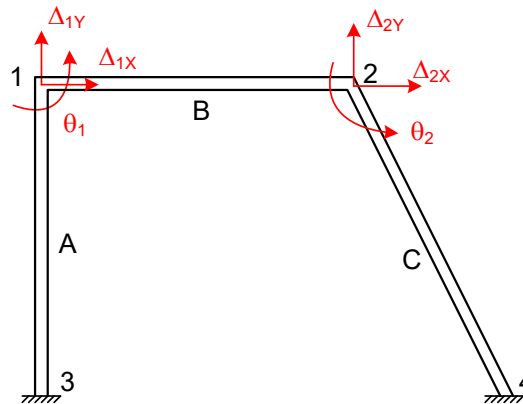


Diseño de Estructuras

Método de rigidez para cálculo de estructuras reticulares



$$\mathbf{K} \Delta = \mathbf{F}$$

Contenido

Introducción

Fundamento teórico

Significado físico de la ecuación de rigidez

Rigidez de la barra plana

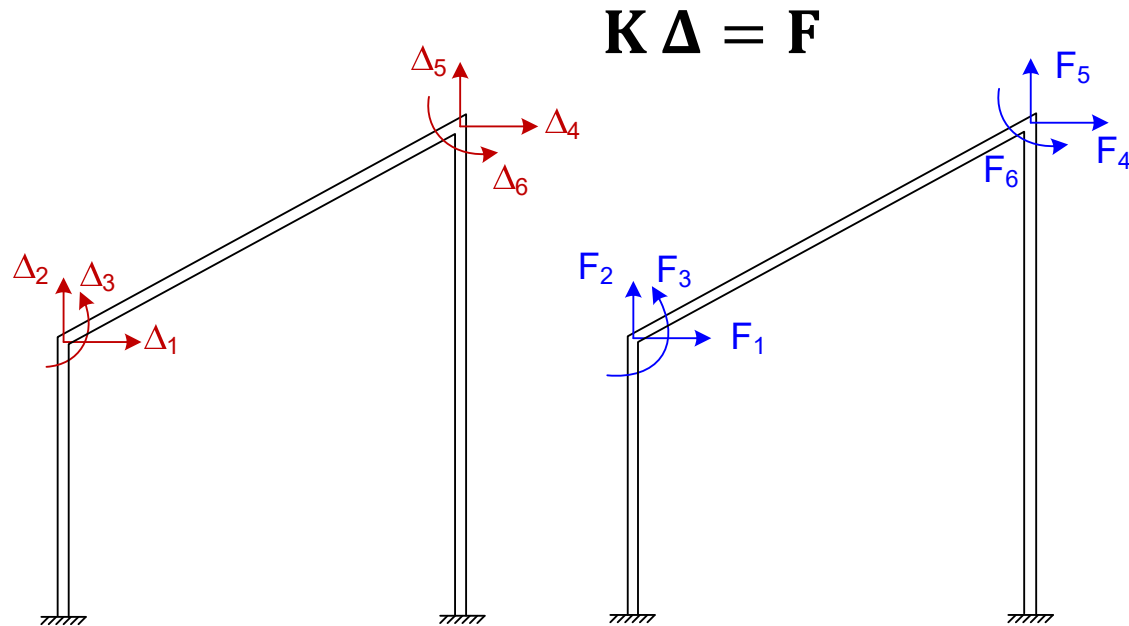
Rigidez de los elementos estructurales

Equilibrio de los nudos

Fuerzas aplicadas

Apoyos especiales

Ejemplos





Métodos de cálculo de estructuras

Basados en la flexibilidad

- Método de compatibilidad de deformaciones en vigas
- Fórmula de los 3 momentos en vigas
- Principio del Trabajo Virtual Complementario
- Teorema 2º de Castigliano para hallar deformaciones
- Método general de flexibilidad, basado en el 2º teorema de Engesser ($\sum f_{ij} X_j = D_i$)

Basados en la rigidez

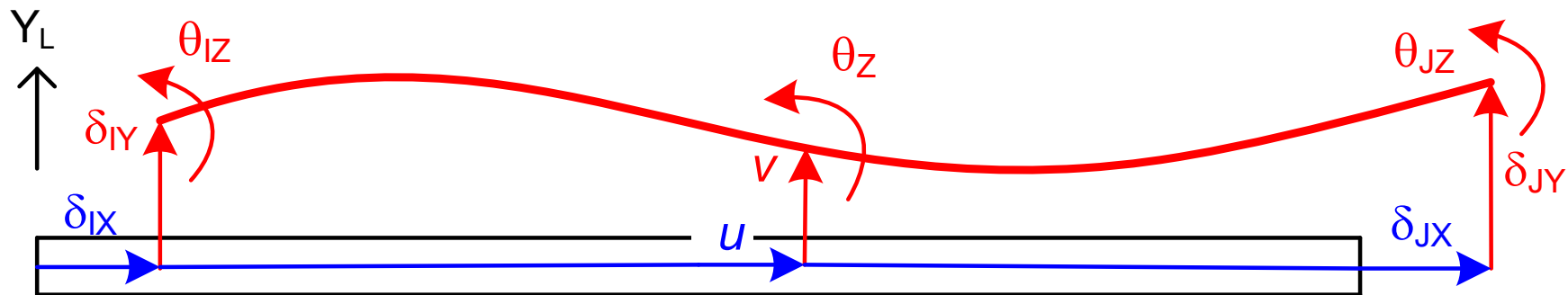
- Principio del Trabajo Virtual
- Teorema 1º de Castigliano 
- Método de rigidez en formulación matricial $\mathbf{K} \Delta = \mathbf{F}$ 
- Método iterativo de Cross para pórticos planos

Algo de historia

- Fundamento teórico debido a C. A. Castigliano (1879)
- Método del giro-deformación A. Bendixen (1914)
 - No empleado en la práctica por la dificultad de resolver las ecuaciones a las que lleva (sistema de ecuaciones lineales de gran tamaño)
- Método iterativo de H. Cross (1930- 1932)
 - Aplicación ingeniosa para resolver de forma iterativa las ecuaciones de rigidez, sin que el concepto de rigidez sea aparente. Tuvo varias secuelas: Kani, Takabeya
 - Utilizado masivamente hasta...
- Aparición de los computadores en 1950-1960 hace revivir el método en su implementación matricial, como se conoce hoy.
 - Usado por todos los programas de computador actuales

Deformación de una barra plana sin cargas

Los grados de libertad en los extremos definen completamente la deformación de una barra. Barra plana: 6 grados de libertad



Axial: $EA \frac{d^2 u}{dx^2} = -q_x = 0$

$$u = C_1 x + C_2 \quad \leftarrow \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{JX} \end{Bmatrix}$$

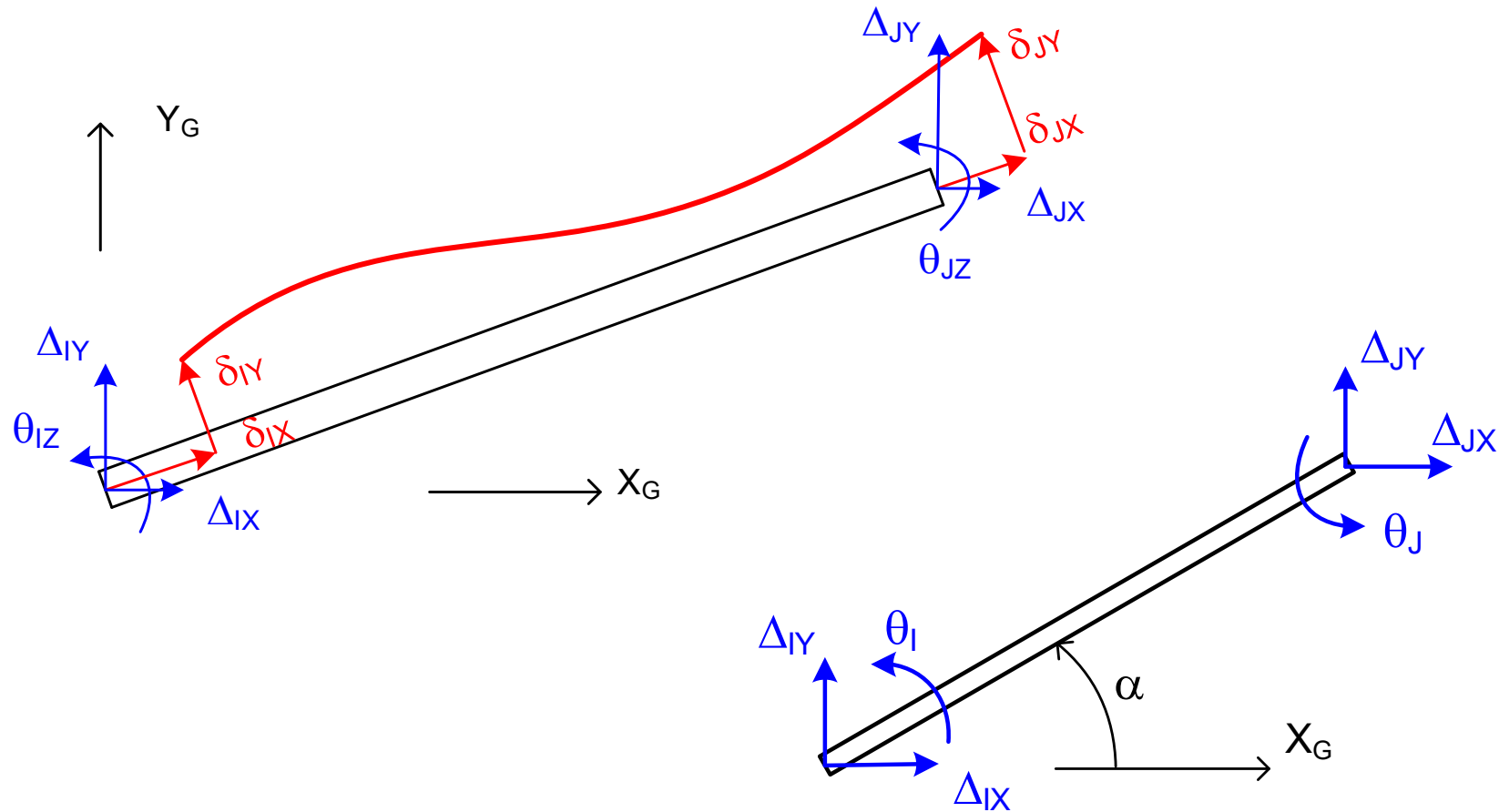
Flexión: $EI \frac{d^4 v}{dx^4} = -q_y = 0$

$$v = C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 \quad \leftarrow \begin{Bmatrix} \delta_{IY} \\ \theta_{IZ} \\ \delta_{JY} \\ \theta_{JZ} \end{Bmatrix}$$

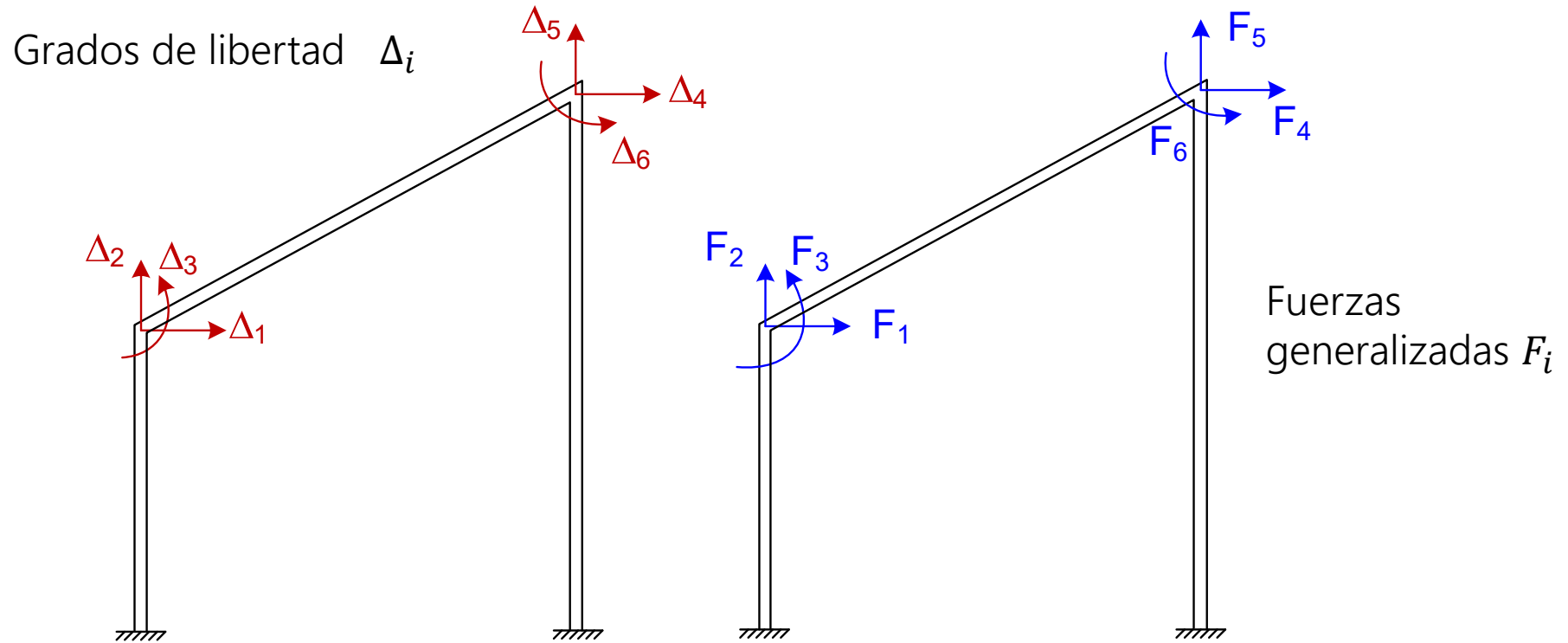
$$M = EI \frac{d^2 v}{dx^2}$$

Deformación de una barra plana sin cargas

Los grados de libertad se refieren a un sistema general, común a toda la estructura



Grados de libertad de la estructura



- Grados de libertad:
Deformaciones necesarias para definir la posición deformada de la estructura, es decir de cada una de las barras
- Fuerzas generalizadas sobre los grados de libertad:
Las fuerzas nodales necesarias para producir las deformaciones
- Fuerzas sobre las barras no consideradas ahora: se trasladarán a los nudos

Desarrollo del Teorema 1º de Castigliano

$$F_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} = \frac{\partial}{\partial \Delta_i} \left(\frac{1}{2} \sum_j F_j \Delta_j \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_j \frac{\partial F_j}{\partial \Delta_i} \Delta_j + \sum_j F_j \frac{\partial \Delta_j}{\partial \Delta_i} \right)$$

$$F_i = \frac{1}{2} \left(\sum_j \frac{\partial F_j}{\partial \Delta_i} \Delta_j + F_i \right)$$

Agrupando F_i a la izda.:

$$F_i = \sum_j \frac{\partial F_j}{\partial \Delta_i} \Delta_j$$

Pero: $F_j = \frac{\partial U}{\partial \Delta_j}$

Resultado:

$$F_i = \sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i} \Delta_j$$

Resultado teórico del método de rigidez

Equilibrio:

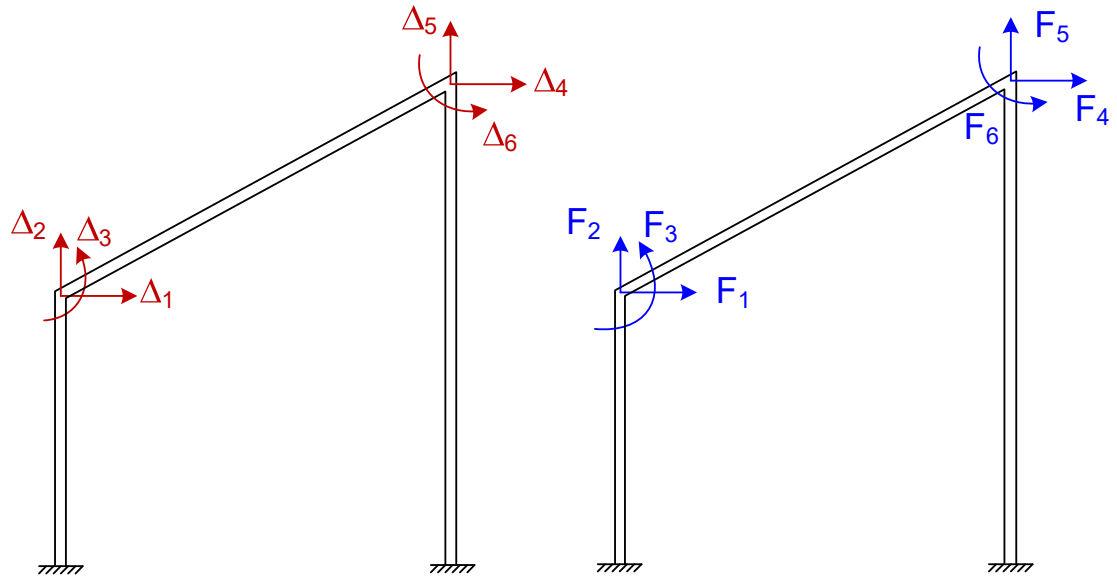
$$F_i = \sum_j \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_j \partial \Delta_i} \Delta_j$$

Coefficientes de rigidez: K_{ij}

$$F_i = \sum_j K_{ij} \Delta_j$$

K_{ij} : fuerza necesaria para vencer cada Δ_i

$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ \dots \\ F_i \\ \dots \\ F_n \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & \dots & K_{1j} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{ii} & K_{ij} & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & \dots & K_{nj} & \dots & K_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_j \\ \dots \\ \Delta_n \end{Bmatrix}$$



K_{ij} son simétricos

Esta expresión de K no es útil, pues en general no es sencillo poner $U(\Delta_i)$

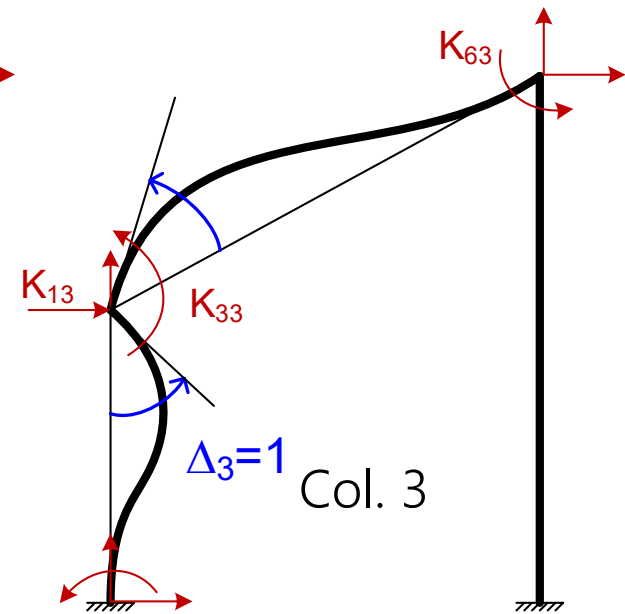
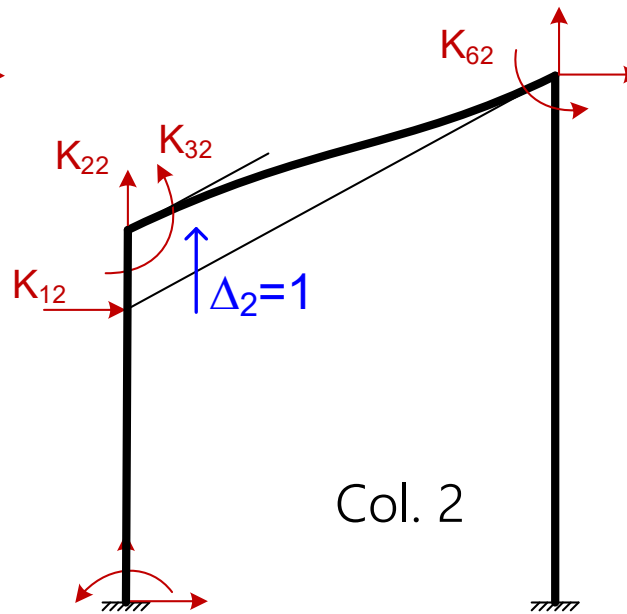
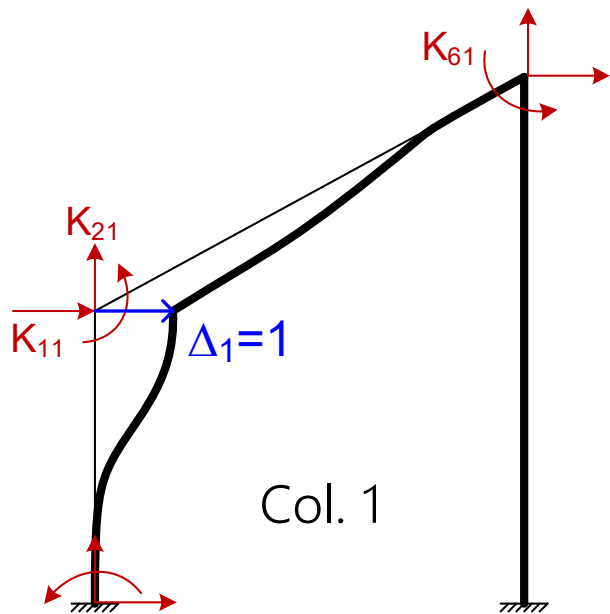
Significado físico de [K]

Columna j de [K]:

Fuerzas y momentos que hay que aplicar sobre los grados de libertad de la estructura, para imponer:

- un desplazamiento unitario en la deformación Δ_j
- y cero en todas las demás

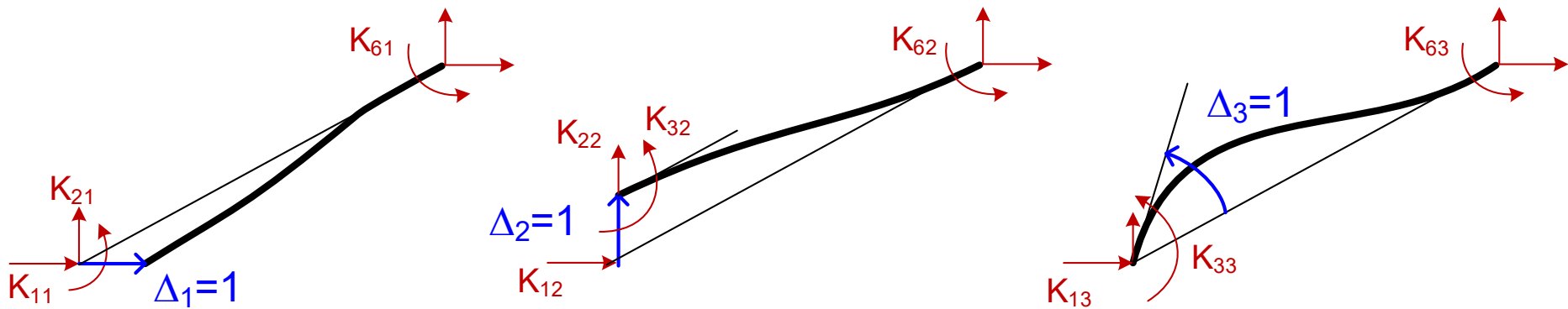
$$\begin{Bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_j \\ \vdots \\ F_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & \dots & K_{1j} & \dots & K_{16} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & K_{jj} & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ K_{61} & \dots & K_{6j} & \dots & K_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 = 0 \\ \vdots \\ \Delta_j = 1 \\ \vdots \\ \Delta_6 = 0 \end{Bmatrix}$$



Significado físico de [K]

Este método no se puede emplear para toda la estructura, es muy complicado

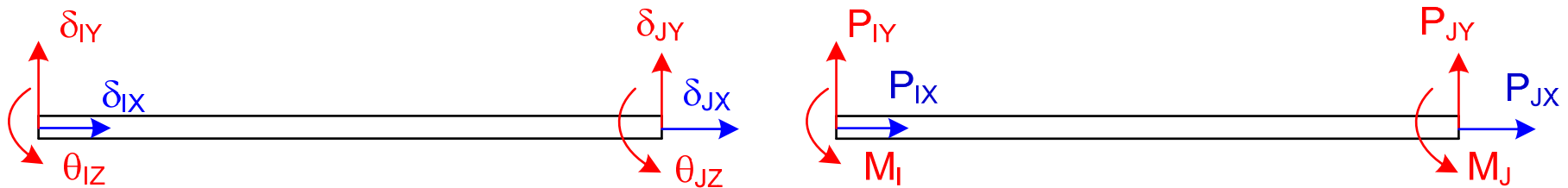
En su lugar: Los valores unidad de los distintos Δ_i se aplican a cada barra y luego se suman las fuerzas debidas a todos ellos



Vamos a aplicar valores 1 a todos los Δ_i de una barra genérica para obtener sus coeficientes de rigidez, y luego sumarlos con las otras barras

Significado físico de [K] para una barra plana

Se emplea en una barra sola, para obtener su matriz de rigidez.



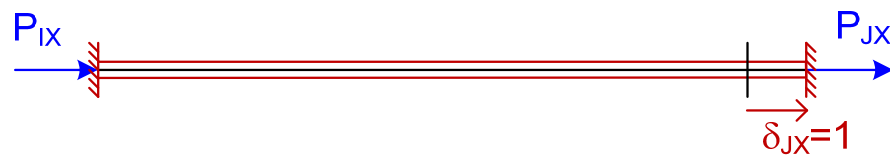
$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_{IZ} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_{JZ} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{IX,IX} & \dots & K_{IX,IZ} & \dots & \dots & K_{IX,JZ} \\ \dots & \dots & K_{IY,IZ} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{IZ,IZ} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{JX,IZ} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & K_{JY,IZ} & \dots & \dots & \dots \\ K_{JZ,IX} & \dots & K_{JZ,IZ} & \dots & \dots & K_{JZ,JZ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_{IZ} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_{JZ} \end{Bmatrix} = \mathbf{1}$$

Dar valor 1 a cada grado de libertad y calcular las fuerzas necesarias para ello.
Resolución sencilla: T. Mohr, o ecuación de la elástica.

Rigidez axial de una barra plana



$$P_{IX} = A\sigma = AE\varepsilon = AE \frac{1}{L} \quad P_{JX} = -P_{IX}$$

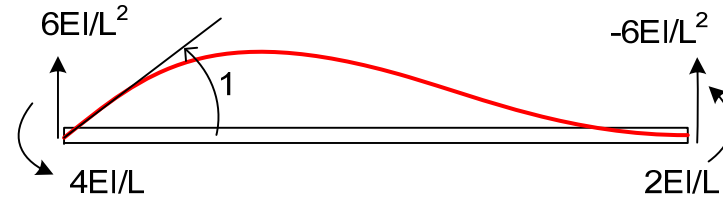
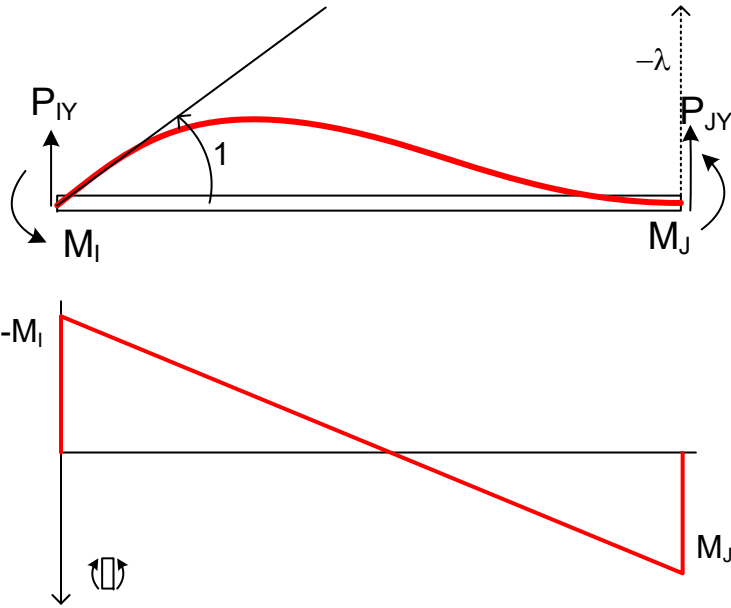


$$P_{JX} = A\sigma = AE\varepsilon = AE \frac{1}{L} \quad P_{IX} = -P_{JX}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ \frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Desacoplada del resto

Rigidez al giro de una barra plana - Nudo I



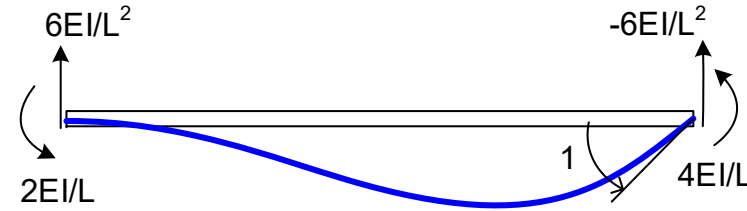
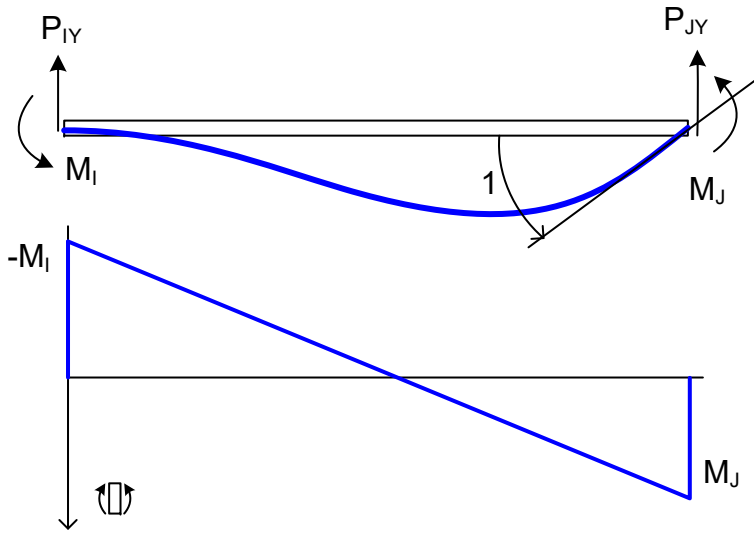
Aplicando 2 veces T. Mohr

$$M_I = \frac{4EI}{L} \quad M_J = \frac{2EI}{L}$$

$$P_{IY} = \frac{6EI}{L^2} \quad P_{JY} = -\frac{6EI}{L^2}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{4EI}{L} & 0 & \dots & \dots \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \frac{2EI}{L} & 0 & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Rigidez al giro de una barra plana - Nudo J



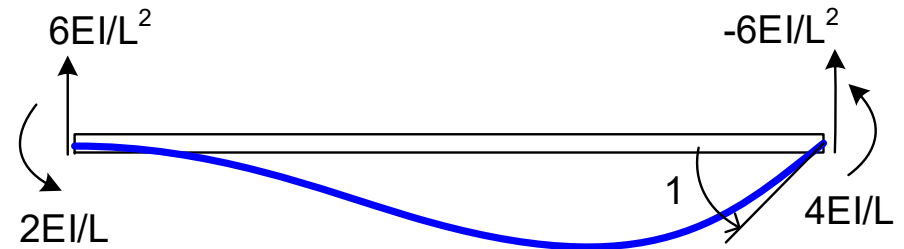
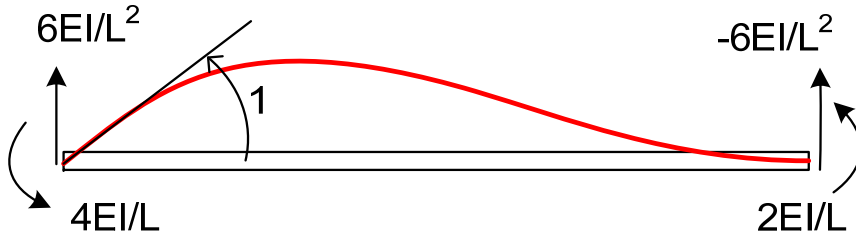
Aplicando 2 veces T. Mohr

$$M_I = \frac{2EI}{L} \quad M_J = \frac{4EI}{L}$$

$$P_{IY} = \frac{6EI}{L^2} \quad P_{JY} = -\frac{6EI}{L^2}$$

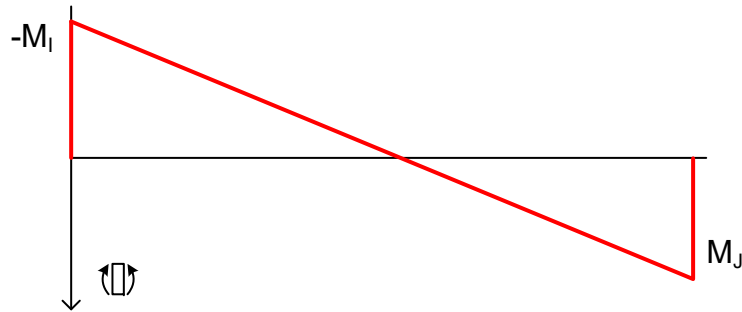
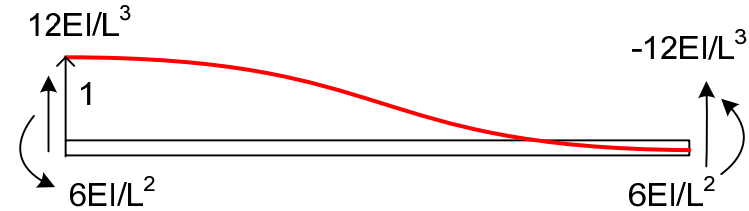
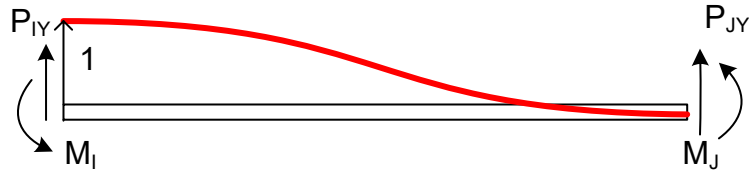
$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \dots & \frac{4EI}{L} & 0 & \dots & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \dots & \frac{2EI}{L} & 0 & \dots & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Rigidez al giro de una barra plana – Nudos I, J



$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{4EI}{L} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \dots & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \frac{2EI}{L} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Rigidez lateral de una barra plana - Nudo I



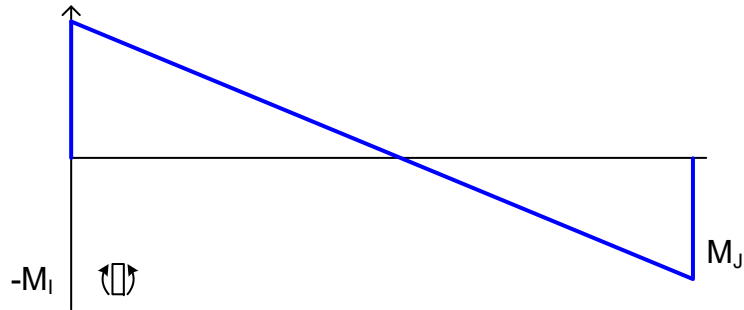
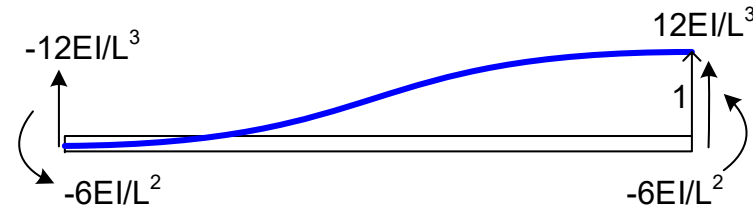
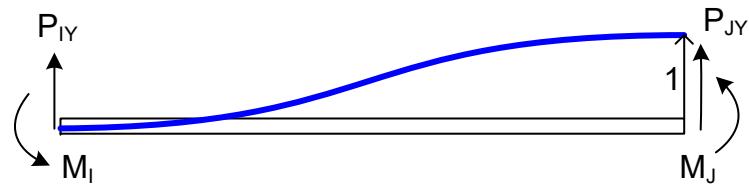
Aplicando 2 veces T. Mohr

$$M_I = \frac{6EI}{L^2} \quad M_J = M_I$$

$$P_{IY} = \frac{12EI}{L^3} \quad P_{JY} = -P_{IY}$$

$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & \dots & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \dots & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & \dots & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Rigidez lateral de una barra plana - Nudo J



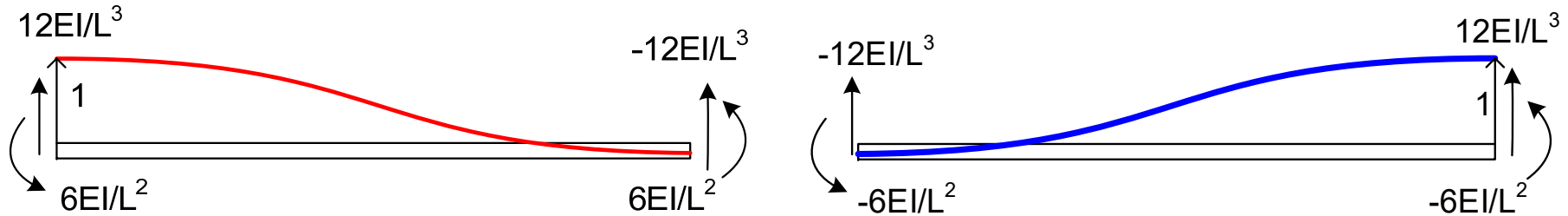
Aplicando 2 veces T. Mohr

$$M_I = -\frac{6EI}{L^2} \quad M_J = M_I$$

$$P_{IY} = -\frac{12EI}{L^3} \quad P_{JY} = -P_{IY}$$

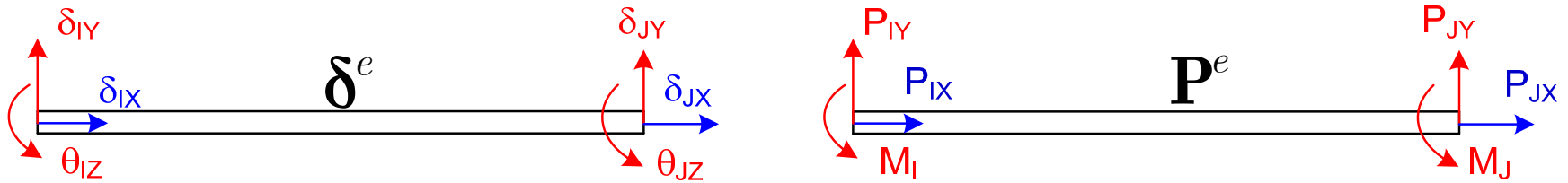
$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Rigidez lateral de una barra plana – Nudos I, J



$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Rigidez de una barra plana - Sistema local



$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ M_I \\ P_{JX} \\ P_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ \hline -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \theta_I \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

$$P^e = K_L^e \delta^e$$

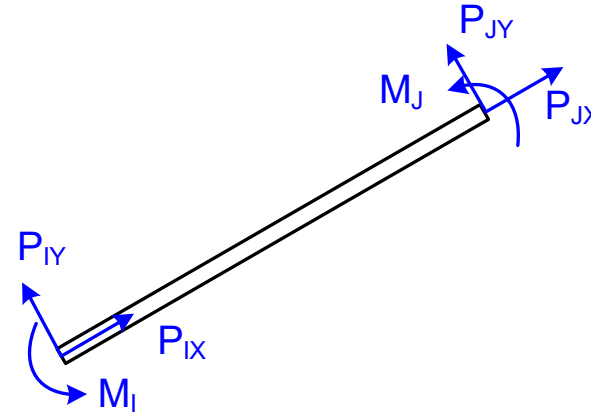
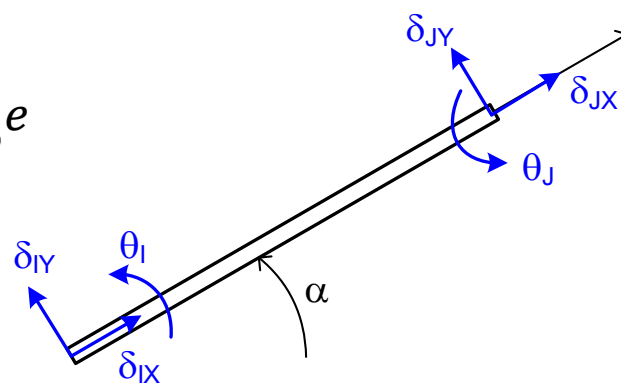
Desacoplados: axial,
flexión-cortante

Rango: 3

Incluye las 3 ecuaciones
de equilibrio

Proyección al sistema general de la rigidez de una barra plana

$$\mathbf{P}^e = \mathbf{K}_L^e \delta^e$$

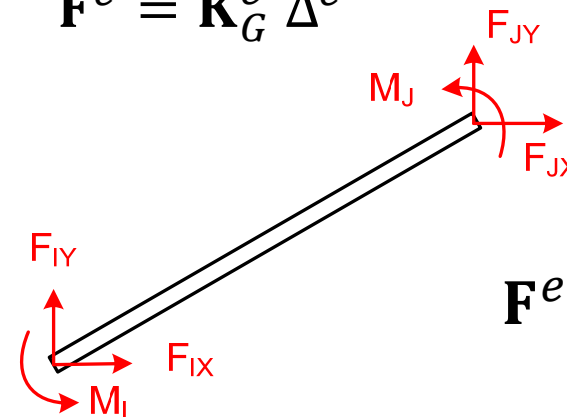
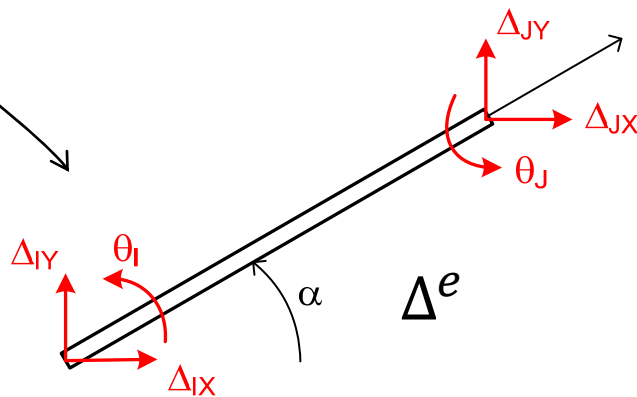


$$\begin{Bmatrix} \delta_X \\ \delta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \\ \theta_Z \end{Bmatrix}$$

$$\uparrow \mathbf{R}^e$$

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{R}_2^{eT} \mathbf{K}_L^e \mathbf{R}_2^e$$

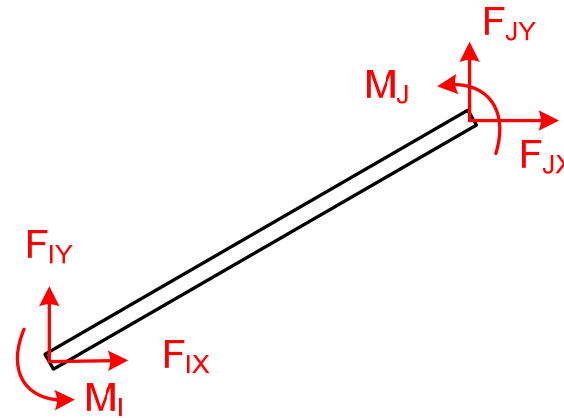
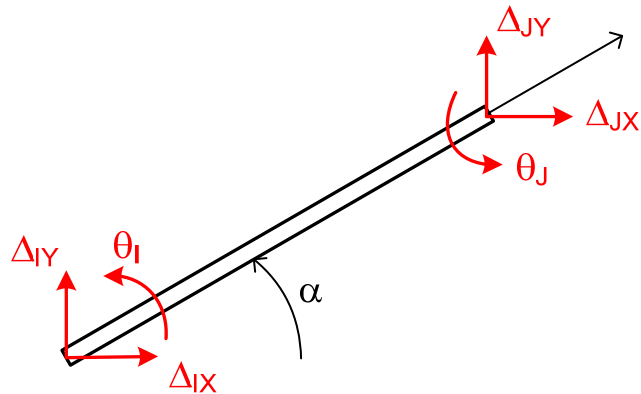
$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}_G^e \Delta^e$$



Rigidez de una barra plana - Sistema general

$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha$$

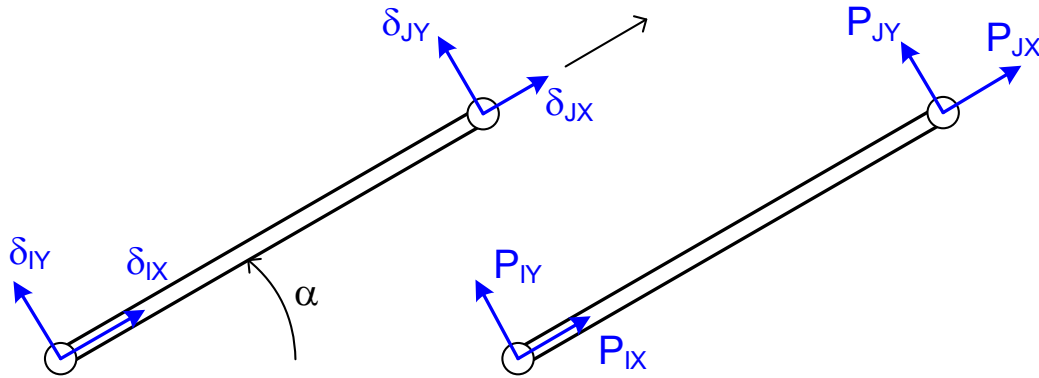


$$\mathbf{F}^e = \mathbf{K}_G^e \Delta^e$$

Rango: 3

$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ M_I \\ F_{JX} \\ F_{JY} \\ M_J \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EAc^2/L & EAsc/L & -6EIs/L^2 & -EAc^2/L & -EAsc/L & -6EIs/L^2 \\ +12EIs^2/L^3 & -12Eisc/L^3 & -6EIs/L^2 & -12EIs^2/L^3 & +12Eisc/L^3 & -6EIs/L^2 \\ EAsc/L & EAs^2/L & 6Eic/L^2 & -EAsc/L & -EAs^2/L & 6Eic/L^2 \\ -12Eisc/L^3 & +12Eic^2/L^3 & 6Eic/L^2 & +12Eisc/L^3 & -12Eic^2/L^3 & 6Eic/L^2 \\ -6EIs/L^2 & 6Eic/L^2 & 4EI/L & 6EIs/L^2 & -6Eic/L^2 & 2EI/L \\ -EAc^2/L & -EAsc/L & 6EIs/L^2 & EAc^2/L & EAsc/L & 6EIs/L^2 \\ -12EIs^2/L^3 & +12Eisc/L^3 & 6EIs/L^2 & +12EIs^2/L^3 & -12Eisc/L^3 & 6EIs/L^2 \\ -EAsc/L & -EAs^2/L & -6Eic/L^2 & EAsc/L & EAs^2/L & -6Eic/L^2 \\ +12Eisc/L^3 & -12Eic^2/L^3 & -6Eic/L^2 & -12Eisc/L^3 & +12Eic^2/L^3 & -6Eic/L^2 \\ -6EIs/L^2 & 6Eic/L^2 & 2EI/L & 6EIs/L^2 & -6Eic/L^2 & 4EI/L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \theta_I \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \\ \theta_J \end{Bmatrix}$$

Rigidez de una barra articulada (celosías)



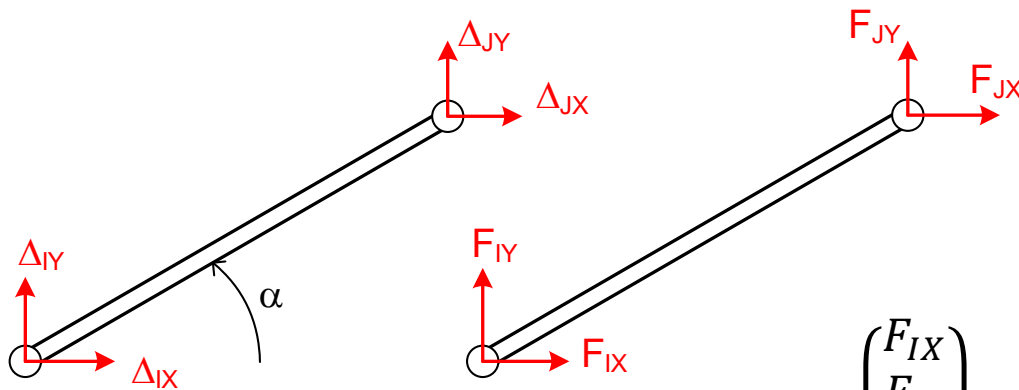
$$\begin{Bmatrix} P_{IX} \\ P_{IY} \\ P_{JX} \\ P_{JY} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_{IX} \\ \delta_{IY} \\ \delta_{JX} \\ \delta_{JY} \end{Bmatrix}$$

Rango: 1

$$P_{IX} = P_{JX}$$

$$P_{IY} = P_{JY} = 0$$

Incluye las 3 ecuaciones de equilibrio



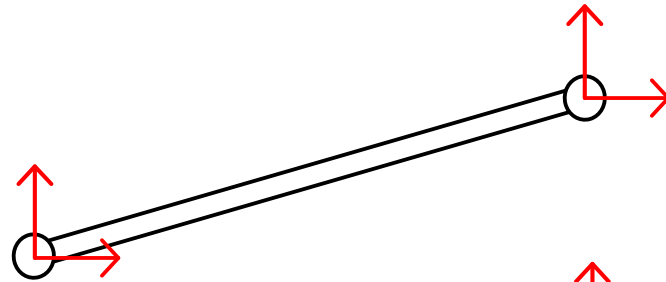
$$c = \cos \alpha$$

$$s = \sin \alpha$$

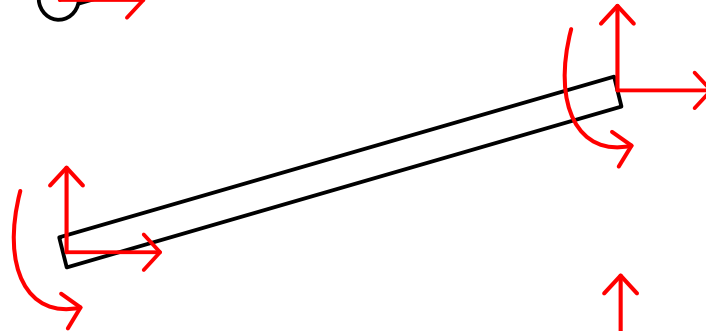
$$\begin{Bmatrix} F_{IX} \\ F_{IY} \\ F_{JX} \\ F_{JY} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ sc & s^2 & -sc & -s^2 \\ -c^2 & -sc & c^2 & sc \\ -sc & -s^2 & sc & s^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{IX} \\ \Delta_{IY} \\ \Delta_{JX} \\ \Delta_{JY} \end{Bmatrix}$$

Catálogo de elementos: barras planas

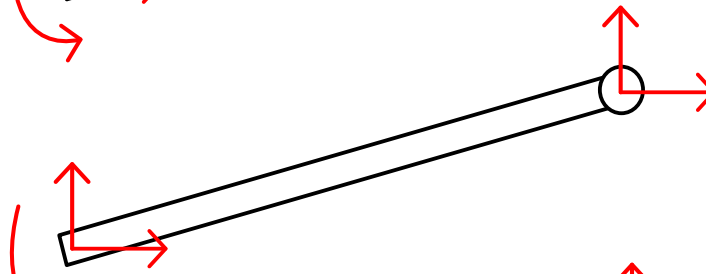
Celosías



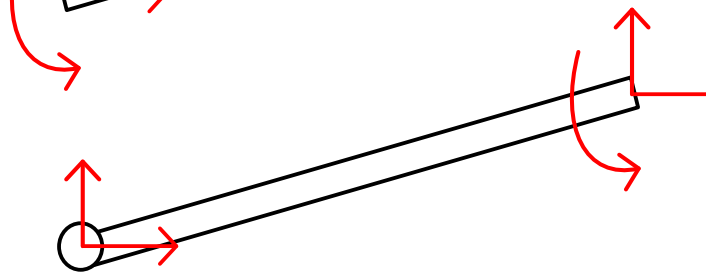
Pórticos



Barra Empotrada-Empotrada

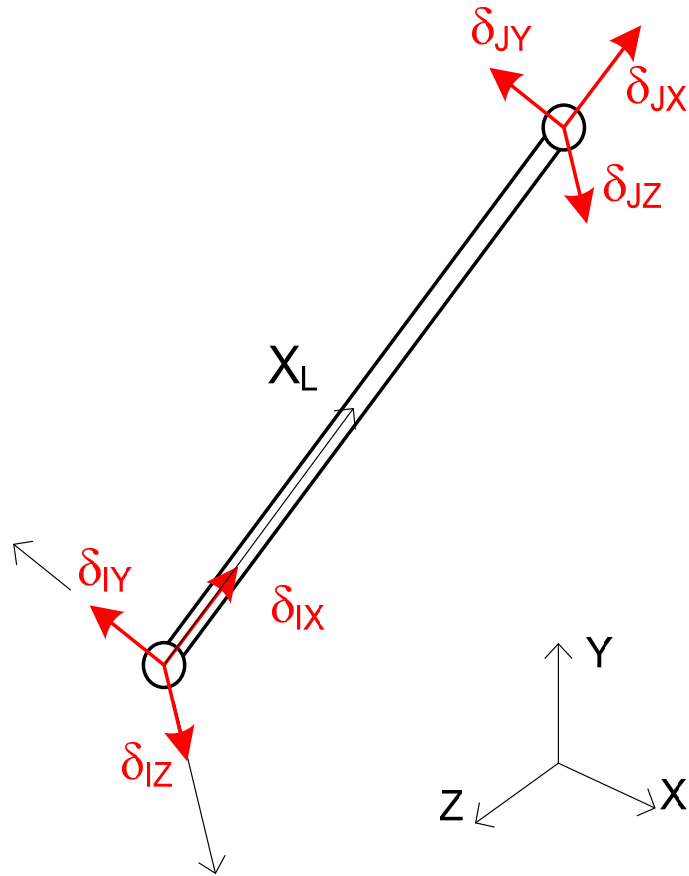


Barra Empotrada-Articulada
 $M_J = 0$

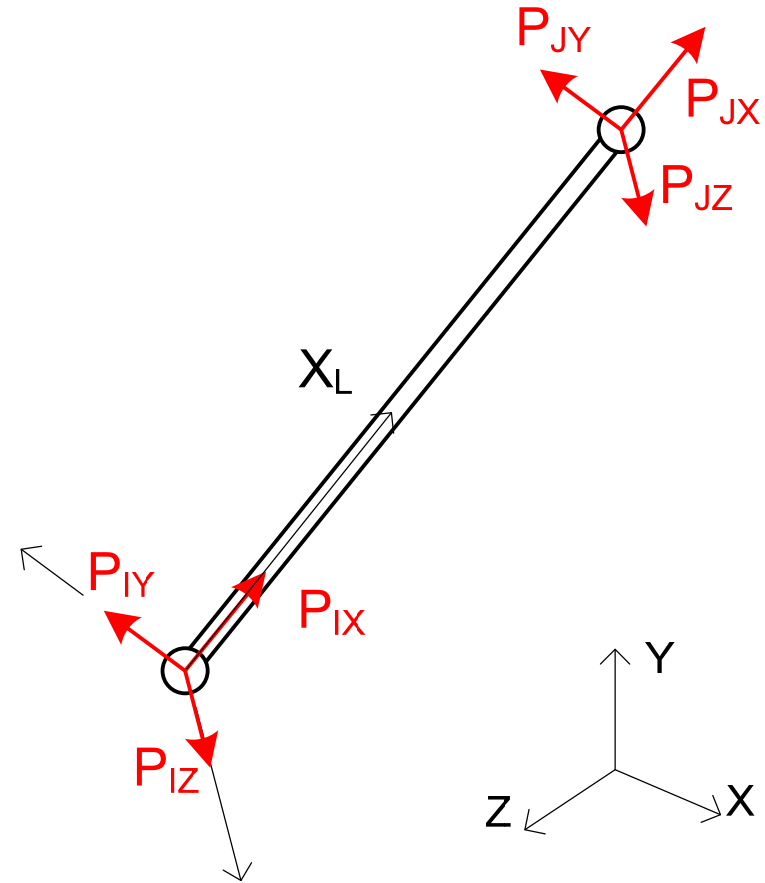


Barra Articulada-Empotrada
 $M_I = 0$

Catálogo de elementos: barras articuladas 3D (celosías 3D)

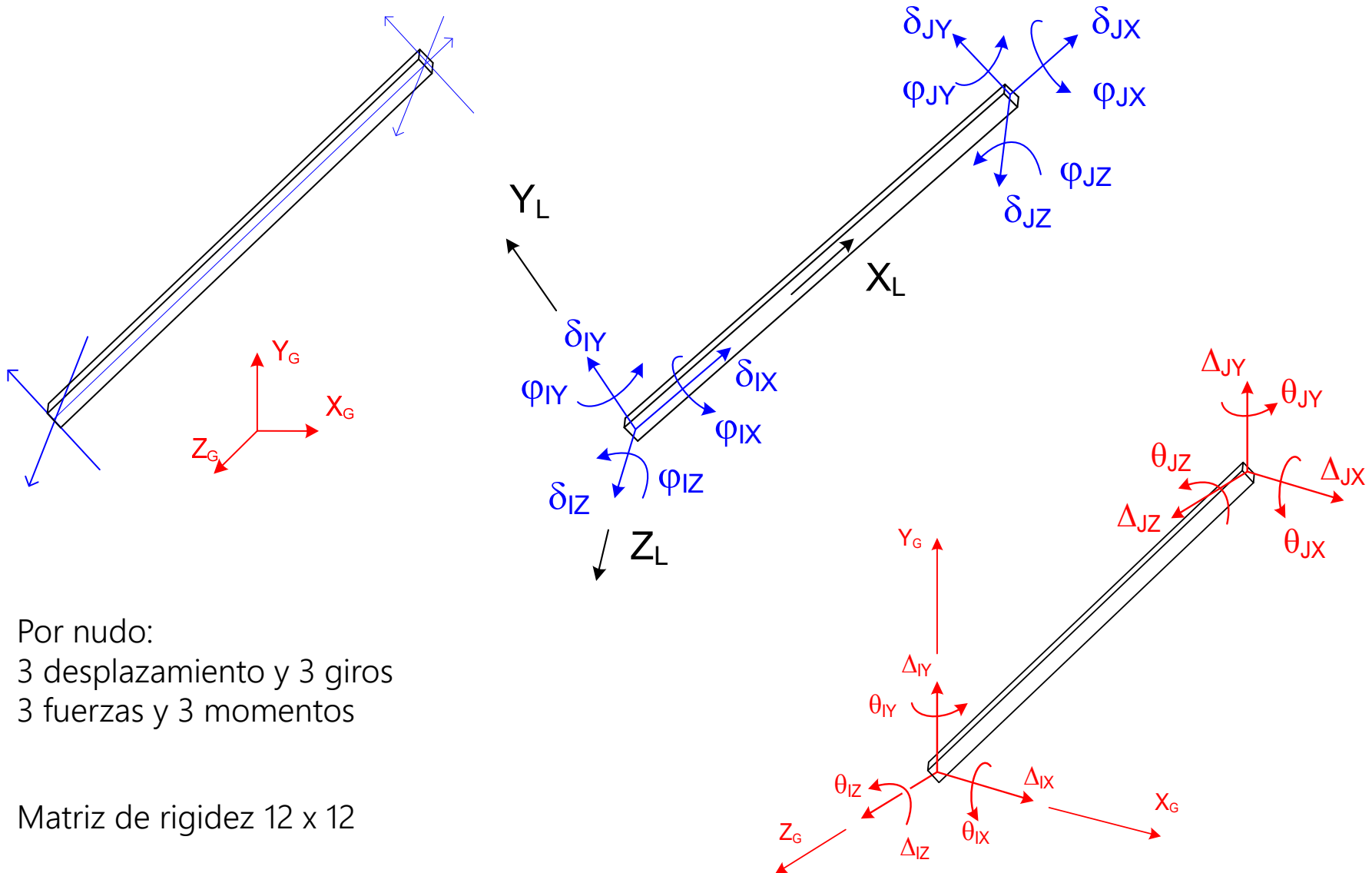


Por nudo:
3 desplazamientos
3 fuerzas (2 nulas)



Matriz de rigidez 6 x 6

Catálogo de elementos: vigas 3D (Pórticos 3D)



Por nudo:
 3 desplazamiento y 3 giros
 3 fuerzas y 3 momentos

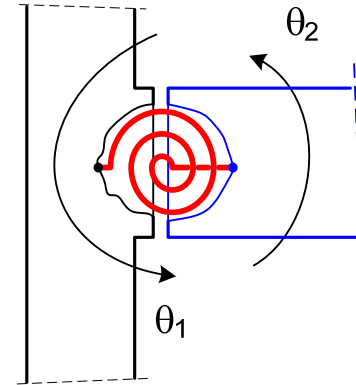
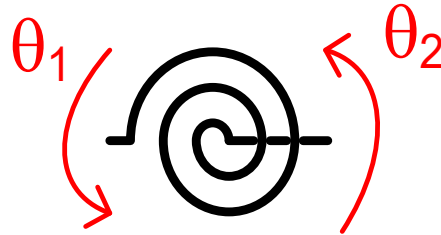
Matriz de rigidez 12 x 12

Catálogo de elementos....

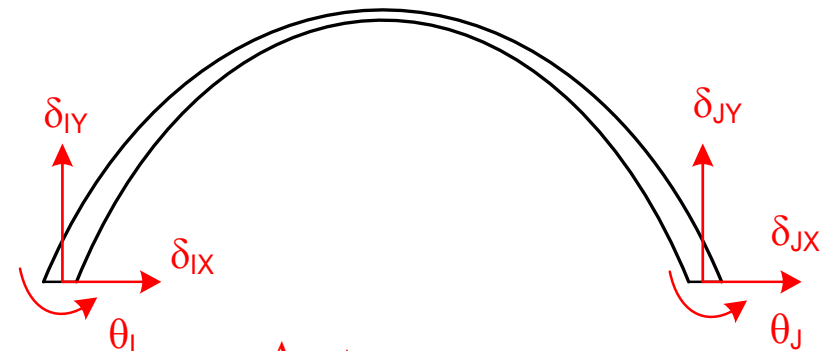
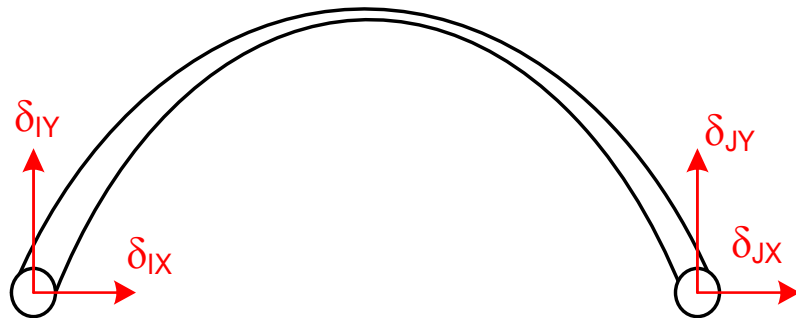
Muelles



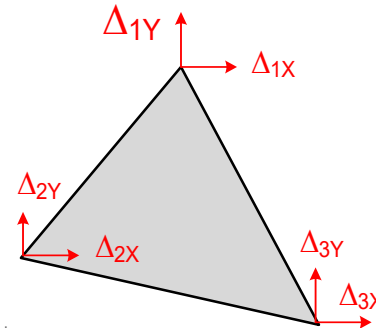
Muelles al giro



Barras curvas 2D (arcos planos)

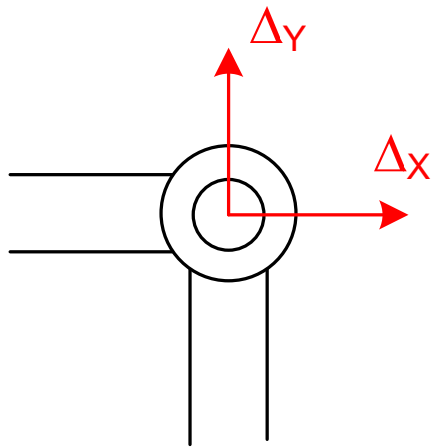


+ otros más complejos (MEF)

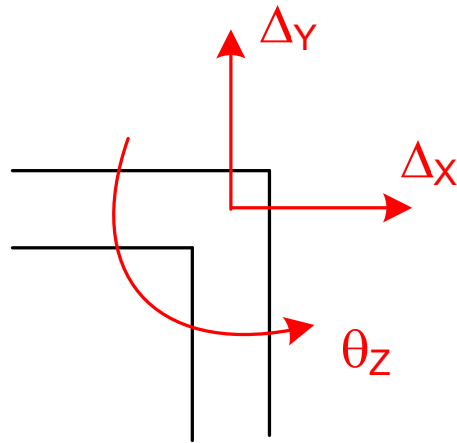


Grados de libertad de los nudos

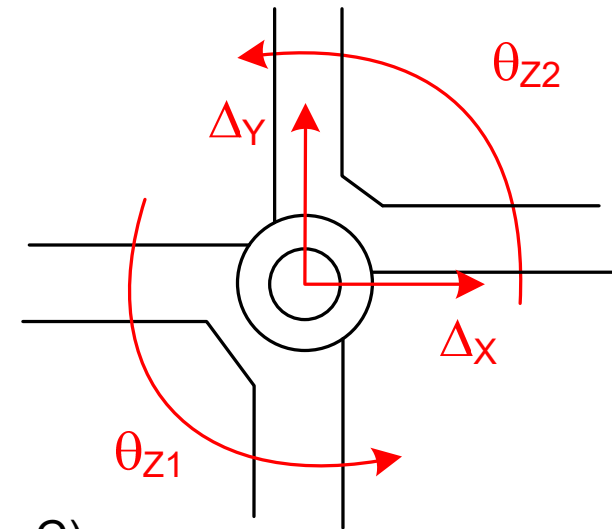
Los que les aportan las barras que se unen en ellos



A)



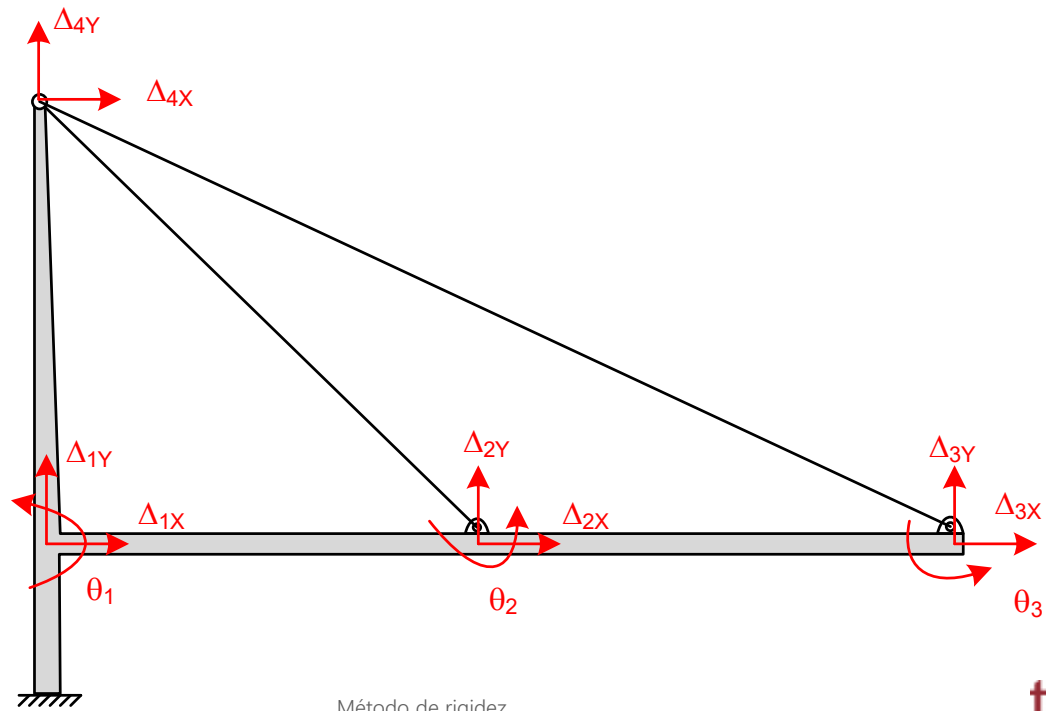
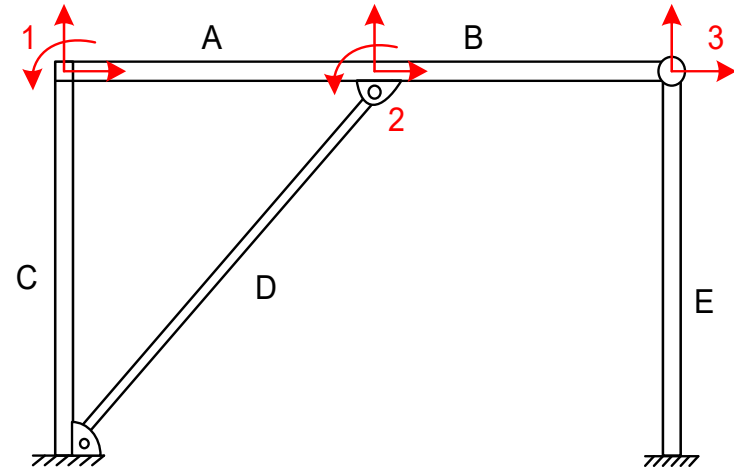
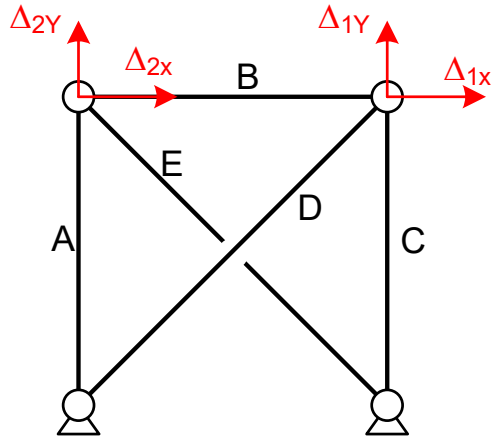
B)



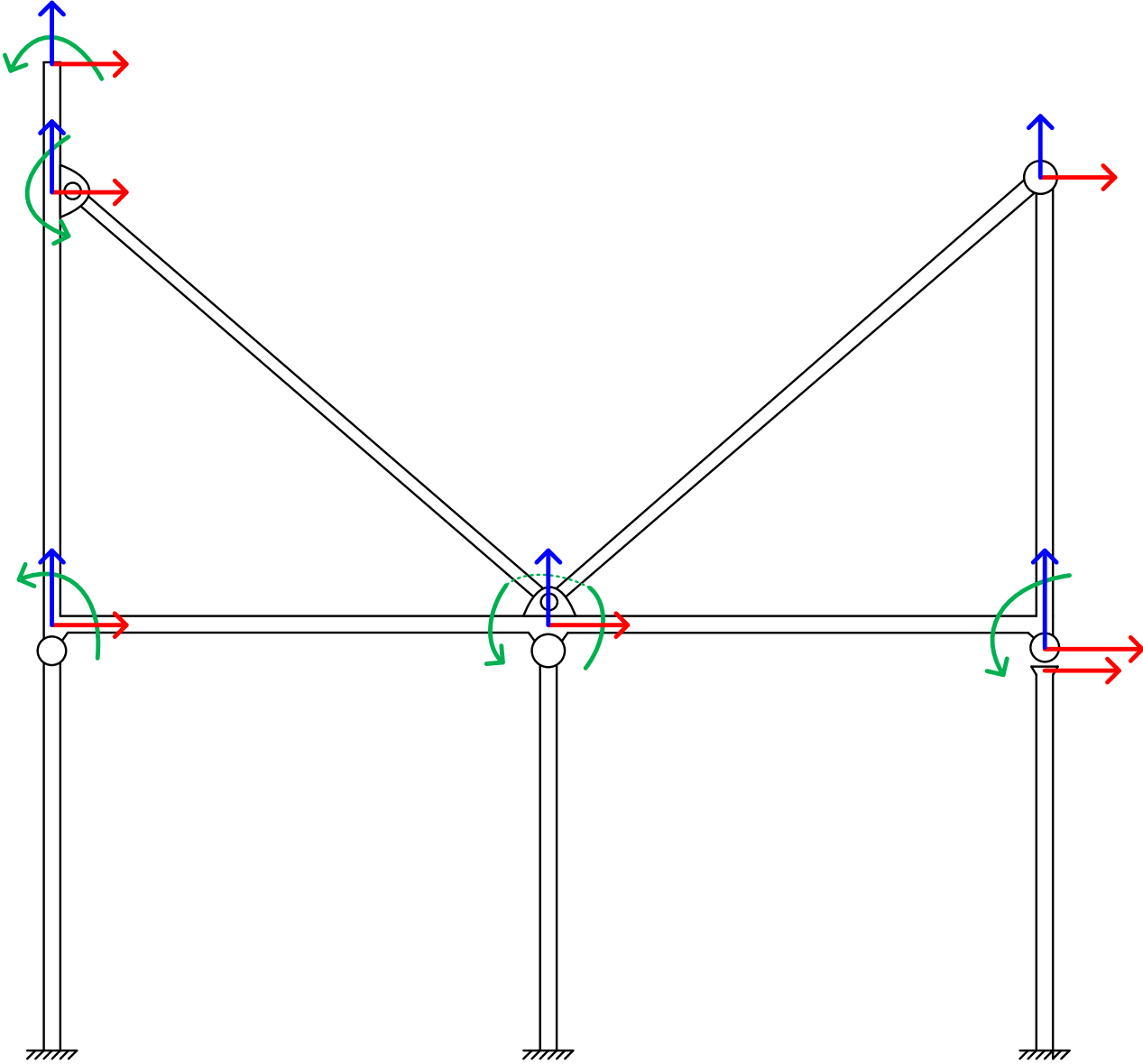
C)

Grados de libertad de la estructura

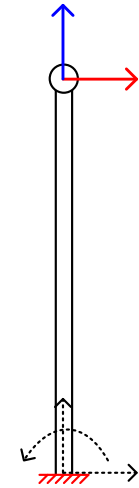
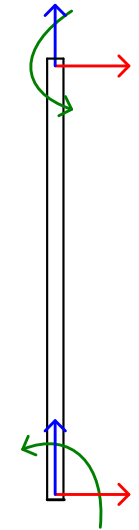
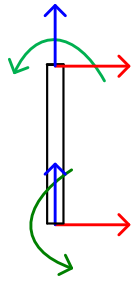
Los que tienen sus nudos



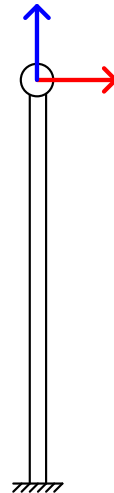
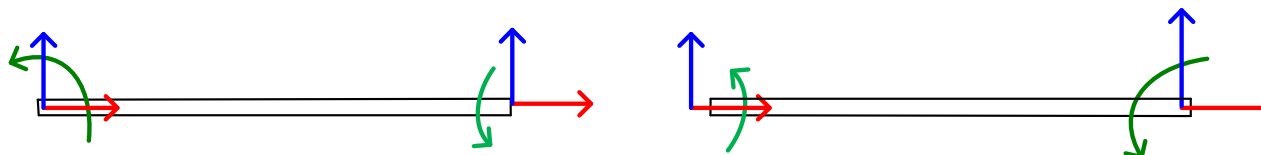
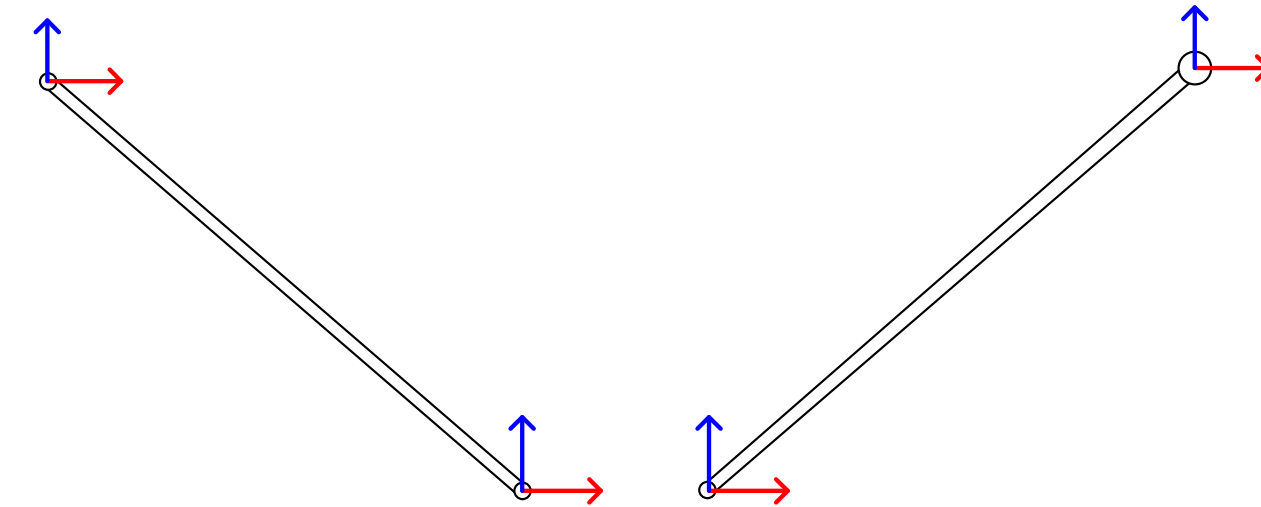
Grados de libertad



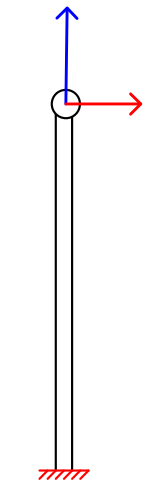
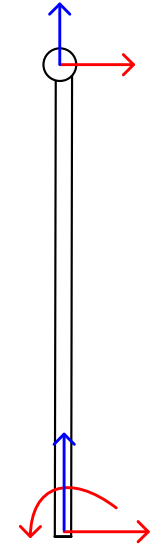
Grados de libertad



31



Método de rigidez



tecnun

Equilibrio de los nudos

Fuerzas en el nudo I, en el extremo de las barras 'A' y 'B'

$$\mathbf{K}_{GII}^A \Delta_I + \mathbf{K}_{GIJ}^A \Delta_J = \mathbf{F}_I^A$$

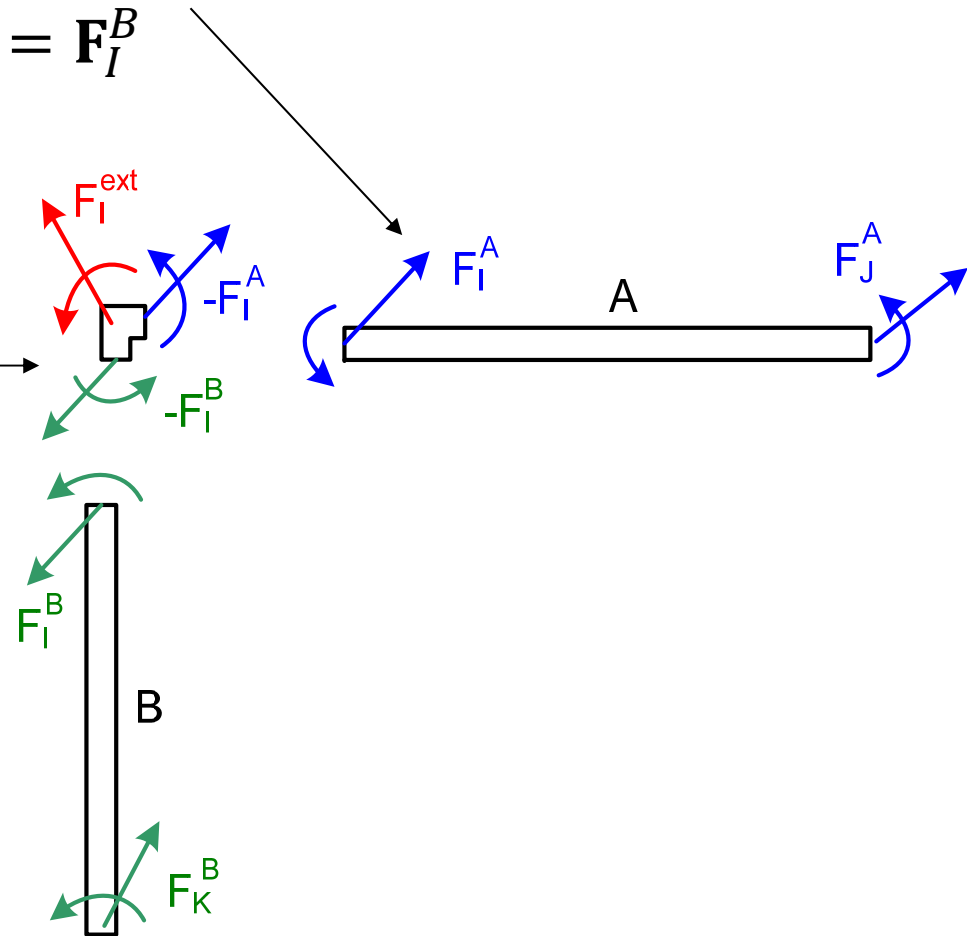
$$\mathbf{K}_{GII}^B \Delta_I + \mathbf{K}_{GIK}^B \Delta_K = \mathbf{F}_I^B$$

Equilibrio del nudo I: las fuerzas exteriores se equilibran con las fuerzas interiores en las barras

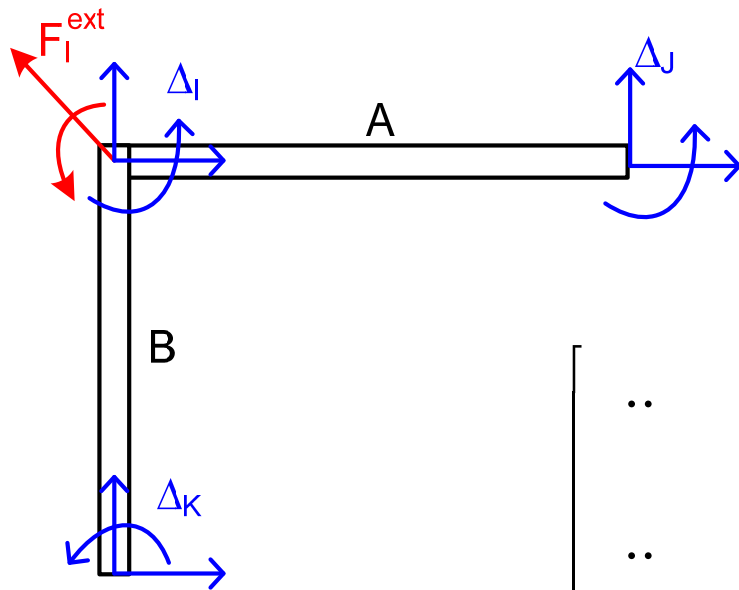
$$\mathbf{F}_I^A + \mathbf{F}_I^B = \mathbf{F}_I^{ext}$$

Sustituyendo las fuerzas interiores:

$$(\mathbf{K}_{GII}^A + \mathbf{K}_{GII}^B) \Delta_I + \mathbf{K}_{GIJ}^A \Delta_J + \mathbf{K}_{GIK}^B \Delta_K = \mathbf{F}_I^{ext}$$



Equilibrio de los nudos



En general, para cualquier número de barras en el nudo 'I'

$$\sum_e \mathbf{K}_{GII}^e \Delta_I + \sum_e \mathbf{K}_{GIJ}^e \Delta_J = \mathbf{F}_I^{ext}$$

Equilibrio del nudo I

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{GI1}^e & \dots & \sum_e \mathbf{K}_{GII}^e & \dots & \mathbf{K}_{GIN}^e \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \dots \\ \Delta_I \\ \dots \\ \Delta_N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \dots \\ \mathbf{F}_I^{ext} \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Tantas ecuaciones de equilibrio estático como g.d.l. tiene el nudo
Se repite el proceso para todos los nudos $I=1, N$

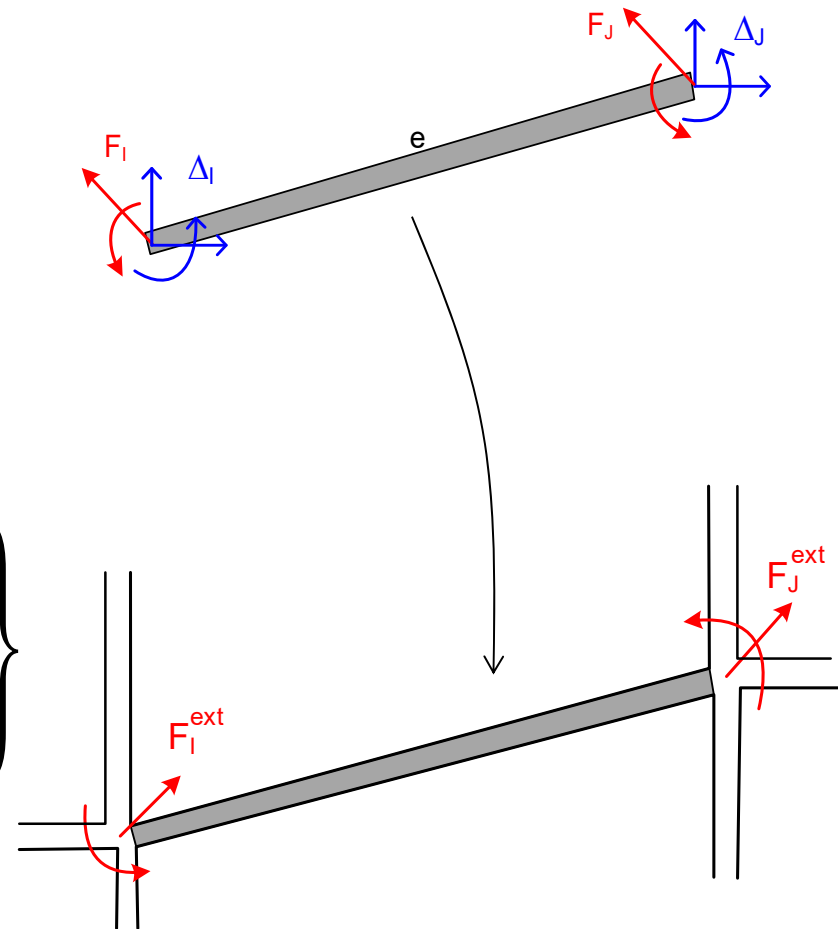
Ensamblado de la matriz de rigidez de la estructura

Se ensamblan una tras otra las ecuaciones de equilibrio de todos los nudos

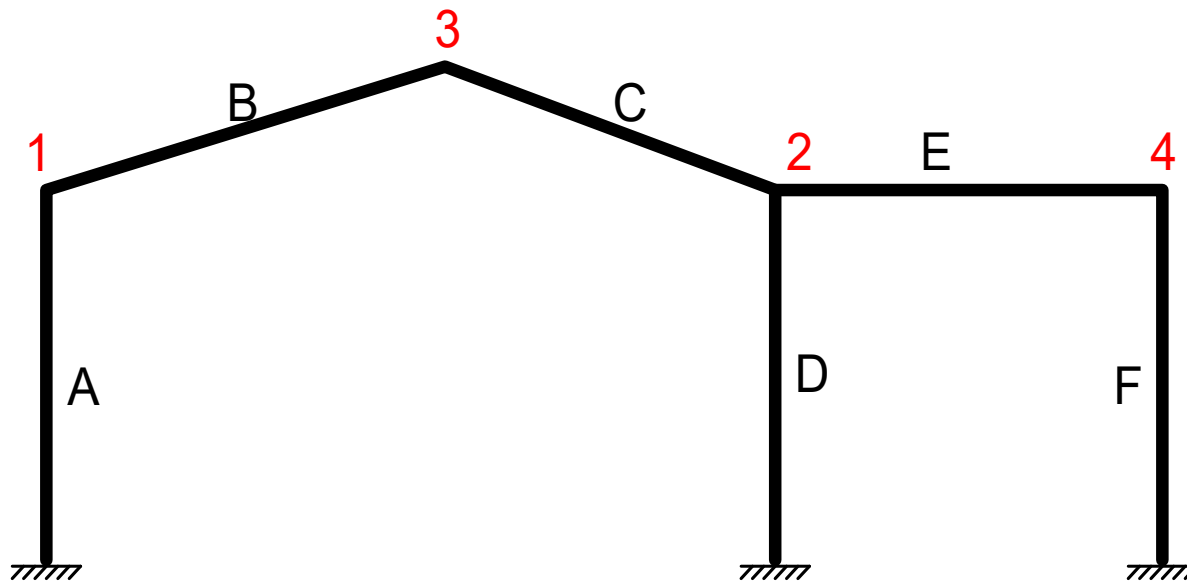
Sumando la rigidez de cada barra a los grados de libertad a los que se conecta la barra

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{GII}^e & \mathbf{K}_{GIJ}^e \\ \mathbf{K}_{GJI}^e & \mathbf{K}_{GJJ}^e \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_I \\ \Delta_J \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_I^e \\ \mathbf{F}_J^e \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{K}_{GII}^e & \dots & \mathbf{K}_{GIJ}^e & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \mathbf{K}_{GJI}^e & \dots & \mathbf{K}_{GJJ}^e & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dots \\ \Delta_I \\ \dots \\ \Delta_J \\ \dots \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dots \\ \mathbf{F}_I^{ext} \\ \dots \\ \mathbf{F}_J^{ext} \\ \dots \end{Bmatrix}$$



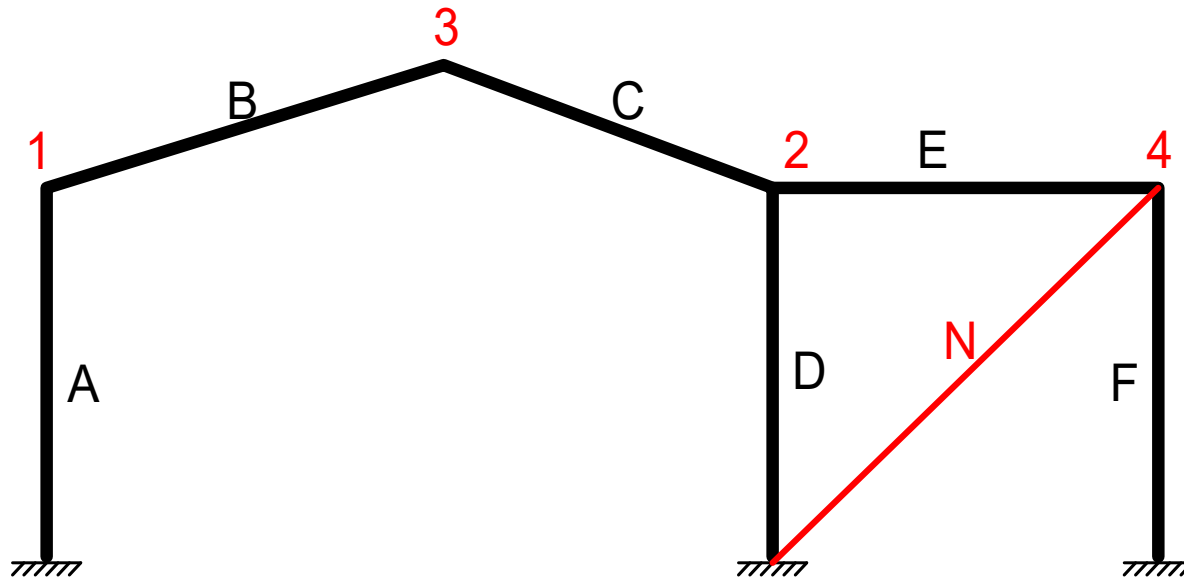
Ejemplo



$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \theta_2 \\ \dots \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^A + \mathbf{K}_{G11}^B & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G13}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G22}^C + \mathbf{K}_{G22}^D + \mathbf{K}_{G22}^E & \mathbf{K}_{G23}^C & \mathbf{K}_{G24}^E \\ \mathbf{K}_{G31}^B & \mathbf{K}_{G32}^C & \mathbf{K}_{G33}^B + \mathbf{K}_{G33}^C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G42}^E & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G44}^E + \mathbf{K}_{G44}^F \end{bmatrix}$$

Ejemplo



$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \theta_2 \\ \dots \end{Bmatrix}$$

Añadir barras no aumenta el número de GDL: sólo más términos en K

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^A + \mathbf{K}_{G11}^B & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G13}^B & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G22}^C + \mathbf{K}_{G22}^D + \mathbf{K}_{G22}^E & \mathbf{K}_{G23}^C & \mathbf{K}_{G24}^E \\ \mathbf{K}_{G31}^B & \mathbf{K}_{G32}^C & \mathbf{K}_{G33}^B + \mathbf{K}_{G33}^C & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G42}^E & \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G44}^E + \mathbf{K}_{G44}^F + \mathbf{K}_{G44}^N \end{bmatrix}$$

Propiedades matemáticas de [K]

Simétrica: teoremas de reciprocidad de deformaciones

Definida positiva. Define la energía elástica acumulada:

Conservación de la energía:
$$U = W^{ext} = \frac{1}{2} \sum \Delta_i F_i = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{F}$$

Equilibrio:
$$\mathbf{F} = \mathbf{K}\Delta$$

Energía en función de Δ :
$$U = \frac{1}{2} \Delta^T \mathbf{K}\Delta \qquad U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j K_{ij} \Delta_i \Delta_j$$

Se cumple que: $U > 0 \forall \Delta \neq 0$ Luego: $\det(\mathbf{K}) > 0$

Nota. Ahora se comprueba que:
$$K_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta_i \partial \Delta_j} \qquad \mathbf{K} = \frac{\partial^2 U}{\partial \Delta^2}$$

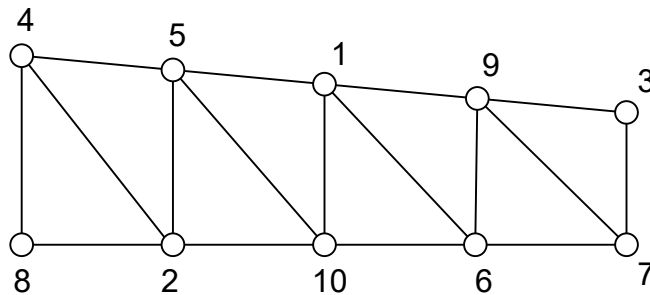
Propiedades topológicas de [K]

Su estructura topológica depende de la numeración de los nudos.

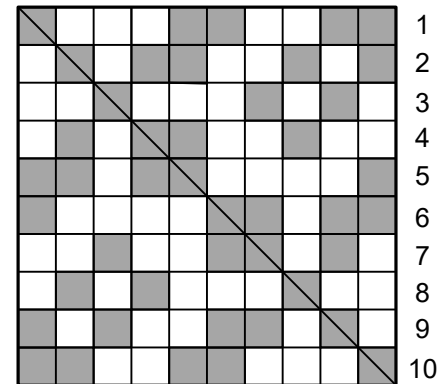
- Matriz dispersa: sólo hay términos no nulos en las celdas (nudos) donde se conectan barras
- Matriz banda compacta: los términos no nulos están junto a la diagonal.
- Reordenando la numeración de los nudos se puede obtener una estructura de banda compacta. Los programas de cálculo emplean algoritmos para hacerlo.

Se necesita menos memoria para almacenarla

Se necesitan menos operaciones para su factorización



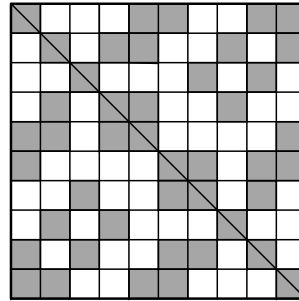
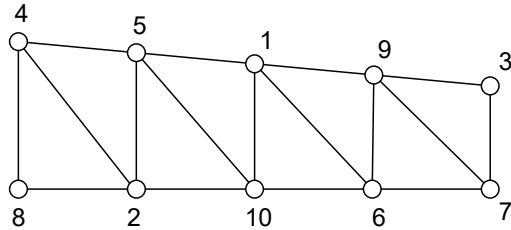
Celosía plana 10 nudos
 $n=20$ ecs.



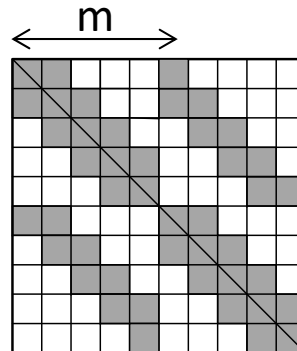
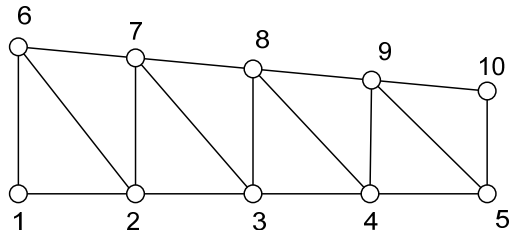
Cada celdilla es 2 x 2

Topología de [K] según la numeración de los nudos

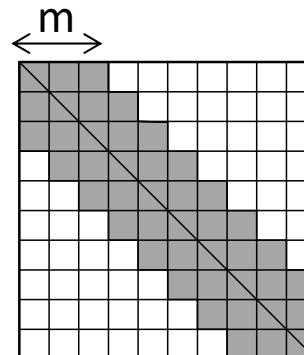
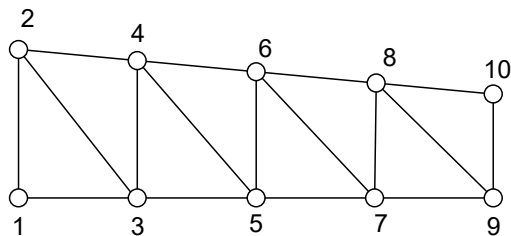
A) n=20 Matriz Llena



B) n=20 Matriz banda m=12



C) n=20 Matriz banda m=6



Almacenamiento de K

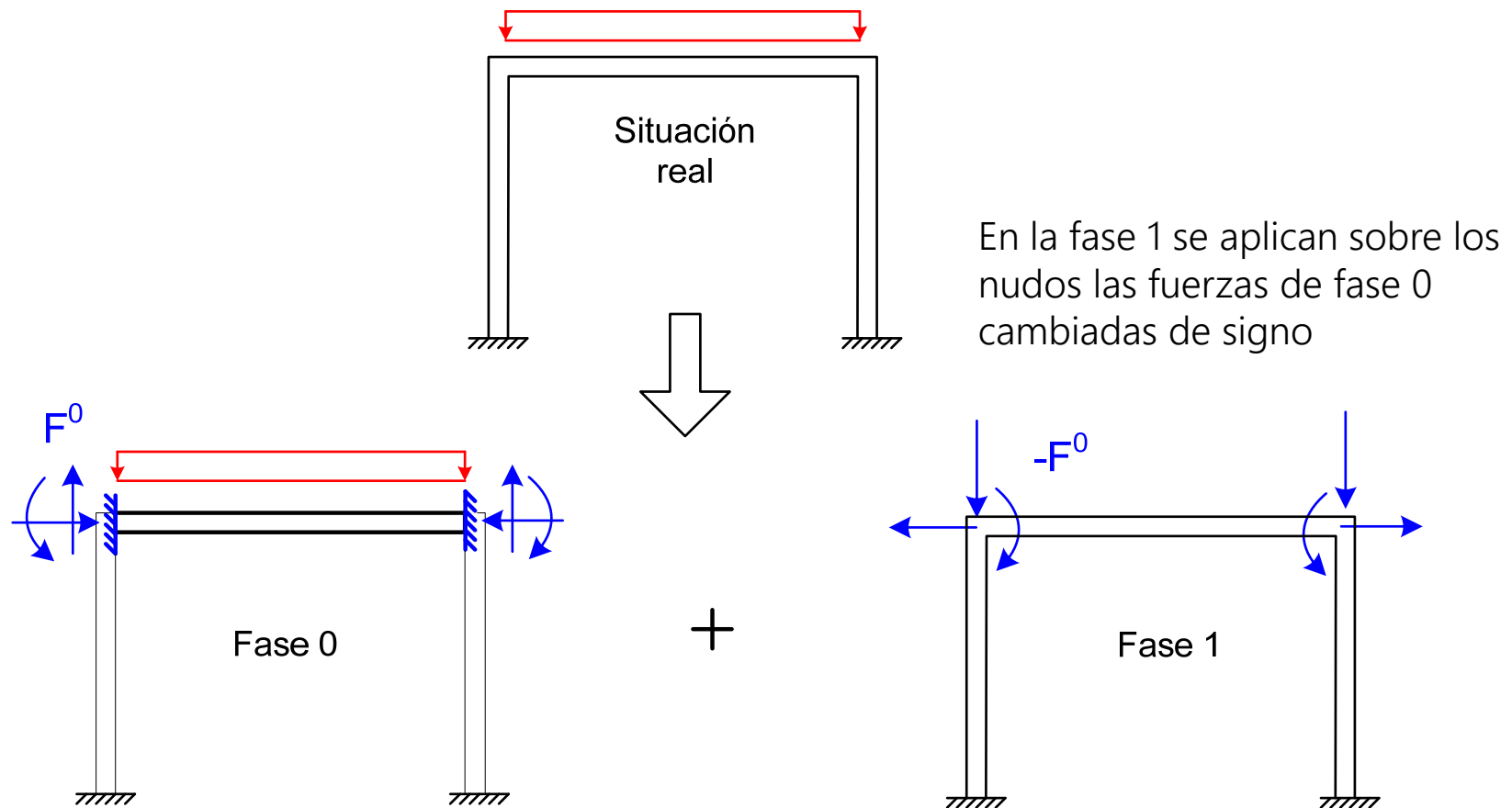
		A	B	C
Llena	n^2	400	400	400
Llena Simétrica	$n^2/2+n/2$	210	210	210
Banda Simétrica	$n m -m^2/2$	210	168	102
Dispersa		98	98	98

Número de operaciones para factorizar K

		A	B	C
Llena Simétrica	$n^3/6$	1330	1330	1330
Banda Simétrica	$n m^2/2-m^3/3$	1330	864	288

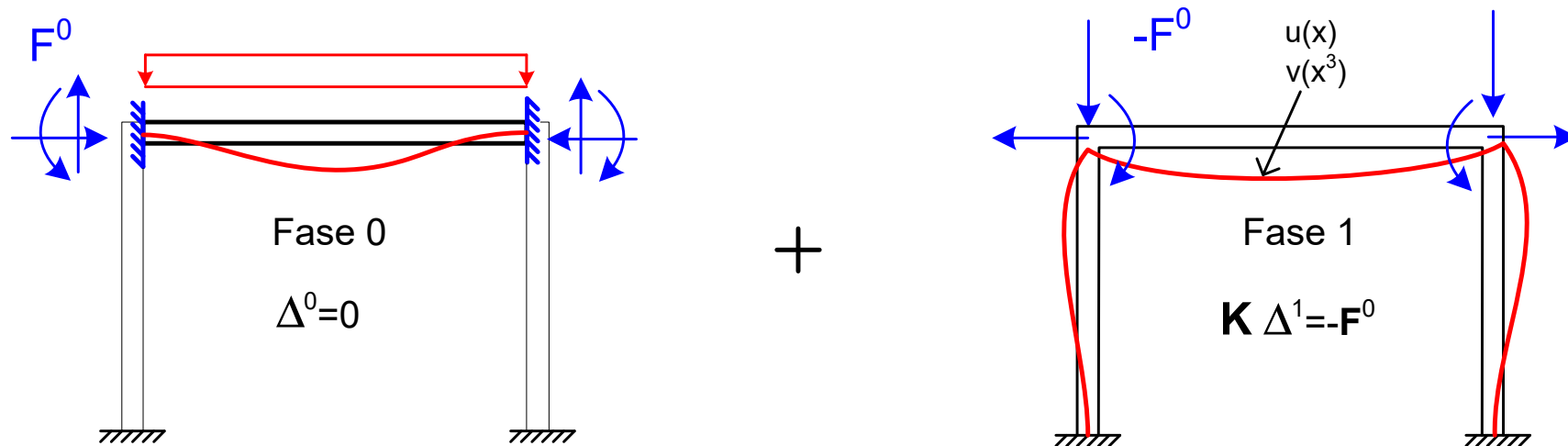
Fuerzas aplicadas sobre las barras

Se transforman en fuerzas equivalentes aplicadas en los nudos, mediante la fase de empotramiento perfecto (fase 0)



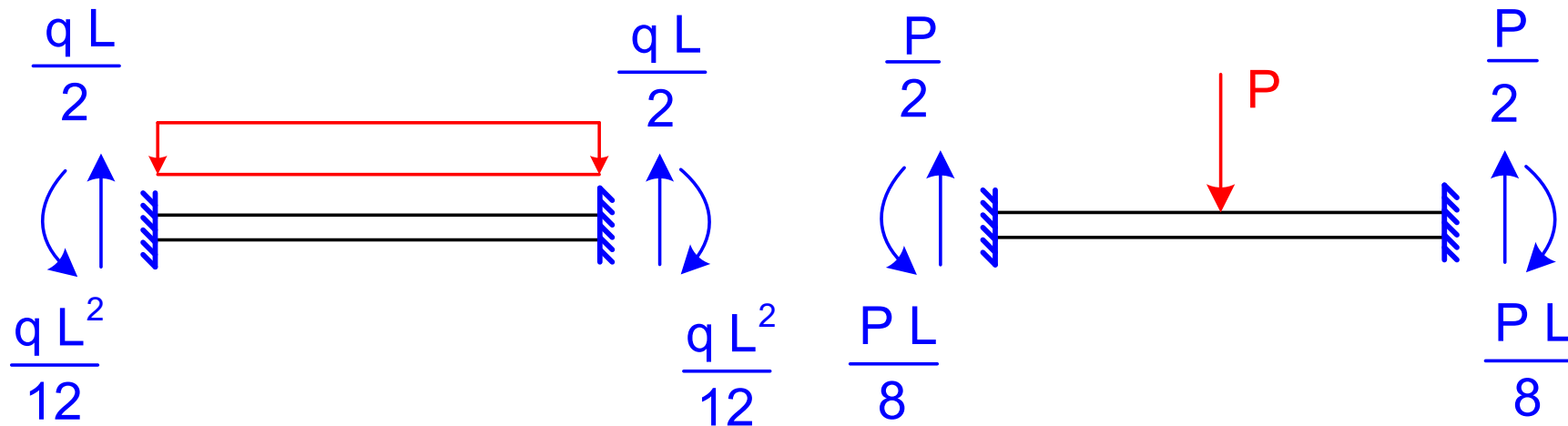
Superposición: Fases 0 y 1

- **Fase 0:** no hay deformaciones de los nudos.
Todas las barras son biempotradas.
Tienen M, V, N y deformaciones locales, según el tipo de carga
- **Fase 1:** los nudos se deforman bajo la acción de las cargas exteriores aplicadas sobre ellos (las de fase 0 con signo -)
Todas las barras se deforman según cúbicas
Las barras tienen M (lineal), V (constante) y N (constante)



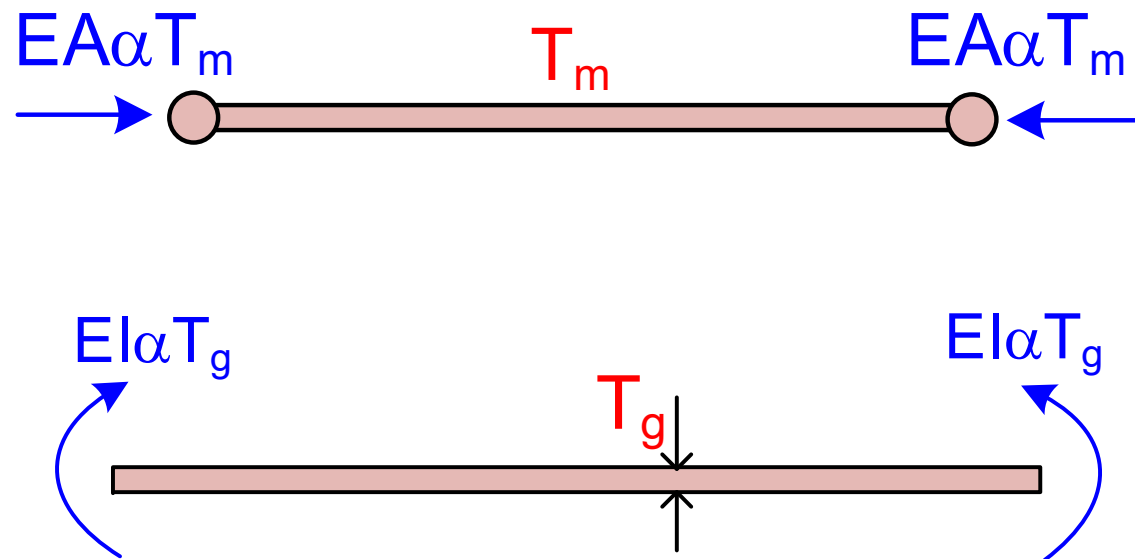
Fuerzas sobre las barras: distribuidas, puntales...

- Fuerzas exteriores de todo tipo actuantes en la propia barra (no en el nudo)
- Se sustituyen por unas fuerzas nodales equivalentes a ellas, que son:
Las fuerzas / momentos de reacción en una viga empotrada sometida a las fuerzas (valores tabulados o Resistencia de Materiales)



Fuerzas sobre las barras: térmicas

- Campos de temperatura conocidos existentes en la barra
Temperatura media T_m y gradiente T_g en el canto de la barra
- Se sustituyen por una fuerzas nodales equivalentes a las temperaturas:
Las fuerzas / momentos de reacción en una viga empotrada sometida a las temperaturas (valores tabulados o Resistencia de Materiales)

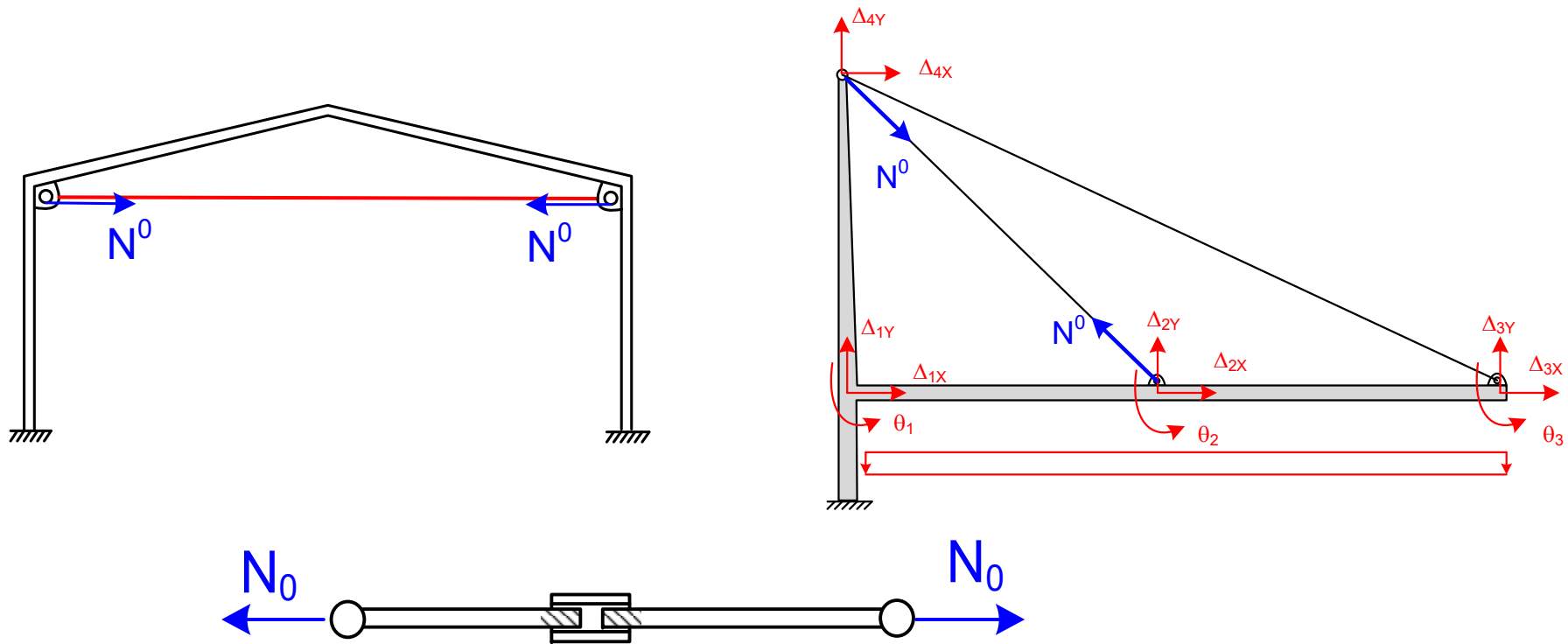


Fuerzas sobre las barras: pretensión

- Fuerzas aplicadas sobre la barra durante su montaje en la estructura (Pretensión).

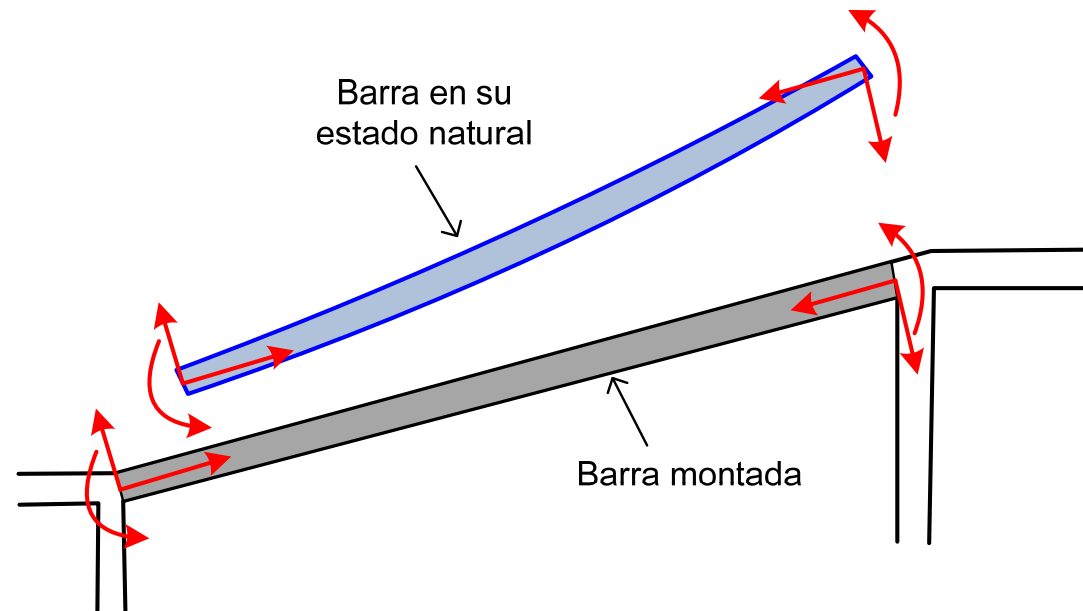
Dos fuerzas iguales y de sentido contrario en un tensor

Aplicadas mediante una rosca que acerca los extremos del tensor



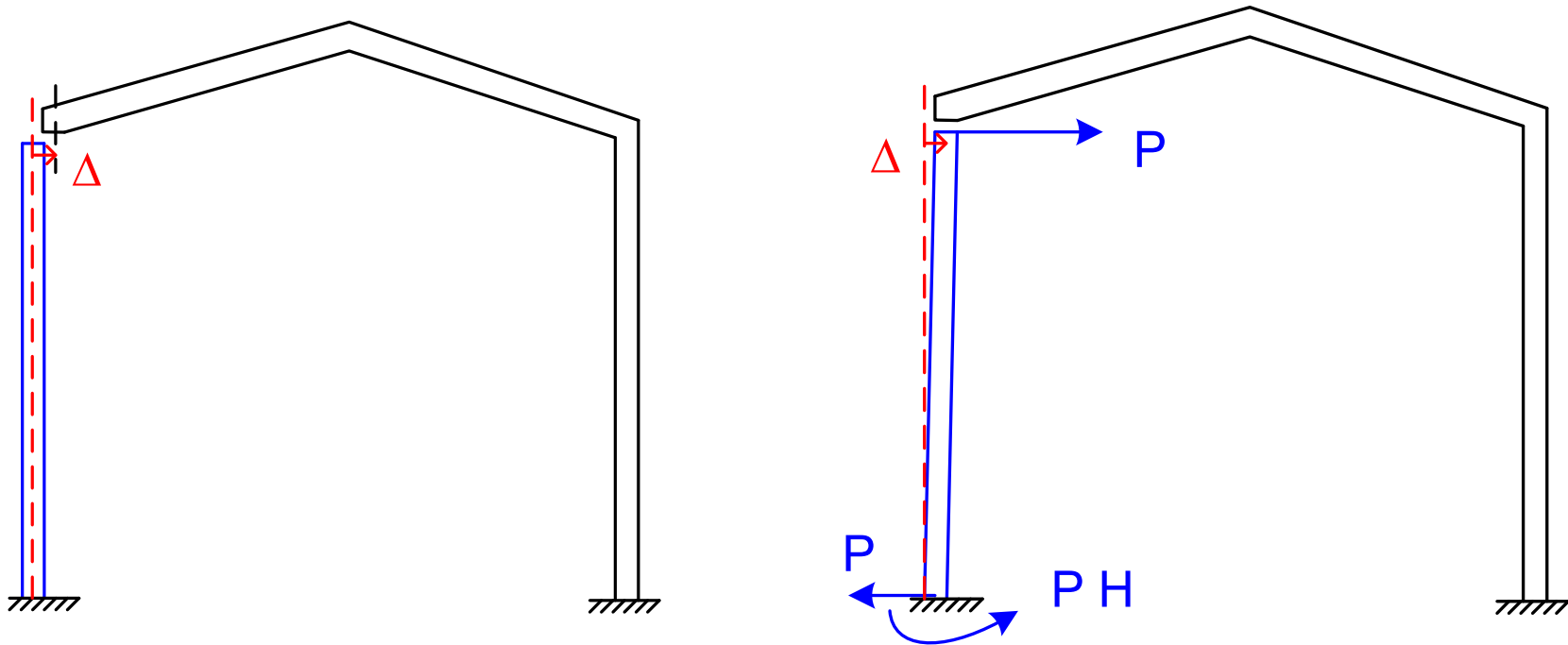
Fuerzas sobre las barras: pretensión

- Fuerzas aplicadas durante el montaje de la barra (Pretensión)
- Puede ser cualquier sistema de fuerzas que se está aplicando sobre la barra en el momento del montaje de la misma en la estructura
Deben estar en equilibrio entre sí.
- Son directamente las fuerzas nodales equivalentes de fase 0: se aplican con signo (-) en los nudos.



Fuerzas sobre las barras: errores de forma

Error en el montaje: discrepancia entre la forma de una pieza y el espacio donde debe montarse



Se aplican fuerzas sobre la barra hasta que se pueda montar: estas fuerzas deben tenerse en cuenta en el cálculo.

Fuerzas sobre las barras: errores de forma

Errores en la forma de las barras (deformaciones de montaje)

Se conoce como dato δ_E : a diferencia (error) entre:

la forma natural (descargada) de la barra y

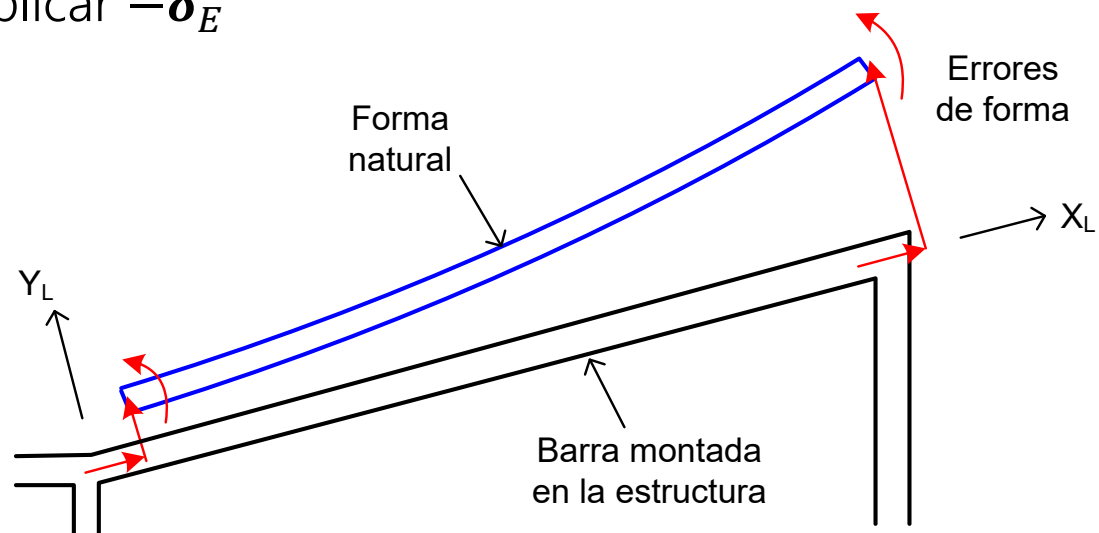
la forma en la que se le obliga a ser montada en la estructura

Fuerzas de fase 0: las fuerzas necesarias para obligar a la barra a montarse en la estructura

Para montar la barra: aplicar $-\delta_E$

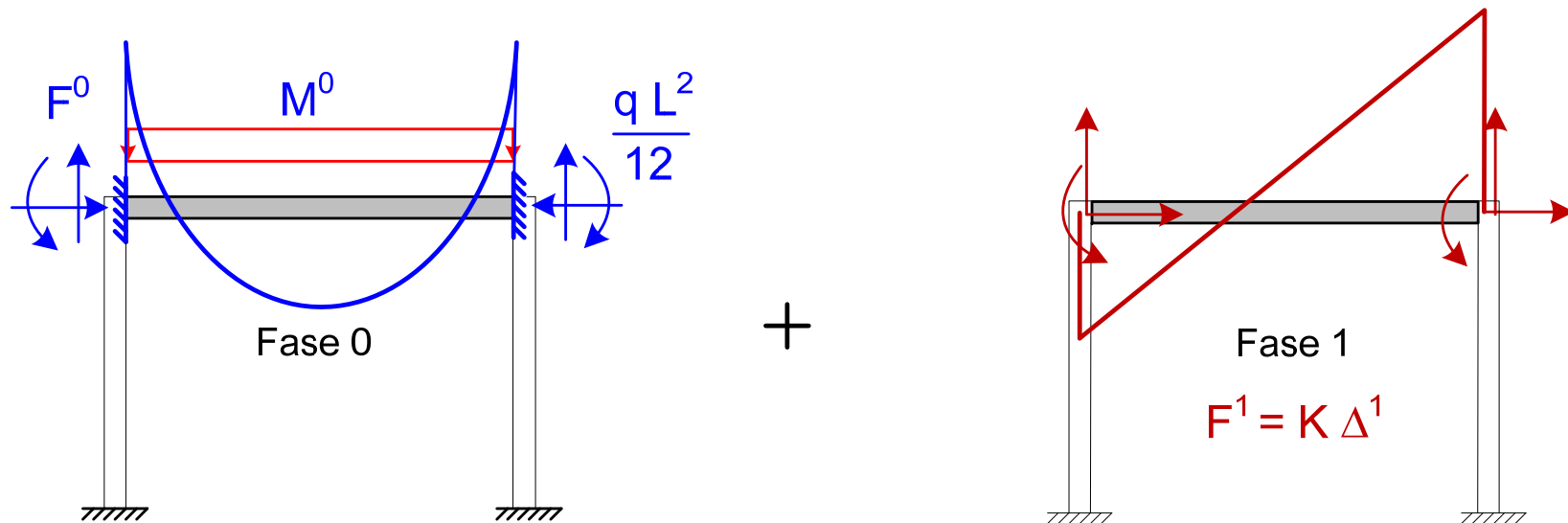
Fuerzas a aplicar:

$$\mathbf{P}_E^0 = -\mathbf{K}_L \delta_E$$



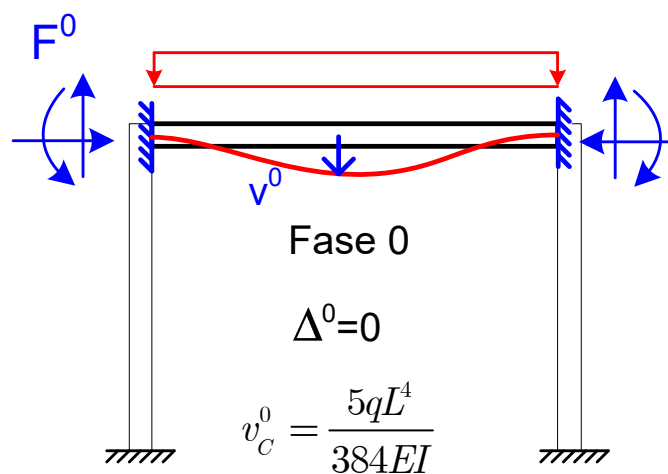
Esfuerzos interiores finales en las barras

- Esfuerzos interiores son la suma de las dos fases :
- **Fase 0**: no hay deformaciones de los nudos: \mathbf{F}^{e0}
Todas las barras son biempotradas.
Esfuerzos interiores M, V, N según el tipo de carga (tablas)
- **Fase 1**: los nudos se deforman $\mathbf{F}^{e1} = \mathbf{K}^e \Delta^{e1}$
Todas las barras se deforman según cúbicas
Las barras tienen M (lineal), V (constante) y N (constante)

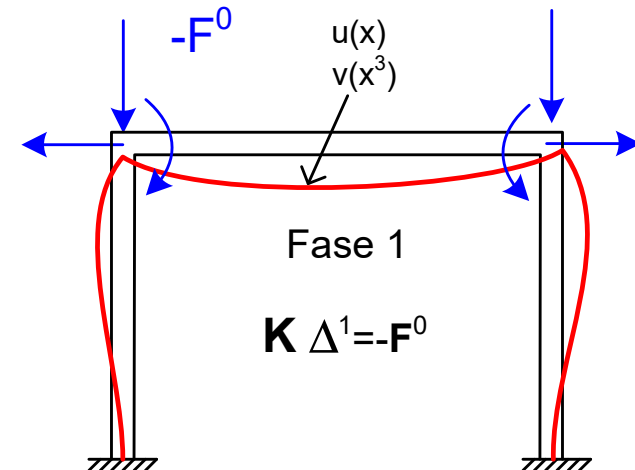


Deformaciones finales en las barras

- Deformación real es la suma de las dos fases:
- Fase 0: Todas las barras son biempotradas
No hay deformaciones de los nudos.
Deformaciones u, v de la barra según el tipo de carga (tablas o R.M.)
- Fase 1: los nudos se deforman
Todas las barras se deforman:
Lateralmente a flexión, según cúbicas $v(x^3)$
Axial: linealmente $u(x^1)$

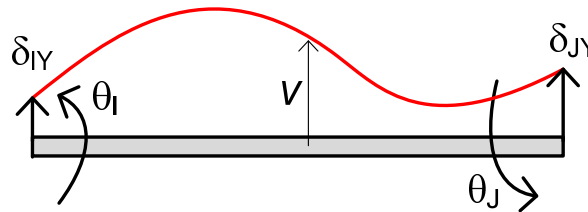


+



Deformación de las barras en la fase 1

Deformación lateral v de una viga sin cargas, en función de las 2 deformaciones laterales y los 2 giros extremos: cúbica

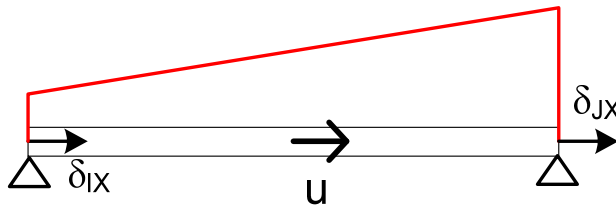


$$\xi = \frac{x}{L}$$

$$v = (1 - 3\xi^2 + 2\xi^3)\delta_{IY} + (\xi - 2\xi^2 + \xi^3)L\theta_I + (3\xi^2 - 2\xi^3)\delta_{JY} + (\xi^3 - \xi^2)L\theta_J$$

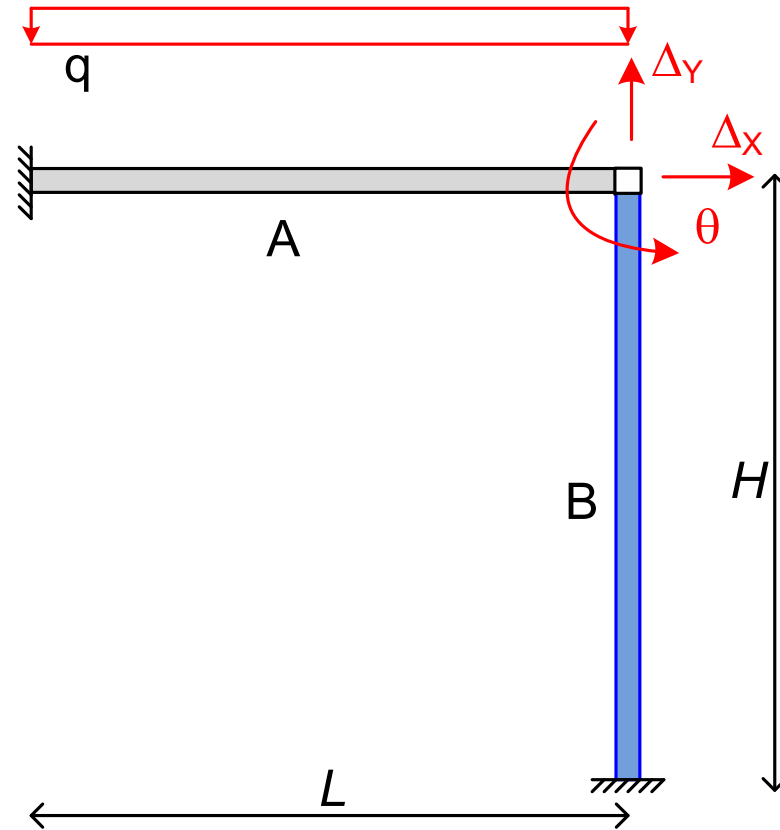
Deformación lateral en el centro:
$$v_C = \frac{\delta_{IY} + \delta_{JY}}{2} + (\theta_I - \theta_J)\frac{L}{8}$$

Deformación axial u de una viga sin cargas, en función de las 2 deformaciones axiales en los extremos: lineal



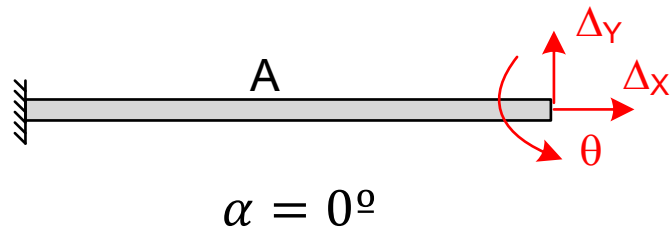
$$u = \delta_{IX} + (\delta_{JX} - \delta_{IX})\xi$$

Ejemplo 1

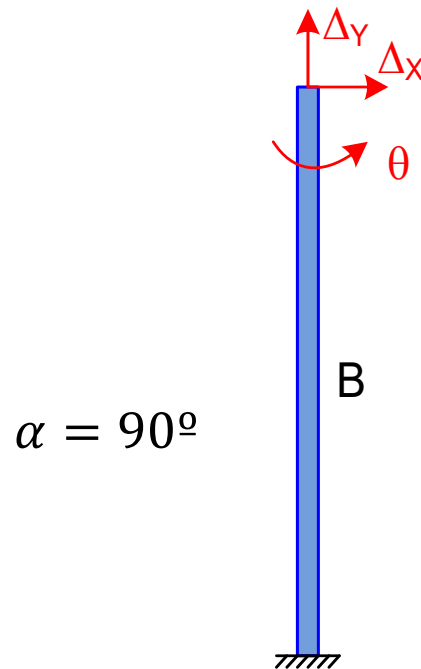


Ejemplo 1

Rigidez individual de los elementos (sistema global)

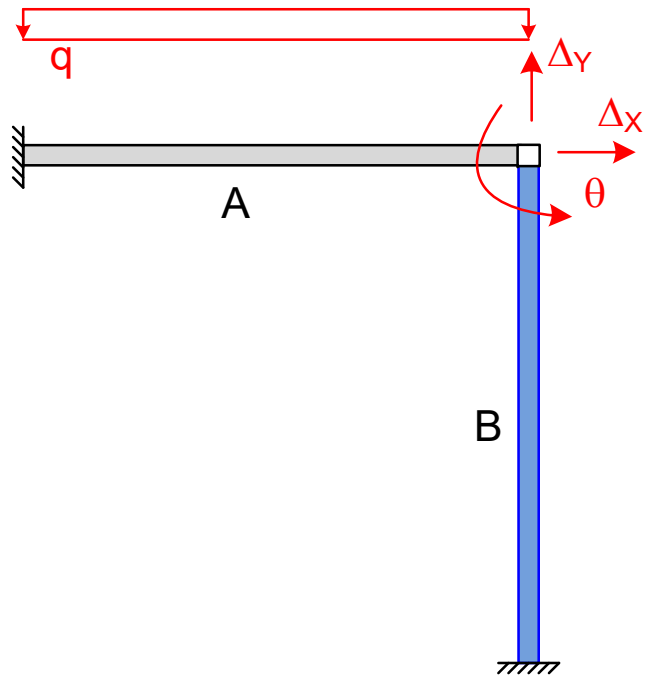


$$\begin{Bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_X^A \\ F_Y^A \\ M^A \end{Bmatrix}$$



$$\begin{Bmatrix} \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{EA}{H} & 0 \\ \frac{6EI}{H^2} & 0 & \frac{4EI}{H} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta X \\ \Delta Y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_X^B \\ F_Y^B \\ M^B \end{Bmatrix}$$

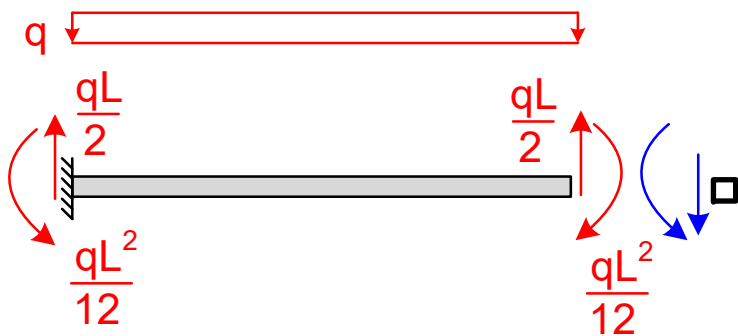
Ejemplo 1



Matriz de rigidez de la estructura ensamblada

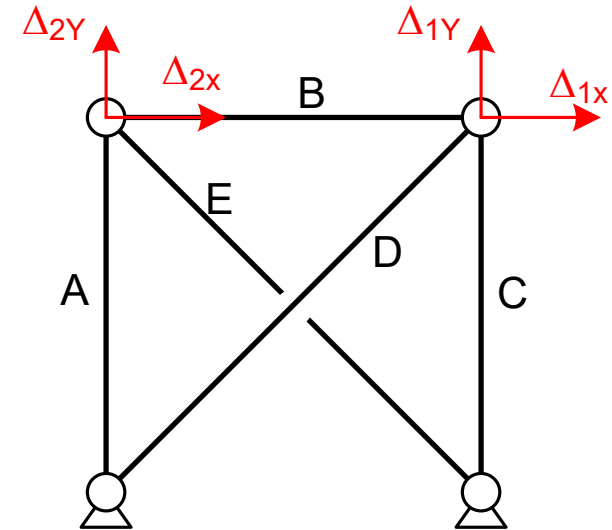
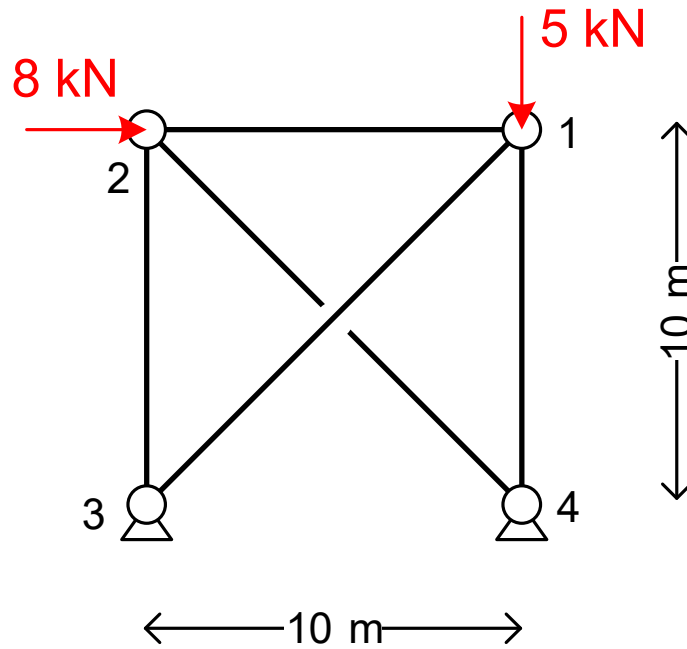
$$\begin{Bmatrix} \frac{EA}{L} + \frac{12EI}{H^3} & 0 & \frac{6EI}{H^2} \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} + \frac{EA}{H} & -\frac{6EI}{L^2} \\ \frac{6EI}{H^2} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} + \frac{4EI}{H} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_x \\ \Delta_y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_X^{ext} \\ F_Y^{ext} \\ M^{ext} \end{Bmatrix}$$

Fuerzas equivalentes
a la carga distribuida en A (fase 0)



$$\begin{Bmatrix} F_X^{ext} \\ F_Y^{ext} \\ M^{ext} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -\frac{qL}{2} \\ \frac{qL^2}{12} \end{Bmatrix}$$

Ejemplo 2 Celosía plana



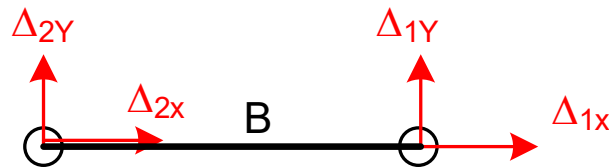
$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^B + \mathbf{K}_{G11}^C + \mathbf{K}_{G11}^D & \mathbf{K}_{G12}^B \\ \mathbf{K}_{G21}^B & \mathbf{K}_{G22}^A + \mathbf{K}_{G22}^B + \mathbf{K}_{G22}^E \end{bmatrix}$$

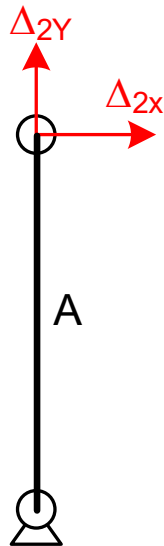
$$E = 200 \text{ GPa} \quad A = 10 \text{ cm}^2$$

Ejemplo 2. Celosía plana. Rigidez de las barras (1)

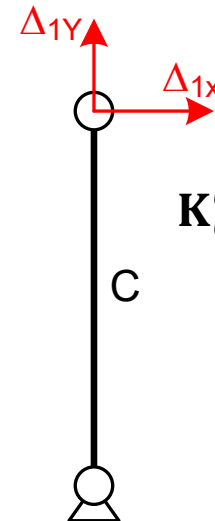
$$\mathbf{K}_G^B = \frac{EA}{10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{matrix}$$



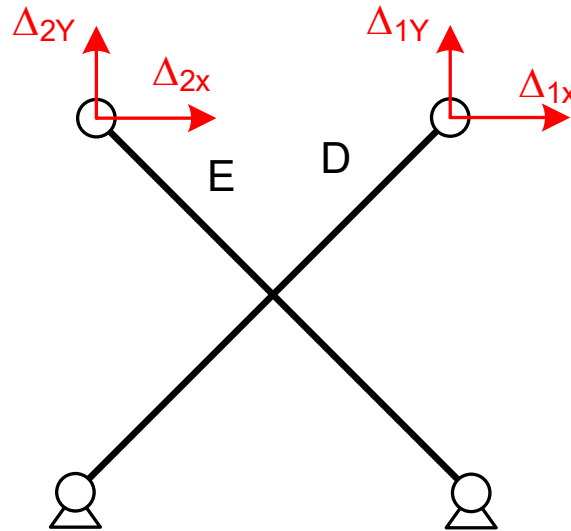
$$\mathbf{K}_G^A = \frac{EA}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{matrix}$$



$$\mathbf{K}_G^C = \frac{EA}{10} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{matrix}$$



Ejemplo 2. Celosía plana. Rigidez de las barras (2)



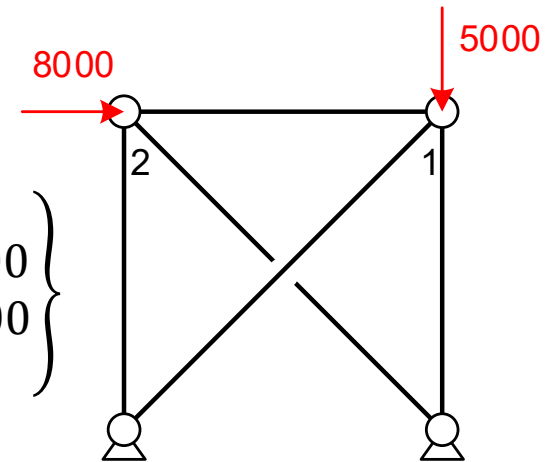
$$\mathbf{K}_G^E = \frac{EA}{10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_G^D = \frac{EA}{10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{matrix}$$

Ejemplo 2. Celosía plana. Equilibrio de toda la estructura

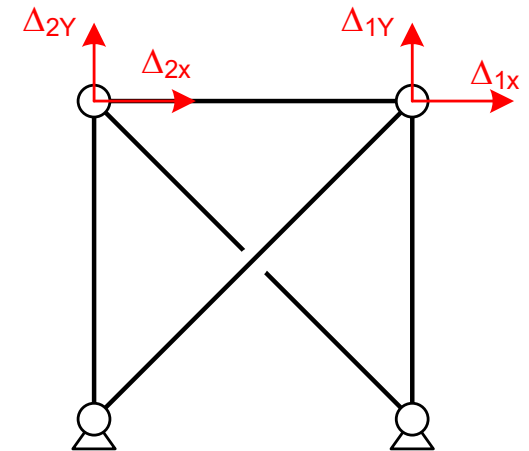
Ensamblando las matrices de las 5 barras:

$$10^7 \begin{bmatrix} 2.707 & 0.707 & -2.0 & 0 \\ 0.707 & 2.707 & 0 & 0 \\ -2.0 & 0 & 2.707 & -0.707 \\ 0 & 0 & -0.707 & 2.707 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_{1X} = 0 \\ F_{1Y} = -5000 \\ F_{2X} = +8000 \\ F_{2Y} = 0 \end{Bmatrix}$$



Resolviendo: deformaciones de los nudos

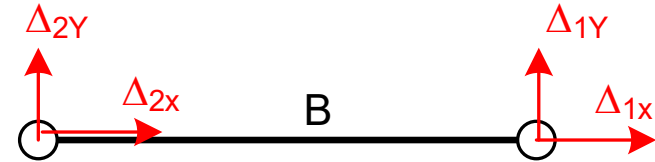
$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.817 \\ -0.398 \\ 0.965 \\ 0.252 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ (m)}$$



Ejemplo 2. Celosía plana. Esfuerzos en B

Deformaciones de la barra B

$$\delta^B = \begin{Bmatrix} \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.965 \\ 0.252 \\ 0.817 \\ -0.398 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ (m)}$$



Esfuerzos de la barra D en su sistema local $\mathbf{P}^B = \mathbf{K}_L^B \delta^B$

$$\begin{Bmatrix} P_{2X} \\ P_{2Y} \\ P_{1X} \\ P_{1Y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L = 10} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.965 \\ 0.252 \\ 0.817 \\ -0.398 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} 2960 \\ 0 \\ -2960 \\ 0 \end{Bmatrix}$$



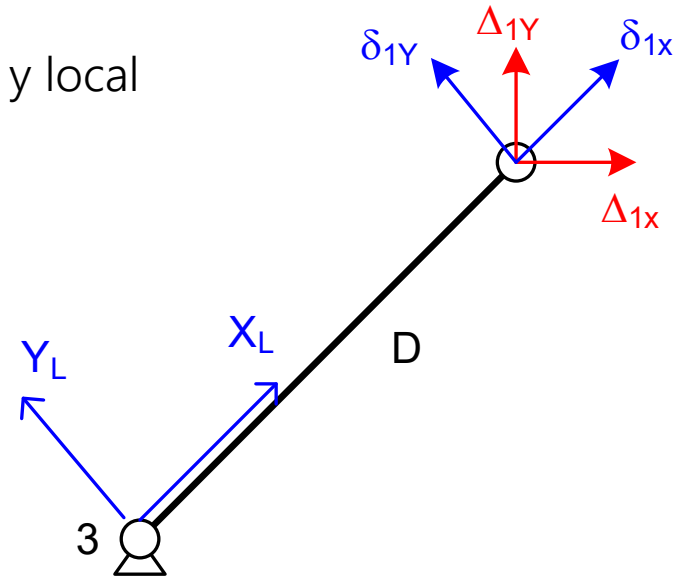
Ejemplo 2. Celosía plana. Esfuerzos en D

Deformaciones de la barra D en el sistema general y local

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.817 \\ -0.398 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Proyectar a 45°

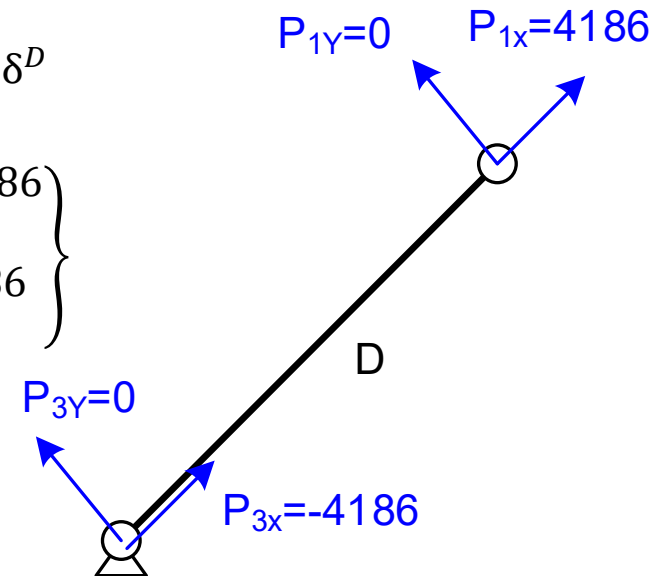
$$\begin{Bmatrix} \delta_{1X} \\ \delta_{1Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.296 \\ -0.859 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$



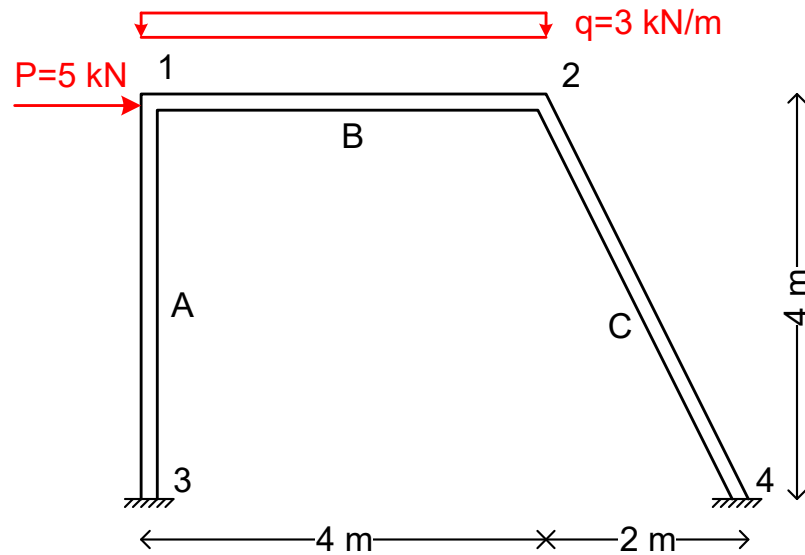
Esfuerzos de la barra D en su sistema local

$$\mathbf{P}^D = \mathbf{K}_L^D \delta^D$$

$$\begin{Bmatrix} P_{3X} \\ P_{3Y} \\ P_{1X} \\ P_{1Y} \end{Bmatrix} = \frac{EA}{L = 10\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.296 \\ -0.859 \end{Bmatrix} 10^{-3} = \begin{Bmatrix} -4186 \\ 0 \\ 4186 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

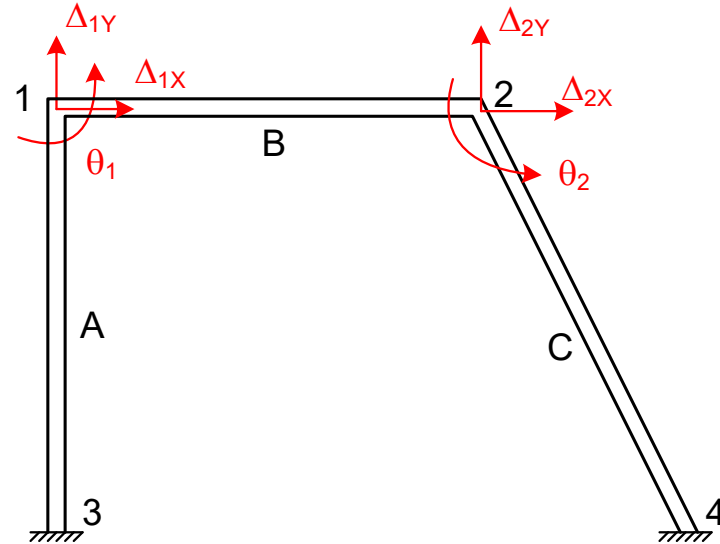


Ejemplo 3



$E = 200 \text{ GPa}$

$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



Barras A, C: $A = 100 \text{ cm}^2$ $I = 10000 \text{ cm}^4$

Barra B: $A = 80 \text{ cm}^2$ $I = 15000 \text{ cm}^4$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^A + \mathbf{K}_{G11}^B & \mathbf{K}_{G12}^B \\ \mathbf{K}_{G21}^B & \mathbf{K}_{G22}^B + \mathbf{K}_{G22}^C \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Matrices de rigidez de las barras

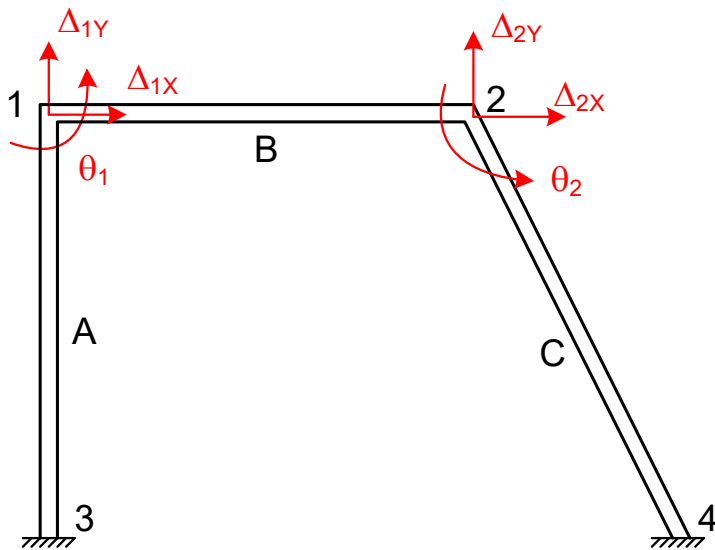
$\mathbf{K}_G^A = 10^8 \begin{bmatrix} 0.0375 & 0 & 0.075 \\ 0 & 5.0 & 0 \\ 0.075 & 0 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \end{matrix}$

$\mathbf{K}_G^B = 10^8 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.056 & 0.11 & 0 & -0.056 & 0.11 \\ 0 & 0.11 & 0.3 & 0 & -0.11 & 0.15 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.056 & -0.11 & 0 & 0.056 & -0.11 \\ 0 & 0.11 & 0.15 & 0 & -0.11 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \theta_2 \end{matrix}$

$\mathbf{K}_G^C = 10^8 \begin{bmatrix} 0.916 & -1.78 & 0.054 \\ -1.78 & 3.58 & 0.027 \\ 0.054 & 0.027 & 0.179 \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \theta_2 \end{matrix}$

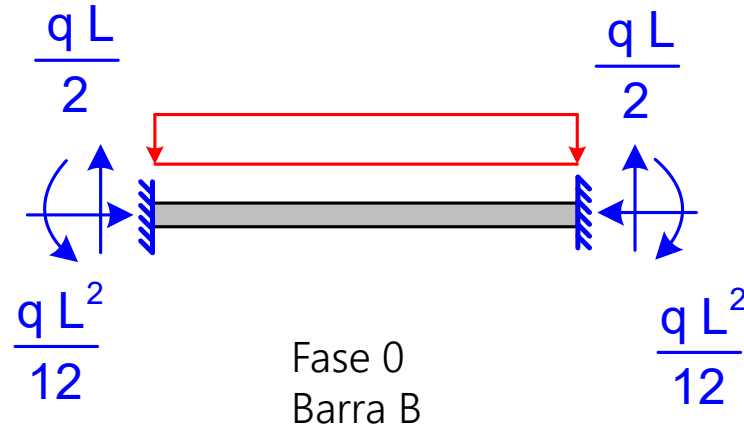
Ejemplo 3. Matriz de rigidez de la estructura

$$\mathbf{K} = 10^8 \begin{bmatrix} 4.04 & 0. & 0.08 & -4. & 0. & 0. \\ 0. & 5.06 & 0.11 & 0. & -0.05 & 0.11 \\ 0.08 & 0.11 & 0.5 & 0. & -0.11 & 0.15 \\ \hline -4. & 0. & 0. & 4.92 & -1.78 & 0.05 \\ 0. & -0.05 & -0.11 & -1.78 & 3.64 & -0.09 \\ 0. & 0.11 & 0.15 & 0.05 & -0.09 & 0.48 \end{bmatrix} \quad \Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}$$



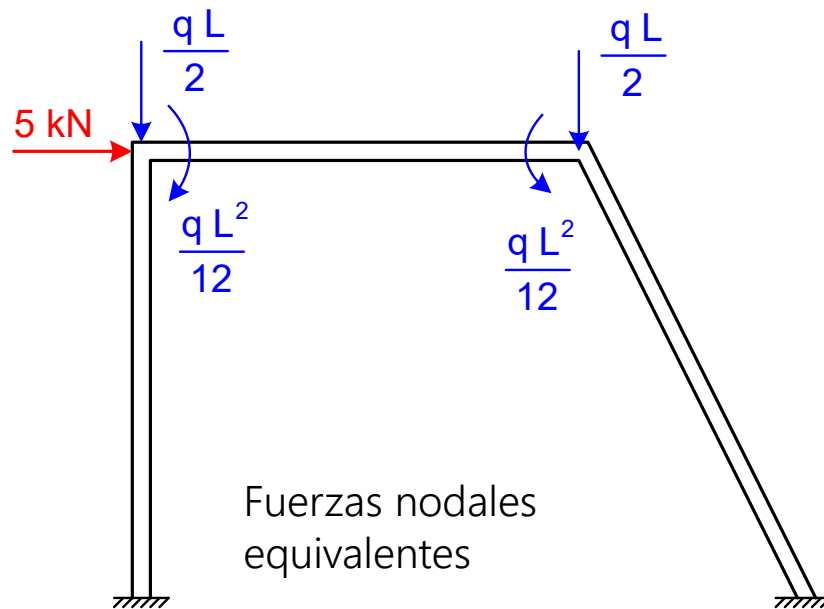
$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^A + \mathbf{K}_{G11}^B & \mathbf{K}_{G12}^B \\ \mathbf{K}_{G21}^B & \mathbf{K}_{G22}^B + \mathbf{K}_{G22}^C \end{bmatrix}$$

Ejemplo 3. Fuerzas nodales equivalentes



$$\frac{qL}{2} = 6000 \text{ N}$$

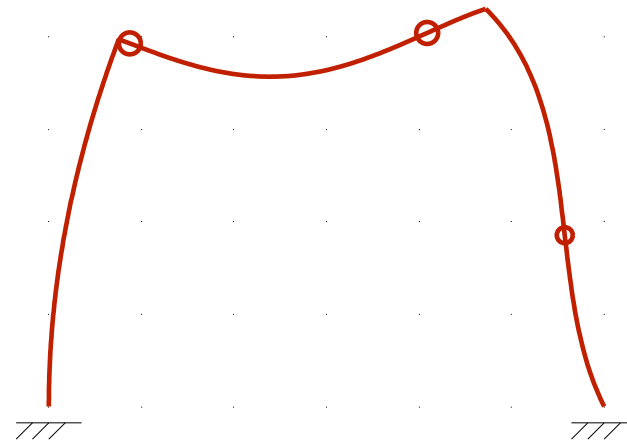
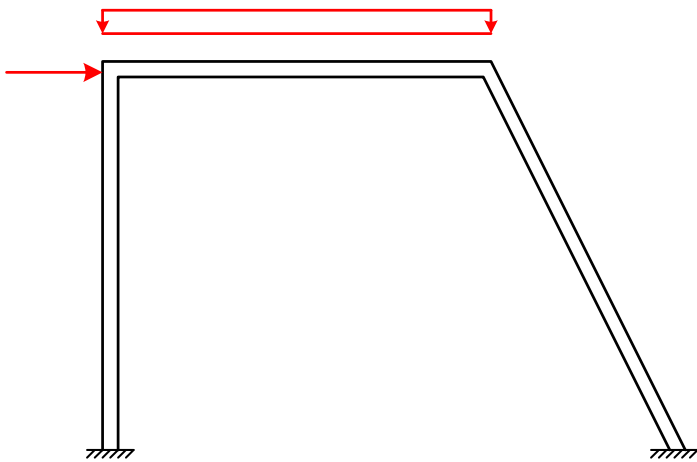
$$\frac{qL^2}{12} = 4000 \text{ N m}$$



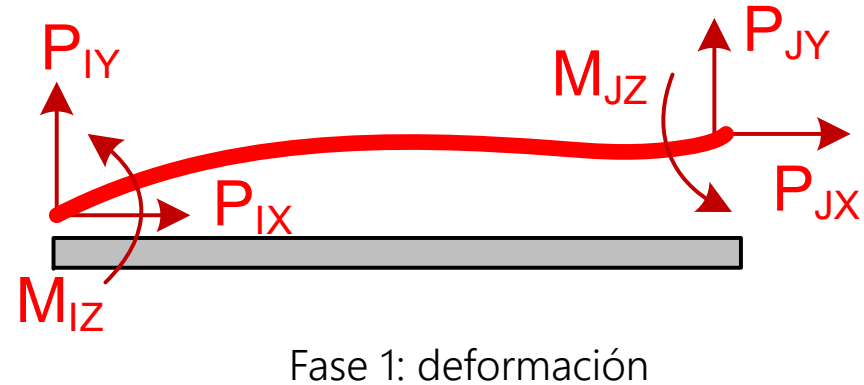
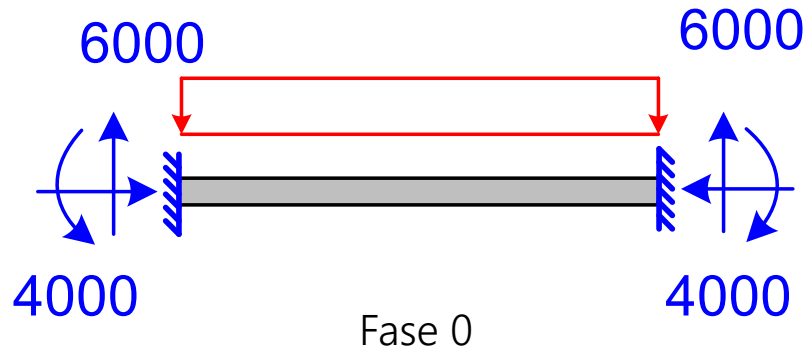
$$\mathbf{F} = \left\{ \begin{array}{l} F_{1x} = +5000 \\ F_{1y} = -6000 \\ M_1 = -4000 \\ F_{2x} = 0 \\ F_{2y} = -6000 \\ M_2 = +4000 \end{array} \right\}$$

Ejemplo 3. Deformaciones de los nudos

$$\Delta = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \quad \Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.262 \\ -0.010 \\ -0.129 \\ 0.249 \\ 0.104 \\ 0.117 \end{Bmatrix} 10^{-3} \text{ (m)}$$



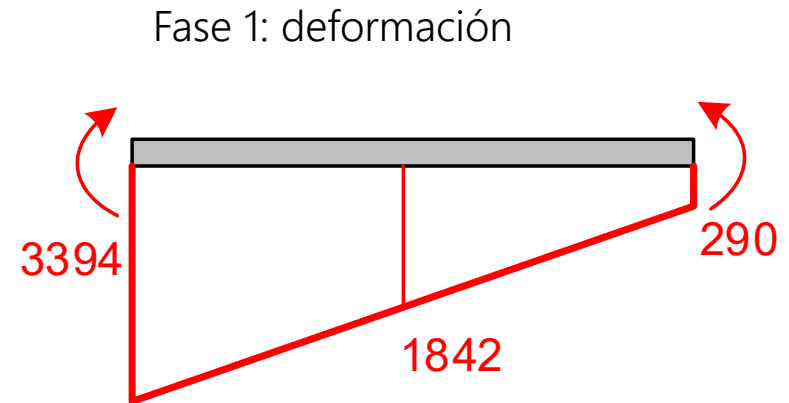
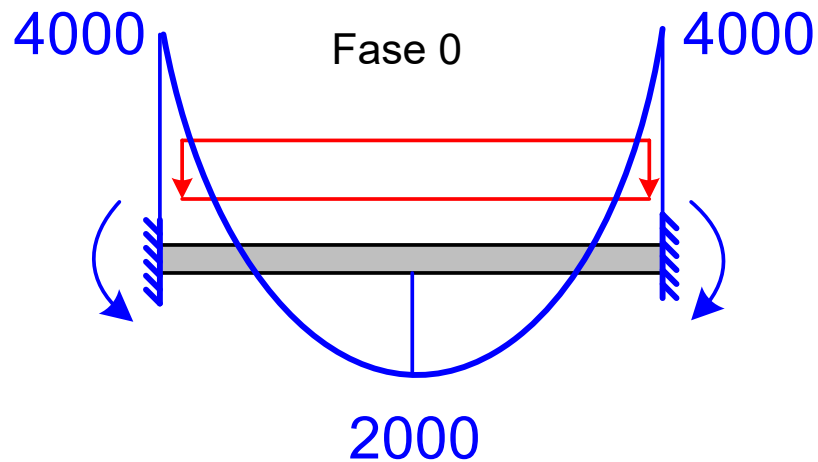
Ejemplo 3. Esfuerzos en B: sumar fases 0 y 1



$$\mathbf{P}^B = \mathbf{P}^{0B} + \mathbf{K}_L^B \delta^B$$

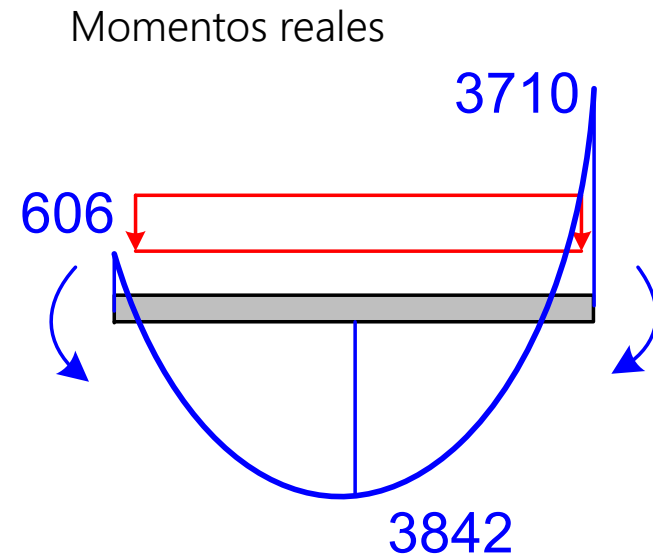
$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6000 \\ 4000 \\ 0 \\ 6000 \\ -4000 \end{Bmatrix} + 10^8 \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 0.056 & 0.11 & 0 & -0.056 & 0.11 \\ 0 & 0.11 & 0.3 & 0 & -0.11 & 0.15 \\ -4 & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & -0.056 & -0.11 & 0 & 0.056 & -0.11 \\ 0 & 0.11 & 0.15 & 0 & -0.11 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0.262 \\ -0.010 \\ -0.129 \\ 0.249 \\ 0.104 \\ 0.117 \end{Bmatrix} 10^{-3}$$

Ejemplo 3. Esfuerzos en B: sumar fases 0 y 1



$$\mathbf{P}^B = \mathbf{P}^{0B} + \mathbf{K}_L^B \delta^B$$

$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6000 \\ 4000 \\ 0 \\ 6000 \\ -4000 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 4981 \\ -776 \\ -3394 \\ -4981 \\ 776 \\ 290 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4981 \\ 5224 \\ 606 \\ -4981 \\ 6776 \\ -3710 \end{Bmatrix}$$





tecnun
Universidad
de Navarra
Escuela de Ingeniería

Condiciones de apoyo especiales

Apoyos no orientados según los ejes generales

Apoyos no orientados según X_G Y_G

La condición de apoyo no se puede definir fácilmente en los ejes generales de la estructura.

$$\Delta_X \sin \alpha - \Delta_Y \cos \alpha = 0$$

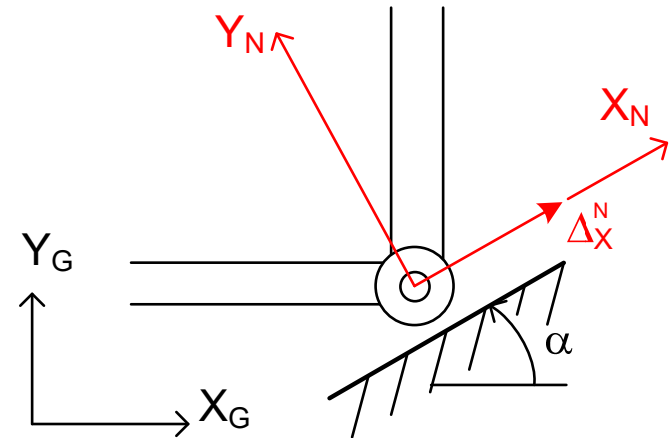
Definir un sistema de ejes local al nudo, X_N , Y_N , en el que sea fácil imponer la condición de apoyo

$$\Delta_Y^N = 0$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_X^N \\ \Delta_Y^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \end{Bmatrix}$$

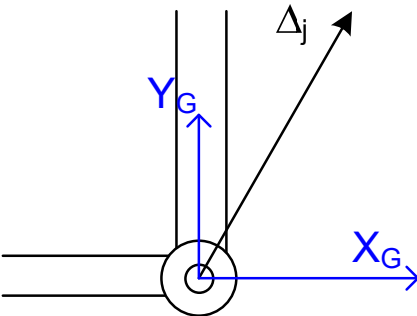
$$\Delta_j^N = \mathbf{T}_j \Delta_j$$

$$\mathbf{F}_j^N = \mathbf{T}_j \mathbf{F}_j$$



Cambio de ejes de las ecuaciones de equilibrio (1)

Equilibrio en el sistema de ejes general

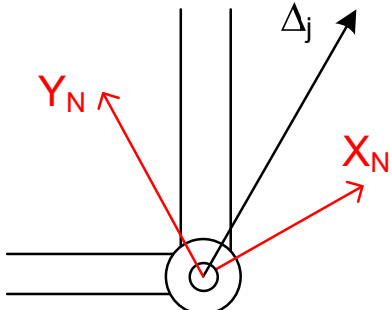
$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{j1} & \dots & \mathbf{K}_{jj} & \dots & \mathbf{K}_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{nj} & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_j \\ \dots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \dots \\ \mathbf{F}_j \\ \dots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix}$$


The diagram shows a node represented by a circle with a dot. A blue coordinate system is centered at the node, with a vertical axis labeled Y_G and a horizontal axis labeled X_G . A black vector labeled Δ_j originates from the node and points into the first quadrant.

Transformar las deformaciones al sistema N local al nudo

$$\Delta_j = \mathbf{T}_j^T \Delta_j^N$$

Multiplicar la columna j por \mathbf{T}_j^T

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{j1} & \dots & \mathbf{K}_{jj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{nj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_j^N \\ \dots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \dots \\ \mathbf{F}_j \\ \dots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix}$$


The diagram shows the same node as above. A red coordinate system is centered at the node, with a vertical axis labeled Y_N and a horizontal axis labeled X_N . A black vector labeled Δ_j originates from the node and points into the first quadrant.

Cambio de ejes de las ecuaciones de equilibrio (2)

Para transformar las fuerzas: se multiplica la fila j por T_j

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{j1} & \dots & \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{jj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{nj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_j^N \\ \dots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \dots \\ \mathbf{T}_j \mathbf{F}_j \\ \dots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix}$$

Equilibrio en el sistema de ejes mixto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{j1} & \dots & \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{jj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{nj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_j^N \\ \dots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \dots \\ \mathbf{F}_j^N \\ \dots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_j \mathbf{F}_j = \mathbf{F}_j^N$$

En el sistema N es fácil aplicar la condición de ligadura especial

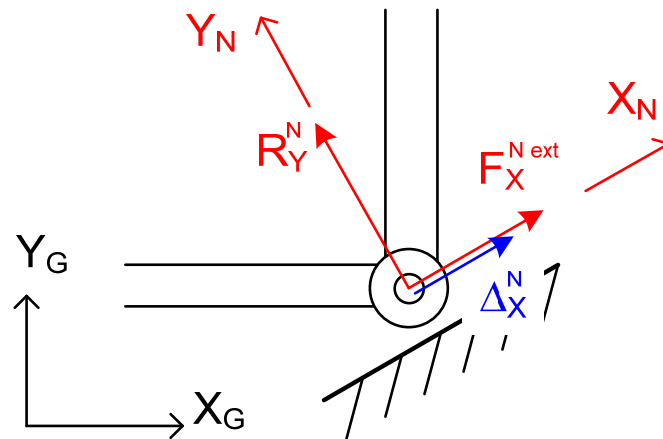
$$\Delta_{jY}^N = 0$$

Resumen

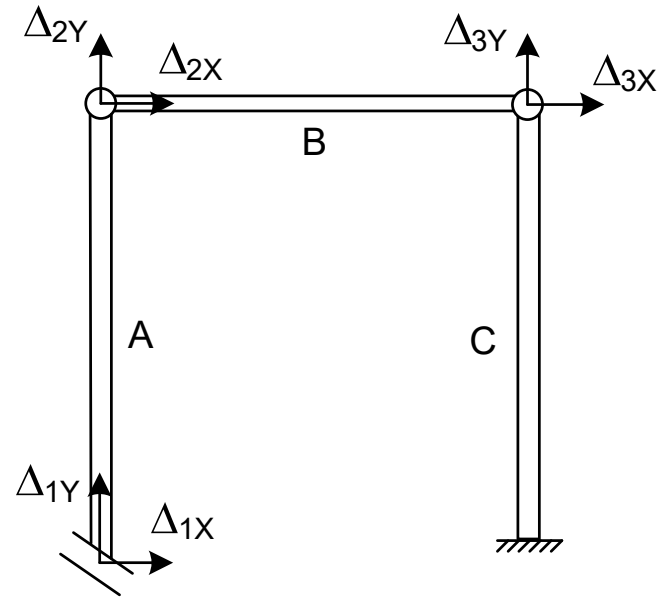
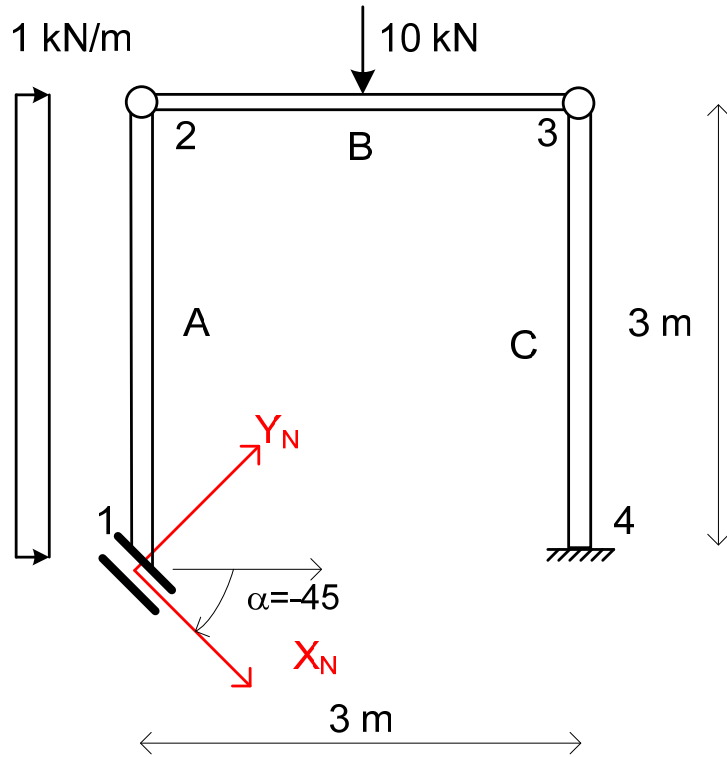
Equilibrio en el sistema de ejes mixto

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \dots & \mathbf{K}_{1j} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{j1} & \dots & \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{jj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{T}_j \mathbf{K}_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{K}_{n1} & \dots & \mathbf{K}_{nj} \mathbf{T}_j^T & \dots & \mathbf{K}_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \dots \\ \Delta_j^N \\ \dots \\ \Delta_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \dots \\ \mathbf{F}_j^N \\ \dots \\ \mathbf{F}_n \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{F}_j^N = \begin{Bmatrix} F_{jX}^{N,ext} \\ R_{jY}^N \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_j^N = \begin{Bmatrix} \Delta_{jX}^N \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{jY}^N = 0 \end{Bmatrix}$$

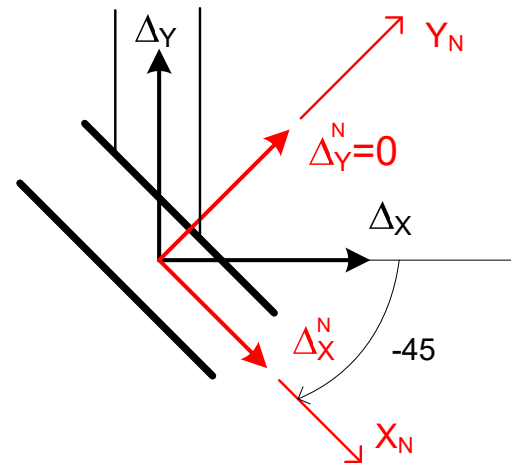


Ejemplo

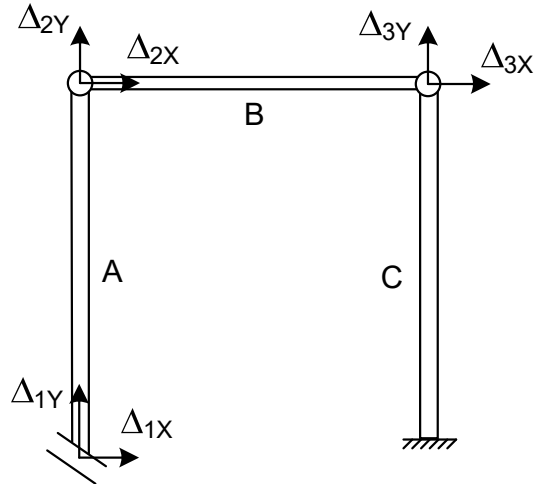


$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1X}^N \\ \Delta_{1Y}^N \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-45) & \sin(-45) \\ -\sin(-45) & \cos(-45) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_1^N = \mathbf{T}_1 \Delta_1$$



Ejemplo. Rigidez en los sistemas general y mixto

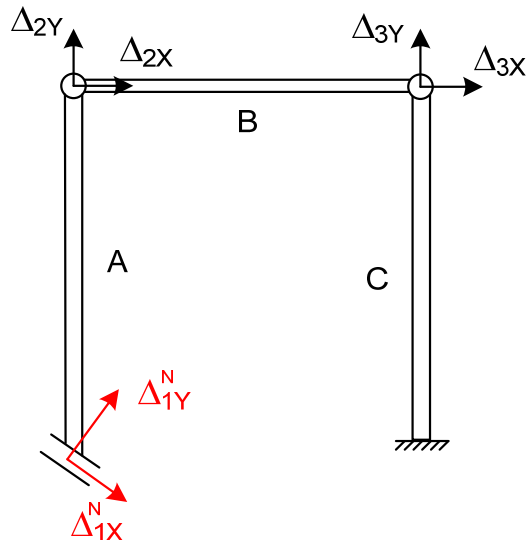


Rigidez en el sistema general

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^A & \mathbf{K}_{G12}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{G21}^A & \mathbf{K}_{G22}^A + \mathbf{K}_{G22}^B & \mathbf{K}_{G23}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G32}^B & \mathbf{K}_{G33}^B + \mathbf{K}_{G33}^C \end{bmatrix}$$

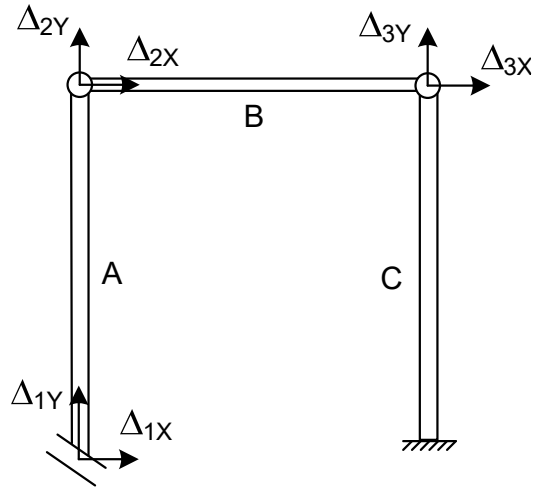
Rotación de 1 a su sistema local

$$\Delta_1^N = \mathbf{T}_1 \Delta_1$$



$$\mathbf{K}^N = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1^T \mathbf{K}_{G11}^A \mathbf{T}_1 & \mathbf{T}_1^T \mathbf{K}_{G12}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{G21}^A \mathbf{T}_1^T & \mathbf{K}_{G22}^A + \mathbf{K}_{G22}^B & \mathbf{K}_{G23}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G32}^B & \mathbf{K}_{G33}^B + \mathbf{K}_{G33}^C \end{bmatrix}$$

Ejemplo: Ensamblado de la rigidez general



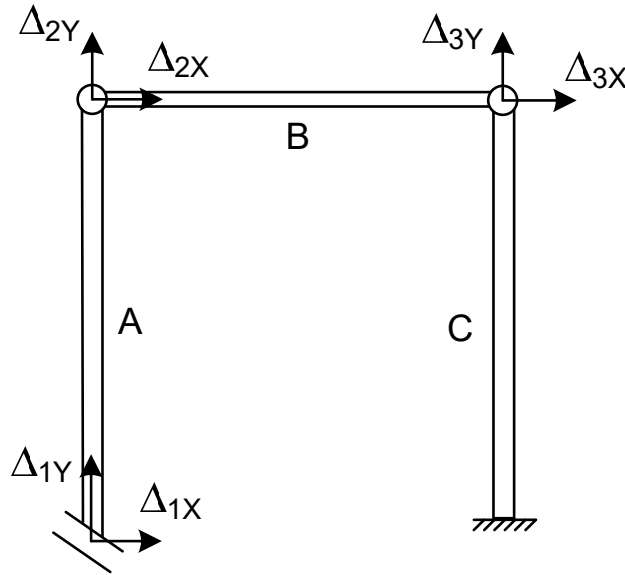
$$\mathbf{K}_G^A = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^A & \mathbf{K}_{G12}^A \\ \mathbf{K}_{G21}^A & \mathbf{K}_{G22}^A \end{bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.0233 & 0 & -0.0233 & 0 \\ 0 & 7. & 0 & -7. \\ -0.0233 & 0 & 0.0233 & 0 \\ 0 & -7. & 0 & 7. \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \end{matrix}$$

$$\mathbf{K}_G^B = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G22}^B & \mathbf{K}_{G23}^B \\ \mathbf{K}_{G23}^B & \mathbf{K}_{G33}^B \end{bmatrix} = 10^8 \begin{bmatrix} 7. & 0. & -7. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \\ -7. & 0. & 7. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{matrix}$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{G11}^A & \mathbf{K}_{G12}^A & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{G21}^A & \mathbf{K}_{G22}^A + \mathbf{K}_{G22}^B & \mathbf{K}_{G23}^B \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_{G32}^B & \mathbf{K}_{G33}^B + \mathbf{K}_{G33}^C \end{bmatrix}$$

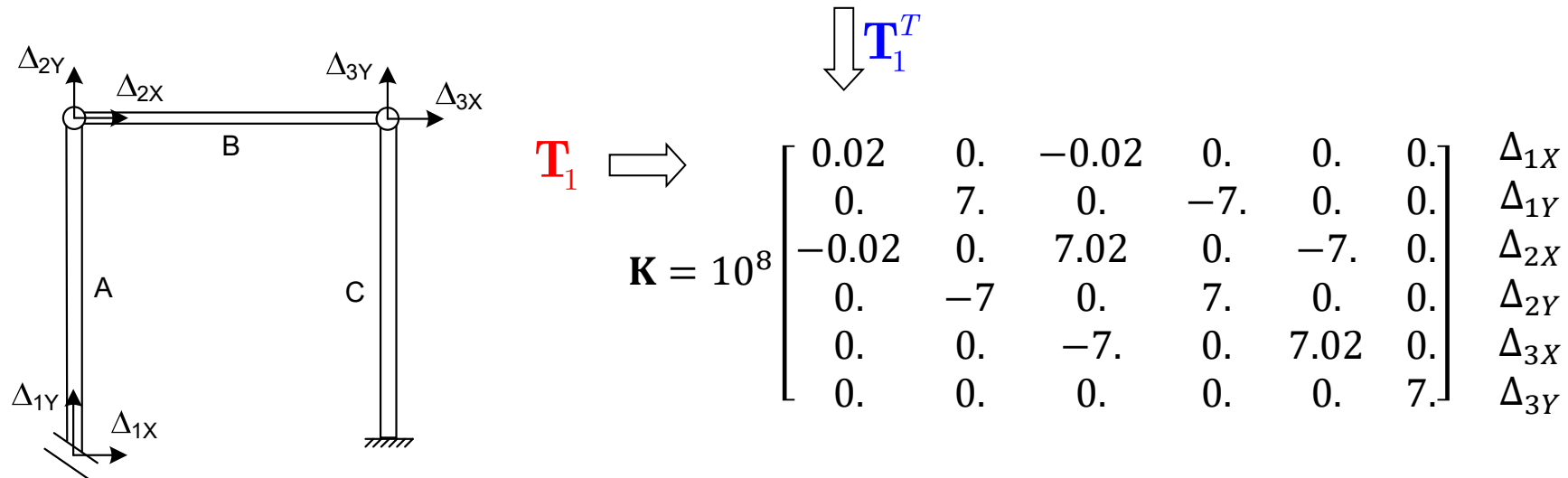
$$\mathbf{K}_{G33}^C = 10^8 \begin{bmatrix} 0.0233 & 0 \\ 0 & 7. \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{matrix}$$

Ejemplo: Rigidez en el sistema general

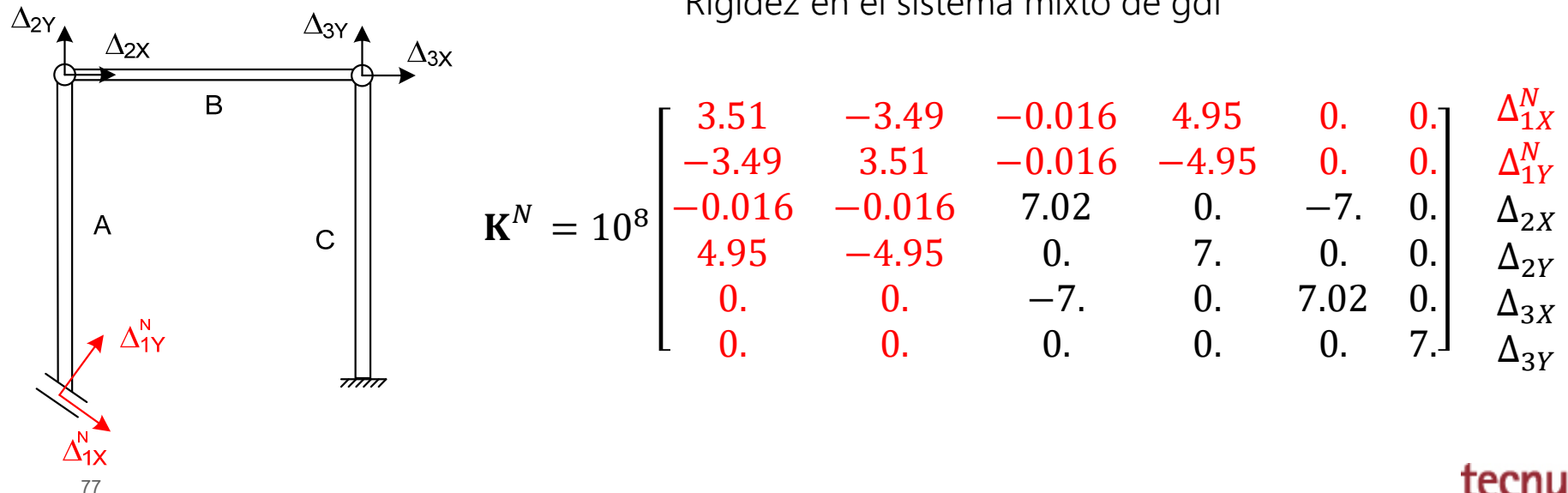


$$\mathbf{K} = 10^8 \begin{bmatrix} 0.02 & 0. & -0.02 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 7. & 0. & -7. & 0. & 0. \\ -0.02 & 0. & 7.02 & 0. & -7. & 0. \\ 0. & -7 & 0. & 7. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -7. & 0. & 7.02 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 7. \end{bmatrix} \begin{matrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \Delta_{3X} \\ \Delta_{3Y} \end{matrix}$$

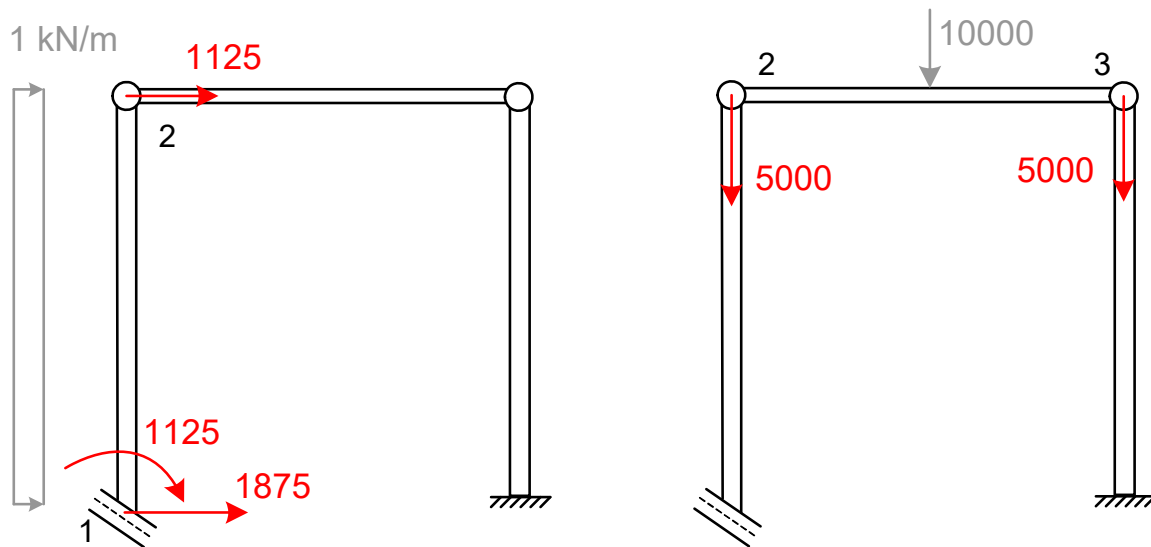
Ejemplo: Rotación de la rigidez al sistema mixto



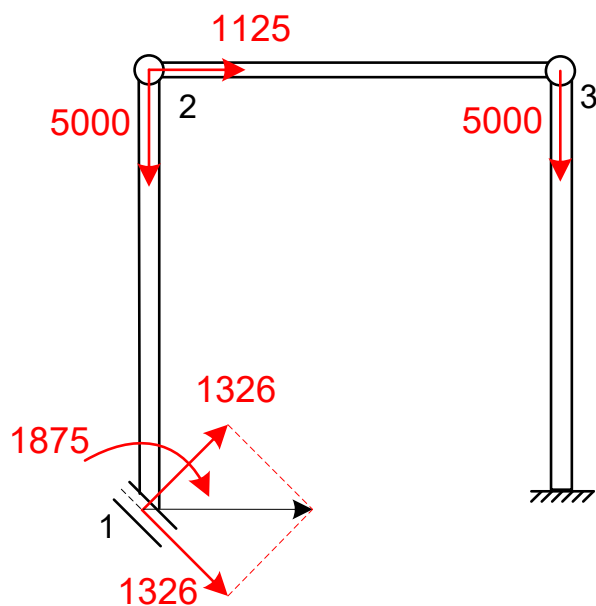
Rigidez en el sistema mixto de gdl



Ejemplo: Fuerzas



$$\mathbf{T}_1 \Rightarrow \mathbf{F} = \begin{Bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1875 \\ 0. \\ 1125 \\ -5000 \\ 0. \\ -5000 \end{Bmatrix}$$



Fuerzas nodales giradas

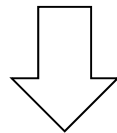
$$\mathbf{F}^N = \begin{Bmatrix} F_{1X}^N \\ F_{1Y}^N \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \\ F_{3X} \\ F_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1326 \\ 1326 \\ 1125 \\ -5000 \\ 0. \\ -5000 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo: ecuaciones finales

Se introduce la condición de ligadura debida al apoyo inclinado:
Eliminar la fila y la columna en la dirección Y local del nudo.

$$\Delta_{1Y}^N = 0$$

$$10^8 \begin{bmatrix} 3.51 & -3.49 & -0.016 & 4.95 & 0. & 0. \\ \cancel{3.49} & \cancel{3.51} & \cancel{0.016} & \cancel{4.95} & 0. & 0. \\ -0.016 & -0.016 & 7.02 & 0. & -7. & 0. \\ 4.95 & -4.95 & 0. & 7. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & -7. & 0. & 7.02 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 7. \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1X}^N \\ \Delta_{1Y}^N = 0 \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \Delta_{3X} \\ \Delta_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1326 \\ \cancel{1326} \\ 1125 \\ -5000 \\ 0 \\ -5000 \end{Bmatrix}$$



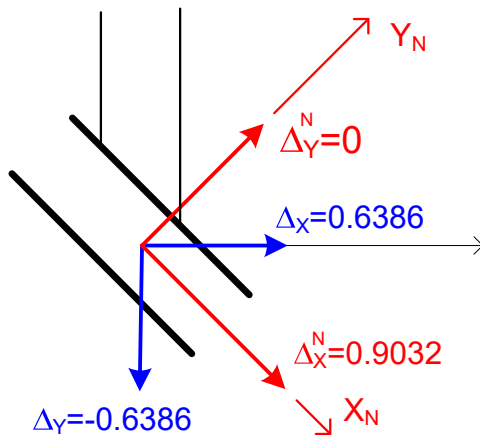
$$10^8 \begin{bmatrix} 3.51 & -0.016 & 4.95 & 0. & 0. \\ -0.016 & 7.02 & 0. & -7. & 0. \\ 4.95 & 0. & 7. & 0. & 0. \\ 0. & -7. & 0. & 7.02 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 7. \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1X}^N \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \Delta_{3X} \\ \Delta_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1326 \\ 1125 \\ -5000 \\ 0 \\ -5000 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo: deformaciones

Se obtiene:

$$\Delta^N = \begin{Bmatrix} \Delta_{1X}^N \\ \Delta_{2X} \\ \Delta_{2Y} \\ \Delta_{3X} \\ \Delta_{3Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.9032 \\ 0.3440 \\ -0.6394 \\ 0.3429 \\ -0.007 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$

Rotación de las deformaciones locales del nudo 1 al sistema general



$$\Delta_1 = \mathbf{T}_1^T \Delta_1^N$$

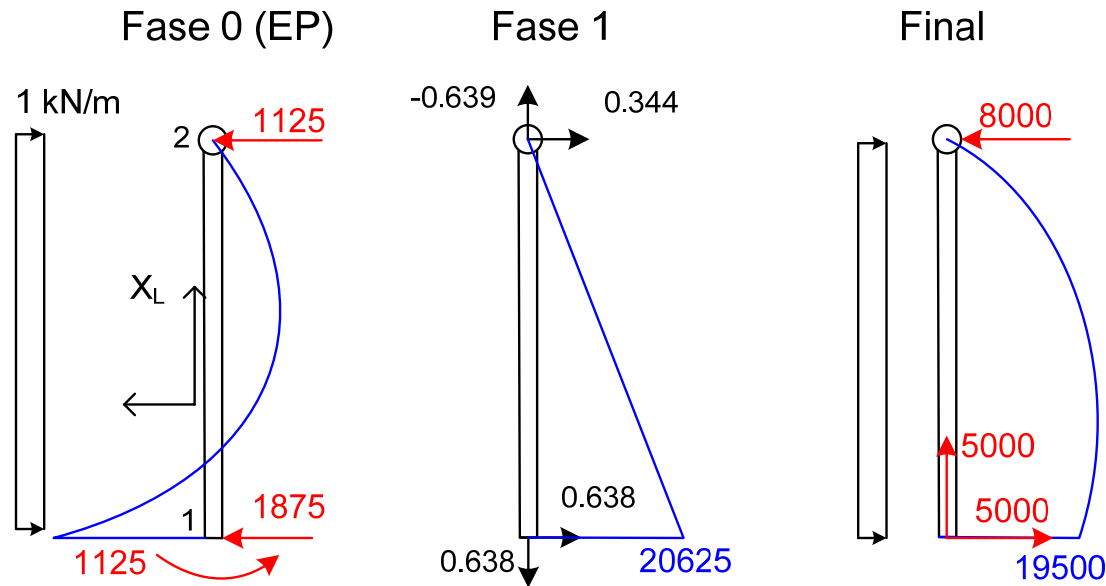
$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(-45) & -\sin(-45) \\ \sin(-45) & \cos(-45) \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \Delta_{1X}^N \\ \Delta_{1Y}^N \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta_{1X} \\ \Delta_{1Y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0.9032 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.6386 \\ -0.6386 \end{Bmatrix}$$

Ejemplo: esfuerzos en la barra A

Fase 0 + fase 1 (En el sistema local de la barra)

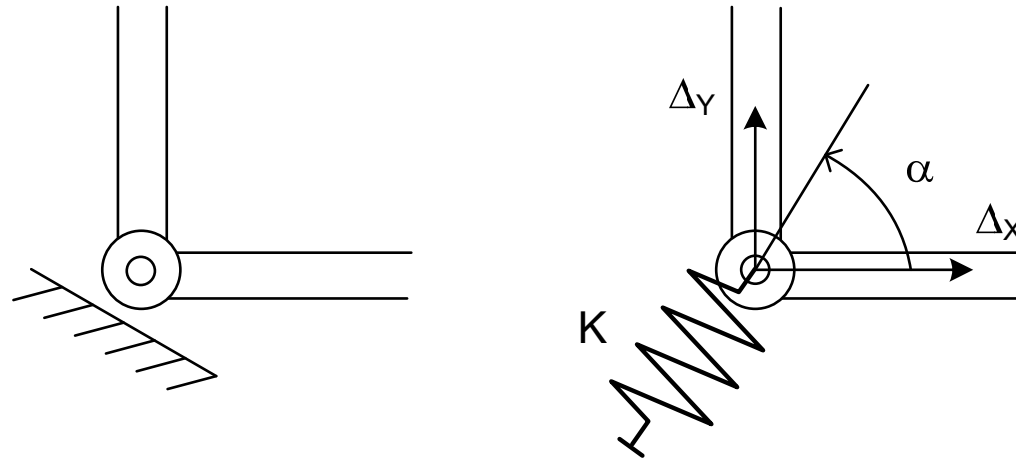
$$\begin{Bmatrix} P_{1x} \\ P_{1y} \\ M_1 \\ P_{2x} \\ P_{2y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1875 \\ 1125 \\ 0 \\ 1125 \end{Bmatrix} + 10^8 \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0.0233 & 0.07 & 0 & -0.0233 \\ 0 & 0.07 & 0.21 & 0 & -0.07 \\ -7 & 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & -0.0233 & -0.07 & 0 & 0.0233 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -0.6386 \\ -0.6386 \\ 0 \\ -0.6394 \\ -0.3440 \end{Bmatrix} 10^{-2} = \begin{Bmatrix} 5000 \\ -5000 \\ -19500 \\ -5000 \\ 8000 \end{Bmatrix}$$



Apoyos inclinados modelizados con muelles

No todos los programas (pocos) permiten emplear sistemas de ejes locales (N) en los nudos, con lo que el método anterior no se puede emplear.

Método intuitivo y práctico para modelizar un apoyo inclinado: introducir un muelle de gran rigidez en la dirección fijada por el apoyo



Rigidez del muelle en el sistema general

$$\mathbf{K}^M = \begin{bmatrix} K \cos^2 \alpha & -K \sin \alpha \cos \alpha \\ -K \sin \alpha \cos \alpha & K \sin^2 \alpha \end{bmatrix}$$

Apoyos inclinados modelizados con muelles

Ecuación de equilibrio del nudo en el sistema general X,Y, incluyendo la rigidez del muelle y la del resto de la estructura

$$\begin{bmatrix} \dots & K_{xi} & \dots & K_{xx} + K \cos^2 \alpha & K_{xy} - K \sin \alpha \cos \alpha & \dots & K_{xj} & \dots \\ \dots & K_{yi} & \dots & K_{yx} - K \sin \alpha \cos \alpha & K_{yy} + K \sin^2 \alpha & \dots & K_{yj} & \dots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix}$$

Al ser K muy grande, los demás términos son despreciables frente a él.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & K \cos^2 \alpha & -K \sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -K \sin \alpha \cos \alpha & K \sin^2 \alpha & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_X \\ \Delta_Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_X \\ F_Y \end{Bmatrix}$$

Dos ecuaciones casi linealmente dependientes entre sí !!

Problemas de estabilidad numérica al resolver el sistema de ecuaciones si K muy grande. Usar con precaución, cuidando el valor de K.

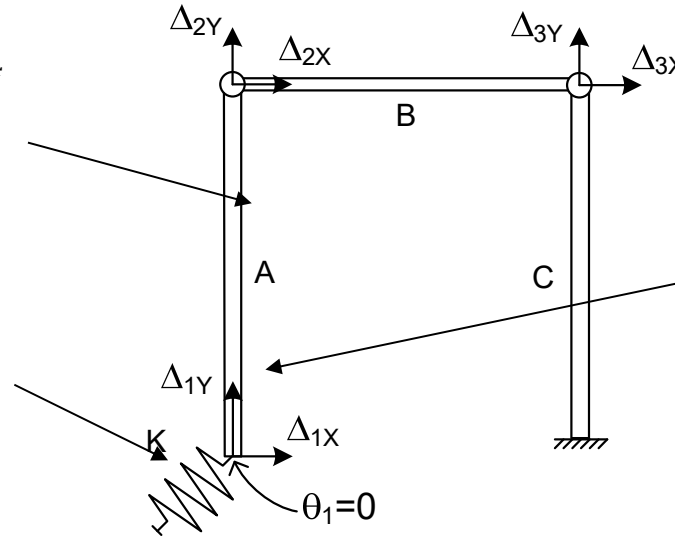
Ejemplo: modelo numérico cespla

$$A = 100\text{cm}^2 \quad I = 10^4\text{cm}^4$$

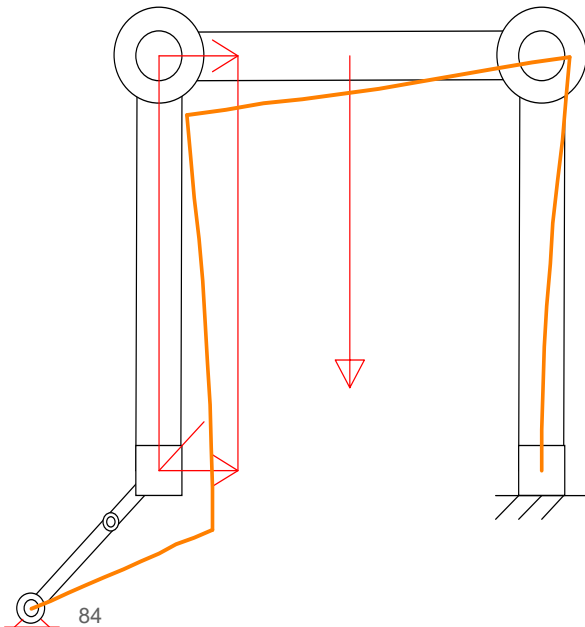
$$E = 2.1 \cdot 10^6\text{kg/cm}^2$$

$$K = 1.5 \cdot 10^{10}\text{kg/cm}$$

$$K = EA/L$$



Rigidez de las barras al desplazamiento: orden 10^6 kg/cm



Deformaciones de los nudos

Hipótesis:

Nudo:

Deformaciones:

Desplaz. X:

Desplaz. Y:

Giro Z: Giro #

Solución correcta para un amplio rango de valores de K: $10^8 - 10^{14}$ kg/cm



tecnun
Universidad
de Navarra
Escuela de Ingeniería

Condiciones de apoyo especiales

Deformaciones impuestas en los apoyos



Deformaciones impuestas en los apoyos

- Se conoce el valor de algunos grados de libertad. Normalmente uno sólo o unos pocos.
- Ningún problema teórico: valores conocidos de algunas incógnitas
- Se dividen los g.d.l. en dos tipos:

GDLs de valor conocido: Δ_C GDLs de valor desconocido: Δ_D

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{DD} & \mathbf{K}_{DC} \\ \mathbf{K}_{CD} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_D \\ \Delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_D \\ \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C \end{Bmatrix}$$

\mathbf{R}_C : reacciones exteriores sobre los GDL conocidos, necesarias para imponer los valores conocidos de las deformaciones.

Incógnitas:

\mathbf{R}_C reacciones exteriores

Δ_D deformaciones.

Deformaciones impuestas en los apoyos

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{DD} & \mathbf{K}_{DC} \\ \mathbf{K}_{CD} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_D \\ \Delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_D \\ \mathbf{F}_C + \mathbf{R}_C \end{Bmatrix}$$

- A nivel teórico se resuelve en dos pasos:
La primera ecuación proporciona las deformaciones de los nudos

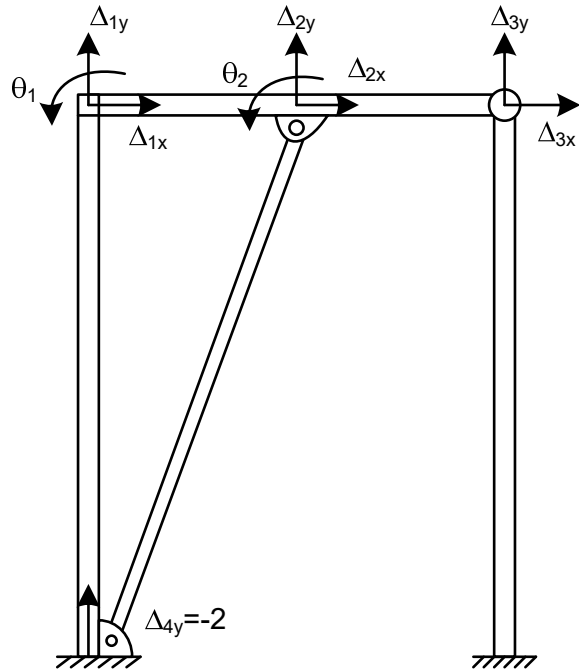
$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{DD}\Delta_D + \mathbf{K}_{DC}\Delta_C &= \mathbf{F}_D \\ \mathbf{K}_{DD}\Delta_D &= \mathbf{F}_D - \mathbf{K}_{DC}\Delta_C \end{aligned}$$

Nuevo término de cargas: fuerzas nodales equivalentes a los GDL conocidos.

La segunda ecuación proporciona las reacciones a aplicar para obtener las deformaciones impuestas

$$\mathbf{R}_C = \mathbf{K}_{CD}\Delta_D + \mathbf{K}_{CC}\Delta_C - \mathbf{F}_C$$

Ejemplo



$$\Delta = \begin{Bmatrix} \Delta_D \\ \Delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} = -2 \end{Bmatrix}$$

No hay fuerzas exteriores

8 x 8

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{DD} & \mathbf{K}_{DC} \\ \mathbf{K}_{CD} & \mathbf{K}_{CC} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_D \\ \Delta_C \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_C \end{Bmatrix}$$

1 x 1

Ejemplo. Ecuación de equilibrio

Ensamblando las matrices K de las distintas barras.

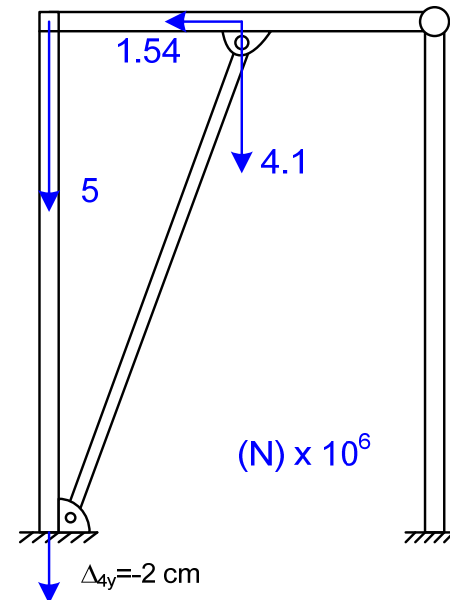
$$10^8 \begin{bmatrix} 6.67 & 0. & 0.037 & -6.67 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.678 & 0.266 & 0. & -0.178 & 0.266 & 0. & 0. & 0. \\ 0.037 & 0.266 & 0.733 & 0. & -0.266 & 0.266 & 0. & 0. & 0. \\ -6.67 & 0. & 0. & 13.62 & 0.769 & 0. & -6.67 & 0. & 0. \\ 0. & -0.178 & -0.266 & 0.769 & 2.274 & -0.133 & 0. & -0.044 & 0. \\ 0. & 0.266 & 0.266 & 0. & -0.133 & 0.933 & 0. & -0.133 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -6.67 & 0. & 0. & 6.67 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.044 & -0.133 & 0. & 2.544 & 0. \\ \hline 0. & -2.5 & 0. & -0.77 & -2.05 & 0. & 0. & 0. & 4.55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{4y} \end{Bmatrix}$$

-2 cm

Ejemplo. Fuerzas equivalentes a la deformación

$$10^8 \begin{bmatrix} 6.67 & 0 & 0.037 & -6.67 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2.678 & 0.266 & 0 & -0.178 & 0.266 & 0 & 0 \\ 0.037 & 0.266 & 0.733 & 0 & -0.266 & 0.266 & 0 & 0 \\ -6.67 & 0 & 0 & 13.62 & 0.769 & 0 & -6.67 & 0 \\ 0 & -0.178 & -0.266 & 0.769 & 2.274 & -0.133 & 0 & -0.044 \\ 0 & 0.266 & 0.266 & 0 & -0.133 & 0.933 & 0 & -0.133 \\ 0 & 0 & 0 & -6.67 & 0 & 0 & 6.67 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.044 & -0.133 & 0 & 2.544 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - 10^8 \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.5 \\ 0 \\ -0.77 \\ -2.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\Delta_{4y} = -0.02\}$$

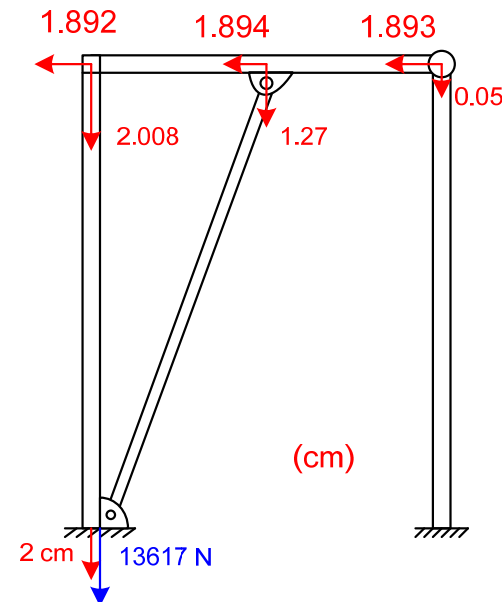
$$-\mathbf{K}_{DC} \Delta_C = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \end{Bmatrix} = -10^8 \begin{Bmatrix} 0 \\ -2.5 \\ 0 \\ -0.766 \\ -2.05 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \{-0.02\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -5.0 \\ 0 \\ -1.54 \\ -4.10 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} 10^6$$



Ejemplo. Deformaciones

$$10^8 \begin{bmatrix} 6.67 & 0. & 0.037 & -6.67 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.678 & 0.266 & 0. & -0.178 & 0.266 & 0. & 0. \\ 0.037 & 0.266 & 0.733 & 0. & -0.266 & 0.266 & 0. & 0. \\ -6.67 & 0. & 0. & 13.62 & 0.769 & 0. & -6.67 & 0. \\ 0. & -0.178 & -0.266 & 0.769 & 2.274 & -0.133 & 0. & -0.044 \\ 0. & 0.266 & 0.266 & 0. & -0.133 & 0.933 & 0. & -0.133 \\ 0. & 0. & 0. & -6.67 & 0. & 0. & 6.67 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.044 & -0.133 & 0. & 2.544 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = 10^8 \begin{Bmatrix} 0. \\ -5 \\ 0. \\ -1.54 \\ -4.1 \\ 0. \\ 0. \\ 0. \end{Bmatrix}$$

$$\Delta_D = \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1.892 \\ -2.008 \\ 0.247 \\ -1.894 \\ -1.273 \\ 0.320 \\ -1.893 \\ -0.005 \end{Bmatrix} 10^{-2}$$



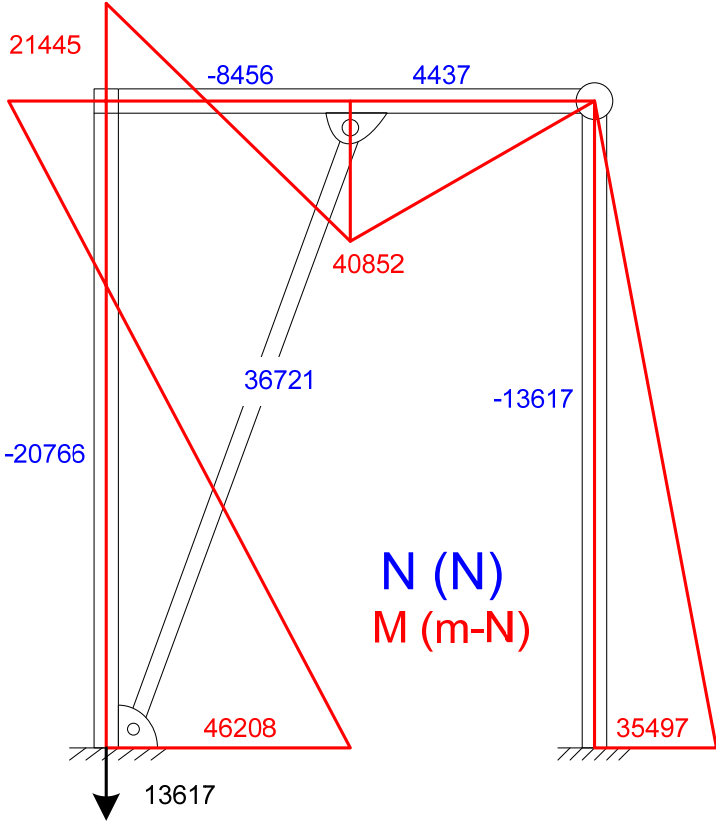
Ejemplo. Reacción en el apoyo que se mueve

$$10^8 \begin{bmatrix} 6.67 & 0. & 0.037 & -6.67 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 2.678 & 0.266 & 0. & -0.178 & 0.266 & 0. & 0. & -2.5 \\ 0.037 & 0.266 & 0.733 & 0. & -0.266 & 0.266 & 0. & 0. & 0. \\ -6.67 & 0. & 0. & 13.62 & 0.769 & 0. & -6.67 & 0. & -0.77 \\ 0. & -0.178 & -0.266 & 0.769 & 2.274 & -0.133 & 0. & -0.044 & -2.05 \\ 0. & 0.266 & 0.266 & 0. & -0.133 & 0.933 & 0. & -0.133 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & -6.67 & 0. & 0. & 6.67 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & -0.044 & -0.133 & 0. & 2.544 & 0. \\ 0. & -2.5 & 0. & -0.77 & -2.05 & 0. & 0. & 0. & 4.55 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_{1x} \\ \Delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \Delta_{2x} \\ \Delta_{2y} \\ \theta_2 \\ \Delta_{3x} \\ \Delta_{3y} \\ \Delta_{4y} \end{Bmatrix} = 10^8 \begin{Bmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \\ -1.54 \\ -4.1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ R_{4y} \end{Bmatrix}$$

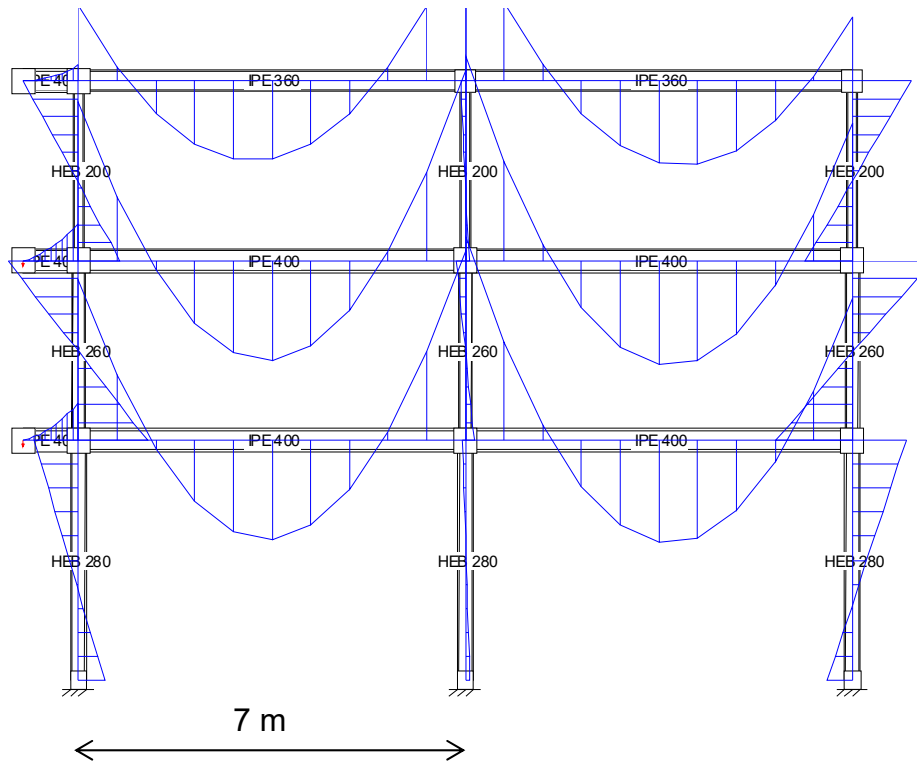
De la última ecuación

$$\{R_{4y}\} = 10^8 [0. \quad -2.5 \quad 0. \quad -0.77 \quad -2.05 \quad 0. \quad 0. \quad 0. \quad 4.55] \begin{Bmatrix} -1.892 \\ -2.008 \\ 0.247 \\ -1.894 \\ -1.273 \\ 0.320 \\ -1.893 \\ -0.005 \\ -0.02 \end{Bmatrix} 10^{-2} = -13617 \text{ (N)}$$

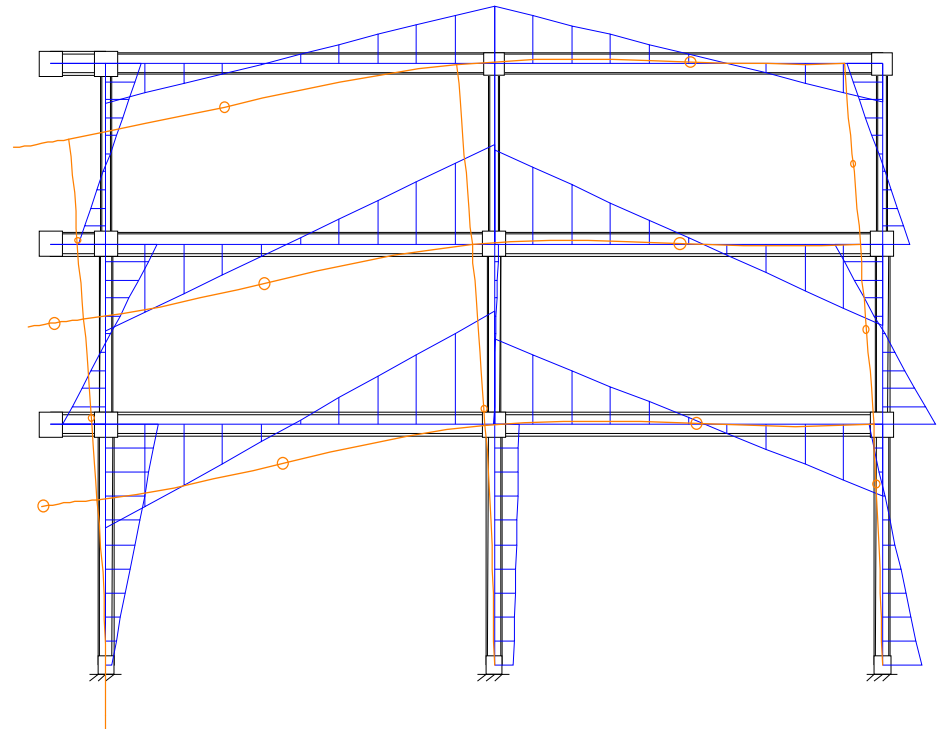
Ejemplo. Esfuerzos finales



Ejemplo. Edificio simple



Peso propio + Sobrecarga de uso



Descenso 5 cm pilar izquierda

Comparación flexibilidad - rigidez

Método de flexibilidad

- Aplicación conceptualmente sencilla (superposición) 😊
- Significado físico del proceso es claro: estática. Ventaja para el aprendizaje 😊
- Ecuaciones de compatibilidad fáciles de aplicar 😊
- Proporciona 1º todos los esfuerzos y 2º las deformaciones una a una.

- Necesita hallar h , y determinar las incógnitas X 😞
- Aplicable sólo a estructuras hiperestáticas 😞
- No se puede sistematizar 😞

Método de rigidez

- Proceso muy sistemático: manejar matrices 😊
- No requiere tomar decisiones 😊
- No necesita hallar h , ni las incógnitas X 😊
- Incógnitas (GDL) se determinan fácilmente 😊
- Aplicable a todo tipo de estructuras 😊
- Proporciona 1º todas las deformaciones y 2º todos los esfuerzos

- Requiere manejo de gran cantidad de datos 😞 → 😊
- Necesita un ordenador, salvo ejemplos muy pequeños 😞 → 😊