

## ***Resolución numérica de sistemas de ecuaciones lineales. Problemas de contorno***

FAUSTINO N. GIMENA RAMOS, DR. ARQUITECTO  
LAZARO GIMENA RAMOS, ALUMNO INGENIERIA INDUSTRIAL

**RESUMEN.** Este artículo presenta un método de resolución numérica de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales, cualesquiera que sean las condiciones de contorno.

**SUMMARY.** This article presents a method of numerically resolving lineal differential equations no matter the type of surrounding conditions.

### **INDICE GENERAL**

1. Resolución numérica de un sistema de EDO'S lineales
2. Resolución numérica de EDO'S lineales de orden  $n$
3. Caso de aplicación del método. Efecto en la sección del elemento estructural lineal
4. Conclusiones

### **1. RESOLUCION NUMERICA DE UN SISTEMA DE EDO'S LINEALES. PROBLEMA DE CONTORNO**

Sea el siguiente sistema genérico de EDO'S lineal:

$$\begin{aligned} \frac{df_1(x)}{dx} + a_{11}(x)f_1(x) + a_{12}(x)f_2(x) + \dots + a_{1n}(x)f_n(x) &= b_1(x) \\ a_{21}(x)f_1(x) + \frac{df_2(x)}{dx} + a_{22}(x)f_2(x) + \dots + a_{2n}(x)f_n(x) &= b_2(x) \\ &\vdots \\ a_{n1}(x)f_1(x) + a_{n2}(x)f_2(x) + \dots + \frac{df_n(x)}{dx} + a_{nn}(x)f_n(x) &= b_n(x) \end{aligned}$$

donde  $a_{ij}(x)$ ,  $b_i(x)$  son funciones dato del problema y  $f_j(x)$  son las funciones incógnita.

Expresado en forma matricial y utilizando el operador  $D = \frac{d}{dx}$ :

$$\begin{pmatrix} D + a_{11}(x) & a_{12}(x) & \dots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & D + a_{22}(x) & \dots & a_{2n}(x) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \dots & D + a_{nn}(x) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x) \\ b_2(x) \\ \cdot \\ b_n(x) \end{pmatrix}$$

Discretizando el sistema mediante el paso de diferenciales a diferencias según el método de punto pendiente:

$$Df_j(x) = \frac{df_j(x)}{dx} \approx \frac{\Delta_i f_j(x)}{\Delta_i x} = \frac{f_j(x_{i+1}) - f_j(x_i)}{x_{i+1} - x_i} \quad \text{para } j = 1, \dots, n$$

se obtiene:

$$\begin{pmatrix} \frac{\Delta_i}{\Delta_i x} + a_{11}(x_i) & a_{12}(x_i) & \dots & a_{1n}(x_i) \\ a_{21}(x_i) & \frac{\Delta_i}{\Delta_i x} + a_{22}(x_i) & \dots & a_{2n}(x_i) \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ a_{n1}(x_i) & a_{n2}(x_i) & \dots & a_{nn}(x_i) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \cdot \\ f_n(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x_i) \\ b_2(x_i) \\ \cdot \\ b_n(x_i) \end{pmatrix}$$

Operando el primer miembro de la igualdad y multiplicando el sistema por  $\Delta_i x$ :

$$\begin{pmatrix} f_1(x_{i+1}) - f_1(x_i) + a_{11}(x_i) f_1(x_i) \Delta_i x + a_{12}(x_i) f_2(x_i) \Delta_i x + \dots + a_{1n}(x_i) f_n(x_i) \Delta_i x \\ a_{21}(x_i) f_1(x_i) \Delta_i x + f_2(x_{i+1}) - f_2(x_i) + a_{22}(x_i) f_2(x_i) \Delta_i x + \dots + a_{2n}(x_i) f_n(x_i) \Delta_i x \\ \cdot \\ \cdot \\ a_{n1}(x_i) f_1(x_i) \Delta_i x + a_{n2}(x_i) f_2(x_i) \Delta_i x + \dots + f_n(x_{i+1}) - f_n(x_i) + a_{nn}(x_i) f_n(x_i) \Delta_i x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(x_i) \Delta_i x \\ b_2(x_i) \Delta_i x \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n(x_i) \Delta_i x \end{pmatrix}$$

de donde

$$\begin{pmatrix} f_1(x_{i+1}) \\ f_2(x_{i+1}) \\ \cdot \\ f_n(x_{i+1}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - a_{11}(x_i) \Delta_i x & -a_{12}(x_i) \Delta_i x & \dots & -a_{1n}(x_i) \Delta_i x \\ -a_{21}(x_i) \Delta_i x & 1 - a_{22}(x_i) \Delta_i x & \dots & -a_{2n}(x_i) \Delta_i x \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ -a_{n1}(x_i) \Delta_i x & -a_{n2}(x_i) \Delta_i x & \dots & 1 - a_{nn}(x_i) \Delta_i x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(x_i) \Delta_i x \\ b_2(x_i) \Delta_i x \\ \cdot \\ b_n(x_i) \Delta_i x \end{pmatrix}$$

Expresado en forma compacta:

$$\{F_{i+1}\} = (A_i)\{F_i\} + \{B_i\}$$

Aplicando la ley de recurrencia se relacionan dos puntos cualesquiera:

$$\{F_{p+1}\} = (A)_p\{F_0\} + \{B\}_p$$

siendo

$$(A)_p = \prod_{i=0}^p (A_{p-1})$$

$$\{B\}_p = \sum_{i=0}^{p-1} \left[ \prod_{j=i}^{p-1} (A_{p+i-j}) \right] \{B_i\} + \{B_p\}$$

de esta manera:

$$\begin{aligned} \{F_{e^{(k-1)}}\} &= (A)_{e^{(k-1)-e^{(k-2)}}} \times \{F_{e^{(k-2)}}\} + \{B\}_{e^{(k-1)-e^{(k-2)}}} = \dots = \\ &= (A)_{e^{(k-1)-e^1}} \times \{F_{e^1}\} + \{B\}_{e^{(k-1)-e^1}} = (A)_{e^{(k-1)-e^0}} \times \{F_{e^0}\} + \{B\}_{e^{(k-1)-e^0}} \end{aligned}$$

Se relacionan los k puntos en los cuales están definidas las n condiciones de contorno:

$$f_j(x_{e^{(m)}}) = C_{j, e^{(m)}} \quad \begin{matrix} 0 \leq m \leq H \\ j \in \{1, \dots, n\} \\ C_{j, e^{(m)}} \in \mathbb{R} \text{ constantes} \end{matrix}$$

Por tanto, se obtiene k-1 sistemas de n ecuaciones con kn incógnitas, que al introducir las n condiciones de contorno, resulta un sistema compatible determinado solución única.

**2. RESOLUCION NUMERICA DE EDO'S LINEALES DE ORDEN n**

Sea la ecuación diferencial de orden n:

$$y^{(n)}(x) + a_{n-1}(x)y^{(n-1)}(x) + \dots + a_1(x)y'(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

utilizando el operador  $D^i = \frac{d^i}{dx^i}$ :

$$D^n y(x) + a_{n-1}(x)D^{n-1} y(x) + \dots + a_1(x)D y(x) + a_0(x)y(x) = b(x)$$

mediante el campo de función  $Z_i = D^i y$ , y sustituyendo  $Z_{i+1} = D Z_i$  para  $i = 0, \dots, n-1$ , se obtiene el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} D & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & D & -1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & D & -1 \\ a_0(x) & a_1(x) & a_2(x) & \dots & a_{n-1}(x) & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0(x) \\ z_1(x) \\ \dots \\ \dots \\ z_{n-1}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ 0 \\ b(x) \end{pmatrix}$$

