretos consiste en la construcción del diagrama de Voronoi a partir de las posiciones de las partículas. En el caso bidimensional, la malla de Voronoi consiste en un conjunto de polígonos que rodean a cada grano de manera que los lados de estos polígonos corresponden a la mediatriz del segmento que une los centros de dos partículas vecinas. En este trabajo se ha empleado una función ya implementada en MATLAB<sup>©</sup> que emplea la distancia euclidiana para definir los vecinos de cada grano.

En la figura 2.9 (a) se muestra una fotografía del material granular donde a partir de las posiciones de las partículas (cruces blancas) se han construido las celdas de Voronoi. De todos los polígonos obtenidos se seleccionan solo aquellos que tienen todos sus vértices dentro de la región de interés. Dividiendo el área de la partícula entre el área del polígono de Voronoi se obtiene la fracción de compactación correspondiente al espacio asociado a cada grano. Al igual que en el método anterior, el área de la partícula corresponde a una circunferencia de su mismo radio y la de los polígonos se calcula numéricamente. Finalmente, la fracción compactación en la región se halla realizando la media aritmética de todos ellos. En la figura 2.9 (b) se muestra la fotografía de las partículas en el interior del silo, donde se han marcado los polígonos de Voronoi que se encuentran dentro de la zona de medida, así como las partículas que contienen.

Este método presenta la ventaja de aportar más información aparte de la fracción de compactación media en la zona de interés. Así, los polígonos de Voronoi aportan información estructural del medio granular, además de permitir calcular un valor de fracción de compactación asociado a cada grano. Sin embargo, este método no es adecuado cuando la región de interés se encuentra cerca del orificio por los motivos explicados anteriormente.

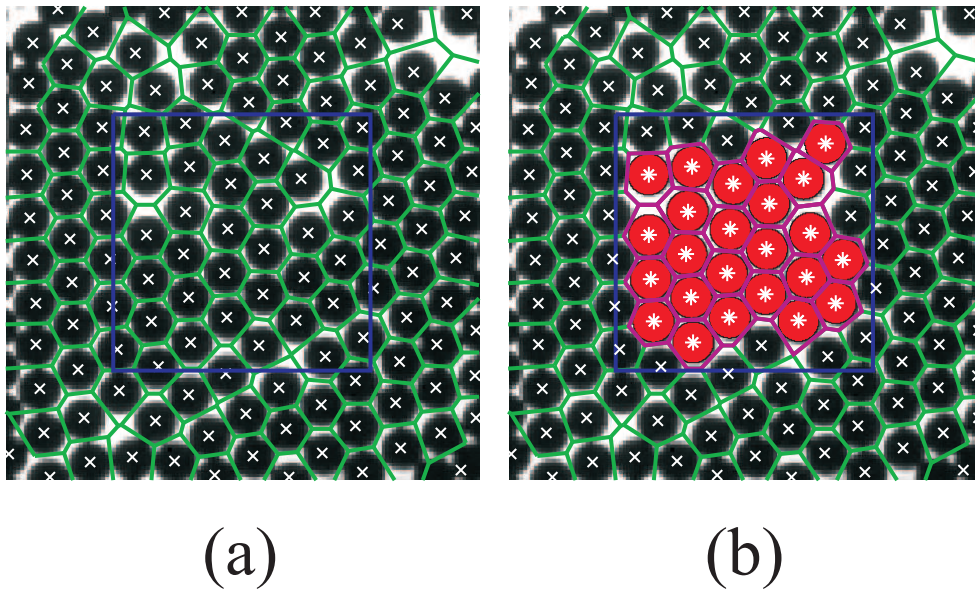


Figura 2.9: Determinación de la fracción de compactación en una región cuadrada (línea continua azul) mediante la construcción de las celdas de Voronoi. En (a) se muestran los polígonos obtenidos (línea continua verde) a partir de las posiciones de los granos (cruces blancas). En la figura (b) se muestran en color magenta las celdas de voronoi que se encuentran completamente dentro de la zona de interés a partir de las cuales se calcula la fracción de compactación. En rojo se ha marcado la superficie de las partículas contenidas en dichas celdas.

### Diagramas espacio temporales en la salida del silo

Para obtener una gran resolución temporal del instante de paso de cada una de las partículas a través de la abertura, se han construido diagramas espacio temporales a partir de filmaciones realizadas a alta velocidad. El proceso consiste en adquirir de los fotogramas una única línea de píxeles que abarca todo el orificio de salida (ver figura 2.10 (a)). Esta línea de píxeles se apila a la frecuencia de muestreo de la cámara formando una imagen donde la dimensión vertical corresponde al tiempo y la horizontal es la distancia. En la figura 2.10 (b) se muestra una sección de un diagrama espacio temporal, para el cual se han iluminado frontalmente las partículas. Como se puede observar en dicha imagen, el resultado es un conjunto de manchas blancas que corresponden a cada partícula que ha pasado a través de la abertura. Una vez obtenido el diagrama se localiza el centroide de cada punto blanco utilizando el mismo procedimiento que se describió anteriormente.

Este método permite obtener con una gran resolución temporal el instante de paso de las partículas sin un coste computacional alto como ocurriría en el caso de emplear técnicas de *particle tracking*. A partir de los datos obtenidos es posible calcular con una alta precisión el flujo en ventanas temporales muy cortas para el estudio sus fluctuaciones.

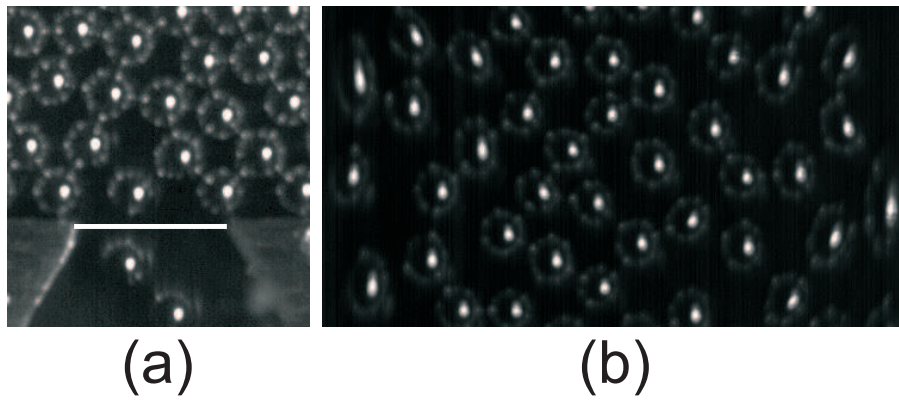


Figura 2.10: Diagrama espacio temporal de las partículas atravesando la abertura. En (a) se muestra un fotograma de la salida del silo, donde se ha marcado con una línea blanca la región de la imagen a partir de la cual se construye el diagrama espacio temporal. En la figura (b) se presenta una parte de un diagrama espacio temporal, en el cual se puede observar como cada partícula que ha atravesado la abertura deja una mancha blanca.

En este capítulo se ha descrito el sistema experimental utilizado. Para ello se han explicado los diferentes equipos empleados y las razones por las cuales se han elegido. Además se ha presentado el protocolo de medida, así como las técnicas de tratamientos de imágenes implementadas para obtener los resultados que se mostrarán a continuación.

# Capítulo 3

## Formación de atascos

En este capítulo se mostrarán los principales resultados obtenidos sobre el rol de los atascos en la descarga de un silo. En primer lugar se describirá detalladamente la distribución de los tamaños de avalancha y su interpretación en base a un modelo probabilístico. En segundo lugar, se hará referencia al tamaño medio de avalancha y se discutirá sobre la supuesta existencia de un tamaño crítico de orificio por encima del cual no se producirían atascos. Finalmente, estos mismos datos se expondrán de un modo alternativo empleando la probabilidad de atasco.

### 3.1 Tamaño de avalancha

En primer lugar se ha realizado un estudio estadístico del tamaño de avalancha  $s$ , definido como el número de partículas descargadas entre dos atascos sucesivos. En la figura 3.1 se muestran los tamaños de las sucesivas avalanchas para un determinado valor del tamaño del orificio ( $R$ ). En el eje de ordenadas se representan los tamaños y en las abscisas el índice  $n$  que indica el puesto correlativo en que aparecen. Como se puede observar, los tamaños de avalancha presentan una distribución amplia, llegando a abarcar hasta dos ordenes de magnitud. Representando los datos en escala logarítmica (gráfica 3.1 (b)) se obtiene una distribución homogénea de puntos. Esta característica es un indicio de la ausencia de correlación entre los sucesivos tamaños de avalancha. Para comprobar este hecho de manera más rigurosa, se ha realizado un diagrama de primer retorno (figura 3.2) y se ha calculado la función de autocorrelación (figura 3.3).

En el diagrama de primer retorno se representa el tamaño de una determinada avalancha  $s_{n+1}$  frente al tamaño de la avalancha inmediatamente anterior  $s_n$ . Puesto que las avalanchas pequeñas son mucho más probables que las de tamaño grande, de la figura 3.2 (a) es difícil concluir si existe algún tipo de correlación. Sin embargo, al representar estos mismos datos en escala logarítmica (gráfica 3.2 (b)) se observa una nube de puntos homogéneamente distribuida que indica la ausencia de correlación entre los tamaños de avalanchas sucesivas.

En la gráfica 3.3 se muestran las funciones de autocorrelación ( $R_h$ ) de los tamaños de avalancha (rojo) y de una serie de números aleatorios con distribución exponencial (azul). Como se puede observar, en ambos casos  $R_h$  decae bruscamente de la misma manera sin presentar ningún pico indicativo de la existencia de correlación.



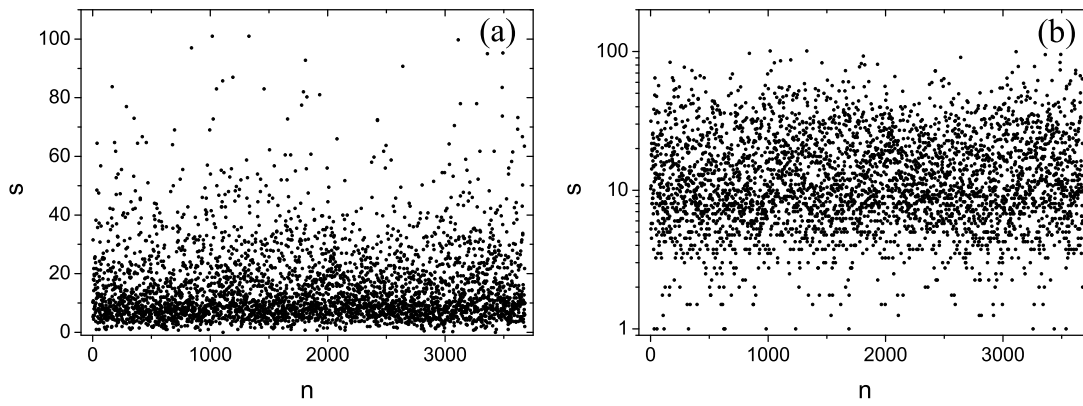


Figura 3.1: Tamaño de las avalanchas sucesivas obtenidas para  $R = 1,26d$ . El eje de abscisas indica la posición correlativa  $n$  de cada avalancha y el eje de ordenadas el número de partículas descargadas  $s$ . (a) escala lineal y (b) escala semilogarítmica.

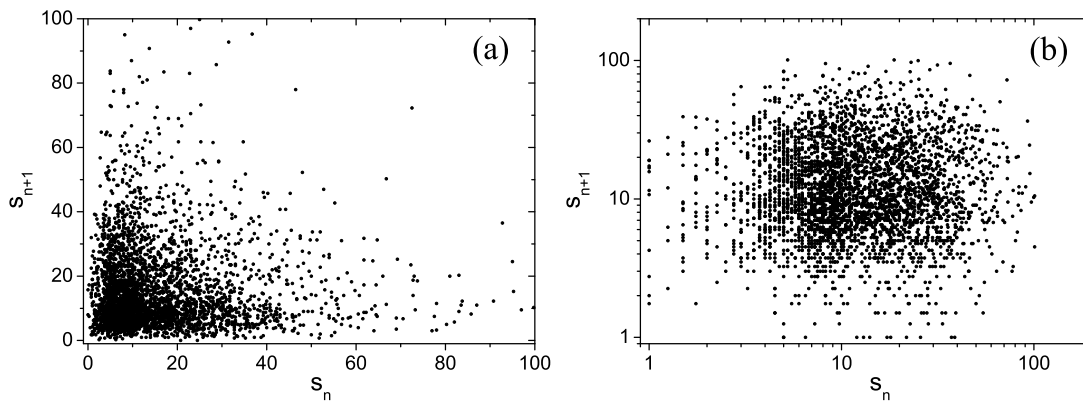


Figura 3.2: Diagrama de primer retorno del tamaño de las avalanchas para  $R = 1,26d$ . En el eje de ordenadas se representa el tamaño de una avalancha  $s_{n+1}$ , y en el eje de abscisas el tamaño de la avalancha inmediatamente anterior  $s_n$ . (a) Escala lineal. (b) Escala logarítmica.

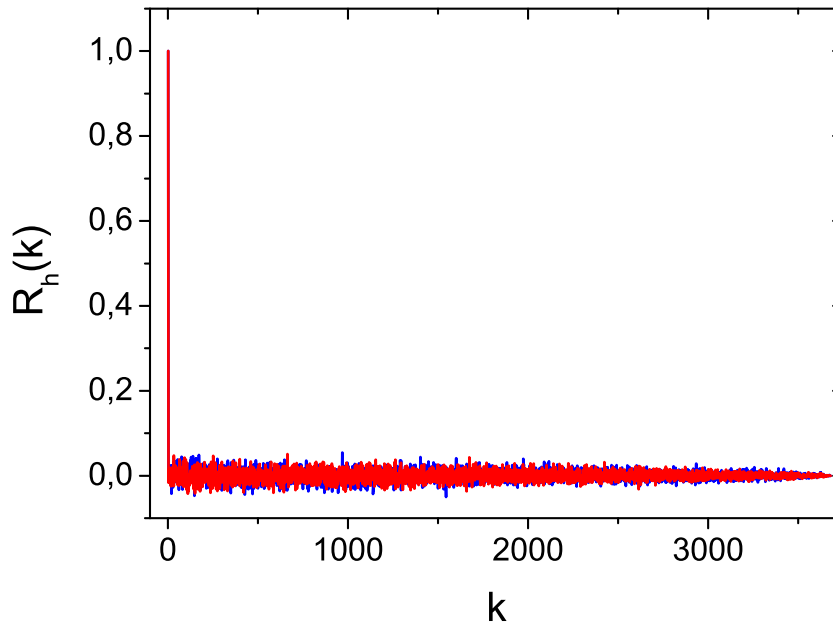


Figura 3.3: Funciones de autocorrelación  $R_h$  de los tamaños de avalancha para  $R = 1,26d$  (rojo) y de una serie de números aleatorios con distribución exponencial (azul).

### Distribución de los tamaños de avalancha

A continuación se describe detalladamente la distribución de los tamaños de las avalanchas. Se han calculado los histogramas que representan las funciones de densidad de probabilidad de  $s$  para cada orificio. Para ello se han empleado las mediciones de al menos 3000 avalanchas, manteniéndose todas las variables fijas. El número y rango de las barras de los histogramas se determina a partir de la avalancha máxima  $s_{max}$ . En todos los casos, se elige un ancho de barra que representa un número entero de partículas, de manera que el número de barras no sea superior a 100. Una vez seleccionada la anchura de las divisiones se contabiliza el número de avalanchas registradas en cada intervalo. De esta manera se obtiene un histograma como el de la figura 3.4. A continuación, la función de densidad de probabilidad se calcula normalizando el área de los histogramas a la unidad (gráfica 3.5).

En el histograma se pueden diferenciar dos zonas separadas por el tamaño de avalancha más probable ( $s_M$ ). Para  $s > s_M$ , la probabilidad  $n_R(s)$  decae con  $s$ . Sin embargo, en el intervalo  $[0, s_M]$  aumenta con  $s$ . Este tipo de distribuciones son muy comunes en los medios granulares. Así, F. Radjai y sus colaboradores [69] y J. H. Snoeijer *et al.* [70], encontraron el mismo tipo de histogramas para la distribución de fuerzas en el interior de un medio granular. Por otro lado, estas distribuciones también se han obtenido para los tamaños de avalancha en la descarga de silos en dos [26, 27, 71, 72] y tres dimensiones [30, 31].

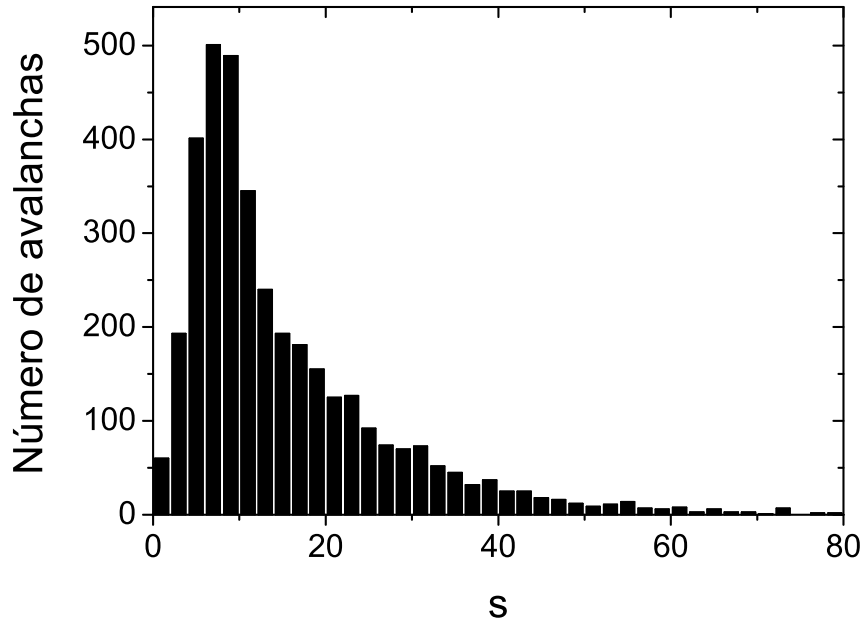


Figura 3.4: Histograma del tamaño de avalanchas  $s$  para  $R = 1,26d$ . En este caso debido a que  $s_{max} < 100$ , el ancho de las barras corresponde a una partícula.

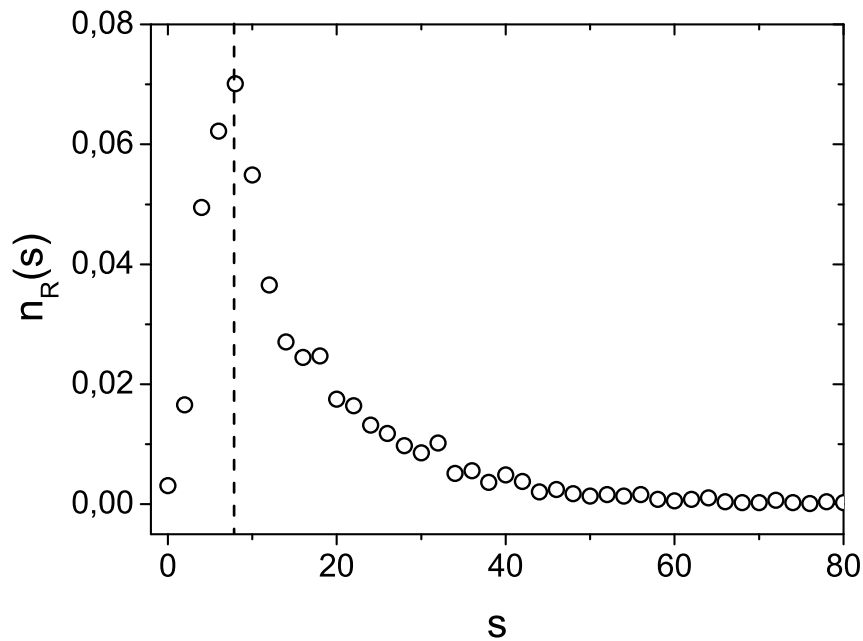


Figura 3.5: Función de densidad de probabilidad  $n_R(s)$  de encontrar una avalancha de tamaño  $s$  para  $R = 1,26d$ . Los datos corresponden a los mostrados en la figura. 3.4, pero normalizados para que el área bajo los puntos sea la unidad. La línea de trazos indica el tamaño de avalancha más probable  $s_M$ .

## Avalanchas pequeñas

En el intervalo de tamaños de avalanchas menores que  $s_M$ , la función de densidad de probabilidad  $n_R(s)$  crece con  $s$ . En esta región es difícil establecer el comportamiento de la distribución. Esto se debe al bajo número de puntos del que se dispone. En el caso de orificios pequeños,  $s_M$  es tan pequeño que apenas se puede estudiar su funcionalidad. Por otro lado, cuando la abertura es grande y por tanto  $s_M$  es mucho mayor que cero, el número de avalanchas necesarias para poder tomar una anchura pequeña de las barras es demasiado elevado para obtenerlo experimentalmente. Como se comenta en [31], esta parte de la distribución es probable que se encuentre influenciada por el método empleado para deshacer los atascos. Al soplar en el orificio se genera un estado transitorio en el flujo de partículas, durante el cual la densidad es menor que una vez alcanzado un flujo estacionario, y por tanto la probabilidad de que se forme un arco en la salida es menor. En cualquier caso, el intervalo de esta primera región de la distribución es mucho más pequeña que la correspondiente a tamaños de avalancha mayores que  $s_M$ . Por tanto, es razonable despreciarla frente al conjunto global del histograma.

## Decaimiento exponencial

En el caso de avalanchas de tamaño mayor que la moda del histograma, la distribución  $n_R(s)$  decrece de forma exponencial. Esta característica se observa claramente en la figura 3.6 donde se representa la función de densidad de probabilidad de la gráfica 3.5 en escala semilogarítmica. En trazo discontinuo se ha dibujado el ajuste lineal obtenido de los datos para  $s > s_M$ . Este comportamiento es común para todas distribuciones independientemente de la longitud de la abertura. La única diferencia entre los distintos tamaños de orificio es el valor del parámetro característico de la función exponencial. Así, cuanto mayor es la abertura, el decaimiento es menos pronunciado, de manera que la distribución abarca tamaños de avalancha más grandes. Este hecho es razonable, ya que cuanto más grande sea el orificio de salida, más difícil es que se forme un arco que interrumpa el flujo y por tanto, el tamaño de las avalanchas es mayor.

Este mismo comportamiento de los histogramas ya había sido observado por I. Zuriguel *et al.* [30, 31] en la descarga de un silo cilíndrico. En dicho trabajo se propone un modelo probabilístico basado en un proceso de percolación unidimensional. Como se describió en la sección 1.3, este modelo es capaz de explicar el decaimiento exponencial de las distribuciones empleando como único parámetro la probabilidad  $p_R$  de que una partícula atraviese una abertura de tamaño  $R$ .

$$n_R(s) = (1 - p_R)p_R^s \quad (3.1)$$

Como veremos a continuación este modelo también es válido para el caso bidimensional. La única diferencia es el valor de  $p_R$  que depende de la dimensionalidad del sistema. Esto sugiere que los mecanismos físicos que forman los atascos en tres y dos dimensiones son los mismos.

## Tamaño característico de avalancha

Como se ha mencionado anteriormente, el decaimiento exponencial se encuentra presente en todas las distribuciones independientemente del tamaño del orificio. Este hecho es un indicio de la existencia de una escala característica. En trabajos anteriores [30, 69] se muestra que dicha escala es el tamaño medio de avalancha  $\langle s \rangle$ , la cual se define como:

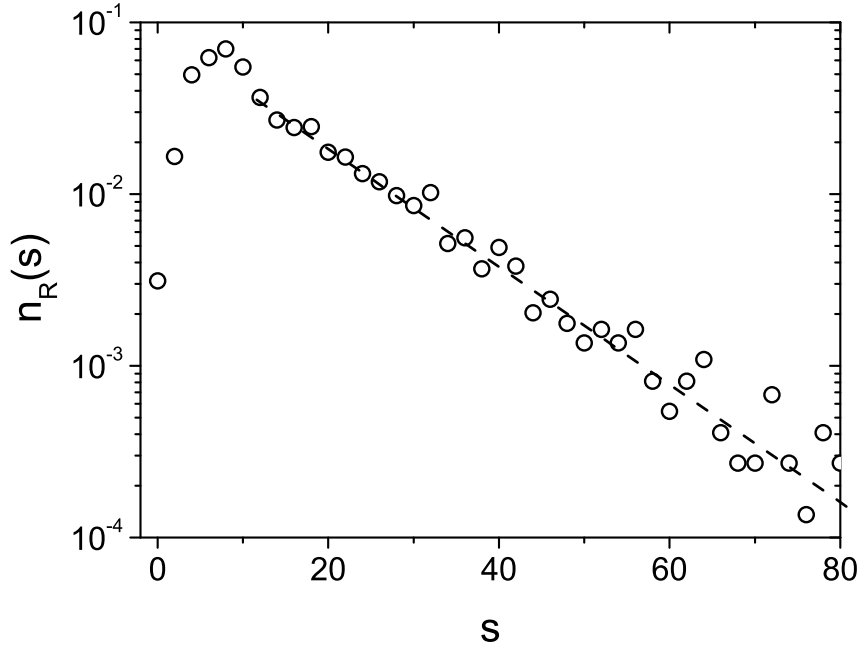


Figura 3.6: Función de la densidad de probabilidad de encontrar una avalancha de tamaño  $s$  en escala semilogarítmica para  $R = 1,26d$ . La línea de trazos sirve de guía para observar el comportamiento del histograma a partir de  $s_M$ .

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{n=1}^{N_t} s_n}{N_t} \quad (3.2)$$

donde  $N_t$  representa el número total de avalanchas registradas para un determinado tamaño del orificio. Este parámetro permite colapsar las distribuciones en una única curva para todas las aberturas representando los datos en función del tamaño de avalancha reescalada  $s^* = s/\langle s \rangle$ . El colapso de las funciones de densidad de probabilidad para los diferentes tamaños de salida estudiados se muestran en la figura 3.7. Como se puede observar, a excepción de la zona de  $s < s_M$ , todos los histogramas coinciden en una única curva. Por lo tanto, considerando que el peso de la primera parte de la distribución en el conjunto del mismo es poco significativo, se puede afirmar que el parámetro característico de los histogramas es su avalancha media  $\langle s \rangle$ .

### 3.2 Existencia de un tamaño crítico de orificio

Una de las cuestiones más importantes en la descarga de silos es si existe un tamaño crítico del orificio por encima del cual no se produzcan atascos. En caso de ser cierto, este hecho implicaría la posible existencia de una transición de fase termodinámica entre un estado “atascado” y un estado “no atascado”. Así, en el caso de orificios por debajo del tamaño crítico, el flujo de material sería un estado metaestable ya que en algún momento se produciría un atasco. Por el contrario, no se conoce ningún argumento físico que justifique la imposibilidad de formarse arcos de todos los

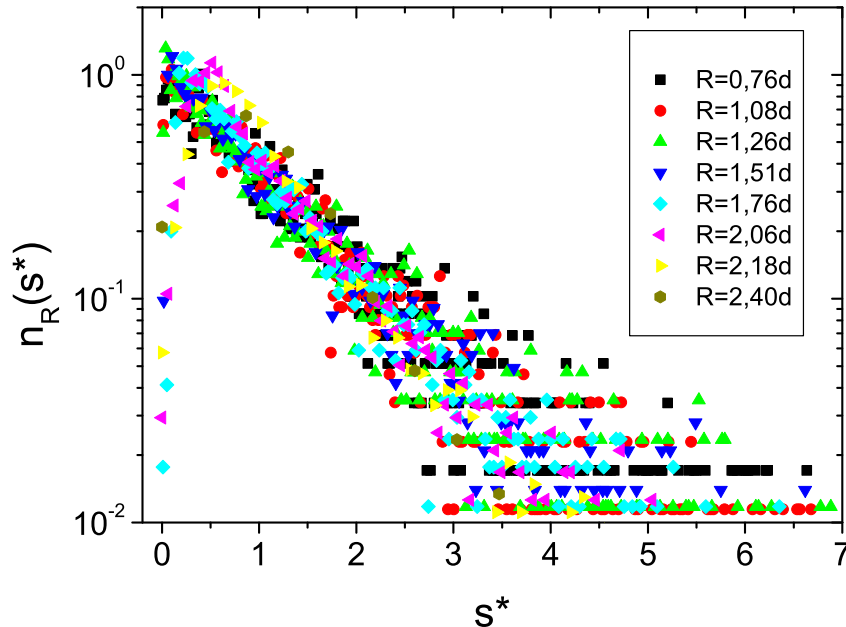


Figura 3.7: Funciones de densidad de probabilidad de la variable reescalada  $s^*$  para diferentes tamaños del orificio de salida ( $0,76d \leq R \leq 2,40d$ ) como se indica en la leyenda.

tamaños. Esto implicaría que por muy grande que sea el orificio, si se espera el tiempo suficiente se formará un arco que será capaz de producir un atasco.

Para intentar aclarar este paradigma se estudia la dependencia del parámetro característico  $\langle s \rangle$  con  $R$ . En el silo tridimensional [31], se propuso empíricamente la posible existencia de una divergencia de  $\langle s \rangle$  siguiendo una ley de potencias a medida que  $R$  se acerca a un determinado valor:

$$\langle s \rangle = \frac{C}{(R_c - R)^\gamma} \quad (3.3)$$

siendo  $C$  una constante de proporcionalidad,  $\gamma$  el exponente con que diverge la ley de potencias y  $R_c$  el tamaño crítico de orificio por encima del cual no se producen atascos. Como se muestra en la figura 3.8, la ecuación 3.3 ajusta razonablemente bien los datos experimentales obtenidos en este trabajo. Los valores de los parámetros de ajuste obtenidos son  $C = 1,6 \times 10^7 \pm 0,1 \times 10^7$ ;  $R_c = 4,3 \pm 0,1d$  y  $\gamma = 12,7 \pm 0,1$ . El tamaño crítico del orificio es coherente con lo observado experimentalmente en un periodo de tiempo accesible. Sin embargo, es de destacar el elevado valor del exponente de la divergencia, el cual es inusual si comparamos este comportamiento con una transición de fase.

En un trabajo reciente [26] se muestra que para una tolva bidimensional el tamaño medio de avalancha también puede ajustarse empleando una exponencial cuadrática ( $C' \exp[\gamma' R^2]$ ) y una exponencial recíproca ( $C'' \exp[\gamma'' / (R_c - R)]$ ) con aproximadamente la misma exactitud. El hecho de que los datos puedan ajustarse igualmente bien con diferentes expresiones, divergentes y no divergentes, implica que la existencia de un tamaño crítico de orificio no está clara. Es necesario

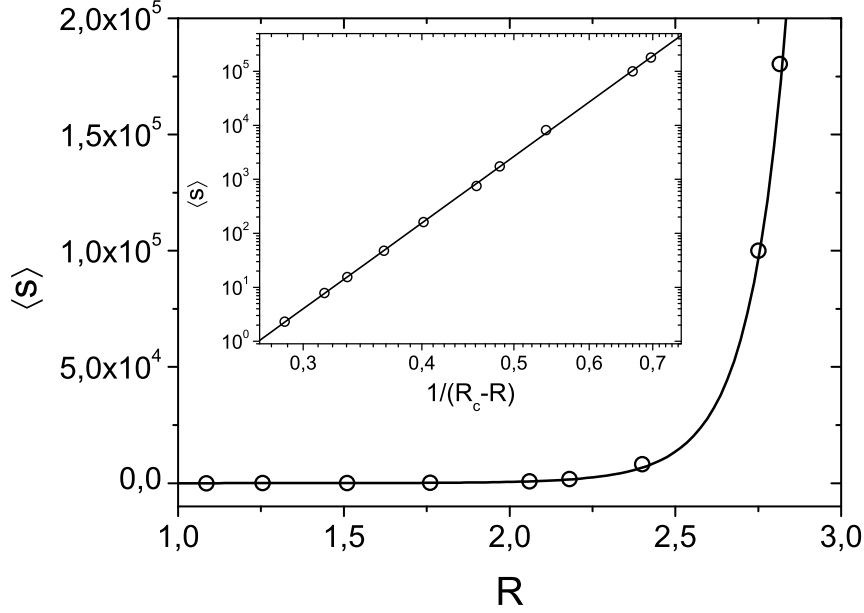


Figura 3.8: Resultados experimentales de la avalancha media  $\langle s \rangle$  en función de  $R$ . La línea negra de trazo continuo corresponde al ajuste de la ley de potencias mostrada en la ecuación 3.3. En el recuadro interno se representa en escala logarítmica  $\langle s \rangle$  en función de  $1/(R_c - R)$  mostrando la bondad del ajuste.

remarcar que ninguna de estas expresiones se deriva de un modelo del proceso de atasco. A continuación, se propondrá una expresión para  $\langle s \rangle$  que depende de  $R$  y puede ser obtenida de un modelo probabilístico.

Una de las cuestiones más misteriosas sobre los atascos concierne a la relación entre la distribución del tamaño de las avalanchas y el proceso de formación de los arcos. Una inspección minuciosa del movimiento de las partículas cerca de la salida sugiere que la formación de arcos es un proceso local. Sin considerar los detalles del proceso por el cual se genera un arco, el tamaño medio de avalancha indudablemente está relacionado con la longitud de la abertura a través del ancho que un arco puede abarcar justo sobre él. Regresando al modelo probabilístico propuesto en la ecuación 3.1 y asumiendo que  $p_R$  permanece constante para todos los granos durante una avalancha, se pueden relacionar  $p_R$  y el tamaño medio de avalancha. Así, el primer momento de la distribución descrita en la ecuación 3.1 puede ser expresado como:

$$\langle s \rangle = \frac{p_R}{1 - p_R} \quad (3.4)$$

En un estudio de la obstrucción de un tamiz durante la filtración de partículas suspendidas en un gel, Roussel y sus colaboradores [73] estimaron la probabilidad  $\tilde{p}$  que un número  $\eta'$  de esferas se encuentren en contacto en el momento de atravesar un orificio, lo cual es condición necesaria para formar un arco. Por tanto, siempre que  $\tilde{p}$  no sea solo proporcional a la probabilidad que una partícula coincida con otras  $\eta' - 1$  en el momento de paso a través del orificio, sino que también sea proporcional a la probabilidad de formarse un arco, se puede escribir  $p_R = 1 - \tilde{p}$ .

Extendiendo esta idea a la configuración de un silo 2D,  $p_R$  se puede estimar de la probabilidad  $\tilde{p}$  de encontrar un arco de  $\eta$  granos obtenidos en simulaciones. Resultados de dos técnicas diferentes de simulación [34, 74] usadas para modelar discos en un contenedor bidimensional muestran que  $\tilde{p} = A \exp[-B\eta^2]$ . El número medio de granos que típicamente bloquean el orificio debería ser una función suave de la longitud de la abertura. Si se asume la hipótesis más sencilla, que consiste en que  $\eta$  crece linealmente con  $R$ , es decir,  $\eta = \eta_0 R$  [75], entonces la ecuación 3.4 puede ser escrita como:

$$\langle s \rangle = A^{-1} e^{B(\eta_0 R)^2} - 1 \quad (3.5)$$

Curiosamente, esta función es una de las varias expresiones que K. To [26] propone para ajustar sus datos para una tolva bidimensional. En la figura 3.9 se observa que la representación del  $\ln(\langle s \rangle + 1)$  frente a  $R^2$  da como resultado una línea recta en acuerdo con la ecuación 3.5. Por consiguiente, la explicación probabilística del proceso de formación de arcos es capaz de describir el crecimiento exponencial cuadrático de  $\langle s \rangle$  con  $R$ . Además, esta interpretación predice que no existe un tamaño crítico de orificio, puesto que el tamaño medio de avalancha permanece finito para cualquier valor de  $R$ .

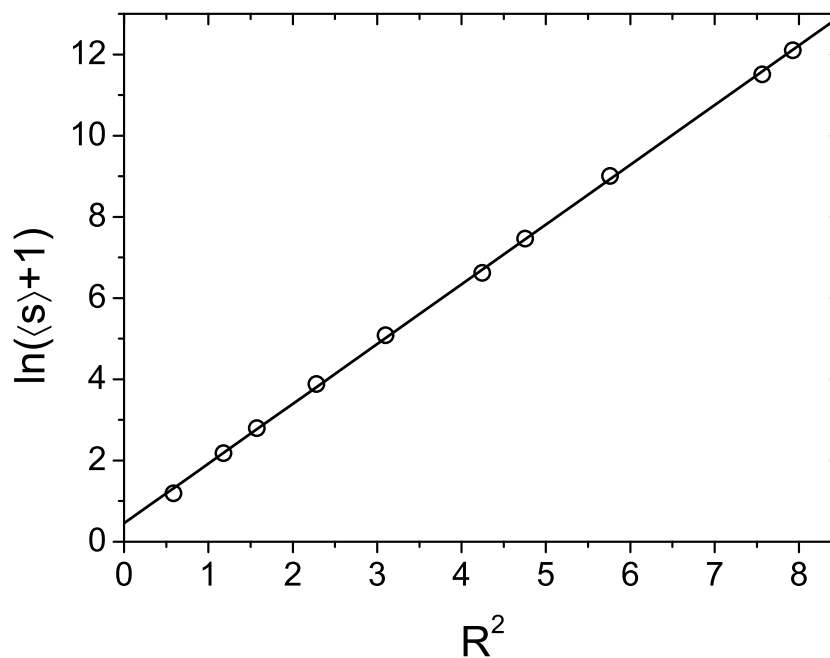


Figura 3.9: Representación de  $\ln(\langle s \rangle + 1)$  frente a  $R^2$ . Los círculos corresponden a los datos experimentales y la línea negra de trazo continuo a un ajuste lineal.

### 3.3 Probabilidad de atasco

Uno de los parámetros interesantes de la descarga es la probabilidad de atasco  $J$  que se define como la probabilidad de que el flujo se interrumpa de manera definitiva antes de que caigan  $N$



granos para un determinado  $R$ . A partir de la distribución de los tamaños de avalancha  $n_R(s)$ , la probabilidad de atasco se puede escribir como

$$J(N, R) \equiv 1 - \sum_{s=N}^{\infty} n_R(s) \quad (3.6)$$

que simplemente es la probabilidad de que una avalancha tenga un tamaño menor que  $N$  para un valor dado de  $R$ . Fijando  $N$  en un cierto valor, se puede calcular  $J_N(R)$  a partir de los datos de los tamaños de avalancha correspondientes a todos los valores de  $R$  explorados. En la gráfica 3.10 se muestra la probabilidad de que se produzca un atasco antes de que caigan 100 partículas. En el caso de orificios pequeños  $J_{100}$  es cercana a la unidad, lo que quiere decir que casi siempre se forma un atasco antes de que caigan 100 granos. Sin embargo, para  $R$  mayores, la probabilidad de atasco comienza a disminuir, llegando a ser prácticamente nula para  $R \geq 2,80d$ . Este mismo cálculo de  $J_N(R)$  se ha realizado para diversos valores de  $N$ , obteniendo los datos que se muestran figura 3.11.

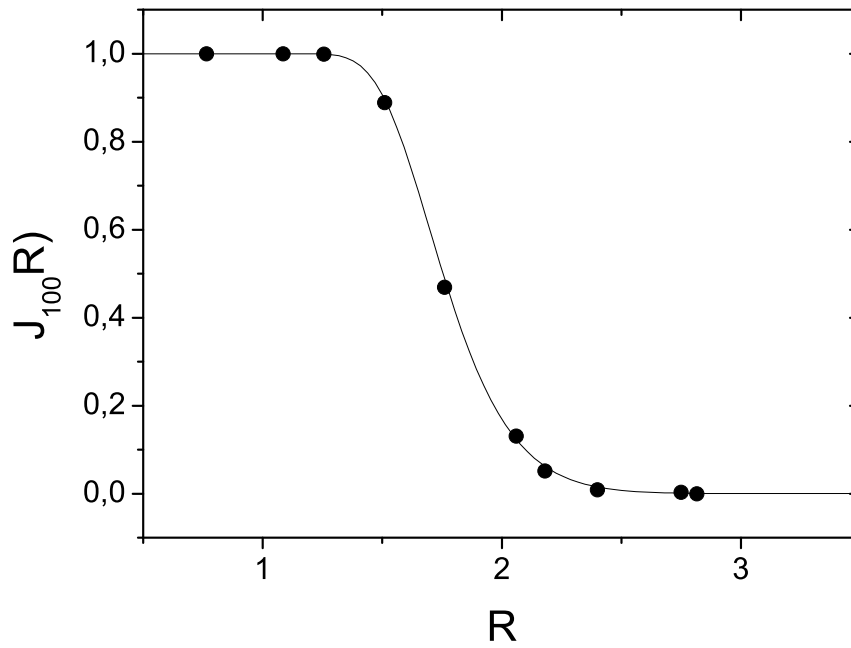


Figura 3.10: Probabilidad  $J_{100}$  de que se produzca un atasco antes de que caigan 100 granos. La línea negra de trazo continuo corresponde a los datos predichos por la ecuación 3.8.

Regresando a la expresión 3.6,  $n_R(s)$  puede sustituirse por el modelo propuesto en la ecuación 3.1, de manera que se relaciona  $J$  con la probabilidad de paso de las partículas  $p_R$ , y por tanto con la tamaño medio de avalancha  $\langle s \rangle$ . De este modo, a partir de las ecuaciones 3.1, 3.4 y 3.6, se puede escribir:

$$J_N(R) = 1 - p_R^N = 1 - \left( \frac{\langle s \rangle}{1 + \langle s \rangle} \right)^N = 1 - e^{N \ln(1 + \langle s \rangle)^{-1}} \rightarrow 1 - e^{-N/\langle s \rangle} \quad (3.7)$$

Sustituyendo la ecuación 3.5 en la expresión anterior, y para el límite en que  $s \gg 1$ :

$$J_N(R) = 1 - e^{-NAe^{-B(\eta_0 R)^2}} \quad (3.8)$$

En la figura 3.11 se muestran las curvas obtenidas mediante la ecuación 3.8, donde los valores de  $A$  y  $B\eta_0^2$  se obtienen a partir del ajuste de los datos mostrados en la gráfica 3.9 con la función 3.5. Como se puede observar, el acuerdo entre los datos experimentales y los predichos por la expresión obtenida es muy satisfactorio.

Una consecuencia de la función 3.8 es que la representación de  $J_N(R)$  respecto a la variable reescalada  $x = NAe^{-B(\eta_0 R)^2}$  para diferentes valores de  $N$  colapsa en una curva universal, concretamente  $1 - e^{-x}$ . Este colapso se representa en la figura 3.12. Cabe resaltar que los datos colapsados no conducen a una función escalón, en acuerdo con el hecho de que las ecuaciones 3.5 y 3.8 no contienen un tamaño crítico del orificio por encima del cual no se producen atascos.

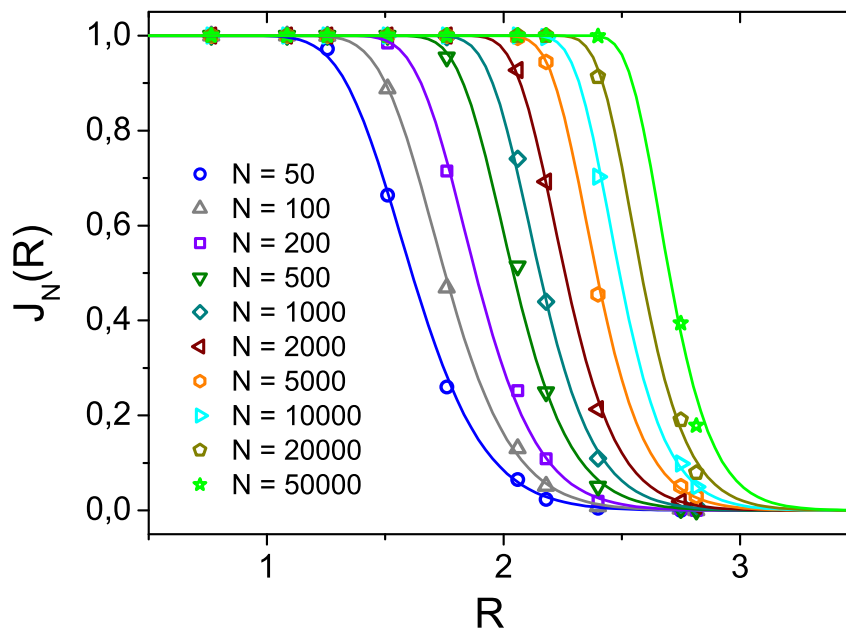


Figura 3.11: Probabilidad de atasco  $J_N$  en función de  $R$ . Cada conjunto de símbolos representa un valor diferente de  $N$  comprendido entre 50 y 50000, como se indica en la leyenda. Las líneas de colores en trazo continuo corresponden a la probabilidad de atasco obtenida mediante la ecuación 3.8.

Resumiendo los resultados mostrados en este capítulo, se puede concluir que a partir de una interpretación probabilística del proceso de formación de los atascos, se obtiene una expresión para la dependencia de la avalancha media con el tamaño del orificio. Esta expresión conduce a la no existencia de un tamaño crítico de la abertura para la aparición de atascos. Además, se ha observado que el comportamiento de las distribuciones de tamaños de avalancha es similar al obtenido para el caso de un silo cilíndrico [30, 31]. Este hecho sugiere que los mecanismos implicados en la formación de atascos son los mismos independientemente de la dimensionalidad del sistema.

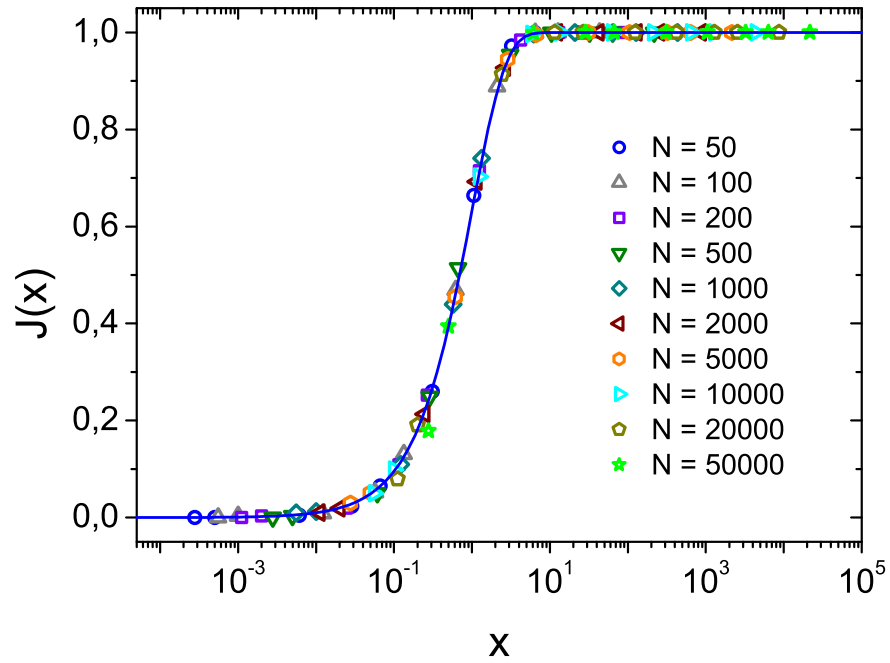


Figura 3.12: Probabilidad de atasco  $J$  en función de la variable reescalada  $x = NAe^{-B(\eta_0 R)^2}$ . Los diferentes símbolos corresponden a los diferentes valores de  $N$  que se muestran en la leyenda. La línea de trazo continuo es la función  $1 - \exp(-x)$ .

# Capítulo 4

## Flujo

En este capítulo se muestran los resultados obtenidos sobre del caudal de descarga a través del orificio de la base. Este estudio se ha llevado a cabo para un amplio rango de orificios, abarcando tanto aberturas pequeñas donde la formación de atascos es usual, como salidas grandes, donde el flujo de descarga es continuo. En primer lugar, se lleva a cabo un estudio microscópico del proceso mediante la caracterización de la velocidad y la fracción de ocupación en el orificio. A partir de dichos datos se deriva una expresión que describe el caudal de descarga y concuerda con las mediciones experimentales. Finalmente, se estudia el flujo resuelto en el tiempo, caracterizando sus fluctuaciones y comparándolas para distintos tamaños de la abertura.

### 4.1 Velocidad de las partículas en la salida

El primer objetivo de este capítulo es medir la velocidad de las partículas a la salida del silo. Como se explicó en la sección 1.4, la aproximación más aceptada en la literatura asume que la velocidad de las partículas en el interior del silo es prácticamente nula comparada con la que poseen al salir. Así, se supone que los granos salen del contenedor con una velocidad adquirida por su caída libre desde una altura proporcional al tamaño del orificio. Esta hipótesis implica que la componente vertical de la velocidad de las partículas “ $v_z$ ” tiene que ser proporcional a  $R^{1/2}$ .

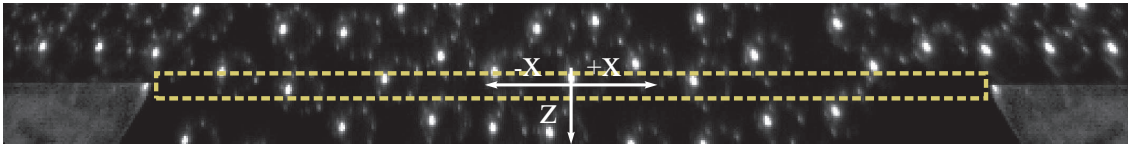


Figura 4.1: Fotografía de las partículas a la salida del silo. La región rectangular delimitada por la línea de trazos corresponde a la zona donde se ha medido la velocidad de los granos.

La medición de la velocidad de las partículas se ha realizado en una región como la que se muestra con línea de trazo discontinuo en la figura 4.1. Dicha región se encuentra centrada en el orificio y tiene una longitud igual al tamaño de la salida y una anchura de 0,5 veces el diámetro de los granos. A continuación se muestran los resultados obtenidos de dichas mediciones.

## Perfiles de velocidad

En primer lugar se ha medido el perfil de las componentes horizontal  $v_x$  y vertical  $v_z$  de la velocidad a lo largo del orificio de salida. Dichos perfiles se construyen dividiendo verticalmente la longitud de la abertura en pequeños segmentos idénticos de tamaño 0,3 veces el diámetro de las bolitas. La velocidad media de esos segmentos se calcula teniendo en cuenta aquellas partículas que pasan a través de cada uno de ellos.

En la gráfica 4.2 se muestran los perfiles horizontales de  $v_x$  y  $v_z$  para una abertura de tamaño  $R = 8,00d$ . Nótese que el origen del eje abscisas corresponde al centro del orificio. Como se puede observar los perfiles de velocidad no son homogéneos a lo largo del orificio. En el caso de  $v_x$ , su magnitud en valor absoluto disminuye al acercarse al centro de la salida siendo cero justamente en ese lugar. En cambio, el perfil de  $v_z$  presenta su máximo en  $x = 0$  y decrece a medida que se aproxima a los bordes del orificio. De ahora en adelante, puesto que el caudal de descarga viene determinado por la componente vertical de la velocidad, se muestran únicamente los resultados obtenidos para  $v_z$ .

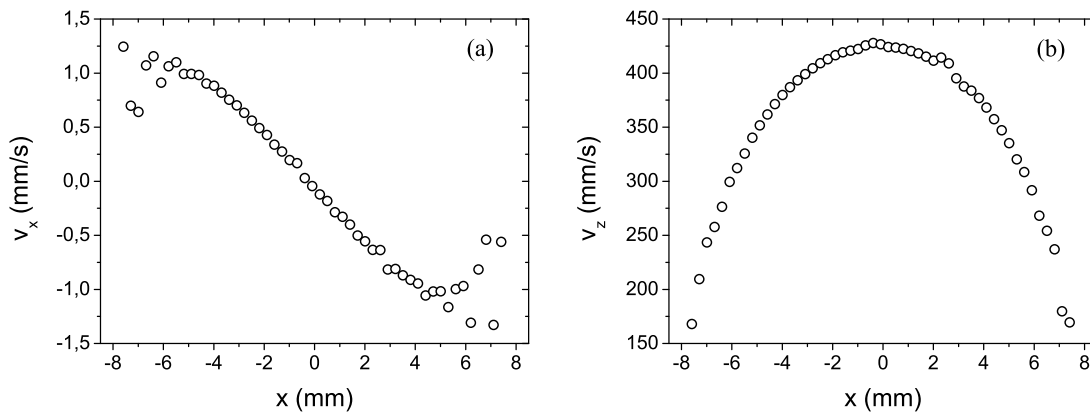


Figura 4.2: Perfiles horizontales de la velocidad a la salida de un orificio de tamaño  $R = 8,00d$ : (a) componente horizontal  $v_x$  y (b) componente vertical  $v_z$ .

En la figura 4.3 se muestra  $v_z(x)$  para diferentes tamaños de la salida. Como se puede observar los perfiles abarcan un amplio rango de velocidades que aumenta con  $R$ . Esta característica se aprecia con mayor claridad al fijarse que mientras la velocidad en el borde es aproximadamente la misma para los diferentes orificios, la velocidad en el centro “ $v_c$ ” crece al aumentar  $R$ . Otro aspecto que se puede observar de la figura 4.3 es que todos los perfiles parecen seguir la misma forma funcional. Para poder comparar los datos de los diferentes tamaños de la abertura calculamos la velocidad reescalada “ $\bar{v}_z$ ” como el cociente de  $v_z(x)$  y su correspondiente velocidad en el centro  $v_c$ . De manera análoga, también reescalamos la posición a lo largo de la abertura con  $R$ :  $\bar{x} = x/R$ .

En la figura 4.4 se muestran los perfiles reescalados  $\bar{v}_z(\bar{x})$  para diferentes tamaños del orificio. Como se puede apreciar, todos los datos colapsan en una única curva demostrando la existencia de un perfil universal. Este resultado indica que mientras el material se encuentra fluyendo a través del orificio, el campo medio de velocidades no se ve afectado por el hecho de que la abertura de salida sea grande o pequeña.

La forma funcional de este perfil universal se reproduce satisfactoriamente mediante la siguiente

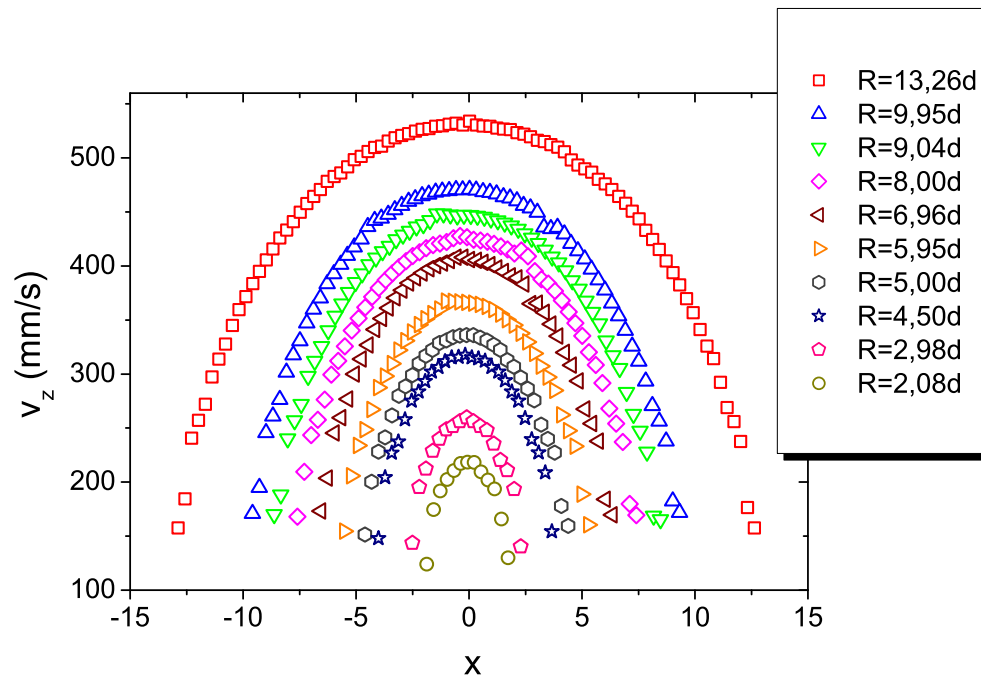


Figura 4.3: Perfiles horizontales de la componente vertical de la velocidad  $v_z$  para diferentes valores de  $R$ . Señalar que el origen del eje de abscisas corresponde al centro del orificio de salida.

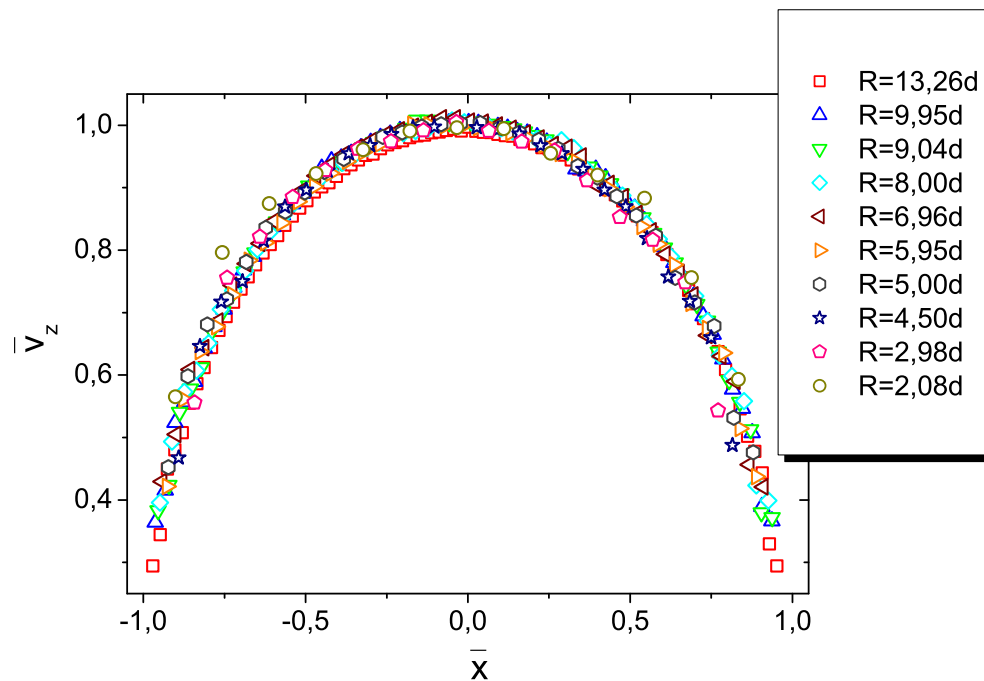


Figura 4.4: Perfiles horizontales de la componente vertical de la velocidad reescalados. Los datos son los mismos que en la figura 4.3 pero normalizados con la velocidad en el centro  $v_c$  y el eje de abscisas con el tamaño de la salida  $R$ .

expresión:

$$\bar{v}_z = \sqrt{1 - \bar{x}^2} \quad (4.1)$$

En la gráfica 4.5 se muestra la expresión anterior junto con los datos experimentales de  $\bar{v}_z(\bar{x})$ . Con el fin de mostrar con mayor claridad la concordancia entre la ecuación 4.1 y las mediciones, se ha optado por representar los datos en función del valor absoluto de  $\bar{x}$ .

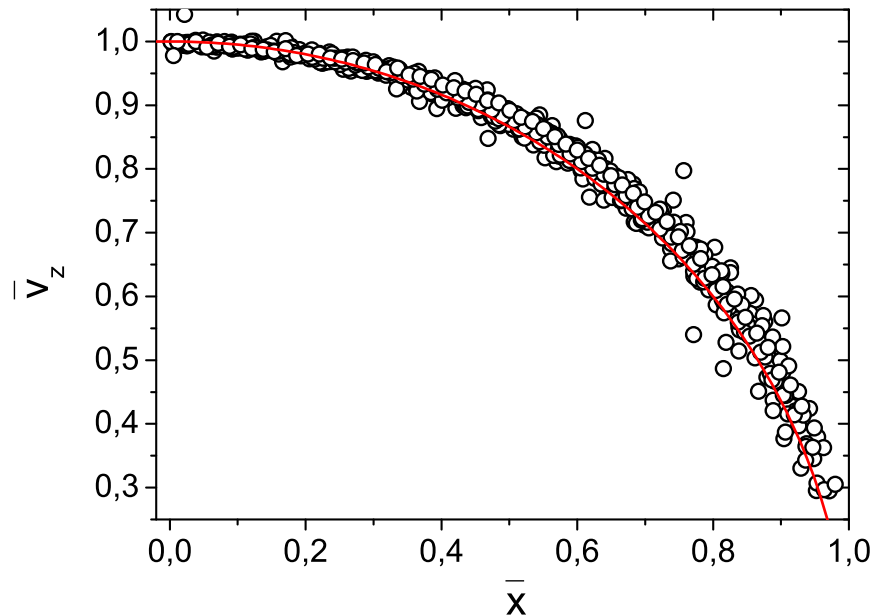


Figura 4.5: Distribución de velocidades  $\bar{v}_z(\bar{x})$  a lo largo del orificio. Los círculos corresponden a las mediciones experimentales obtenidas para un amplio rango de tamaños de la abertura de salida. La línea roja de trazo continuo representa a la ecuación 4.1.

Una vez encontrado que el parámetro característico de la distribución de velocidades es  $v_c$ , vamos a estudiar su funcionalidad con el parámetro de control  $R$ . En la figura 4.6 se representan los valores experimentales de  $v_c$  frente a  $R$  mostrando un crecimiento monótono con el tamaño de la abertura. Así, asumiendo que existe una región de transición similar a la propuesta por la hipótesis del “*free-fall arch*” [48], la velocidad de las partículas a la salida estaría determinada por su caída libre desde una altura proporcional a  $R$ , y por lo tanto, los datos obtenidos deberían ajustarse a una función como la siguiente:

$$v_c = A\sqrt{R} \quad (4.2)$$

donde  $A$  es una constante de proporcionalidad. Dicha expresión se ajusta de manera excelente a los datos experimentales obteniéndose que tras su correspondiente dimensionalización, el parámetro de ajuste  $A^2 = 22,3 \pm 0,1 \text{ m s}^{-2}$ . Resulta significativo que este valor varía únicamente en un 10% respecto al valor de  $2g$ , por lo que a partir de ahora para simplificar los cálculos se asumirá que  $v_c = \sqrt{2gR}$ .

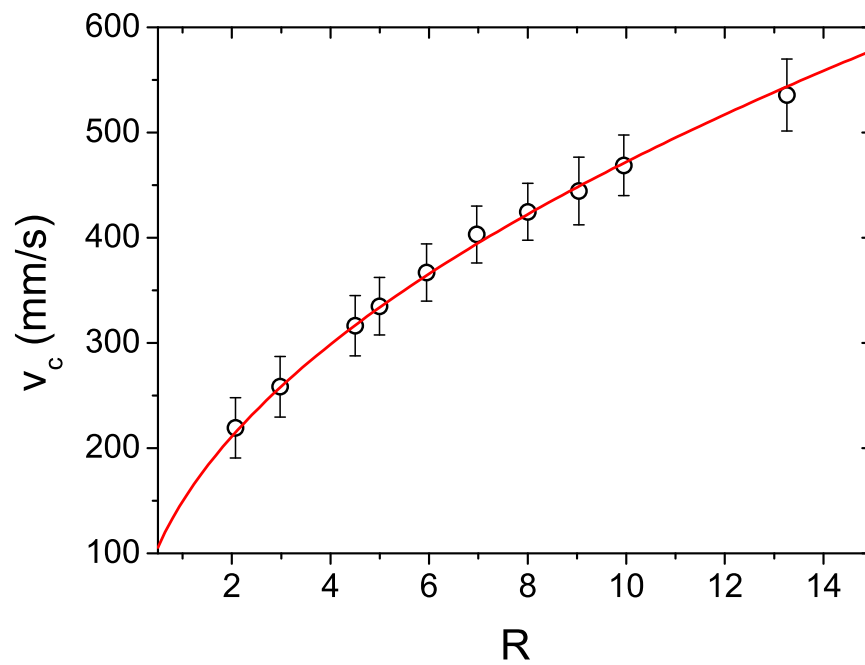


Figura 4.6: Velocidad en el centro del orificio  $v_c$  en función del tamaño de la abertura  $R$ . Los círculos corresponden a los datos experimentales y la línea continua al ajuste de los mismos con la ecuación 4.2. Las barras de error corresponden a la desviación estándar de la velocidad de las partículas que atraviesan la salida por el segmento que se encuentra centrado en el orificio.



A partir de la funcionalidad encontrada para  $v_c(R)$  y de la ecuación 4.1, el perfil de velocidades a lo largo del orificio se puede escribir como una función de  $x$  y  $R$ :

$$v_z = \sqrt{2gR} \sqrt{1 - (x/R)^2} \quad (4.3)$$

Esta expresión es similar a la propuesta por I. Oldal *et al.* en [76] basándose en que la altura desde la cual las partículas comienzan su caída libre está determinada por una parábola axisimétrica.

Mediante esta ecuación 4.3 se puede calcular la velocidad media “ $\langle v_z \rangle$ ” del perfil. Para ello, se integra la expresión anterior para  $x$  definido en el intervalo  $[0, R - r]$  donde  $r$  es el radio de las partículas. Nótese, que el limite superior de intervalo no es  $R$ . Esto es debido a que mediante el método empleado para determinar la velocidad es imposible encontrar ninguna partícula cuyo centro se encuentre a una distancia menor que  $r$  respecto al borde de la salida.

$$\langle v_z \rangle = \frac{\int_0^{R-r} \sqrt{2gR} \sqrt{1 - (x/R)^2} dx}{\int_0^{R-r} dx} \quad (4.4)$$

Resolviendo las integrales de la ecuación 4.4 se obtiene la siguiente función para la velocidad media de la distribución:

$$\langle v_z \rangle = \sqrt{\frac{gR}{2}} \left[ \sqrt{1 - \left(\frac{R-r}{R}\right)^2} + \frac{R}{R-r} \arcsin\left(\frac{R-r}{R}\right) \right] \quad (4.5)$$

En la figura 4.7 se muestra mediante círculos los datos experimentales de  $\langle v_z \rangle$  junto a los valores obtenidos de la ecuación 4.5 mostrando un excelente acuerdo. Hay que señalar que en el caso de que  $R \gg r$ , se obtiene de la expresión anterior que  $\langle v_z \rangle$  es simplemente proporcional a  $R^{1/2}$ . Este hecho es coherente con la explicación física que se propone para la velocidad en [48], asumiendo que las partículas caen partiendo del reposo desde un bóveda de altura proporcional a  $R$ .

Hasta el momento todos los resultados mostrados pueden explicarse mediante la hipótesis del “arco de caída libre”. Sin embargo, como ya se comentó en la sección 1.4, este concepto presenta una serie de dificultades teóricas importantes, además de que su existencia no se ha determinado con claridad. Para comprobar si realmente existe dicha superficie, se ha medido aceleración de las partículas a diferentes alturas. En la figura 4.8 se muestran los datos obtenidos para una abertura  $R = 8,00d$  en una región de anchura  $0,3d$  alrededor del centro de la salida. La aceleración se ha adimensionalizado con la gravedad mientras que la altura  $h$  se ha reescalado con  $R$ .

Como se puede observar, para alturas comparables al tamaño del orificio, la aceleración crece monótonamente alcanzando el valor de la gravedad justamente en la salida ( $h = 0$ ). El mismo comportamiento también se aprecia en las mediciones realizadas para distintos valores  $R$  que no se muestran en esta memoria. Este resultado echa por tierra la hipótesis de que por debajo de la superficie delimitada por el “*free-fall arch*”, las partículas estén sujetas únicamente a la fuerza debido a su propio peso. En base a este hecho se puede decir que a pesar de que dicha hipótesis predice de manera correcta la funcionalidad de la velocidad del material a la salida con su tamaño, ésta no representa la dinámica real de los granos. Debido a ello sería necesario un estudio más sistemático de las fuerzas que actúan sobre las partículas en esta región.

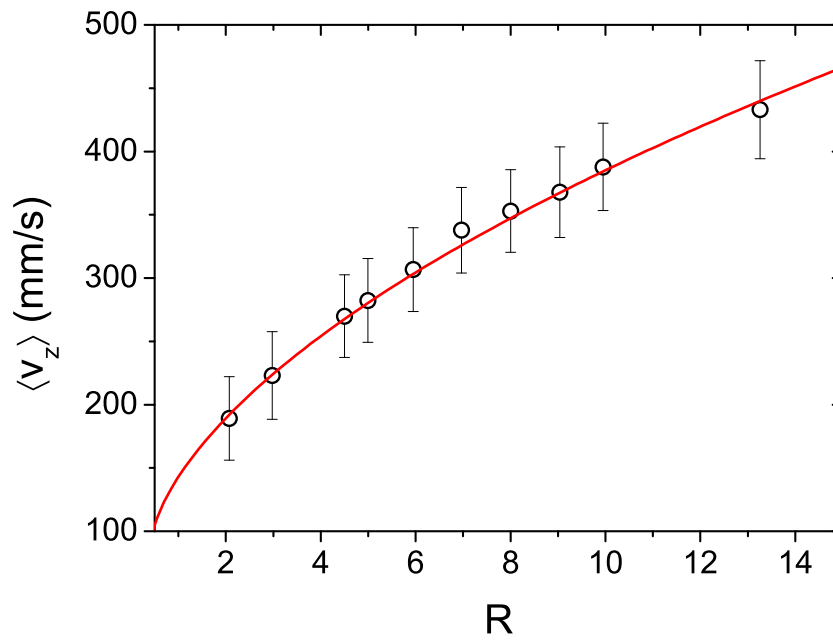


Figura 4.7: Velocidad media  $\langle v_z \rangle$  del perfil velocidades en función de  $R$ . Los círculos representan los datos experimentales mientras que la línea de trazo continuo corresponde a la velocidad media obtenida mediante la ecuación 4.5. Las barras de error se obtienen a partir de la desviación estándar de las distribuciones de velocidad  $v_z(x)$  de cada abertura.

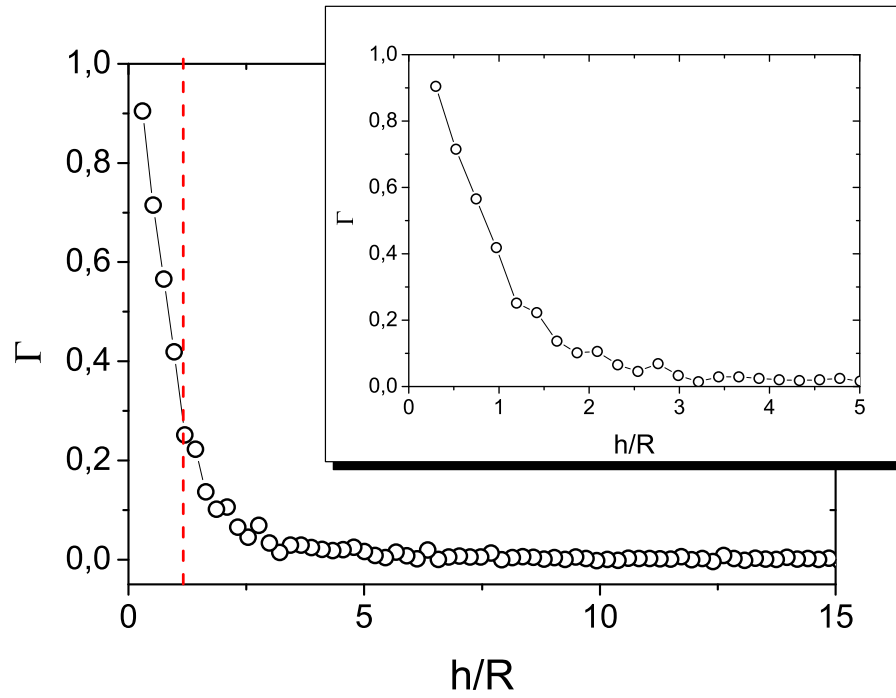


Figura 4.8: Aceleración en la dirección vertical  $\Gamma$  adimensionalizada con la gravedad para diferentes alturas  $h$  reescaladas con el tamaño de la abertura  $R$ . La línea de trazo discontinuo indica aproximadamente a que altura se encontraría el hipotético “arco de caída libre”. En la figura insertada se muestran los mismos datos pero para un rango de alturas más estrecho y cercano a la salida.

## Histograma de velocidades

A partir de las mediciones descritas anteriormente, se han calculado las funciones de densidad de probabilidad de la velocidad teniendo en cuenta todas las partículas que atraviesan el orificio. En la figura 4.9 se muestran estas distribuciones para dos tamaños diferentes de la salida. Como se puede observar, en ambos casos, el histograma presenta dos máximos bien marcados, uno a velocidades bajas y con baja frecuencia y otro a una velocidad alta y con una mayor probabilidad. Este comportamiento bimodal de las distribuciones es común para todo el rango de orificios que se ha estudiado. Sin embargo, se ha observado que al aumentar  $R$  la presencia del máximo de la parte izquierda de la distribución es más difícil de apreciar. Esto se debe a que la probabilidad del pico centrado a velocidad alta crece más rápido con  $R$  respecto a la frecuencia del primer máximo.

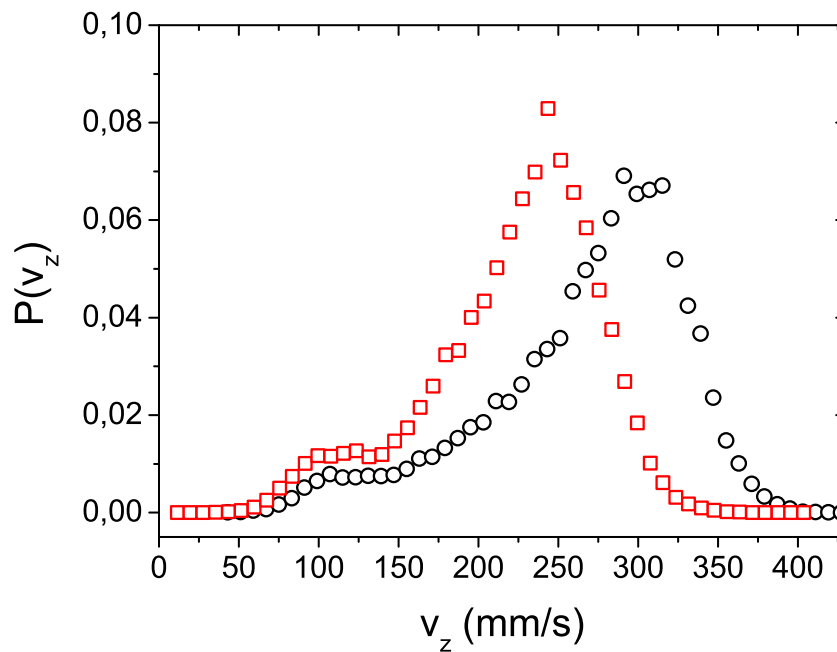


Figura 4.9: Histograma de  $v_z$  considerando todas las partículas que pasan a través de un orificio de tamaño  $R = 2,08d$  (cuadrados rojos) y  $R = 2,98d$  (círculos negros).

Al comparar la posición de las modas para diferentes tamaños de la salida observamos que al aumentar  $R$  la posición del segundo máximo se desplaza a valores mayores de  $v_z$ . Este comportamiento es lo esperado, ya que como se mostró anteriormente la velocidad característica de las partículas a la salida crece con el tamaño de la abertura. Por el contrario, el máximo de la parte izquierda de los histogramas apenas varía su posición. Este comportamiento puede ser fácilmente explicado analizando el valor de  $v_z$  donde se encuentra centrada esta moda. Resulta significativo, que dicho valor es aproximadamente la velocidad que alcanzaría una partícula partiendo del reposo tras haber recorrido bajo la acción de la gravedad una distancia igual a su radio ( $\sqrt{2gr} \approx 100$  mm/s).

Visualizando el movimiento de los granos con una gran resolución temporal, se observa que la

mayoría de las bolitas que atraviesan la salida junto al borde del orificio se encuentran inicialmente descansando sobre la base del silo. Por lo tanto, al iniciar la caída parten con velocidad inicial nula y recorren una distancia igual a su radio al llegar a la abertura. Este comportamiento se da independientemente del tamaño del orificio y justifica la posición del máximo de la parte izquierda de las distribuciones (figura 4.9). Asimismo, es coherente con el hecho de que su posición no varíe con el tamaño de la salida.

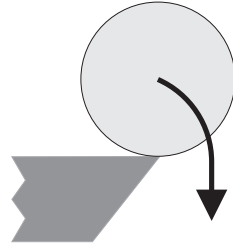


Figura 4.10: Esquema de la caída de un grano que atraviesa la salida junto al borde.

## 4.2 Fracción de ocupación

Como ya se mencionó en la introducción (sección 1.4), el caudal de descarga también depende de la “fracción de compactación” del medio. En la mayoría de los trabajos esta magnitud se considera independiente del tamaño de la salida, además de homogénea a lo largo del orificio. Sin embargo, en un estudio reciente realizado por C. Mankoc *et al.* [53] se observaron desviaciones respecto del caudal predicho por la expresión propuesta por W. A. Beverloo *et al.* [43]. Los autores sugieren que estas desviaciones se deben a una disminución de la fracción de compactación a medida que el tamaño de la salida decrece.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos de las mediciones de la fracción ocupación, “ $\phi$ ”, en el orificio. Esta magnitud se define como la fracción de área ocupada por partículas en una región rectangular centrada en el orificio que abarca toda la salida y tiene una altura igual al diámetro  $d$  de los granos. Un ejemplo de la medición de  $\phi$  se muestra en la figura 4.11, donde la línea azul de trazo continuo delimita la región de medida, y en rojo se ha representado el área ocupada por las partículas. Nótese que no se ha empleado el término “fracción de compactación” para nombrar a  $\phi$ . En la literatura, este término se reserva para el caso de un empaquetamiento estático de partículas. Sin embargo, el flujo a través de la zona de medición elegida no es estacionario, ya que existe un gradiente de velocidad considerable en la dirección vertical. Por ello, se ha preferido utilizar el término fracción de ocupación.

Para calcular la distribución de la fracción de ocupación  $\phi(x)$  a lo largo del orificio, se ha procedido a dividir la zona de medición como se describió en la sección 4.1 para  $v_z(x)$ . En la gráfica 4.12 se muestra  $\phi(x)$  para distintos tamaños de la abertura. Como se puede observar la fracción de ocupación varía a lo largo del orificio, presentando un importante gradiente en los bordes. Por lo tanto, esta característica desmiente la hipótesis generalmente aceptada en la literatura de una densidad de partículas uniforme a la salida. Un resultado similar fue obtenido en un trabajo realizado por Van Zuilichem *et al.* empleando técnicas de absorción de rayos gamma para la determinación de los perfiles de porosidad del material granular [51] a la salida de un silo

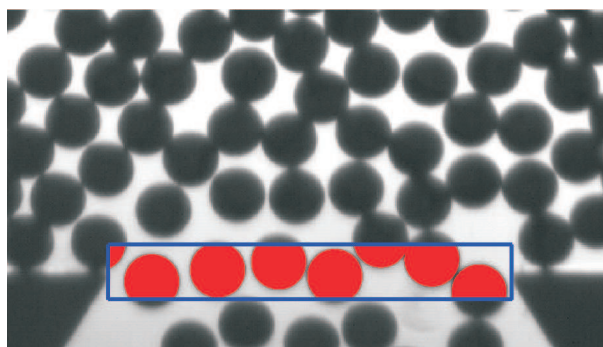


Figura 4.11: Fotografía de las partículas a la salida del silo. La línea azul de trazo continuo delimita la zona donde se mide la fracción de ocupación. Las zonas rojas representan el área de la caja ocupada por las partículas.

cilíndrico.

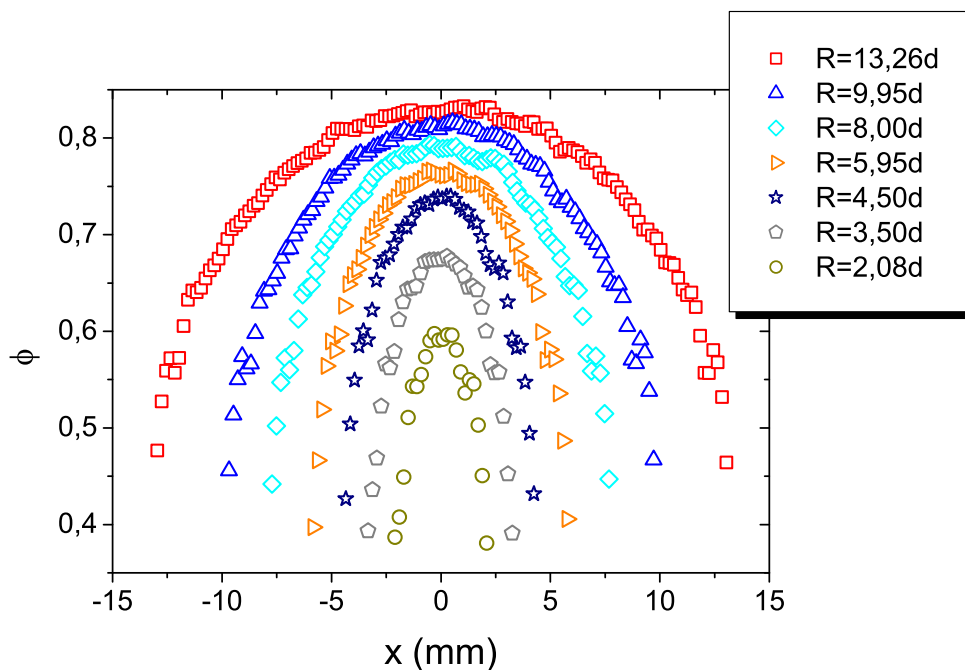


Figura 4.12: Distribución de la fracción de ocupación  $\phi(x)$  a lo largo del orificio. Los diferentes símbolos corresponde a distintos tamaños de la salida como se indica en la leyenda.

Otra característica importante de los perfiles es que  $\phi(x)$  es distinta de cero a lo largo de todo el orificio, es decir, a través de todas las regiones de la salida pasan partículas. Este aspecto se encuentra en franca contradicción con la idea propuesta por R. L. Brown & J. C. Richards [60] de la existencia del llamado *empty annulus*. Por tanto, el parámetro  $k$  incluido en la expresión 1.12 para el caudal carece de sentido físico, ya que los granos atraviesan el orificio sin que exista ninguna región prohibida.

Tal y como hicimos con la velocidad para encontrar un comportamiento universal y su escala característica, definimos en este caso la variable reescalada  $\bar{\phi}$  como el cociente de  $\phi(x)$  entre la

fracción de ocupación  $\phi_c$  correspondiente al segmento de la zona de medición que se encuentra centrado en  $x = 0$ . En cuanto al eje de abscisas, la variable  $x$  se normaliza con el tamaño del orificio:  $\bar{x} = x/R$ . En la gráfica 4.13 se muestran las distribuciones  $\bar{\phi}(\bar{x})$  para los diferentes tamaños de la abertura. Como se puede observar todos los datos colapsan en una única curva, indicando la existencia de un perfil universal. Por lo tanto, al igual que en el caso de la velocidad, la forma funcional de  $\phi(x)$  no se ve afectada por el hecho de que la salida sea grande o pequeña. Además, este resultado demuestra que la escala característica de la distribución de la fracción de ocupación a lo largo del orificio es  $\phi_c$ .

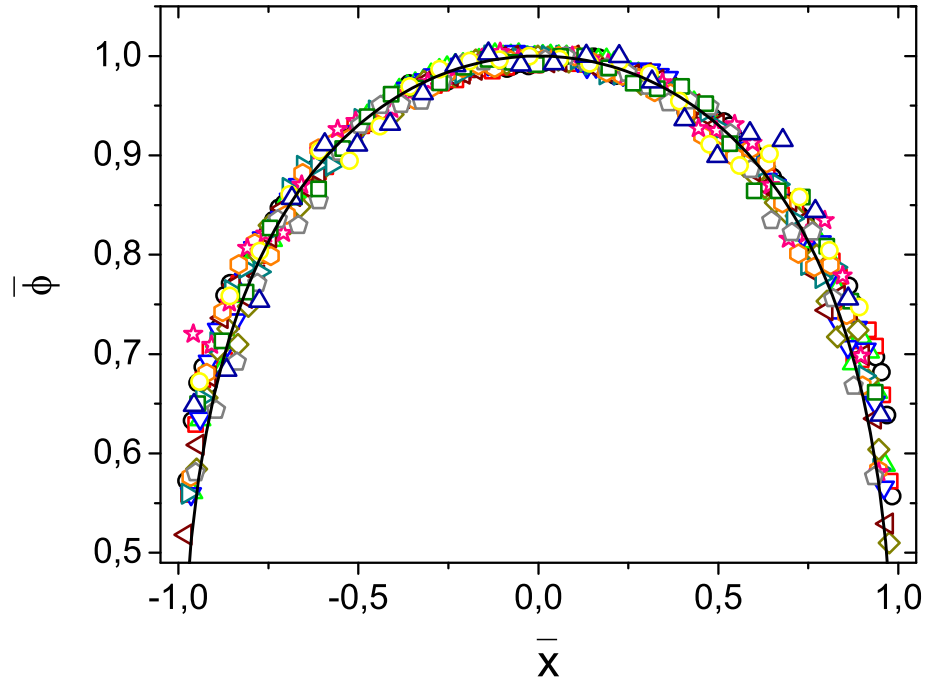


Figura 4.13: Perfiles horizontales de la fracción de ocupación  $\phi$  reescalados. Los datos son los mismos que en la figura 4.12 pero normalizados con la fracción de ocupación en el centro  $\phi_c$  y el eje de abscisas se ha normalizado con el tamaño de la salida  $R$ . La línea negra de trazo continuo corresponde a la ecuación 4.6.

Como se muestra en la figura 4.13, los datos experimentales de  $\bar{\phi}(\bar{x})$  se reproducen de manera excelente mediante la siguiente expresión:

$$\bar{\phi} = (1 - \bar{x}^2)^{1/4} \quad (4.6)$$

Resulta significativo que esta ecuación es similar a la propuesta para  $\bar{v}_z(\bar{x})$ , variando únicamente el índice de la raíz que en este caso es la mitad.

Una vez caracterizada la funcionalidad de  $\phi(x)$ , vamos a estudiar la dependencia de su parámetro característico  $\phi_c$  con  $R$ . En la figura 4.14 se muestran los datos experimentales mediante círculos. Como se puede observar,  $\phi_c$  crece a medida que aumenta el tamaño del orificio pareciendo tender a un valor asintótico. A la vista de este comportamiento, los datos obtenidos de  $\phi_c$  se

han ajustado empleando la siguiente saturación exponencial:

$$\phi_c = \phi_\infty (1 - Ae^{-BR}) \quad (4.7)$$

donde  $\phi_\infty$ ,  $A$  y  $B$  son parámetros de ajuste. En la figura 4.14 se muestra en línea de trazo continuo el ajuste de los datos experimentales mediante la ecuación 4.7, obteniéndose  $\phi_\infty = 0,83 \pm 0,01$ ,  $A = 0,50 \pm 0,01$  y  $B = 0,31 \pm 0,01 \text{ mm}^{-1}$ . De estos valores, hay que destacar que  $\phi_\infty$  es sustancialmente menor que la fracción de compactación medida muy por encima del orificio ( $\phi_b \approx 0,90$ ), que es el valor que se suele emplear en la ecuaciones que aparecen en la literatura para predecir el caudal de descarga [48].

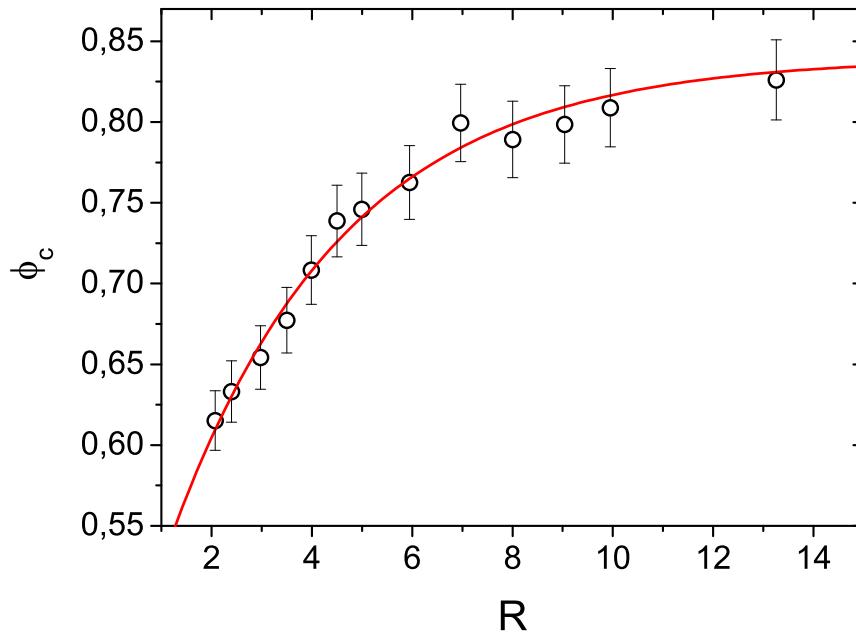


Figura 4.14: Fracción de ocupación  $\phi_c$  en el centro del orificio en función del tamaño de la abertura  $R$ . Los círculos corresponden a los datos experimentales y la línea roja en trazo continuo representa al ajuste obtenido mediante la ecuación 4.7. Las barras de error indican la desviación estándar de las mediciones de la fracción de ocupación en el centro de la abertura.

Combinando las ecuaciones 4.6 y 4.7, se obtiene una expresión para  $\phi(x)$  que únicamente depende del tamaño del orificio  $R$ . Por tanto, a partir de dicha función podemos calcular la fracción de ocupación media  $\langle \phi \rangle$  de la distribución de la siguiente manera:

$$\langle \phi \rangle = \frac{\int_0^{R-r} \phi_c \sqrt{1 - \left(\frac{x}{R}\right)^2} dx}{\int_0^{R-r} dx} = \frac{\phi_c}{3} \left[ {}_2F_1 \left( \frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; \frac{(R-r)^2}{R^2} \right) + 2 \sqrt{1 - \frac{(R-r)^2}{R^2}} \right] \quad (4.8)$$

donde  ${}_2F_1$  representa a la función hipergeométrica de Gauss [77]. Reemplazando  $\phi_c$  por la ecuación 4.7 y asumiendo que  $R \gg r$ , obtenemos la siguiente expresión:



$$\langle \phi \rangle = \frac{{}_2F_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}; \frac{3}{2}; 1\right) \phi_\infty (1 - Ae^{-BR})}{3} \quad (4.9)$$

En la figura 4.15 se muestran los datos experimentales junto con los valores obtenidos mediante la ecuación 4.9 donde los parámetros de ajuste han sido sustituidos por los valores que se obtuvieron del ajuste de  $\phi_c$  con la función 4.7. Como se puede ver, existe un excelente acuerdo entre las mediciones experimentales y la expresión obtenida. La ecuación 4.9 es justamente la que se propone en [53] para ajustar las mediciones de la fracción de compactación a la salida de un silo 2D obtenidas mediante simulaciones de dinámica molecular.

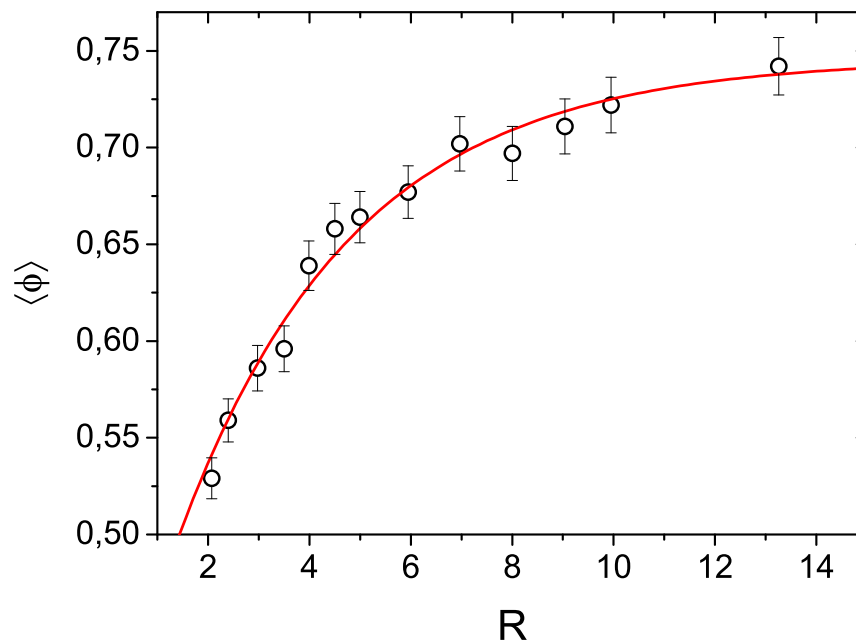


Figura 4.15: Fracción de ocupación media  $\langle \phi \rangle$  en función del tamaño de la abertura  $R$ . Los círculos corresponden a los datos experimentales y la línea roja en trazo continuo representa los valores obtenidos mediante la ecuación 4.9. Las barras de error se obtienen a partir de la desviación estándar de las distribuciones de la fracción de ocupación  $\phi(x)$  de cada abertura.

Una posible explicación física del descenso de fracción de ocupación a medida que  $R$  decrece, puede basarse en la necesidad por parte de las partículas de reorganizarse para pasar a través del orificio. Cuanto más pequeña es la abertura, puesto que la probabilidad de atasco es mayor, los granos tienen que acomodarse en mayor medida para mantenerse fluyendo, y en consecuencia la fracción de ocupación disminuye.

### 4.3 Caudal en la descarga

En las secciones anteriores se ha estudiado la descarga de material desde un punto de vista “microscópico”, caracterizando las distribuciones de velocidad y fracción de ocupación a lo largo del

orificio. A partir de dichas variables, se puede llegar a la correspondiente magnitud macroscópica que es el caudal.

Como se menciona en la sección 2.4, para cada una de las avalanchas, se ha medido la cantidad de material descargado y el tiempo durante el cual ha estado fluyendo. A partir de estas mediciones podemos calcular el caudal  $Q$  definido como el número de partículas que atraviesan el orificio por unidad de tiempo. Estas mediciones de  $Q$  se muestran en la figura 4.16 para diferentes tamaños de la abertura. Anteriormente se ha mostrado que  $\phi(x)$  y  $v_z(x)$  son funciones cuyos valores medios están bien definidos, por lo que en primera aproximación se puede considerar que ambos son estacionarios. Así, asumiendo que ambas son entre sí independientes en el tiempo, se puede escribir el caudal  $dQ$  a través de una región infinitesimal del orificio como:

$$dQ = \frac{4}{\pi d^2} \phi(x) v_z(x) dx \quad (4.10)$$

donde el factor  $4/\pi d^2$  corresponde al inverso del área de una bolita. Integrando dicha expresión a lo largo de la abertura, se obtiene el caudal de descarga en función del tamaño de la salida. Nótese que  $v_z(x)$  y  $\phi(x)$  son funciones simétricas, por lo que se ha añadido un factor dos multiplicando a la integral definida para  $x$  en el intervalo  $[0, R - r]$ .

$$\begin{aligned} Q &= \frac{8}{\pi d^2} \int_0^{R-r} \phi(x) v_z(x) dx \\ &= \frac{8}{\pi d^2} \int_0^{R-r} \phi_\infty (1 - Ae^{-BR}) \sqrt{2gR} \left(1 - \frac{x^2}{R^2}\right)^{3/4} dx \\ &= \frac{8}{\pi d^2} \phi_\infty (1 - Ae^{-BR}) \sqrt{2gR} \frac{3(R-r)}{5} {}_2F_1\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{(R-r)^2}{R^2}\right) + \frac{2}{5} (R-r) \left(1 - \frac{(R-r)^2}{R^2}\right)^{3/4} \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde  $v_z(x)$  y  $\phi(x)$  se han sustituido por las ecuaciones 4.3 y 4.6 respectivamente. Para poder calcular de manera sencilla el valor de la función hipergeométrica de Gauss y posteriormente comparar con la expresión propuesta por W. A. Beverloo *et al.* [43], se acepta la aproximación de que  $R \gg r$ . Así, reagrupando términos finalmente obtenemos la siguiente expresión para el caudal en número de partículas por unidad de tiempo [78]:

$$Q = \frac{5,75}{d^2} \phi_\infty \sqrt{2g} (1 - Ae^{-BR}) R^{3/2} \quad (4.12)$$

En la figura 4.16 se muestran las mediciones experimentales del caudal junto con la ecuación 4.12 empleando los valores de  $\phi_\infty$ ,  $A$  y  $B$  obtenidos a partir de los datos de la fracción de ocupación (sección 4.2). Como se puede observar el acuerdo es excelente entre ambos grupos de datos. Únicamente existe una pequeña discrepancia para tamaños de la abertura  $R < 2d$ , donde el flujo predicho por la ecuación 4.12 es ligeramente superior al experimental. Esta diferencia para orificios tan pequeños puede ser debida a que la aproximación de que  $R \gg r$  ya no es válida, además de la inclusión del transitorio del inicio de la descarga en la medición de  $Q$ . Este transitorio tiene su origen en la fluidización del medio provocada por el método empleado para desatascar

el orificio como se explicó en el capítulo 2. Así, se observa que durante un período corto ( $\approx 1s$ ) al inicio de la avalancha, el caudal es sensiblemente menor que el alcanzado posteriormente. Este fenómeno es despreciable en el caso de orificios grandes debido a que el material fluye durante un tiempo muy largo. Sin embargo, para aberturas pequeñas la duración de la avalancha es comparable a este transitorio. En las mediciones de la fracción de ocupación y de la velocidad, esta primera parte se descarta dejando pasar un tiempo prudencial antes de comenzar la adquisición.

Comparando la ecuación 4.12 con la propuesta por W. A. Beverloo y sus colaboradores [43] existen dos diferencias significativas. En primer lugar no aparece el parámetro  $k$  para corregir el tamaño del orificio, puesto que como ya se mostró, las partículas pasan a través de todas las regiones de la abertura. En segundo lugar, la expresión propuesta en este trabajo incluye la dependencia de la fracción de ocupación con el tamaño del orificio, que en el otro caso se considera constante. Curiosamente, la expresión obtenida es idéntica a la que se propone en [53] (ecuación 1.14). Este hecho parece indicar que las desviaciones que observaron C. Mankoc *et al.* entre sus mediciones experimentales y la ecuación de W. A. Beverloo *et al.*, se deben a la variación de la fracción de compactación con el tamaño de la salida.

## 4.4 Flujo resuelto en el tiempo

Como se ha mostrado a lo largo de este capítulo, las variables estacionarias que definen el caudal durante la descarga presentan el mismo comportamiento independientemente del tamaño de la salida. En esta sección se estudian las propiedades de la dinámica del flujo para averiguar si también se comportan del mismo modo para todos los tamaños de la abertura.

Para estudiar este aspecto se ha medido con una gran resolución temporal el instante en el que cada grano atraviesa la salida. El método empleado para llevar a cabo esta medición se describió en la sección 2.5. A partir de estos datos se calcula el flujo  $q$ , definido como el número de partículas que cruzan el orificio en un determinado intervalo de tiempo constante. La duración de este intervalo es inversamente proporcional al caudal  $Q$ , y por lo tanto depende de  $R$ . Así, para el rango de tamaños de la abertura estudiado, las ventanas temporales van desde 30 hasta 150 ms, de forma que para todos los casos se asegura que en promedio se descargan 25 partículas. Además del flujo, también se calcula el intervalo de tiempo entre el paso de dos granos consecutivos  $\Delta t_i$ .

En la figura 4.17 se muestra una serie temporal de  $q$  para dos tamaños de orificio, donde las líneas rojas de trazo discontinuo corresponden a un valor de flujo que se separa de la media tres veces la desviación estándar. Como se puede observar, para orificios grandes ( $R > 4,5d$ ), las fluctuaciones de  $q$  se encuentran dentro de los límites marcados y parecen tener un carácter aleatorio. Por el contrario, en el caso de aberturas pequeñas, además de estas fluctuaciones también se observan eventualmente desviaciones por debajo de la media superiores al límite inferior marcado. Estos sucesos de ahora en adelante se denominaran “intermitencias”.

Este comportamiento de  $q$  parece indicar la existencia de dos procesos de distinta escala de tiempo. Por un lado, las oscilaciones rápidas pueden ser debidas a un proceso intrínseco del flujo de naturaleza estocástica, como los choques entre partículas. Por el otro lado, las intermitencias que ocurren a una escala de tiempo mayor es razonable que estén relacionadas con un fenómeno extrínseco al flujo. Dicho fenómeno puede ser la formación de estructuras coherentes por encima del orificio [54–57]. Estas estructuras son arcos inestables que tienen un tiempo de vida finito

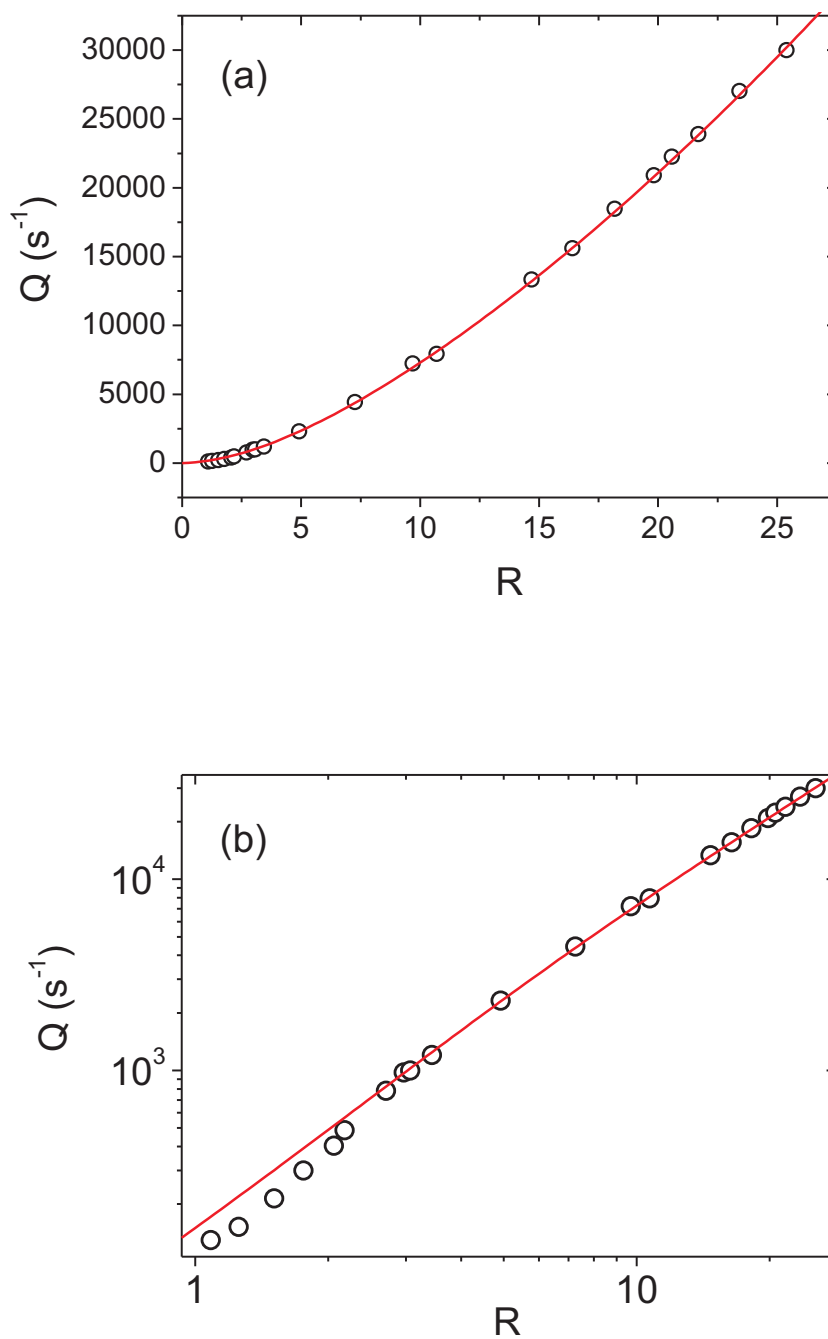


Figura 4.16: Caudal  $Q$  del material en número de partículas por unidad de tiempo para diferentes valores de  $R$ . Los círculos corresponden a los datos experimentales y la línea de trazo continuo a los valores obtenidos mediante la ecuación 4.12. (a) escala lineal. (b) escala logarítmica.

mayor que el intervalo típico de paso de los granos a través de la salida. Al formarse un arco de este tipo, el orificio se tapona momentáneamente provocando una ralentización del flujo. En algunos casos, estos arcos subsisten durante un período cuya duración es mayor que la ventana empleada para calcular  $q$ . En la gráfica 4.17 se pueden observar tres eventos de este tipo que se han señalado mediante flechas.

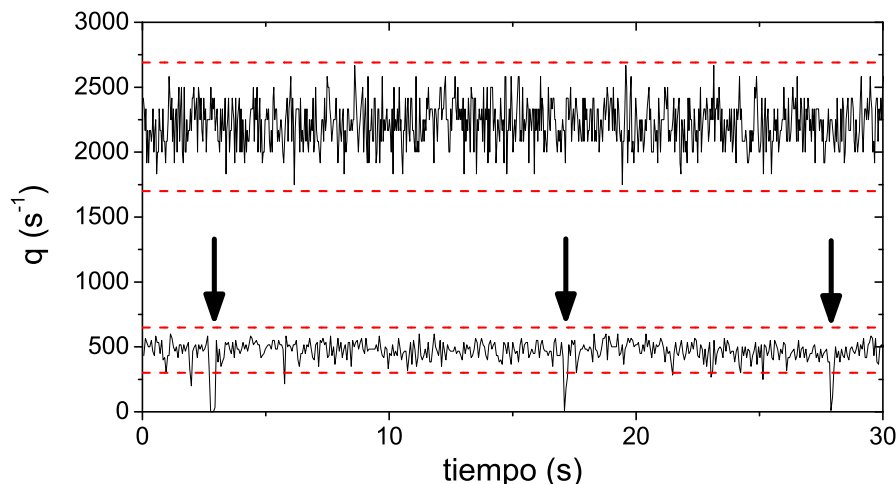


Figura 4.17: Flujo  $q$  (en granos por unidad de tiempo) para un tamaño de orificio  $R = 4,2d$  (arriba) y  $R = 2,2d$  (abajo) medido para una duración de ventana de 12 ms y 60 ms respectivamente. Las líneas rojas de trazo discontinuo representan un valor de flujo que se desvía tres veces la desviación estándar de los datos.

Una mejor descripción de las características del flujo se obtiene calculando los histogramas normalizados de los valores de  $q$  medidos para diferentes tamaños de la abertura. Estos resultados se muestran en la figura 4.18 donde se puede observar que las fluctuaciones para orificios grandes se ajustan adecuadamente a una función Gaussiana. Sin embargo, para orificios por debajo de  $R = 3,5d$  aparece una cola para valores menores que la moda que no decae como una exponencial cuadrática. Esta característica se observa con mayor claridad en la gráfica 4.19 al representar las fluctuaciones  $\Delta q$  del flujo alrededor de la media y normalizadas con su correspondiente desviación estándar  $\sigma$ . Como se puede observar, a excepción de las colas que aparecen en orificios pequeños para  $\Delta q < -3\sigma$ , los datos colapsan en una única curva de tipo gaussiano. Nótese que en el intervalo  $[-3\sigma, 3\sigma]$  se encuentra comprendida el 99,74% de una distribución Gaussiana. Por lo tanto, estamos en condiciones de afirmar que las fluctuaciones de  $q$  alrededor de la media se comportan de la misma manera independientemente del tamaño de la abertura.

Resulta significativo que la presencia de intermitencias únicamente se ha observado para valores pequeños de  $R$ , coincidiendo con la región donde los atascos son más frecuentes. Por el contrario, para valores grandes de  $R$  (donde la probabilidad de observar un atasco que interrumpa completamente la descarga es muy baja) no se han registrado oscilaciones de este tipo. Recordando los resultados mostrados en el capítulo 3, se concluyó que no existe un valor crítico de  $R$  por encima del cual los atascos no sean posibles. Por lo tanto, es razonable pensar que si las intermitencias son provocadas por la formación de arcos inestables, éstas tendrían que estar presentes incluso para los valores más grandes de  $R$ . Sin embargo, al igual que la probabilidad de que se produzca

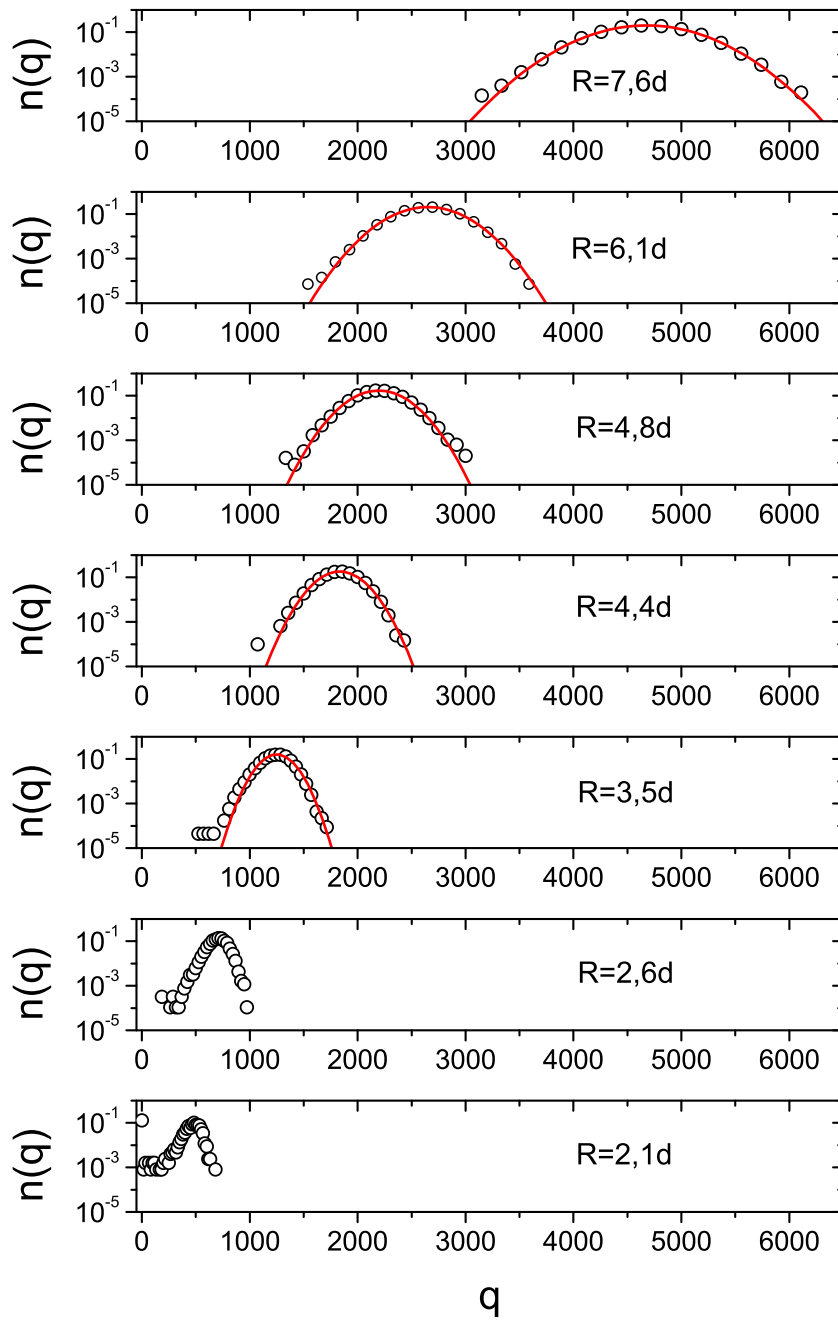


Figura 4.18: Histogramas normalizados de la tasa de flujo  $q$  (en número de granos que caen durante una ventana temporal de duración determinada) para diferentes tamaños del orificio de salida  $R$ , como se indica en los gráficos. La línea roja de trazo continuo corresponde a un ajuste mediante una función Gaussiana que se muestra únicamente para  $R \geq 3,5d$ .

un atasco es muy baja, la aparición de estos sucesos también debería ser tan inusual que para observarlos en orificios grandes sería necesario medir durante tiempos excesivamente largos.

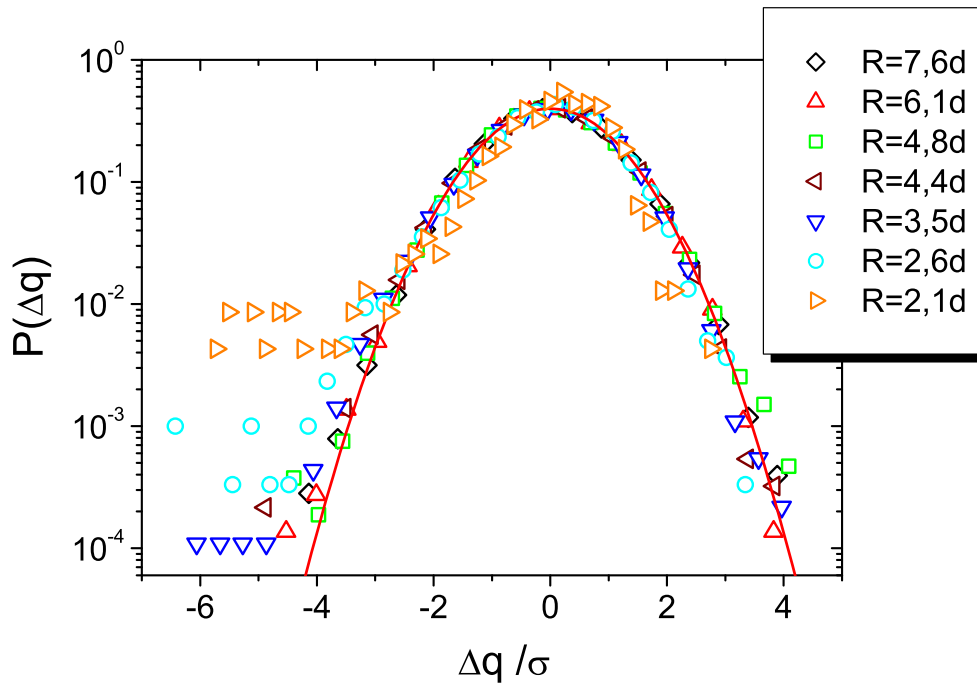


Figura 4.19: Función de densidad de probabilidad de las fluctuaciones  $\Delta q$  del flujo alrededor de la media y normalizadas con su correspondiente desviación estándar  $\sigma$ . Los distintos símbolos corresponden a diferentes tamaños de la abertura como se indica en la leyenda.

A continuación vamos estudiar más detalladamente las intermitencias del flujo mediante el cálculo de las propiedades estadísticas de los intervalos de tiempo entre el paso de granos consecutivos  $\Delta t_i$ . En la figura 4.21 se muestran los histogramas de  $\Delta t_i$  para diferentes tamaños de la salida. Puesto que la probabilidad de paso de granos a través de la abertura ha sido propuesto en primera aproximación como una sucesión de eventos independientes (ver capítulo 3), se podría esperar una forma exponencial para la distribución de  $\Delta t_i$  resultante de un proceso de Poisson. De hecho, este es el caso si se restringe la observación a una zona estrecha de la abertura. Este comportamiento se puede observar en la figura 4.21 donde se muestra el histograma de  $\Delta t_i$  obtenido en una región de anchura  $0,4d$  situada en el centro de un orificio de tamaño  $R = 7,8d$ . Este mismo tipo de distribución se obtiene para cualquier región estrecha en cualquier posición de la salida. La única diferencia para las distribuciones exponenciales en diferentes posiciones es el valor medio de  $\Delta t_i$ . Esta característica es una consecuencia del hecho que la velocidad vertical media  $v_z$  y la fracción de ocupación  $\phi$  varían a lo largo del orificio. Por lo tanto, cuando la región donde se mide  $\Delta t_i$  incluye todo el orificio, la superposición de muchas distribuciones exponenciales con diferente  $\Delta t_i$  medio da lugar a una función de densidad de probabilidad como las que se muestran en la figura 4.21.

Al comparar los histogramas de  $\Delta t_i$  considerando todo el orificio para diferentes valores de  $R$ , se observa que para orificios grandes se puede definir un valor de  $\Delta t_i$  por encima del cual no se observan eventos. Sin embargo, para orificios pequeños aparece una serie de eventos más

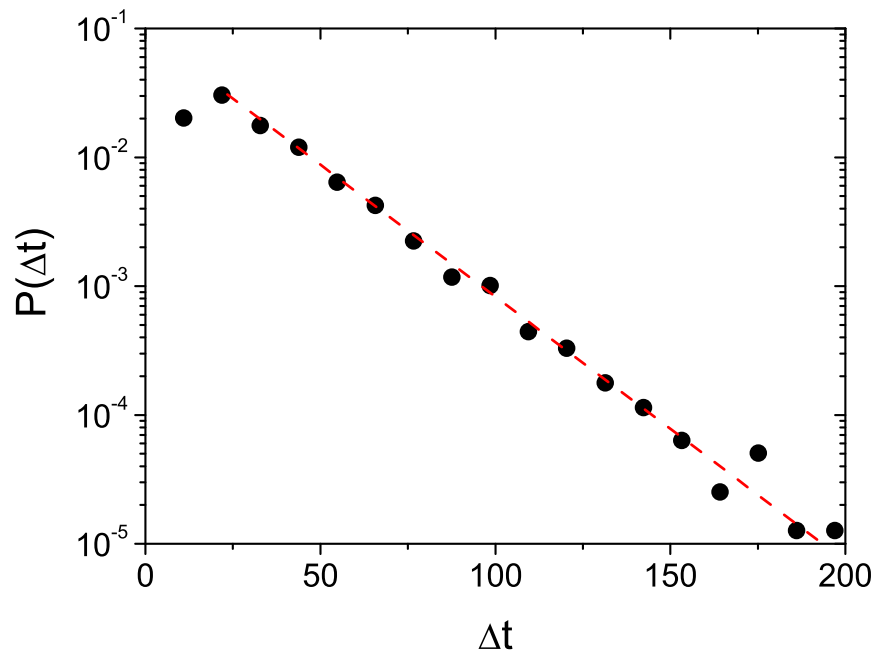


Figura 4.20: Distribución de  $\Delta t_i$  para  $R = 7,8d$  tomando únicamente los granos que pasan a través de un segmento de longitud  $0,4d$  alrededor del centro de la salida. Nótese que los datos están representados en escala semilogarítmica. La línea roja de trazo discontinuo es un guía para apreciar el decaimiento exponencial.



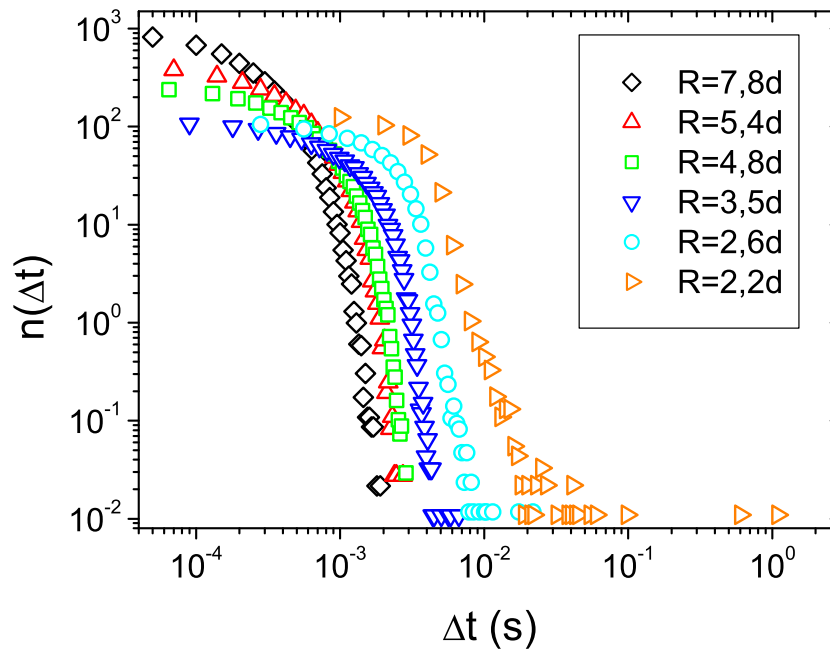


Figura 4.21: Histogramas de  $\Delta t_i$  en escala logarítmica para diferentes valores de  $R$  como se indica en la leyenda.

allá de dicho valor. De hecho, cuanto menor es el tamaño de la abertura mayor es el número de estos eventos que aparecen por encima del correspondiente valor de  $\Delta t_i$ . Estas características se observan con mayor claridad si se reescalan todos los histogramas dividiendo el eje horizontal por la inversa del caudal,  $\tau$  y normalizando los valores de manera que el área bajo la curva sea la unidad (ver figura 4.22). En este caso todos los histogramas coinciden exceptuando la zona donde  $\Delta t_i/\tau > 10$  que corresponde a intervalos de tiempo largos durante los cuales ningún grano ha pasado a través de la abertura. Estos resultados son una manera alternativa de interpretar los datos mostrados en los histogramas de la figura 4.18. Se puede observar como para la zona de  $\Delta t_i$  que es del orden del tiempo medio de paso entre dos partículas ( $\tau$ ), el comportamiento de las fluctuaciones es universal. Asimismo, la región de orificios pequeños, donde aparecen intermitencias de  $q$ , coincide con los valores de  $R$  cuyos histogramas de  $\Delta t_i$  muestran un número significativo de sucesos por encima de  $\Delta t_i/\tau > 10$ .

A la vista de este comportamiento de las oscilaciones del flujo, es interesante conocer las características de las fluctuaciones del campo de velocidad y fracción de ocupación del medio en el orificio. Para ello, se han empleado las mediciones de  $v_z$  y  $\phi$  que se describieron en las secciones 4.1 y 4.2. Al igual que en el caso del flujo, se calculan los promedios de dichas magnitudes en ventanas temporales cuya duración asegura que para cada  $R$  el número promedio de partículas que han caído es significativo.

En la figura 4.23 se muestran las funciones de distribución de probabilidad de las fluctuaciones temporales de  $v_z$  alrededor de la media y normalizadas con su desviación estándar. Como se puede observar los datos colapsan en una única curva, exceptuando la región de amplitudes de oscilación

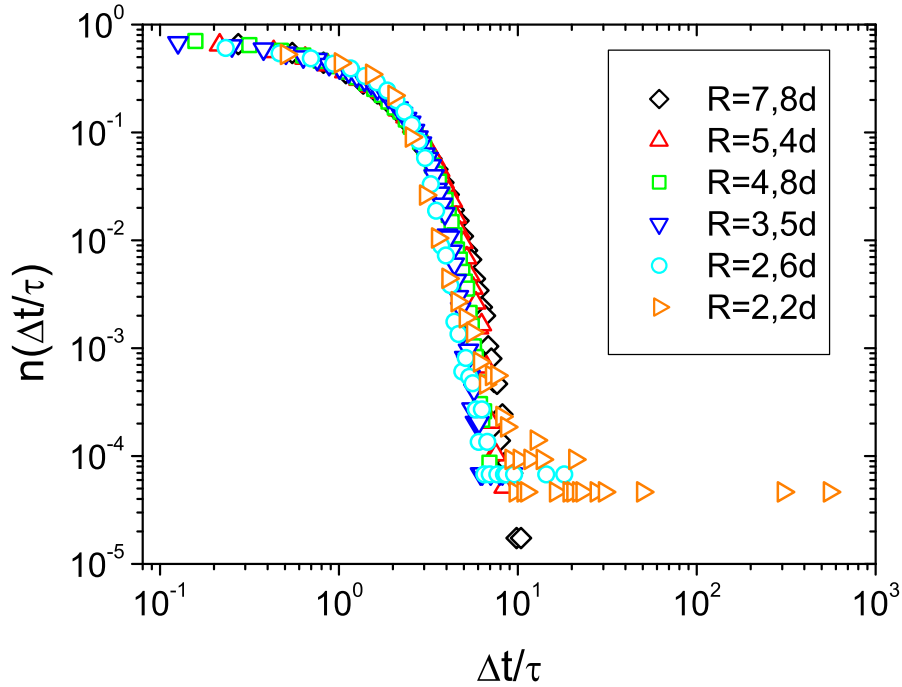


Figura 4.22: Histogramas normalizados de  $\Delta t_i$  reescalada con la inversa del caudal medio  $\tau$ . Los datos mostrados corresponden a los mismos que en la figura 4.21.

menores que tres veces la desviación estándar. Justamente en dicha zona, al comprar las distintas curvas con una función Gaussiana, se observa que los datos no se ajustan a este comportamiento. Esta característica sugiere la existencia de un cola, como ocurría para las fluctuaciones de  $q$ . Sin embargo, este comportamiento no es exclusivo de orificios pequeños, sino que también está presente en aberturas grandes. Por lo tanto, este hecho sugiere que también se podría interpretar como la existencia de una forma universal de las fluctuaciones de  $v_z$ .

En el caso de la fracción de ocupación, la distribución de sus fluctuaciones es claramente asimétrica independientemente del tamaño de la salida. En la figura 4.24 se muestran las funciones de densidad de probabilidad para un amplio rango de tamaños de orificio presentando una forma que no se ajusta a un comportamiento gaussiano. Es digno de mencionar, que el rango de valores de  $\phi$  que abarcan las distribuciones se estrecha a mediada que aumenta el tamaño de la abertura.

Con el fin de comprobar si las fluctuaciones de  $\phi$  muestran las mismas características independientemente del tamaño del orificio, se han calculado las funciones de densidad de probabilidad de las fluctuaciones  $\Delta\phi$  alrededor de la media y normalizadas con su desviación estándar. Estas se muestran en la figura 4.25 para diversos tamaños de la salida. Como se puede observar todas las distribuciones colapsan en una única curva que presenta una acusada asimetría. Por lo tanto, en este caso no cabe duda de la universalidad de las fluctuaciones. En un futuro sería interesante un estudio en mayor de detalle de estas fluctuaciones y su posible interpretación en base a algún modelo de tipo estocástico que ayudase a afianzar la no existencia de un tamaño crítico de orificio para la formación de atascos.

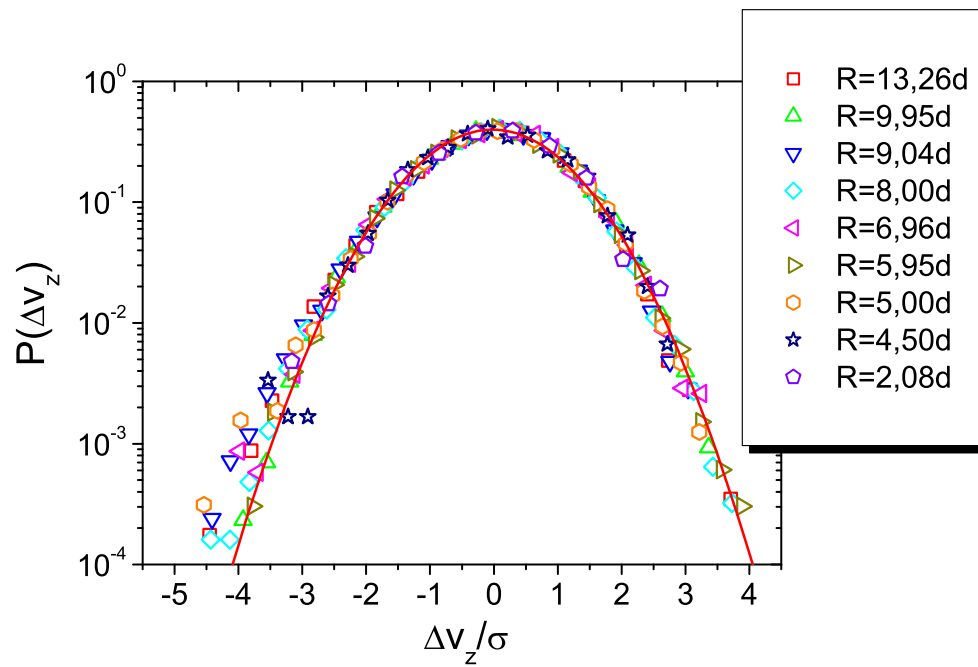


Figura 4.23: Función de distribución de probabilidad de las fluctuaciones temporales de  $v_z$  alrededor de la media y normalizadas con su correspondiente desviación estándar. Los distintos símbolos corresponden a diferentes valores de  $R$  como se indica en la leyenda. La línea roja de trazo continuo es una función Gaussiana.

En el presente capítulo se ha presentado un estudio de la descarga del silo mientras el material se encuentra fluyendo. El resultado principal que se ha obtenido es la universalidad del proceso independientemente de que el orificio de salida sea pequeño o grande, es decir, que la formación de atascos sea usual o no. Esta característica sugiere que el flujo de granos y la formación de atascos se pueden interpretar como dos estados totalmente independientes.

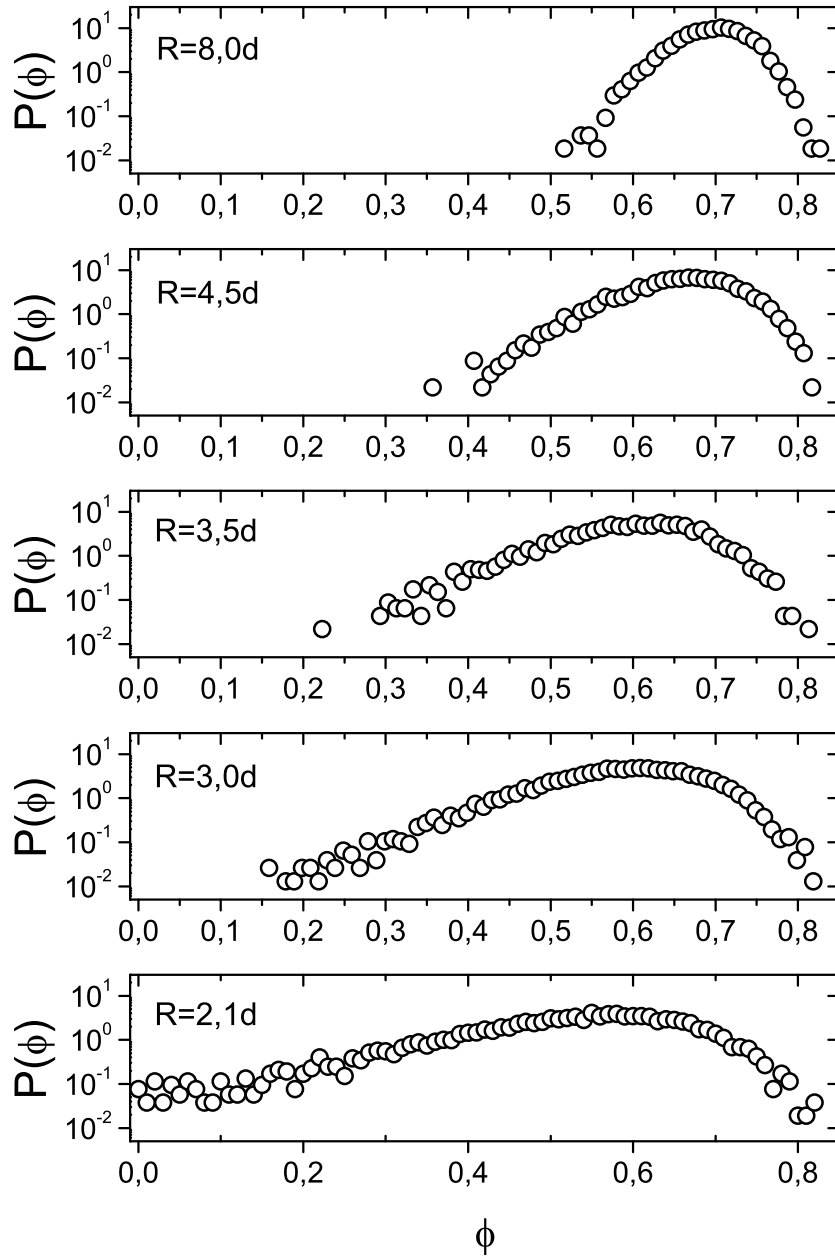


Figura 4.24: Funciones de densidad de probabilidad de la fracción de ocupación para los diferentes tamaños de la abertura indicados en las figuras.

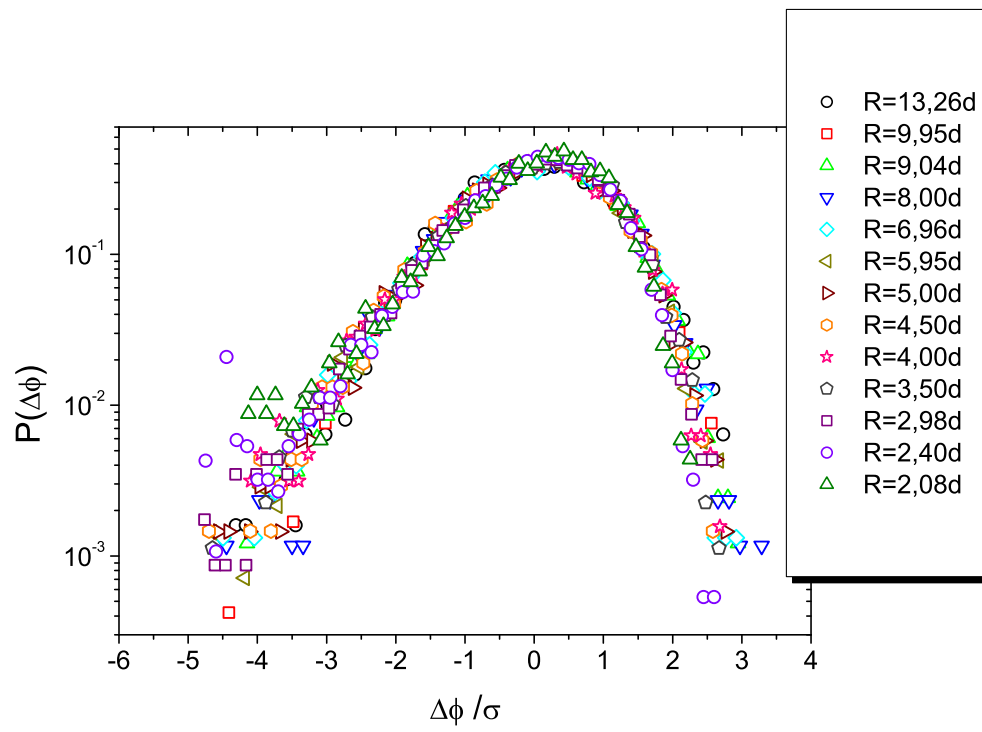


Figura 4.25: Histogramas normalizados de las fluctuaciones alrededor la media de la fracción de ocupación  $\Delta\phi$  para diferentes tamaños del orificio de salida  $R$  como se indica en la leyenda.

## Capítulo 5

# Conclusiones y perspectivas

En este capítulo se proporcionará una visión global de los resultados presentados en los capítulos anteriores. Además, se propondrán algunas ideas interesantes a tener en cuenta en futuras investigaciones que han surgido a partir de la realización de este trabajo.

Como ya se ha comentado a lo largo de esta memoria, la descarga de un material granular desde un silo puede interrumpirse debido a la formación de atascos. Este fenómeno ya había sido estudiado por I. Zuriguel [42] empleando como sistema experimental un silo cilíndrico. En dicho trabajo se muestra que la distribución de los tamaños de avalancha decae esencialmente de manera exponencial. Dicho comportamiento es caracterizado a través del tamaño medio de avalancha y se puede reproducir en base a un modelo probabilístico.

Uno de los resultados más importantes de dicho trabajo es la existencia de un tamaño crítico del orificio por encima del cual no se producen atascos. Esta afirmación se basa en la posibilidad de ajustar la dependencia de la avalancha media con el tamaño de la abertura mediante una ley de potencias divergente. Sin embargo, la analogía que se propone con una transición de fase termodinámica resulta un tanto cuestionable debido al elevado exponente que se obtiene para la ley de potencias. Este aspecto junto con el resultado obtenido por K. To [26] de poder ajustar también los datos con una expresión no divergente, indica que la existencia de un tamaño crítico del orificio no es completamente concluyente.

Con el fin de poder resolver dicho paradigma se decidió estudiar este mismo proceso bajo condiciones bien controladas y empleando un silo de paredes planas transparentes. Esta geometría permite el acceso visual a todas las partículas y por lo tanto ha sido posible medir el campo de velocidades, la aceleración y fracción de compactación del medio. Estas mediciones han representado una fuente de información de gran importancia para entender el proceso de descarga, las cuales no eran accesibles en el experimento de I. Zuriguel [42].

El primer resultado relevante de este trabajo es que a partir de un modelo probabilístico se deriva una función para la dependencia de la avalancha media con el tamaño del orificio, la cual se ajusta de manera excelente a los datos experimentales. Este modelo se basa en la hipótesis de poder estimar el tamaño medio de avalancha a partir de la probabilidad de que  $\eta$  partículas que se encuentran en la proximidad del orificio formen un arco que tapone la salida. Sabiendo que para cada orificio existe un tamaño típico de los arcos que obturan la abertura, dicha probabilidad se puede obtener a partir de la distribución del número de granos que forman las bóvedas en un depósito bidimensional. Esta interpretación nos conduce a que la función obtenida no predice la

existencia de un tamaño crítico de la abertura. Por lo tanto, si esperamos el tiempo suficiente, siempre observaremos la formación de un atasco independientemente del tamaño del orificio.

Coherentemente con este resultado la probabilidad de atascos  $J(N, R)$  presenta un comportamiento universal. Así, al representar los datos frente a un variable reescalada se ha mostrado que colapsan en una única curva cuya forma no coincide con una función escalón que se obtendría en el caso de existir un tamaño crítico del orificio.

Este modelo es válido para el caso de un sistema bidimensional como el empleado en el presente trabajo. Como asignatura pendiente queda el poder extender este mismo argumento para el caso de un silo cilíndrico. Además, en un futuro sería interesante estudiar la dinámica de los granos en la región donde se forman los arcos que obturan la salida. Dicha investigación ayudaría a comprender los mecanismos físicos implicados en la formación de los atascos, y por lo tanto, a dilucidar en base a primeros principios la existencia de un tamaño crítico del orificio.

En cuanto a la función de densidad de probabilidad de los tamaños de avalancha, al igual que en el caso de un silo cilíndrico, se han diferenciado dos zonas. En el intervalo de tamaños menores que la moda, la probabilidad crece de un modo que no se ha podido determinar debido a la falta de resolución. Se ha hipotetizado sobre la idea de que este comportamiento se debe al método empleado para deshacer los atascos. Así, al soplar en el orificio, se produce un estado transitorio al comienzo de la avalancha en el cual el flujo de partículas es sustancialmente menor, y por tanto, la probabilidad de formarse un atasco también es menor. Para corroborar dicha idea se podría comprobar si este comportamiento aparece también empleando otros métodos para eliminar los atascos.

Respecto al intervalo de avalanchas mayores que la moda, se ha observado un decaimiento exponencial que puede reproducirse mediante el modelo propuesto por I. Zuriguel [31]. Dicho decaimiento se encuentra bien caracterizado por la avalancha media, de manera que al representar los datos en función del tamaño reducido de avalancha, se obtiene una única curva para todos los orificios. El hecho de que el comportamiento de las distribuciones sea independiente de la dimensionalidad del sistema, sugiere que los mecanismos implicados en la formación de atascos son los mismos en dos y tres dimensiones.

A partir de que la probabilidad no indica de manera contundente la existencia de un tamaño crítico del orificio, surgió la idea de si las propiedades del flujo durante descarga podrían aportar información relevante para esclarecer esta cuestión. De dicho estudio se ha evidenciado que el mecanismo de salida de los granos es independiente del tamaño de salida, lo cual es coherente con la no existencia de un tamaño crítico de la abertura. Desde un punto de vista microscópico, esta afirmación se basa en la existencia de una distribución universal de la velocidad y de la fracción de ocupación a lo largo del orificio.

Para la velocidad de las partículas a la salida se ha mostrado que su escala característica es proporcional a  $R^{1/2}$ . Este resultado es coherente con la hipótesis de que la velocidad de los granos está determinada por su caída libre desde el denominado “*free-fall arch*”. Sin embargo, se ha demostrado que cerca del orificio no existe una región donde las partículas estén sometidas a una aceleración constante. Este resultado es una evidencia de la necesidad de estudiar en detalle las fuerzas que actúan sobre los granos en la cercanía de la salida. Por ello, un aspecto interesante a realizar en un futuro sería repetir el mismo experimento empleando partículas de material birrefringente que permitan analizar las fuerzas que se encuentran presentes durante la descarga. Es probable que de dicho trabajo se observe que por debajo de la zona delimitada por el “*free-fall*

arch” existan cadenas de fuerza que vayan desde la base del silo hacia el centro, y que por tanto sustenten parte del peso del material.

Respecto a la fracción de ocupación, el primer resultado relevante es la no existencia del llamado “empty annulus” [8]. Este hecho se ha observado mediante la distribución de  $\phi$  a lo largo del orificio, la cual presenta un fuerte gradiente pero en ningún caso es nula. Este resultado implica que toda la longitud de la abertura es efectiva para el paso de partículas. En consecuencia, el parámetro  $k$  empleado en la expresión del caudal propuesta por W. A. Beverloo *et al.* [43] carece de sentido físico.

Otro resultado importante es la dependencia de la fracción de ocupación con el tamaño del orificio de la salida. Este comportamiento puede ser debido a la dilatación del medio originada por la reorganización de los granos para poder atravesar la abertura sin atascarse. Por tanto, es posible que exista algún tipo de relación entre  $\phi$  y la probabilidad de atasco, ya que cuanto mayor sea la probabilidad de que se produzca un atasco, mayor será la reestructuración de las partículas, y como consecuencia menor la fracción de ocupación.

La validez de los resultados obtenidos de este estudio microscópico de la descarga se han comprobado al relacionarlos con su correspondiente magnitud macroscópica, el caudal. Para ello, considerando el material granular como un medio continuo se ha derivado una expresión que predice correctamente las mediciones experimentales de  $Q$ , incluso en un rango de tamaños de orificio donde los atascos son usuales. Esta ecuación es muy similar a la que empíricamente fue propuesta por C. Mankoc *et al.* [53], y por lo tanto, corrobora la necesidad de introducir en la expresión de W. A. Beverloo [43] la dependencia de la fracción de compactación con el tamaño del orificio.

Los resultados del estudio de la dinámica del flujo muestran la existencia de dos procesos que ocurren en distintas escalas de tiempo. Por un lado, se observan fluctuaciones intrínsecas del flujo que parecen tener naturaleza estocástica. Esta característica se evidencia en el comportamiento gaussiano de las oscilaciones alrededor del valor medio, las cuales se encuentran presentes en todos los tamaños del orificio. El origen de este tipo de fluctuaciones es posible que sea el choque entre partículas.

Por otro lado, se ha observado la presencia de “intermitencias” que se manifiestan como una ralentización considerable del flujo. Estas oscilaciones extrínsecas pueden ser debidas a la formación de estructuras coherentes por encima del orificio. Así, eventualmente puede formarse un arco inestable en la cercanía del orificio cuyo tiempo de vida es mayor que el intervalo típico entre el paso de dos granos consecutivos a través de la abertura. Este comportamiento se observa por la presencia de colas en la parte izquierda de las distribuciones, las cuales decaen más lentamente que una exponencial cuadrática. La aparición de estas “intermitencias” es más probable en el caso de aberturas pequeñas. Sin embargo, en coherencia con la no existencia de un tamaño crítico de la salida, también se producirían para orificios grandes si se midiese durante un tiempo suficientemente largo.

La existencia de estos dos procesos también se ha comprobado mediante la medición de los intervalos de tiempo entre el paso consecutivo de partículas a través de la salida. Así, se observa que para todos los tamaños de orificio existe un valor  $\Delta t_i$  de corte bien definido, por encima del cual eventualmente aparece algún evento correspondiente a un intervalo de tiempo largo.

El comportamiento universal del flujo se observa claramente en las fluctuaciones de la velocidad y de la fracción de ocupación. Para ambas magnitudes, las distribuciones colapsan en una única



curva asimétrica. Esta asimetría se aprecia especialmente en el caso de la fracción de ocupación, y como se ha comentado anteriormente, puede ser debida al reacomodamiento de las partículas al pasar a través del orificio.

Todos los resultados mostrados sobre el flujo sugieren que éste se trata de un estado bien definido y común para todas las aberturas. Por lo tanto, este hecho es un indicio de la posibilidad de interpretar la dinámica de la descarga mediante un modelo estocástico que prediga la aparición de intermitencias. Esta idea que queda para futuras investigaciones, podría ser también una buena manera de abordar el paradigma de la existencia de un tamaño crítico del orificio.

En este trabajo se ha presentado un análisis parcial de dos de los principales fenómenos que ocurren en la descarga de un silo por gravedad: la formación de atascos y el flujo. Se espera que los resultados obtenidos ayuden a la comprensión de este proceso, así como que sirvan de estímulo para el estudio de las numerosas incógnitas que aún quedan por resolver.

## Capítulo 6

# Conclusions and outlook

Now, we summarize the results presented in the previous chapters. Moreover, some ideas that we consider interesting will be proposed to take into account in future research.

As it has been mentioned along this report, the discharge of granular matter from a silo can be halted due to jamming. This phenomenon has already been studied by I. Zuriguel [42] using a cylindrical silo. In that work, it was shown that the avalanche size distributions essentially decays as an exponential. This behavior is well characterized by the mean avalanche size and it can be explained by means of a simple probabilistic model.

One of the most important results from that work is the existence of a critical outlet size above which jamming is not possible. This observation is based on the possibility of fitting the mean avalanche size as a function of the orifice diameter by a diverging power law. However, the analogy proposed with a thermodynamic phase transition is questionable due to the high value obtained for the exponent of the power law. This fact and the result reported by K. To [26] about the possibility of fitting the data by a non-diverging function suggest that the existence of critical outlet size is not conclusive.

In order to resolve this dilemma, we decided to study this process under well controlled conditions, using a silo made of flat transparent walls. This geometry allows us to visualize the beads and therefore we have been able to measure the velocity field, the acceleration and the packing fraction of the grains. These measurements have significantly contributed to the understanding of the discharge process, and they represent an advantage respect to the experimental setup used by I. Zuriguel where it was not possible to obtain this information.

The first relevant result of this work is the expression obtained for the dependency of the mean avalanche size on the outlet size from a probabilistic model. This model estimates the mean avalanche size from the probability that an arch by  $\eta$  grains is formed close to the exit. Therefore, as the arches which obturate the orifice have a typical size, that probability can be estimated from the distribution of the number of beads that form the domes in a two-dimensional deposit. This interpretation leads to a function which does not include the existence of critical outlet. This means that waiting during a large enough time, a jamming event will happen independently of the exit size.

Consistently with this result, the jamming probability  $J(N, R)$  displays an universal behavior. In this way, the plot of the data as a function of a rescaled variable, shows a collapse on an unique curve which is not a step function, as it would be obtained if a critical outlet size did exist.

This model is valid for a two-dimensional setup. In the future we will check the validity of this argument on a cylindrical silo. Moreover, it will be interesting to study the dynamics of the beads at the region where arches that jam the orifice are formed. This investigation would help to understand the physical mechanism involved in jamming, and therefore, to resolve by first principles the existence of a critical orifice size.

Concerning the probability density function of the avalanche size, as in the case of the cylindrical silo, we can distinguish two regions. In the interval of avalanches smaller than the mode, the probability grows in a way that we have not been able to fully determine due to a lack of resolution. We propose that the origin of this behavior is the transient flow regime caused by the method used to destroy the jam. At the beginning of the avalanche, the outflow of particles is slightly lower than during the stationary flow and, as consequence, the jamming probability is lower too. In order to confirm this hypothesis, we could check if this behavior still remains when using other method to resume the discharge.

For the avalanches larger than the mode, the distribution displays an exponential decay which can be reproduced by a model proposed by I. Zuriguel *et al.* [31]. This behavior is well characterized by mean avalanche size, and therefore, when plotting the data as a function of the rescaled avalanche, we obtain a unique curve for all outlets. The similar behavior observed for two and three dimensions, suggests that the mechanisms involved in the jamming are the same independently of the system dimensionality.

As the probability is not conclusive on the existence of a critical outlet size, we explore the flow properties in order to clarify this question. From this study we have concluded that the outflow mechanism is independent on the orifice size. This result is consistent with the absence of a critical size of the orifice. From a microscopic point of view, this assertion is grounded on the universal behavior of the velocity and packing fraction along the exit.

We have shown that the characteristic scale for the velocity is  $R^{1/2}$ . This result is consistent with the hypothesis that the bead velocity is determined by the fall from the so called “free-fall arch”. However, we have demonstrated that there is not a region close to the exit where the acceleration is constant. This observation is a proof of the necessity of a deeper study on the forces acting at the proximity of the orifice. Therefore, in the future, it will be interesting to carry out the same experiment using photoelastic particles in order to analyze the forces during the discharge. It is probable that there are chain forces at the region below the “free-fall arch” supporting part of the material weight.

Concerning the packing fraction, the first relevant result is the absence of the so called “empty annulus” [8]. This fact has been observed from the profiles of the packing fraction along the exit, which despite displaying an important gradient, they do not take zero values anywhere. This result leads to the conclusion that the whole orifice is effective to the passing of beads. In consequence, the parameter  $k$  proposed by W. A. Beverloo [43] at the flow equation does not make physical sense.

Another important result is the packing fraction dependency on the outlet size: the longer the outlet the higher the packing fraction. This behavior could be due to the beads reaccommodation in order to avoid jamming when they cross through the exit. Therefore, it is possibly that packing fraction and jamming probability are related, as the larger the jamming probability, the larger the rearrangement, and in consequence, the lower the packing fraction.

The validity of the results obtained from the microscopic study have been checked by their

corresponding macroscopic magnitude, i. e., the mean flow rate. Considering the granular matter as a continuum medium we have derived an expression that predicts correctly the experimental measurements of the mean flow rate, even for orifices where jamming often happens. This equation is essentially the same than C. Mankoc *et al.* [53] propose. This fact corroborates the necessity of introducing the dependency of the packing fraction on the orifice size at the Beverloo's expression.

The results obtained from the flow dynamics show the existence of two process at different time scales. On one hand, there are intrinsic fluctuations which seems to be stochastic. This property is founded on the Gaussian behavior of the fluctuations around the mean value, which appears independently of the outlet size. The origin of this kind of fluctuations could be related to the interparticle collisions.

On the other hand, we have observed “intermittencies” that provoke an important slowing down of the flow rate. This extrinsic oscillations could be related to the formation of coherent structures above the exit. These structures could consist on unstable arches whose life time is nonetheless longer than the typical lapse between the passing of two consecutive beads through the aperture. This behavior is observed at the tails situated at left part of the distributions. These tails decay slower than a quadratic exponential and they are more likely for small exits. However, according to the non existence of a critical size of the orifice, these events also will appear at large outlet if we wait for enough time.

The existence of these two processes (fluctuations and intermittencies) have been also observed at the measurements of the interval of time between the passing of two successive beads through the exit. There is a well defined threshold for  $\Delta t_i$ , above which long events eventually appear.

The universal behavior of the flow becomes evident in the velocity and packing fraction fluctuations. In both cases, the distributions collapse on an asymmetric curve. This feature is clearer in the case of the area fraction, and this form could be due to the rearrangement of the beads when they pass through the exit.

All the results obtained for the flow suggest that it is a well defined state with the same properties independently of the aperture size. Therefore, this fact suggests the possibility of interpreting the discharge dynamics by an stochastic model which includes the intermittency events. This idea is left for future investigations, and it could be a good way to investigate the existence of a critical outlet size.

In this work we have presented an analysis of the two most salient phenomena of the silo discharge by gravity: jamming and flow. We hope that these results will help to the understanding of this process, as well as to incentivate the study of the numerous questions that remain unsolved.



# Bibliografía

- [1] C. Coulomb. *Essay on the rules of maximis and minimis applied to some problems of equilibrium related to architecture*. Acad. Roy. Sci. Mem. Phys. **7**, (1773), p. 343.
- [2] M. Faraday. *On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces*. Philos. Trans. R. Soc. London **52**, (1831), p. 299.
- [3] W. J. W. Rankine. *On the stability of loose earth*. Philos. Trans. Roy. Soc. London **147**, (1857), p. 9.
- [4] I. Roberts. *Determination of the vertical and lateral pressures of granular substances*. Proceedings of the Royal Society of London **36**, (1884), p. 225.
- [5] H. A. Janssen. *Tests on grain pressure silos*. Z. Vereins Deutsch Ing. **39**, (1895), p. 1045.
- [6] O. Reynolds. *On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. with experimental illustrations 5*. Phil. Mag. Ser. **20**, (1885), p. 469.
- [7] R. A. Bagnold. *Physics of Blown Sand and Desert Dunes*. Springer (1971).
- [8] R. L. Brown, J. C. Richards. *Principles of Powder Mechanics*. Pergamon Press (1970).
- [9] O. Zik, D. Levine, S. G. Lipson, S. Shtrikman, J. Stavans. *Rotationally induced segregation of granular materials*. Phys. Rev. Lett. **73**, (1994), p. 644.
- [10] E. M. Matthias, B. E. Lauderdale, S. R. Nagel, H. M. Jaeger. *Brazil-nut effect: Size separation of granular particles*. Nature **414**, (2001), p. 270.
- [11] T. Schnautz, R. Brito, C. A. Kruelle, I. Rehberg. *A horizontal brazil-nut effect and its reverse*. Phys. Rev. Lett. **95**, (2005), p. 028001.
- [12] I. Zuriguel, J.-F. Boudet, Y. Amarouchene, H. Kellay. *Role of fluctuation-induced interactions in the axial segregation of granular materials*. Phys. Rev. Lett. **95**, (2005), p. 258002.
- [13] I. Zuriguel, J. Gray, J. Peixinho, T. Mullin. *Pattern selection by a granular wave in a rotating drum*. Phys. Rev. E **73**, (2006), p. 061302.
- [14] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud, P. Claudin. *Jamming, force chains, and fragile matter*. Phys. Rev. Lett. **81**, (1998), p. 1841.
- [15] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J.-P. Bouchaud, P. Claudin. *Jamming and stress propagation in particulate matter*. Physica A **263**, (1999), p. 354.

- [16] A. J. Liu, S. R. Nagel. *Jamming is not just cool any more*. Nature **396**, (1998), p. 21.
- [17] J. G. Berryman. *Random close packing of hard spheres and disks*. Phys. Rev. A. **27**, (1983), p. 1053.
- [18] L. Vanel, D. Howell, D. Clark, R. P. Behringer, E. Clément. *Memories in sand: Experimental tests of construction history on stress distributions under sandpiles*. Phys. Rev. E **60**, (1999), p. 5040.
- [19] J. Duran. *Sands, Powders, and Grains: An Introduction to the Physics of Granular Materials*. Springer (1999).
- [20] A. W. Jenike. *Storage and flow of solids*. University of Utah, Engineering Experiment Station, Salt Lake City. Bulletin 123. (1970).
- [21] Z. Zhong, J. Y. Ooi, J. M. Rotter. *The sensitivity of silo flow and wall stresses to filling method*. Engng. Struct. **23**, (2001), p. 756.
- [22] H. Sakaguchi, E. Ozaki, T. Igarashi. *Plugging of the flow of granular materials during the discharge from a silo*. Int. J. M. Phys. B **7**, (1993), p. 1949.
- [23] K. To, P. Y. Lai, H. K. Pak. *Jamming of granular flow in two-dimensional hopper*. Phys. Rev. Lett. **86**, (2001), p. 71.
- [24] K. To, P. Y. Lai. *Jamming pattern in a two-dimensional hopper*. Phys. Rev. E **66**, (2002), p. 011308.
- [25] K. To, P. Y. Lai, H. K. Pak. *Flow and jam of granular particles in a two-dimensional hopper*. Physica A **315**, (2002), p. 174.
- [26] K. To. *Jamming transition in two-dimensional hoppers and silos*. Phys. Rev. E **71**, (2005), p. 060301(R).
- [27] G. Pérez. *Numerical simulations in granular matter: The discharge of a 2d silo*. Pramana, J. Phys. **70**, (2008), p. 989.
- [28] A. Janda, I. Zuriguel, A. Garcimartín, L. A. Pugnaloni, D. Maza. *Jamming and critical outlet size in the discharge of a two-dimensional silo*. Europhys. Lett. **84**, (2008), p. 44002.
- [29] S. S. Manna, H. J. Herrmann. *Intermittent granular flow and clogging with internal avalanches*. Eur. Phys. J. E **1**, (2000), p. 341.
- [30] I. Zuriguel, L. A. Pugnaloni, A. Garcimartín, D. Maza. *Jamming during the discharge of grains from a silo described as a percolating transition*. Phys. Rev. E **68**, (2003), p. 30301(R).
- [31] I. Zuriguel, A. Garcimartín, D. Maza, L. A. Pugnaloni, J. M. Pastor. *Jamming during the discharge of granular matter from a silo*. Phys. Rev. E **71**, (2005), p. 051303.
- [32] A. Garcimartín, C. Mankoc, A. Janda, R. Arévalo, J. M. Pastor, I. Zuriguel, D. Maza. *Flow and jamming of granular matter through an orifice*. In *Traffic and Granular Flow '07* (2009).
- [33] A. Mehta. *Granular Physics*. Cambridge University Press (2007).

- [34] L. A. Pugnaloni, G. C. Baker. *Structure and distribution of arches in shaken hard sphere deposits*. Physica A **337**, (2004), p. 428.
- [35] J. Duran, J. Rajchenbach, E. Clément. *Arching effect model for particle size segregation*. Phys. Rev. Lett. **70**, (1993), p. 2431.
- [36] C. S. O'Hern, S. A. Langer, A. J. Liu, S. R. Nagel. *Force distributions near jamming and glass transitions*. Phys. Rev. Lett. **86**, (2001), p. 111.
- [37] E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger, S. R. Nagel. *Density fluctuations in vibrated granular materials*. Phys. Rev. E **57**, (1998), p. 1971.
- [38] L. A. Pugnaloni, M. G. Valluzzi, L. G. Valluzzi. *Arching in tapped deposits of hard disks*. Phys. Rev. E **73**, (2006), p. 051302.
- [39] S. Dorbolo, N. Vandewalle. *Electrical investigations of granular arches*. Physica A **311**, (2002), p. 307.
- [40] C. Mankoc, A. Garcimartín, I. Zuriguel, D. Maza, L. A. Pugnaloni. *Role of vibrations in the jamming and unjamming of grains discharging from a silo*. Phys. Rev. E **80**, (2009), p. 011309.
- [41] A. Janda, D. Maza, A. Garcimartín, E. Kolb, J. Lanuza, E. Clément. *Unjamming of a granular hopper by vibration*. Europhys. Lett. **87**, (2009), p. 24002.
- [42] I. Z. Ballaz. *Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de silos*. Ph.D. thesis, Departamento de Física y Matemática Aplicada, Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra (2005).
- [43] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, J. V. de Velde. *The flow of granular solids through orifices*. Chem. Engng. Sci. **15**, (1961), p. 260.
- [44] R. M. Nedderman, U. Tüzün, S. B. Savage, G. T. Houlsby. *The flow of granular materials: I. discharge rates from hoppers*. Chem. Eng. Sci. **37**, (1982), p. 1597.
- [45] U. Tuzun, G. T. Houlsby, R. M. Nedderman, S. B. Savage. *The flow of granular materials ii: velocity distributions in slow flow*. J. Chem. Eng. Sci. **37**, (1982), p. 1691.
- [46] S. B. Savage, R. M. Nedderman, U. Tuzun, G. T. Houlsby. *The flow of granular materials iii: rapid shear flows*. J. Chem. Eng. Sci. **38**, (1983), p. 189.
- [47] R. M. Nedderman, C. Laohakul. *The thickness of the shear zone of flowing granular media*. Powder Technol. **25**, (1980), p. 91.
- [48] R. M. Nedderman. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press (1992).
- [49] J. Y. Zhang, V. Rudolph. *Effect of shear friction on solid flow through an orifice*. Ind. Eng. Chem. Res. **30**, (1991), p. 1977.
- [50] A. P. Huntington, N. M. Rooney. *Discharge of granular materials from hoppers*. Tech. rep., Department of Chemical Engineering, University of Cambridge (1971).



- [51] D. J. V. Zuilichem, N. D. V. Egmond. *Density behaviour of flowing granular material*. Powder Technology **10**, (1974), p. 161.
- [52] M. Levinson, B. Shmutter, W. Resnick. *Displacement and velocity fields in hoppers*. Ind. Eng. Chem. Res. **16**, (1977), p. 29.
- [53] C. Mankoc, A. Janda, R. Arévalo, J. M. Pastor, I. Zuriguel, A. Garcimartín, D. Maza. *The flow rate of granular materials through an orifice*. Granular Matter **9**, (2007), p. 407.
- [54] X. I. Wu, K. J. Måløy, A. Hansen, M. Ammi, D. Bideau. *Why hour glasses tick*. Phys. Rev. Lett. **71**, (1993), p. 1363.
- [55] C. T. Veje, P. Dimon. *Two-dimensional granular flow in a small-angle funnel*. Phys. Rev. E **54**, (1996), p. 4329.
- [56] E. L. A. Medina, J. A. Cordoba, C. Treviño. *Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2d silo*. Phys. Lett. A **250**, (1998), p. 111.
- [57] A. Janda, R. Harich, I. Zuriguel, D. Maza, P. Cixous, A. Garcimartín. *Flow-rate fluctuations in the outpouring of grains from a two-dimensional silo*. Phys. Rev. E **79**, (2009), p. 031302.
- [58] I. Zuriguel, A. Janda, A. Garcimartín, D. Maza. *Flow rate in the discharge of a two-dimensional silo*. In *Powders and Grains 2009* (2009).
- [59] D. C. Hong, J. A. McLennan. *Molecular dynamics simulations of hard sphere granular particles*. Physica A **187**, (1992), p. 159.
- [60] R. L. Brown, J. C. Richards. *Profile of flow of granulaes through apertures*. Trans. Instn. Chem. Engrs. **38**, (1960), p. 243.
- [61] E. Longhi, N. Easwar, N. Menon. *Large force fluctuations in a flowing granular medium*. Phys. Rev. Lett. **89**, (2002), p. 045501.
- [62] G. T. Seidler, G. Martinez, L. H. Seeley, K. H. Kim, E. A. Behne, S. Zaranek, B. D. Chapman, S. M. Heald, D. L. Brewster. *Granule-by-granule reconstruction of a sandpile from x-ray microtomography data*. Phys. Rev. E **62**, (2000), p. 8175.
- [63] P. L. Bransby, P. M. Blair-Fish, R. G. James. *An investigation of the flow of granular materials*. Powder Technol. **8**, (1973), p. 197.
- [64] J. O. Cutress, R. F. Pulfer. *X-ray investigations of flowing powders*. Powder Technol. **1**, (1967), p. 213.
- [65] J. Y. Ooi, J. F. Chen, J. M. Rotter. *Measurement of solids flow patterns in a gypsum silo*. Int. J. Multiphase Flow **99**, (1998), p. 272.
- [66] P. G. Fairhurst, M. Barigou, P. J. Fryer, J. P. Pain, D. J. Parker. *Using positron emission particle tracking (pept) to study nearly neutrally buoyant particles in high solid fraction pipe flow*. Int. J. Multiphase Flow **27**, (2001), p. 1881.
- [67] N.Ñ. Mohsenin. *Physical Properties of Plant and Animal Materials: Physical Characteristics and Mechanical Properties*, vol. 1. Gordon and Breach Science Publishers (1970).

- [68] W. Kaplan. *Green's Theorem*, chap. 5.5, p. 286. Addison Wesley Publishing Company, 4th edn. (1991).
- [69] F. Radjai, M. Jean, J. J. Moreau, S. Roux. *Force distributions in dense two-dimensional granular systems*. Phys. Rev. Lett. **77**, (1996), p. 274.
- [70] J. H. Snoeijer, M. V. Hecke, E. Somfai, W. van Saarloos. *Force and weight distributions in granular media: Effects of contact geometry*. Phys. Rev. E **67**, (2003), p. 030302(R).
- [71] E. Clément, G. Reydellet, F. Rioual, B. Parise, V. Fanguet, J. Lanuza, E. Kolb. *Jamming patterns and blockade statistics in model granular flows*. In D. Helbing, H. J. Herrmann, M. Schreckenberg, D. E. Wolf, eds., *Traffic and Granular Flow '99. Social, Traffic, and Granular Dynamics*, p. 457. Springer (2000).
- [72] J. Zhong, M. Hou, Q. Shi, K. Lu. *Criticality of the dilute-to-dense transition in a 2d granular flow*. J. Phys.: Condens. Matter **18**, (2006), p. 2789.
- [73] N. Roussel, T. L. H. Nguyen, P. Coussot. *General probabilistic approach to the filtration process*. Phys. Rev. Lett. **98**, (2007), p. 114502.
- [74] R. Arévalo, D. Maza, L. A. Pugnaloni. *Identification of arches in two-dimensional granular packings*. Phys. Rev. E **74**, (2006), p. 021303.
- [75] A. Garcimartín, I. Zuriguel, L. A. Pugnaloni, A. Janda. *Shape of jamming arches in two-dimensional deposits of granular materials*. Phys. Rev. E **82**, (2010), p. 031306.
- [76] I. Oldal, B. M. Csizmadia. *Determination of velocity distribution at silo outlet*. In *7th International Multidisciplinary Conference* (2007).
- [77] M. Abramowitz, I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. Dover Publications (1965).
- [78] A. Janda, D. Maza, I. Zuriguel, A. Garcimartín. *Flow-rate of granular materials discharging from a silo*. En preparación .



## Summary

The behavior of granular materials passing through an orifice displays qualitative differences respect to the case of a fluid. This is due to the possibility of forming arches that block the exit. Jamming often happens when the orifice size is comparable to the beads and it is one of the most important problems in industry. In the literature, some works propose the existence of a critical value for the outlet size, above which jamming does not happen. However, this hypothesis is generally based on empiric arguments, and therefore, it is not conclusive.

In this report we present an experimental work where we analyze systematically and under well controlled conditions, the microscopic and macroscopic processes involved during the discharge of a silo by gravity. In order to do that, we have designed a 2D silo made of flat transparent walls that allows us to visualize the movement of the beads. The first aim of this work is to answer the question about the existence of a critical size of the aperture. This issue has been investigated by two different strategies. On one hand, we have studied the jamming probability as function of the exit size. From these data, we have proposed a probabilistic model that relates the mean number of particles fallen between two consecutive jamming events with the typical size of the arches that block a given outlet size. From this model, it is deduced the absence of a critical size of the orifice. This implies that if we wait during a large enough time, we will always observe a jamming event although the exit was much larger than the beads. On the other hand, we have studied the behavior of the dynamics of the granular flow during the discharge. This is accomplished by characterizing the flow rate, the velocity and the packing fraction of the grains at the exit. From these results we have concluded that the outflow properties are the same independently of the size of the orifice. This fact suggests that the flow is a well defined state of the discharge process, which is consistent with the absence of a critical size of the outlet.

## Resumen

El comportamiento de los medios granulares al pasar a través un orificio presenta diferencias cualitativas con el caso de un líquido. Esto se debe a que existe la posibilidad de que se formen arcos que taponen la abertura, produciéndose un atasco. Esta formación de atascos es común para orificios de tamaño comparable al de los granos y representa uno de los mayores inconvenientes en la industria. En la literatura existen algunos trabajos que proponen la posible existencia de un tamaño crítico del orificio por encima del cual no se producen atascos. Sin embargo, esta hipótesis generalmente se basa en argumentos empíricos, y por lo tanto, no son del todo concluyentes.

En esta memoria se presenta un trabajo experimental donde se han analizado sistemáticamente y bajo condiciones controladas los procesos microscópicos y macroscópicos involucrados en la descarga por gravedad de un medio granular desde un silo. Para ello, se ha diseñado un contenedor de paredes planas y transparentes que nos permite visualizar el movimiento de los granos. El principal objetivo de este trabajo es responder a la pregunta de si existe un tamaño crítico del orificio. Esta cuestión se ha abordado empleando dos estrategias distintas. Por un lado, se ha estudiado la probabilidad de que se produzca un atasco durante la descarga en función del tamaño de la abertura. A partir de los datos obtenidos se ha propuesto un modelo probabilístico que relaciona el número promedio de partículas descargadas entre dos atascos consecutivos con el tamaño típico de los arcos que interrumpen el flujo para un determinado tamaño de la salida. De este modelo se deduce la no existencia de un tamaño crítico del orificio, y por lo tanto, si esperamos el tiempo suficiente siempre observaremos la aparición de un atasco independientemente de que el orificio sea mucho más grande que los granos. Por otro lado, se ha estudiado con una gran resolución temporal el comportamiento de la dinámica del flujo durante la descarga. Para ello, se ha caracterizado el caudal, la velocidad y la fracción de ocupación de las partículas en la salida. De dichos datos se ha obtenido que tanto el mecanismo de salida de los granos como la dinámica del flujo presentan el mismo comportamiento independientemente del tamaño del orificio. Este resultado implica que el flujo es un estado bien definido del proceso de descarga, lo cual es consistente con la ausencia de un tamaño crítico de la abertura.

