tecnun
Universidad de Navarra
Escuela de Ingenieros

Teoremas energéticos fundamentales del análisis estructural

Aplicación a celosías planas

Índice

Directos

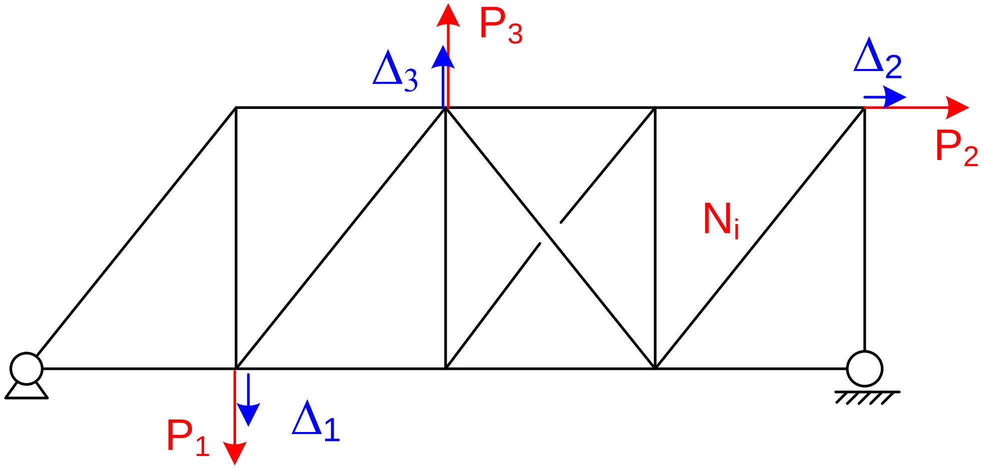
- **Densidad** de energía U_0
- **Energía elástica U** (Función de Δ_L)
- **Variación** de la energía elástica al variar las deformaciones Δ y Δ_L
- Principio del **trabajo virtual**
- **Primer** teorema de **Castigliano**
- Método de **rigidez**

Complementarios

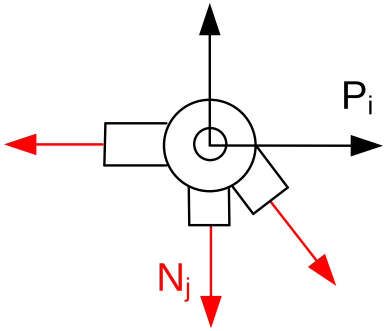
- **Densidad** de energía complementaria U^*_0
- **Energía elástica complementaria U*** (Función de N)
- **Variación** de la energía elástica complementaria al variar las fuerzas exteriores P e interiores N
- Principio del **trabajo virtual complementario**
- Teorema de **Crotti-Engesser**
- **Segundo** teorema de Castigliano
- Segundo teorema de **Engesser**
- Método de **flexibilidad**

Introducción

- Celosía plana. Isostática (cualquier tipo) o hiperestática.
- Fuerzas sólo aplicadas en los nudos P_i
- Deformaciones en la dirección de las fuerzas Δ_i

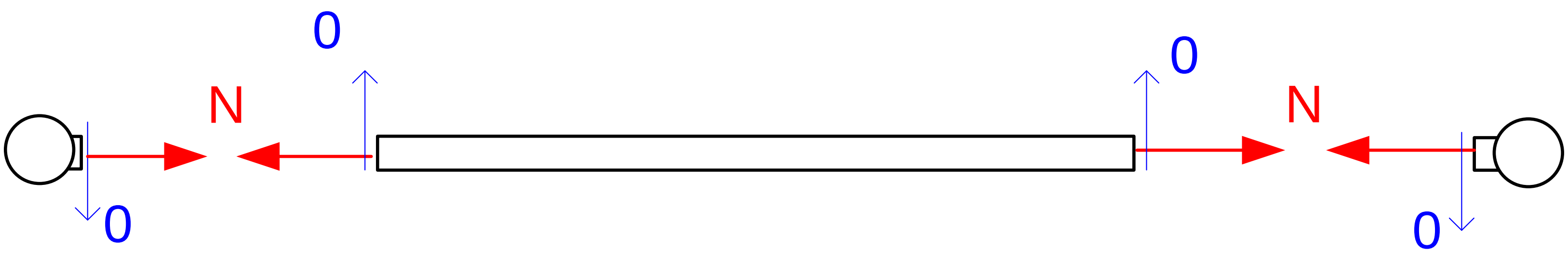


- Fuerzas interiores en las barras N_j
- En equilibrio con las exteriores P_i



tecnun

Resumen del comportamiento de la barra articulada



Esfuerzo interior: fuerza axial N

Tensión axial: $$\sigma = \frac{N}{A}$$

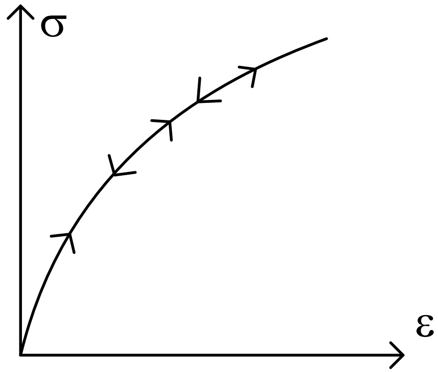
Deformación unitaria constante $$\varepsilon = \frac{\Delta_L}{L}$$

tecnun

Ecuación constitutiva

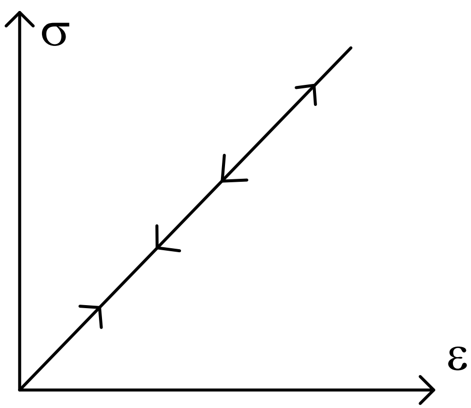
- Relación entre la tensión σ y la deformación unitaria ε

- Material **elástico**:
  - La tensión depende sólo de la ε en ese instante, no de su historia.
  - Proceso de carga y descarga por la misma línea (curva). Material siempre en un punto de la línea.



- Material **lineal**. Ecuación constitutiva es una línea recta.

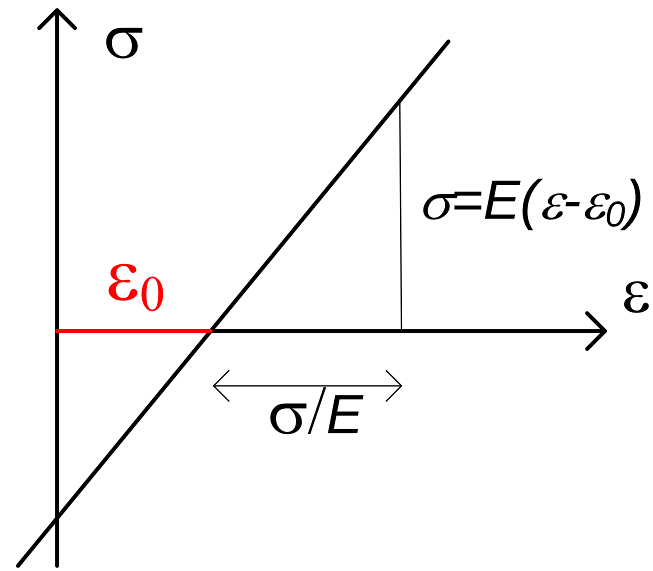
$$\sigma = E\varepsilon$$



Material lineal con temperatura

- Deformaciones iniciales térmicas

$$\varepsilon_0 = \alpha T$$



- Relación tensión – deformación unitaria

$$\sigma = E\ \ \varepsilon - \varepsilon_0\ \ = E\ \ \varepsilon - \alpha T$$

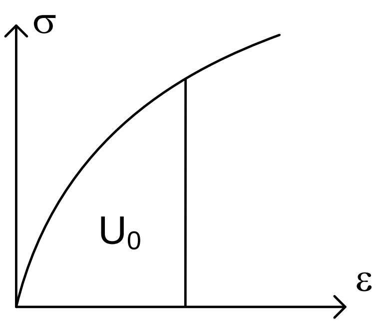
- Deformación unitaria total: suma de deformación unitaria térmica αT y la debida a la tensión σ/E

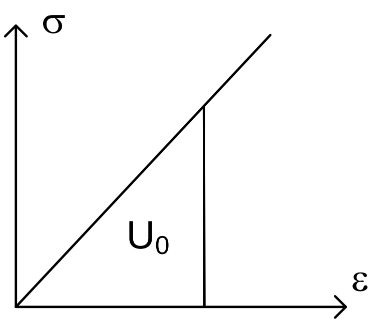
$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \sigma / E$$

Densidad de energía de deformación (I)

- Se define como: $$U_0(\varepsilon) \equiv \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon$$
- Con la condición de que sea **función sólo del estado final** de deformación unitaria (independiente del camino). Es decir $U_0(\varepsilon)$
- Existe si el **material es elástico** (lineal o no)
- **Energía** elástica **por unidad de volumen**
- Representa el trabajo (por unidad de volumen) efectuado por las tensiones (fuerzas interiores) al deformarse el sólido.
- Trabajo interno unitario

$$dU_0 = \sigma\, d\varepsilon \qquad \frac{dU_0}{d\varepsilon} = \sigma$$



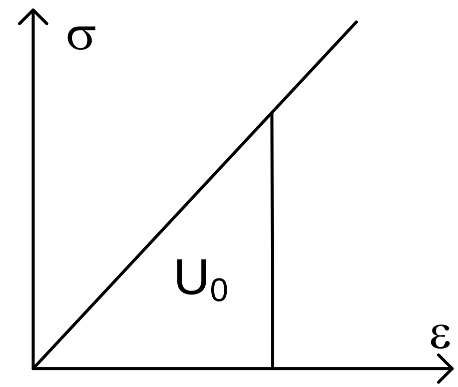


tecnun

Densidad de energía de deformación (II)

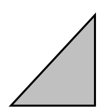
- Material lineal, sin temperatura:

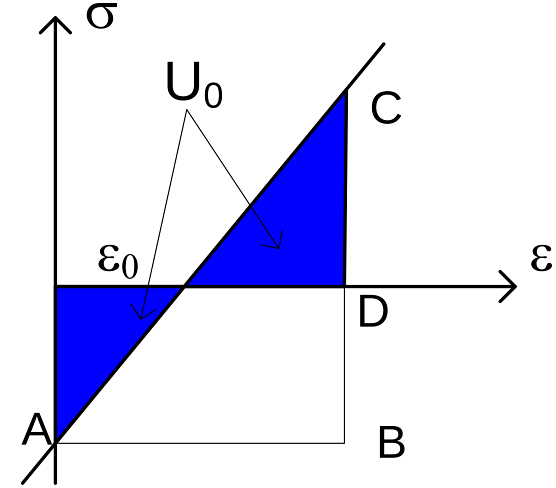
$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E\varepsilon d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon$$



- Material lineal, con temperatura

$$U_0 = \int_0^{\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \int_0^{\varepsilon} E(\varepsilon - \varepsilon_0) d\varepsilon = \frac{1}{2}E\varepsilon^2 - \varepsilon_0 E\varepsilon$$


ABC
OABD

Energía de deformación elástica (I)

- Energía **total** acumulada **en el sólido**: $U = \int_v U_0 dv$

- En una barra: $U_b = \int_v \left(\frac{1}{2} E \varepsilon^2 - \varepsilon_0 E \varepsilon \right) A dx$

- Sustituyendo $\varepsilon = \frac{\Delta_L}{L}$

$$U_b = \int_0^L \left(\frac{1}{2} \frac{EA}{L^2} \Delta_L^2 - \varepsilon_0 EA \frac{\Delta_L}{L} \right) dx$$

- Barra de propiedades uniformes:

$$U_b = \frac{1}{2} \frac{EA}{L} \Delta_L^2 - EA \varepsilon_0 \Delta_L = \frac{1}{2} k_A \Delta_L^2 - E A \alpha T \Delta_L$$

tecnun

Energía de deformación elástica (II)

- Barra de propiedades uniformes:

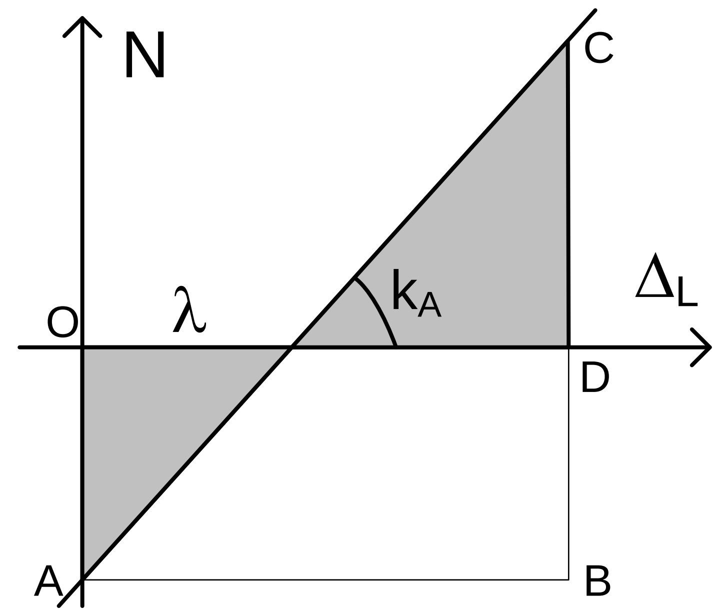
$$U_b = \frac{1}{2} k_A \Delta_L^2 - E\,A\,\alpha T\,\Delta_L$$

$$\Big\downarrow \times \frac{L}{L}$$

$$U_b = \frac{1}{2} k_A \Delta_L^2 - k_A\,\lambda\,\Delta_L$$

$\frac{1}{2} k_A \Delta_L^2 \rightarrow$ ABC

$k_A\,\lambda\,\Delta_L \rightarrow$ OABD



$$k_A = \frac{EA}{L} \qquad \lambda = \alpha\,T\,L$$

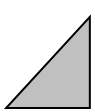
Energía de deformación elástica (III)

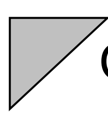
- En **función del esfuerzo axial N**: $$U_b = \int_v \left(\frac{1}{2} E \varepsilon^2 - \varepsilon_0 E \varepsilon \right) A\,dx$$

Sustituyendo $\varepsilon = \varepsilon_0 + \sigma / E = \varepsilon_0 + N / EA$

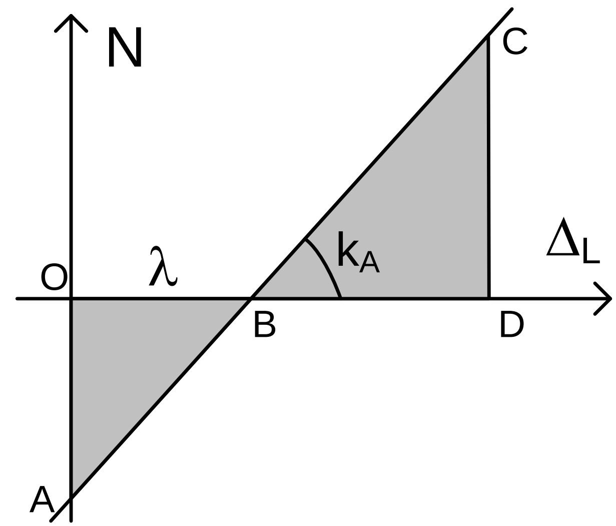
$$U_b = \frac{1}{2} \frac{L}{EA} N^2 - \frac{EA \varepsilon_0^2 L}{2}$$

$$\boxed{U_b = \frac{\rho N^2}{2} - \frac{E A \lambda^2}{2L}}$$


BDC


OAB

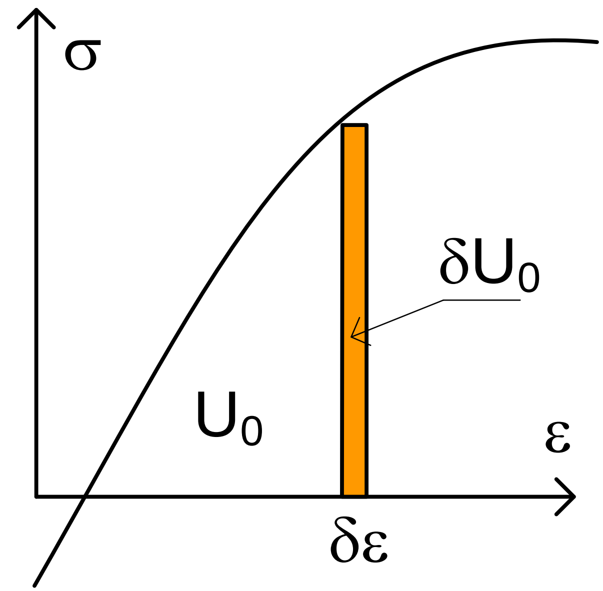
$$\rho = \frac{L}{EA}$$ Flexibilidad axial



Variación de la energía de deformación elástica

- Se aplica una variación virtual a los desplazamientos $\delta\Delta$, manteniendo fijas las fuerzas P (y por lo tanto las N y σ)
- La $\delta\Delta$ produce una variación de las deformaciones unitarias $\delta\varepsilon$
- La energía sufre una variación

$$\delta U_0 = \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta\varepsilon} \sigma d\varepsilon = \sigma \int_{\varepsilon}^{\varepsilon+\delta\varepsilon} d\varepsilon = \sigma\,\delta\varepsilon$$



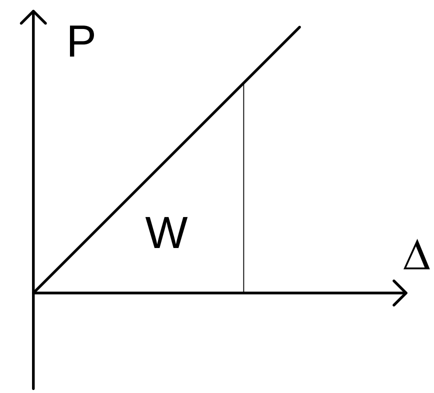
- Para una barra:

$$\delta U_b = \int_v \delta U_0 dv = \sigma\,\delta\varepsilon\,A\,L$$

- La celosía: $\delta U = \sum_{j=1,b} \sigma_j\, A_j\, \delta\varepsilon_j\, L_j$ Válido también en no lineal

Fórmula de Clapeyron

- Trabajo efectuado por las fuerzas exteriores en un sistema lineal.



$$W = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i$$

- **Conservación de la energía**:
  - Trabajo de las fuerzas = energía elástica acumulada

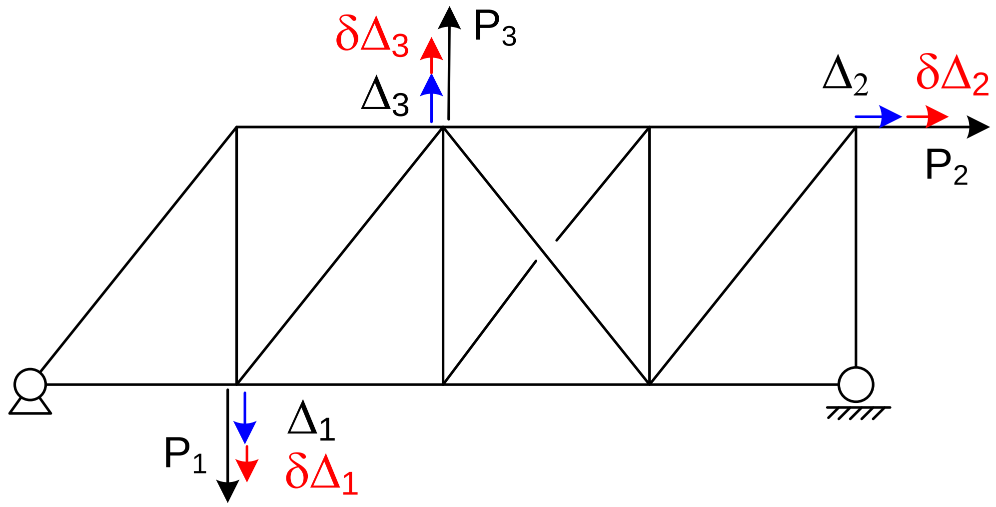
$$W = \frac{1}{2} \sum P_i \Delta_i = U$$

- Poco útil. Si conocemos U, podemos hallar **una** Δ.
- B. Clapeyron (Lamé, 1852)

Principio del Trabajo Virtual (1)

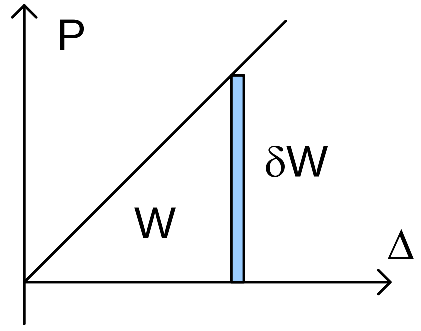
- Se aplica una variación virtual a las deformaciones $\delta\Delta$
- Manteniendo las fuerzas ext. P constantes: N y σ constantes

$$\delta W_i = \int_{\Delta_i}^{\Delta_i+\delta\Delta_i} P_i \, d\Delta_i = P_i \, \delta\Delta_i$$



- Trabajo virtual de todas las fuerzas exteriores:

$$\delta W = \sum_{i=1,n} P_i \, \delta\Delta_i$$

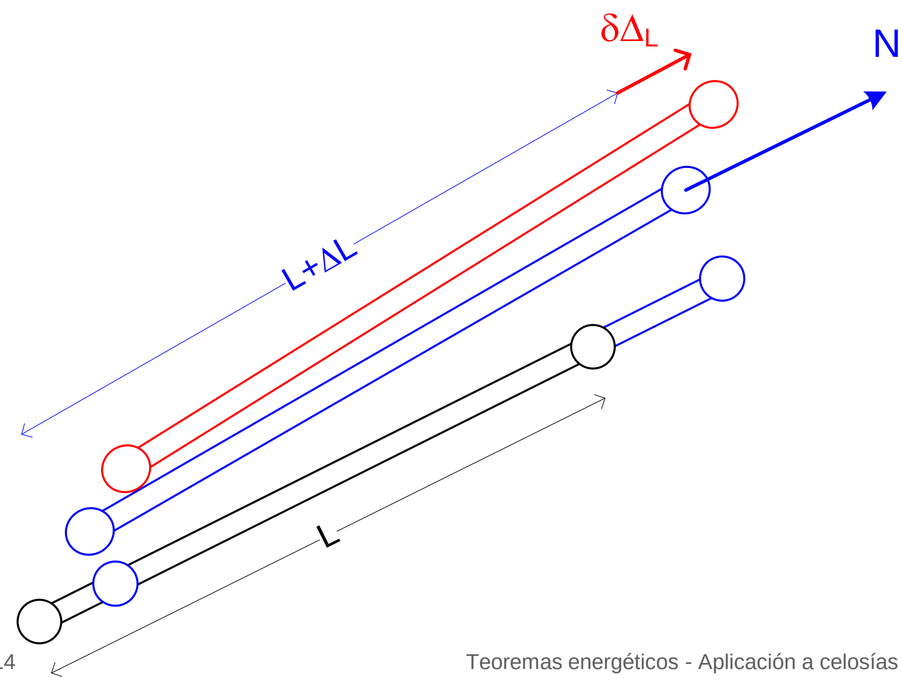


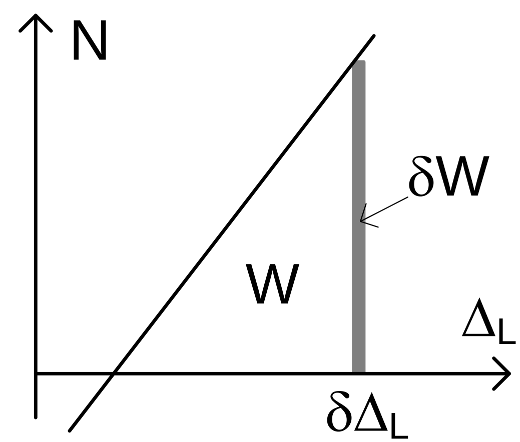
tecnun

Principio del Trabajo Virtual (2)

- La $\delta\Delta$ produce una variación en el alargamiento de las barras $\delta\Delta_L$
- Fuerzas exteriores constantes $\rightarrow$ se mantiene constante el axial N
- Trabajo Virtual efectuado por el **esfuerzo en una barra N**:

$$\delta W_j = \int_{\Delta_{Lj}}^{\Delta_{Lj}+\delta\Delta_{Lj}} N_j \, d\Delta_{Lj} = N_j \; \delta\Delta_{Lj}$$



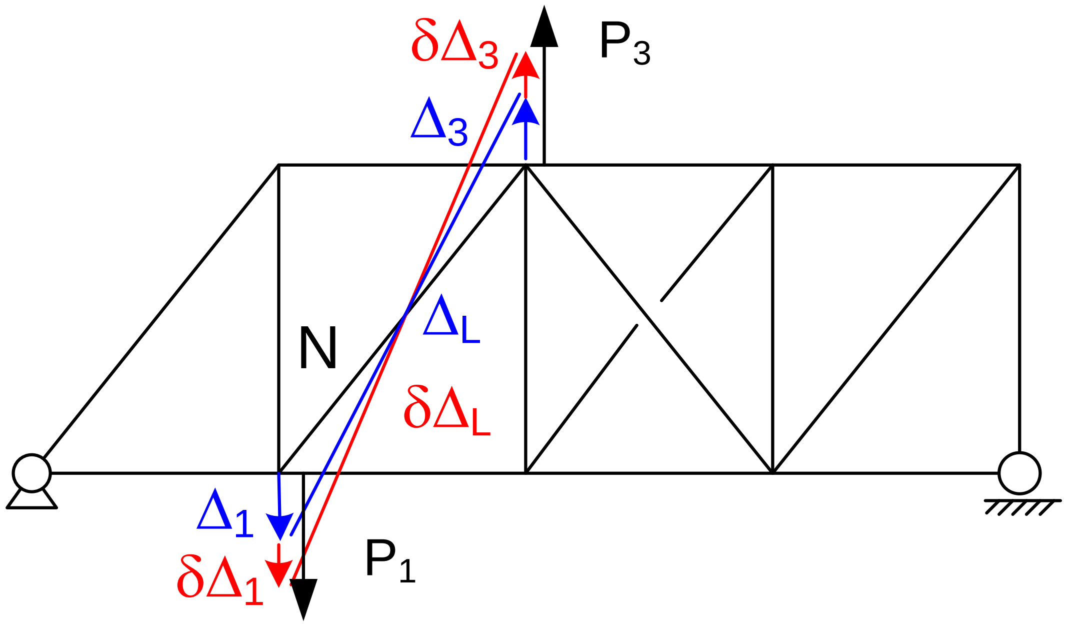


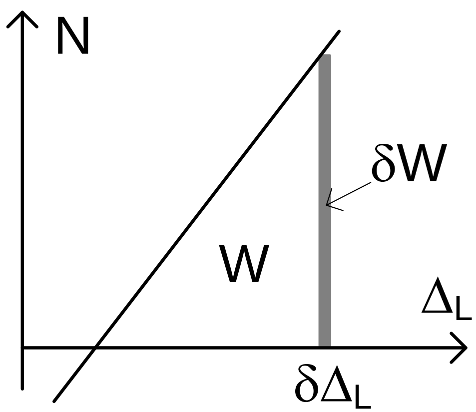
tecnun

Principio del Trabajo Virtual (3)

- Trabajo Virtual **de todos los esfuerzos interiores N**

$$\delta W^{N} = \sum_{j=1,b} N_{j}\, \delta \Delta_{Lj}$$





- Ambos trabajos son iguales (equilibrio): $\delta W = \delta W^{N}$

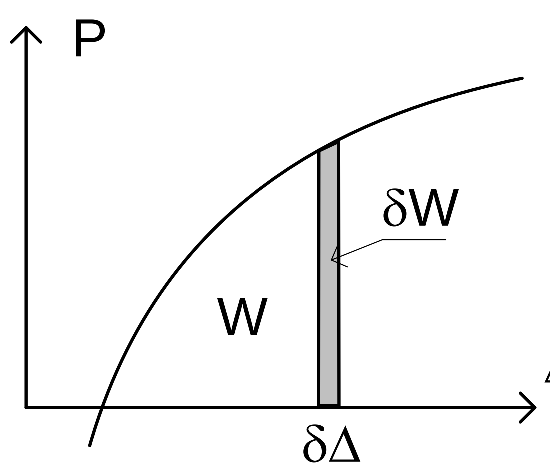
Principio del Trabajo Virtual (y 4)

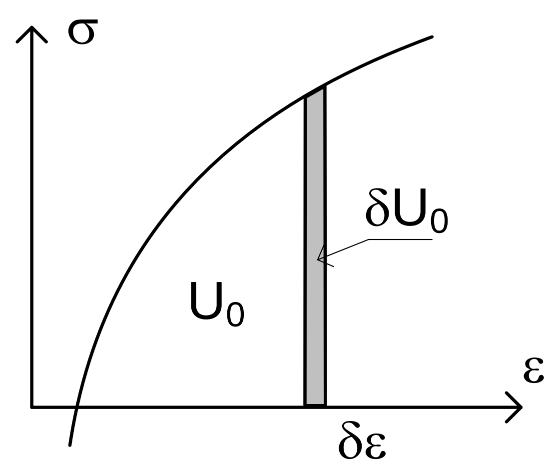
$$\delta W = \sum_i P_i \, \delta\Delta_i = \sum_j N_j \, \delta\Delta_{Lj} = \sum_j A_j \sigma_j \delta\varepsilon_j L_j$$

Variación de U

- Sustituyendo $N = \sigma A$ $\qquad \delta\Delta_L = \delta\varepsilon \ L$ $\qquad \varepsilon = \dfrac{\Delta_L}{L}$

$$\boxed{\delta W \equiv \sum_{i=1,n} P_i \, \delta\Delta_i = \sum_{j=1,b} N_j \, \delta\Delta_{Lj} = \delta U}$$

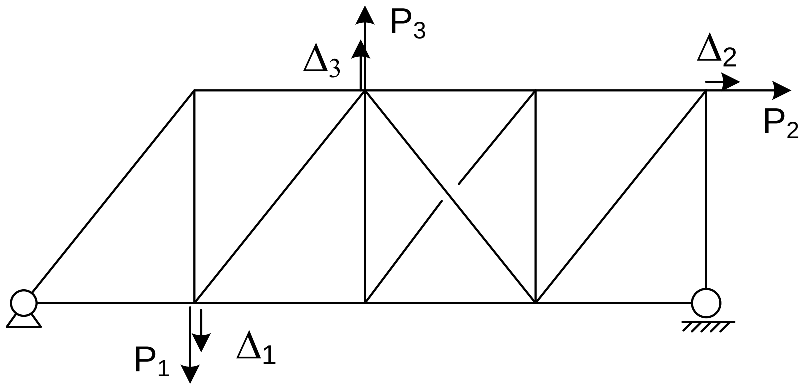


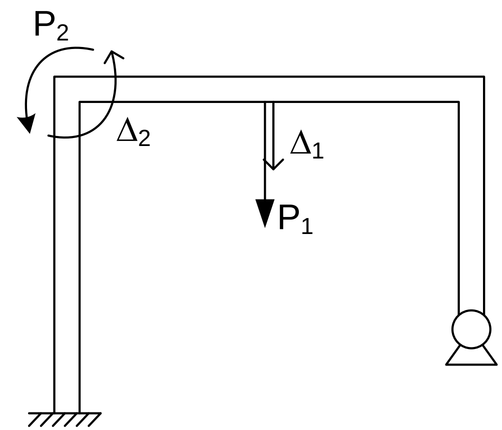


Condición necesaria.
También suficiente

Primer Teorema de Castigliano (1)

- Estructura elástica. Fuerzas y momentos puntuales P. Deformaciones y giros en la dirección de las cargas Δ.





- Energía elástica en función de las deformaciones $U(\Delta_i)$

- Principio del Trabajo Virtual: $$\delta W \equiv \sum_{i=1,n} P_i \, \delta\Delta_i = \delta U$$

- La variación de U es: $$\delta U(\Delta_i) = \sum_{i=1,n} \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta\Delta_i \right)$$

tecnun

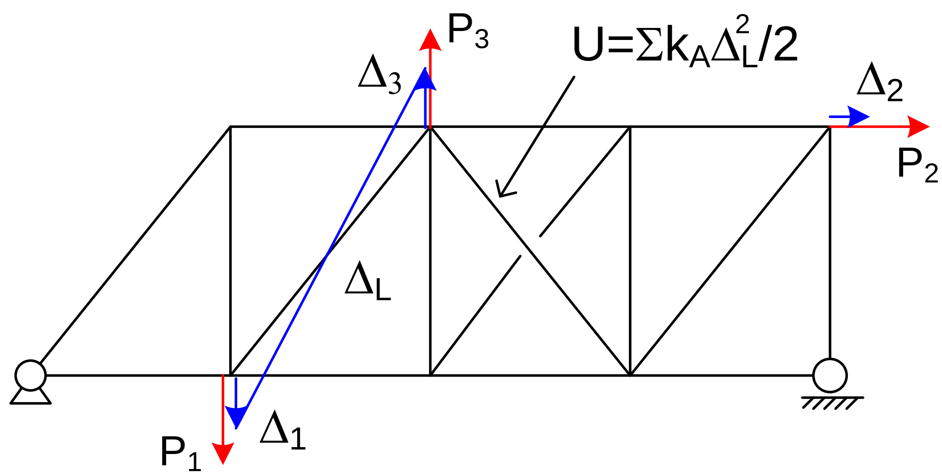
Primer Teorema de Castigliano (y 2)

- Por lo tanto: $$\delta W = \sum_{i=1,n} P_i \, \delta\Delta_i = \delta U = \sum_{i=1,n} \left(\frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \delta\Delta_i \right)$$

- La variación de las Δ_i es arbitraria:

$$\boxed{P_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i} \qquad i = 1, n}$$

$$U_b = k_A \Delta_L^2 / 2 - k_A \lambda \Delta_L$$



- Primer Teorema de C. A. Castigliano (1879)
- Fundamento del **método de rigidez**.
- Requiere conocer $U(\Delta_i)$. Relacionar Δ con Δ_L

1847-1884

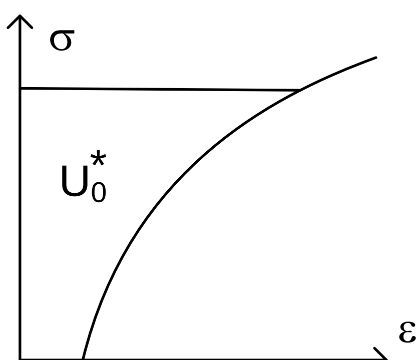
tecnun

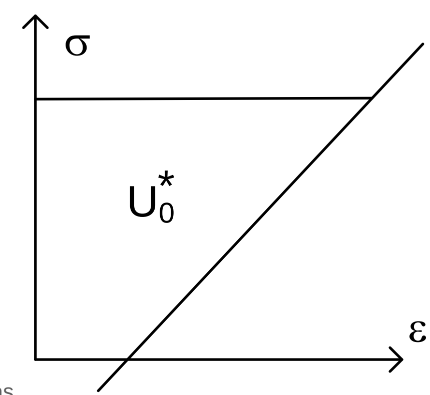
Densidad de energía de deformación complementaria (I)

- Se define como:

$$U_0^*(\sigma) \equiv \int_0^{\sigma} \varepsilon \, d\sigma$$

- Con la condición de que sea función sólo del estado final de tensiones (independiente del camino). Es decir $U_0^*(\sigma)$
- Existe si el **material es elástico** (lineal o no)
- **Energía** elástica complementaria **por unidad de volumen**
- Representa el trabajo complementario (por unidad de volumen) efectuado por las deformaciones al tensionarse el sólido.



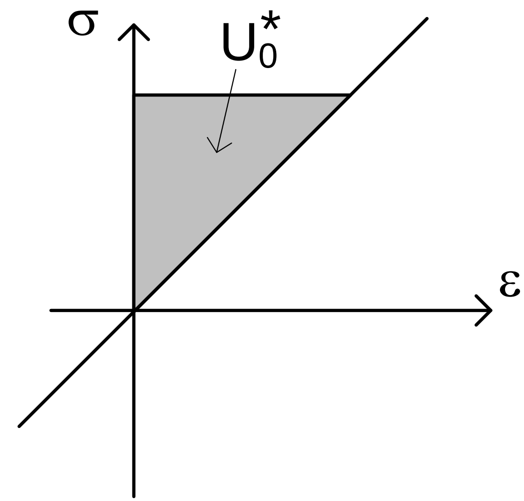


Densidad de energía de deformación complementaria (II)

- Material lineal, sin temperaturas:

$$\sigma = E\,\varepsilon$$

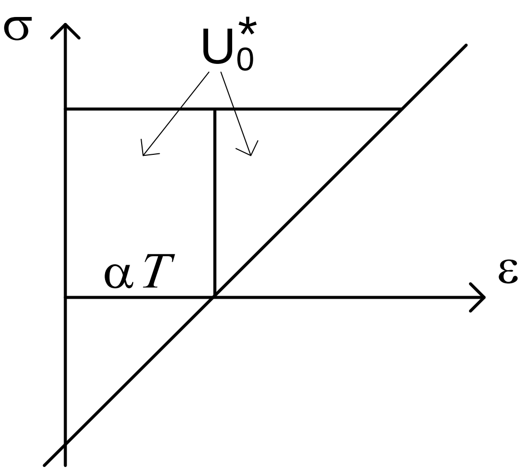
$$U_0^* = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma = \int_0^\sigma \frac{\sigma}{E} d\varepsilon = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{1}{2}\sigma\varepsilon = U_0$$



- Material lineal, con temperatura

$$\sigma = E\,\varepsilon - E\,\varepsilon_0$$

$$U_0^* = \int_0^\sigma \varepsilon\, d\sigma = \int_0^\sigma \left(\frac{\sigma}{E} + \varepsilon_0\right) d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \varepsilon_0\sigma$$



Energía de deformación complementaria (I)

- Energía **complementaria total** acumulada **en el sólido**:

$$U^* = \int_v U_0^* dv$$

- En una barra

$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$U_b^* = \int_L \left(\frac{\sigma^2}{2E} + \varepsilon_0 \sigma \right) A dx = \int_L \left(\frac{N^2}{2EA^2} + \varepsilon_0 \frac{N}{A} \right) A dx$$

$$U_b^* = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx + \int_L \alpha T N dx$$

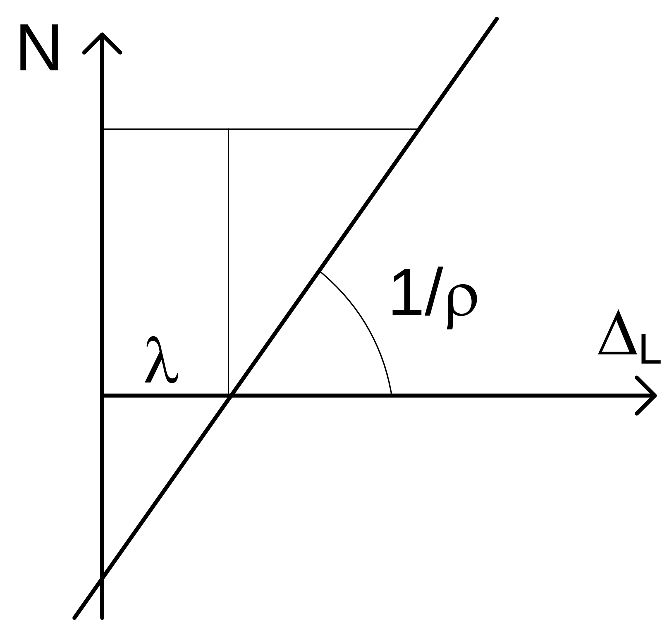
Energía de deformación complementaria (II)

- Propiedades uniformes: $\int_L dx = L$

$$\boxed{U_b^* = \frac{N^2\,L}{2\,E\,A} + \alpha\,T\,L\,N = \frac{N^2\,\rho}{2} + \lambda\,N}$$

Flexibilidad axial $\rho = \frac{L}{EA}$

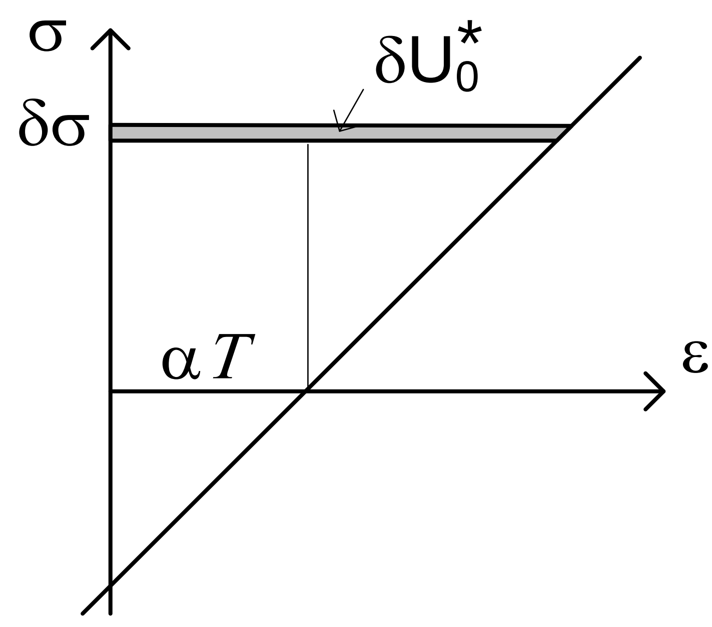
Alargamiento inicial $\lambda = \alpha\,T\,L$



Variación de la energía de deformación complementaria

- Se aplica una **variación virtual a las fuerzas** δP, manteniendo fijos los desplazamientos Δ (y por lo tanto las ε)
- La δP produce una variación de los esfuerzos δN y de las tensiones $\delta\sigma$
- La energía complementaria sufre una variación:

$$\delta U_0^* = \int_{\sigma}^{\sigma+\delta\sigma} \varepsilon d\sigma = \varepsilon \int_{\sigma}^{\sigma+\delta\sigma} d\sigma = \varepsilon\delta\sigma$$



- En una barra:

$$\delta U_b^* = \int_b \delta U_0^* dv = \int_L \varepsilon\delta\sigma\, A dx$$

$$\delta U_b^* = \varepsilon \;\; \delta\sigma \;\; A \;\; L$$

Para toda la celosía (propiedades uniformes)

- Energía complementaria:

$$U^* = \sum_{j=1,b} \frac{N_j^2 \, L_j}{2\, E_j \, A_j} + \sum_{j=1,b} \alpha_j \, T_j \, L_j \, N_j = \sum_{j=1,b} \frac{N_j^2 \, \rho_j}{2} + \sum_{j=1,b} \lambda_j \, N_j$$

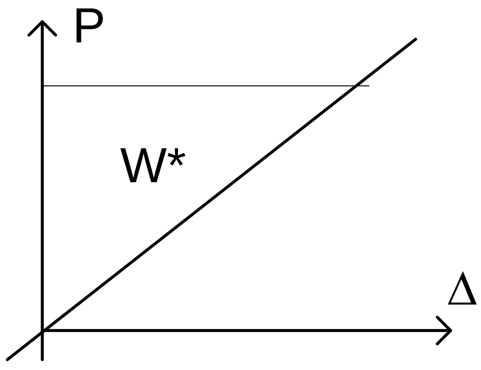
Flexibilidad axial $\rho_j = \dfrac{L_j}{E_j A_j}$ Alargamiento inicial $\lambda_j = \alpha_j \, T_j \, L_j$

- Variación de la energía complementaria:

$$\delta U^* = \sum_{j=1,b} \delta U_j^* = \sum_{j=1,b} \varepsilon_j \, \delta\sigma_j A_j \, L_j$$

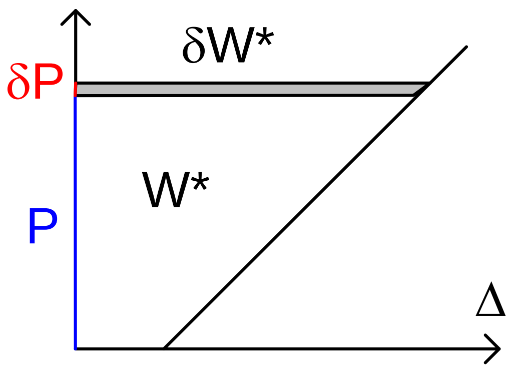
Principio del Trabajo Virtual Complementario (0)

- Definición previa:
  - Trabajo complementario de una fuerza:



$$W^* = \int_0^P \Delta \, dP = \frac{1}{2} \Delta \; P$$

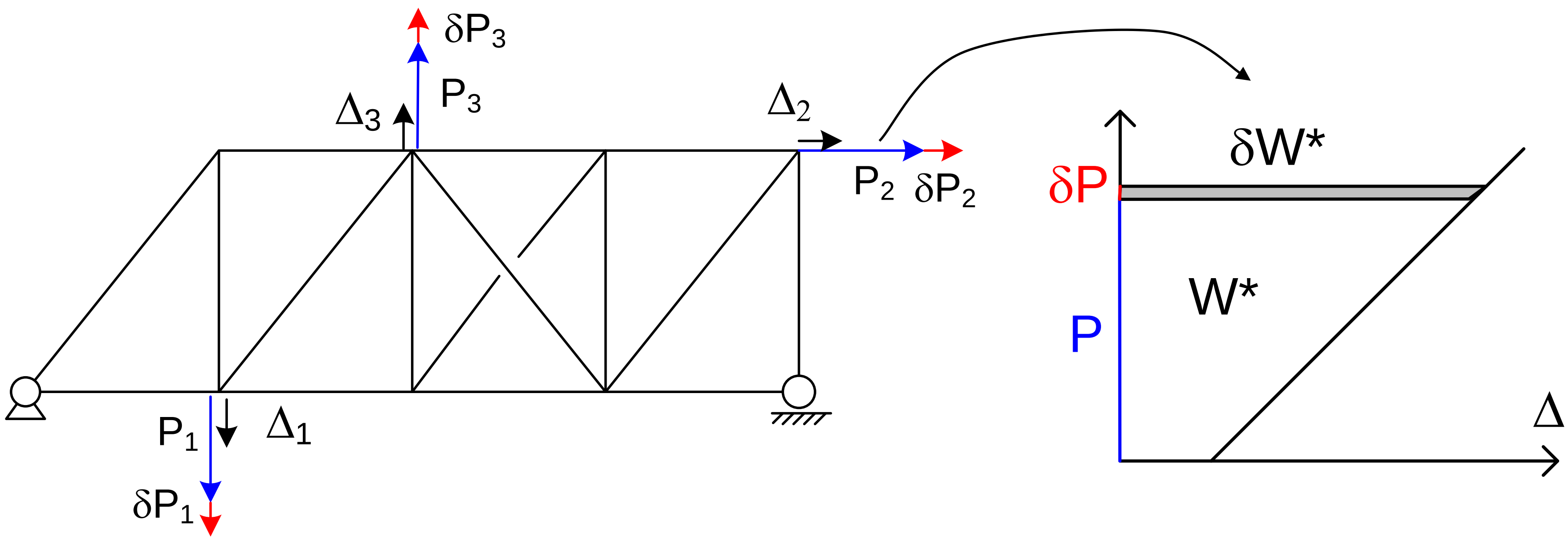
- Trabajo complementario virtual de una fuerza:
  - Se varía la fuerza δP
  - Deformación Δ constante



$$\delta W^* = \int_P^{P+\delta P} \Delta dP = \Delta \; \delta P$$

Principio del Trabajo Virtual Complementario (1)

- Se aplica una variación virtual de las fuerzas δP. Produce δN y $\delta\sigma$
- Manteniendo las deformaciones Δ constantes: ε constantes



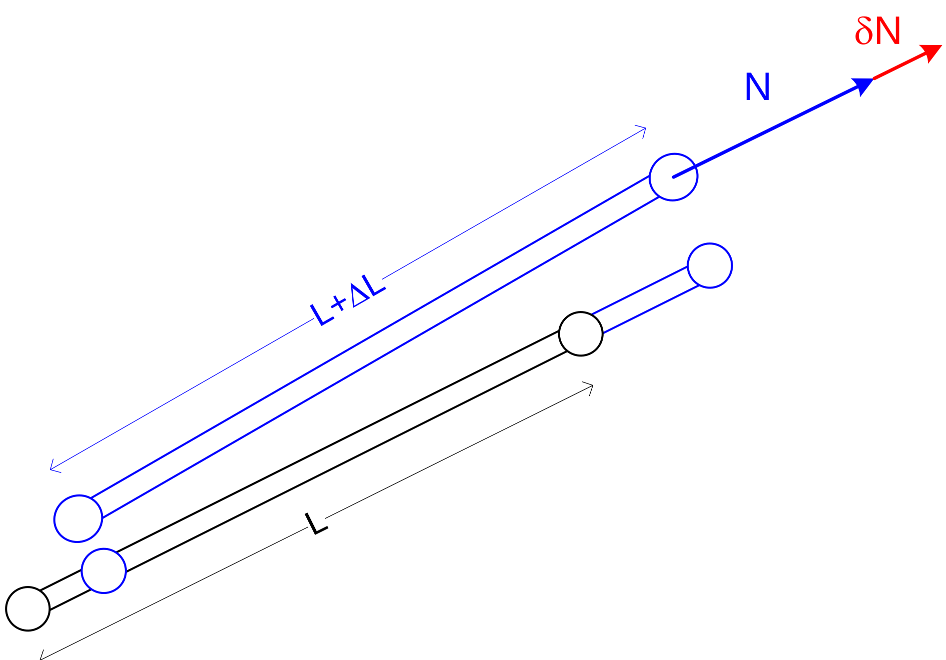
- Trabajo virtual complementario de las fuerzas exteriores P:

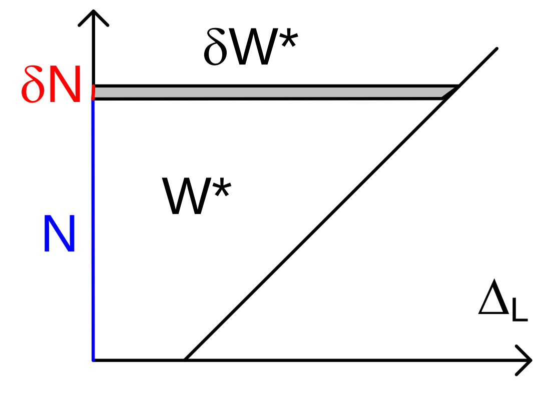
$$\delta W^* = \sum_{i=1,n} \Delta_i \, \delta P_i$$

Principio del Trabajo Virtual Complementario (2)

- La δP produce una variación en el axial de las barras δN
- Se mantienen constante la deformación y el alargamiento Δ_L
- Trabajo virtual comp. efectuado por el esfuerzo en una barra

$$\delta W_j^{N*} = \int_{N_j}^{N_j+\delta N_j} \Delta_{Lj}\, dN_j = \Delta_{Lj} \int_{N_j}^{N_j+\delta N_j} dN_j = \Delta_{Lj}\, \delta N_j$$

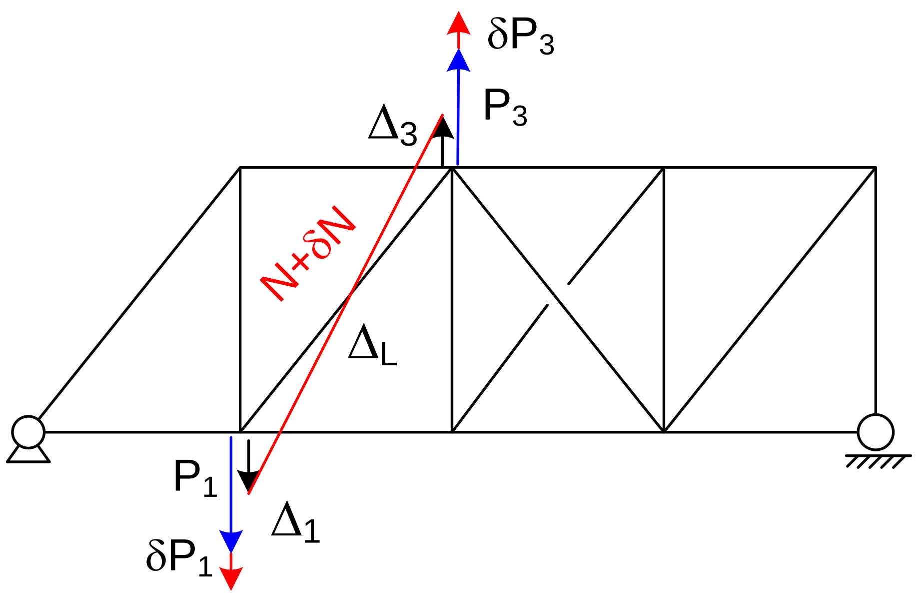


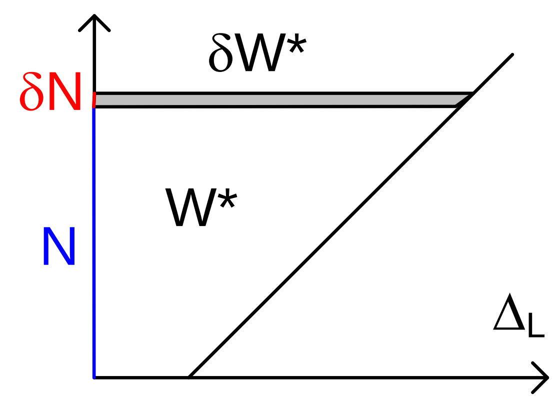


Principio del Trabajo Virtual Complementario (3)

- Trabajo virtual compl. de todos los esfuerzos interiores N

$$\delta W^{N*} = \sum_{j=1,b} \Delta_{Lj} \, \delta N_j$$





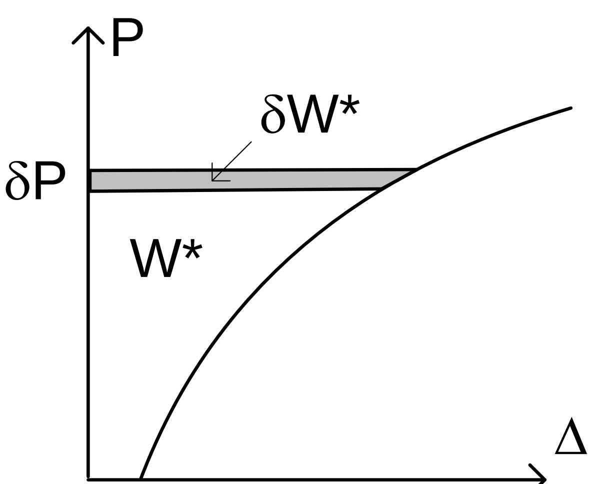
- Ambos trabajos virtuales son iguales (equilibrio) $\delta W^{*} = \delta W^{N*}$

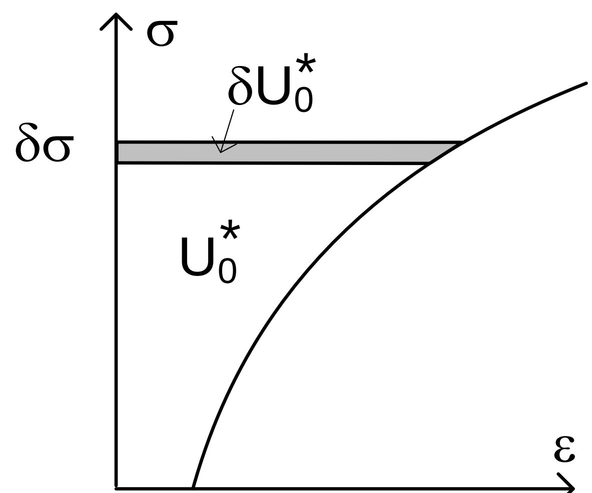
Principio del Trabajo Virtual Complementario (y 4)

$$\delta W^* = \sum_i P_i \Delta_i = \delta W^{N*} = \sum_j \Delta_{Lj}\, \delta N_j = \sum_j \varepsilon_j L_j A_j\, \delta\sigma_j$$

- Sustituyendo $\Delta_L = \varepsilon\, L$ $\quad\delta N = \delta\sigma\, A$ $\quad$ Variación de U*

$$\boxed{\delta W^* \equiv \sum_{i=1,n} \Delta_i\, \delta P_i = \sum_{j=1,b} \varepsilon_j L_j A_j\, \delta\sigma_j = \delta U^*}$$

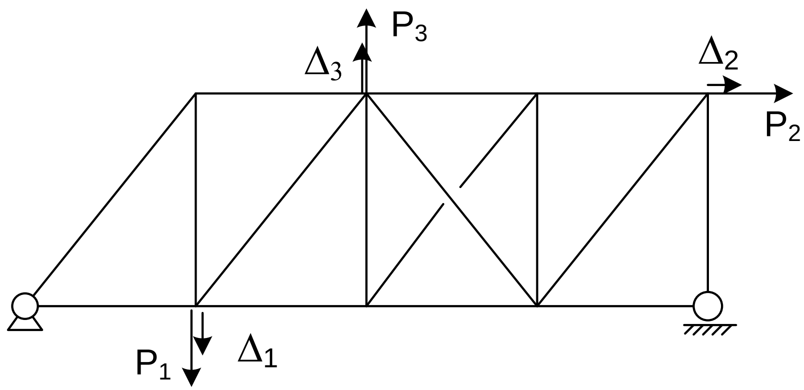


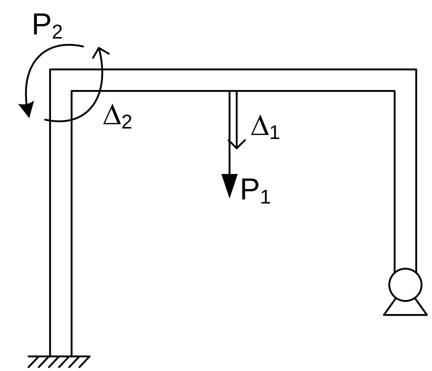


Condición necesaria.
También suficiente

Segundo Teorema de Castigliano (1)

- Estructura elástica. Fuerzas y momentos puntuales P. Deformaciones y giros en la dirección de las cargas Δ.





- Energía elástica complementaria en función de las fuerzas

$$U^*(P_i)$$

- Principio del Trabajo Virtual Compl.: $\delta W^* \equiv \sum_{i=1,n} \Delta_i \, \delta P_i = \delta U^*$

- La variación de U* es: $\delta U^* = \sum_{i=1,n} \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i} \delta P_i \right)$

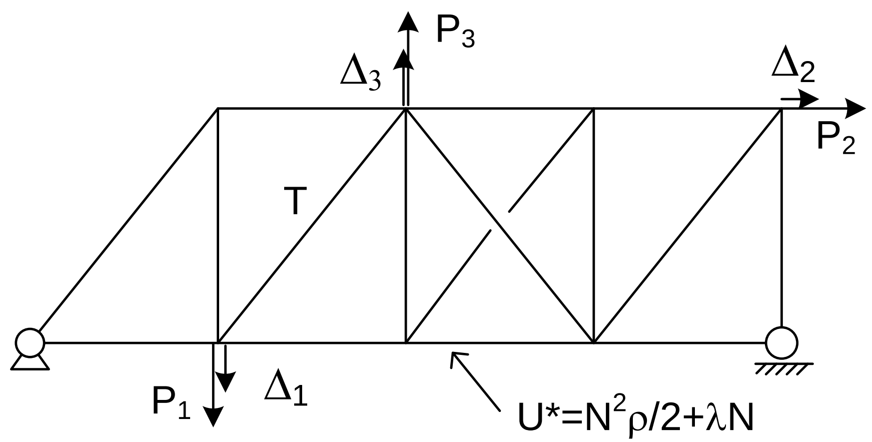
Segundo Teorema de Castigliano (2)

- Por lo tanto: $$\delta W^* \equiv \sum_{i=1,n} \Delta_i \, \delta P_i = \sum_{i=1,n} \left(\frac{\partial U^*}{\partial P_i} \delta P_i \right)$$

- La variación de las P_i es arbitraria, luego

$$\boxed{\Delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \qquad i = 1, n}$$

$$U_b^* = N^2 \rho / 2 + \lambda N$$



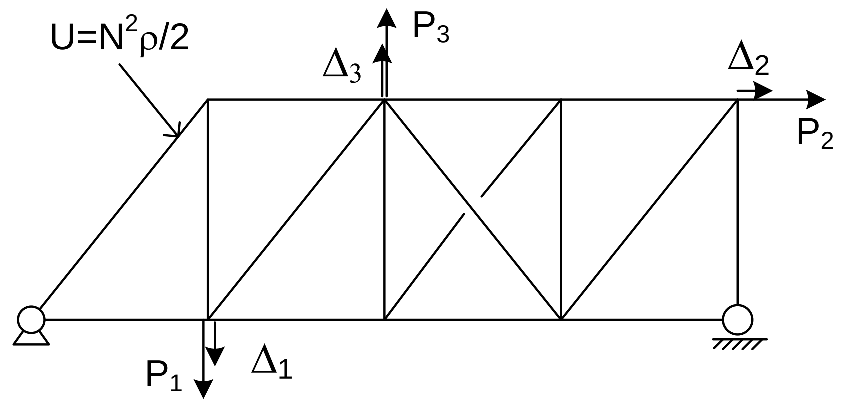
- **Teorema de Crotti (1888) - Engesser (1889)**
- Fundamento de: **método de flexibilidad** y cálculo de Δ_i
- Requiere conocer $U(P_i)$ → Relacionar N_j con P_i

tecnun

Segundo Teorema de Castigliano (Por fin)

- **Si no hay temperaturas** $U \equiv U^*$

$$\boxed{\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i} \qquad i = 1, n}$$

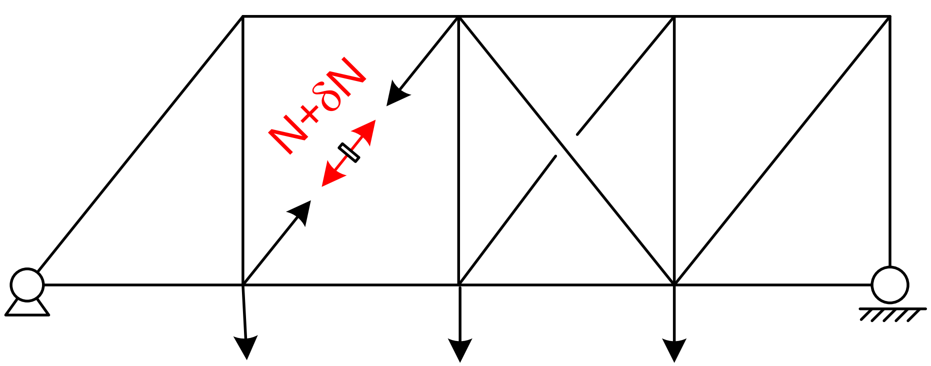


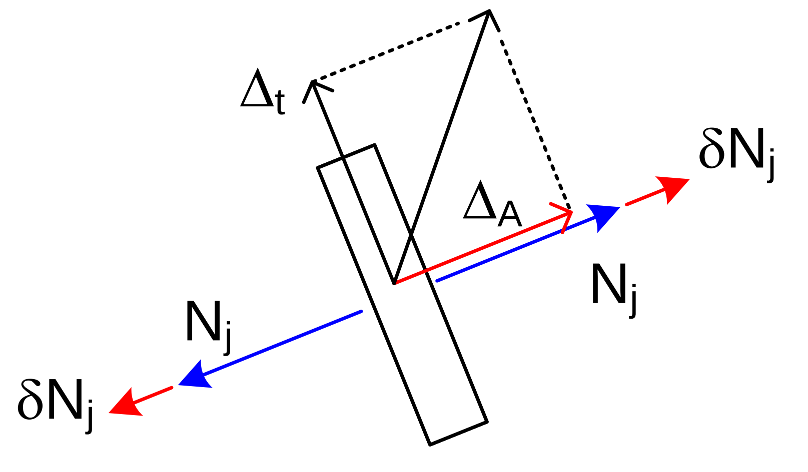
$$U_b = N^2 \rho / 2$$

- Segundo Teorema de C. A. Castigliano (1879)
- Fundamento del **método de flexibilidad**.
- Permite el cálculo de Δ_i
- Requiere conocer $U(P_i)$ → Relacionar N_j con P_i

2º Teorema de Engesser (I)

- Celosía elástica. Se aplica **variación de las cargas**:
  - Fuerzas exteriores *P*: todas constantes
  - Esfuerzos axiales N: todos constantes salvo una de las barras (j)
  - Esfuerzo N_j. Se aplica variación δN_j
    - Dos fuerzas iguales y de sentido contrario. Cumple el equilibrio (!)
  - Deformación: en la dirección del esfuerzo Δ_A, perpendicular al esfuerzo Δ_t.

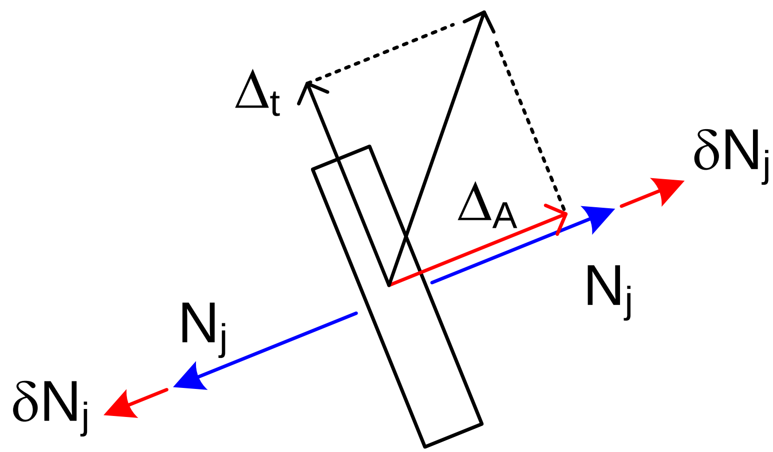




2º Teorema de Engesser (II)

- Trabajo virtual complementario. Sólo debido a la Δ_A

$$\delta W^* = (\delta N_j)\,\Delta_A + (-\delta N_j)\,\Delta_A = 0$$



- P. T. V. complementario:

$$\delta W^* = 0 = \delta U^*$$

- Si somos capaces de expresar U* en función de la N_j (fácil)

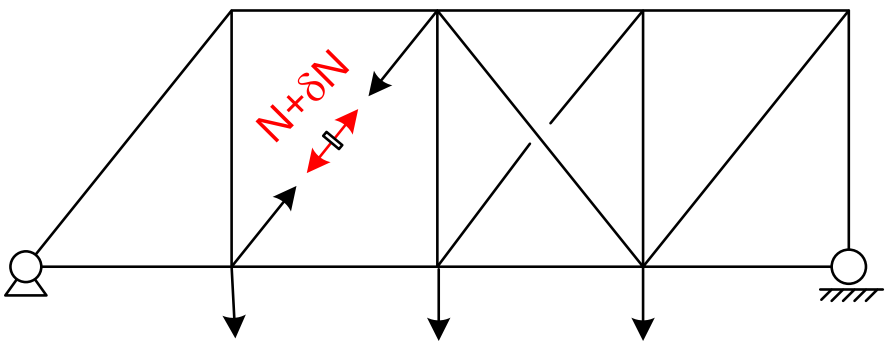
$$\delta U^* = \frac{\partial U^*}{\partial N_j}\,\delta N_j = 0$$

tecnun

2º Teorema de Engesser (III)

- La δN_j es cualquiera:

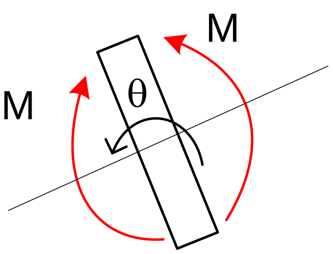
$$\boxed{\frac{\partial U^*}{\partial N_j} = 0 \qquad \forall N_j}$$

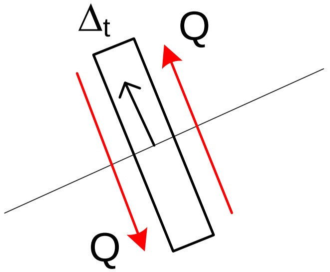


- Segundo Teorema de F. Engesser
  - **Muy útil** para establecer condiciones de compatibilidad de deformaciones
- Generalización:
  - Válido con **cualquier esfuerzo interior** (Flector, Cortante)

1848-1931

$$\frac{\partial U^*}{\partial M} = 0 \qquad \frac{\partial U^*}{\partial Q} = 0$$



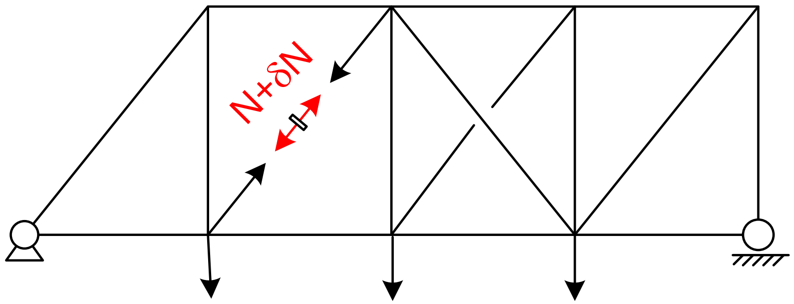


tecnun

Teorema de Ménabréa

- Si no hay temperaturas:

$$\boxed{\frac{\partial U}{\partial N_j} = 0 \qquad \forall N_j}$$

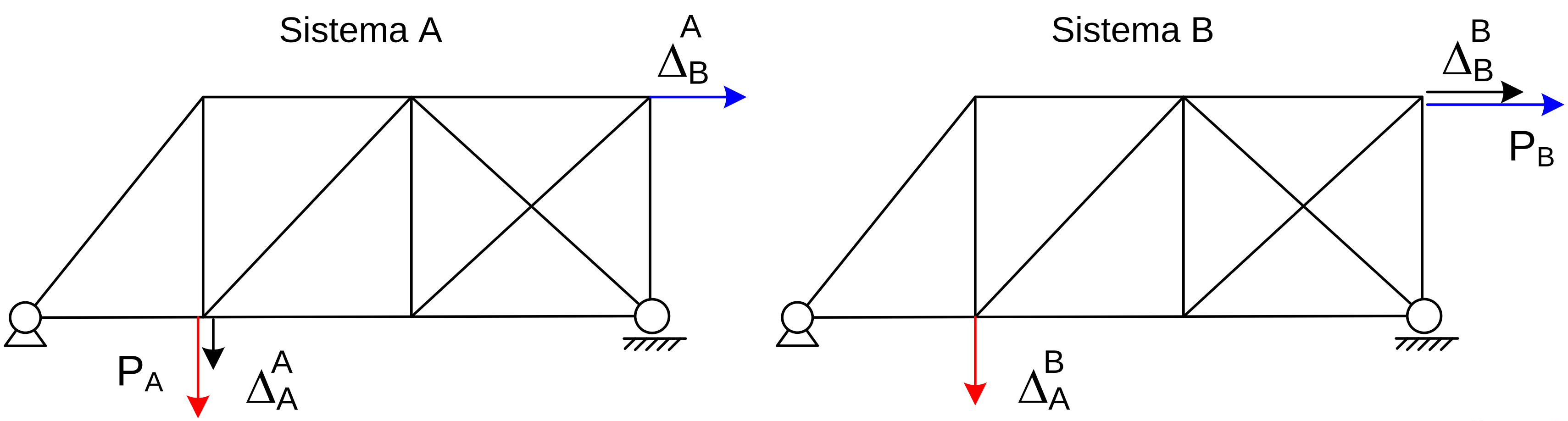


- Enunciado en 1858 para celosías hiperestáticas por L. F. Ménabréa

1809-1896

Teorema del trabajo recíproco (Betty – Rayleigh)

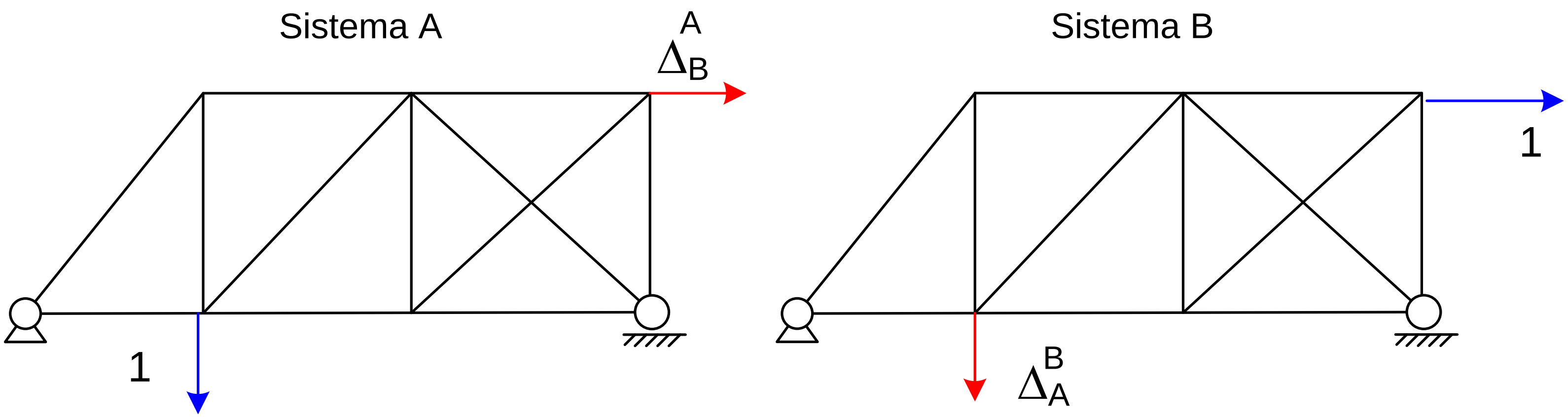
- Sistema A + Sistema B $$W^{A,B}=\frac{1}{2}P_A\Delta_A^A+\frac{1}{2}P_B\Delta_B^B+P_A\Delta_A^B$$
- Sistema B + Sistema A $$W^{B,A}=\frac{1}{2}P_B\Delta_B^B+\frac{1}{2}P_A\Delta_A^A+P_B\Delta_B^A$$
- Trabajos iguales: $$P_A\Delta_A^B=P_B\Delta_B^A$$

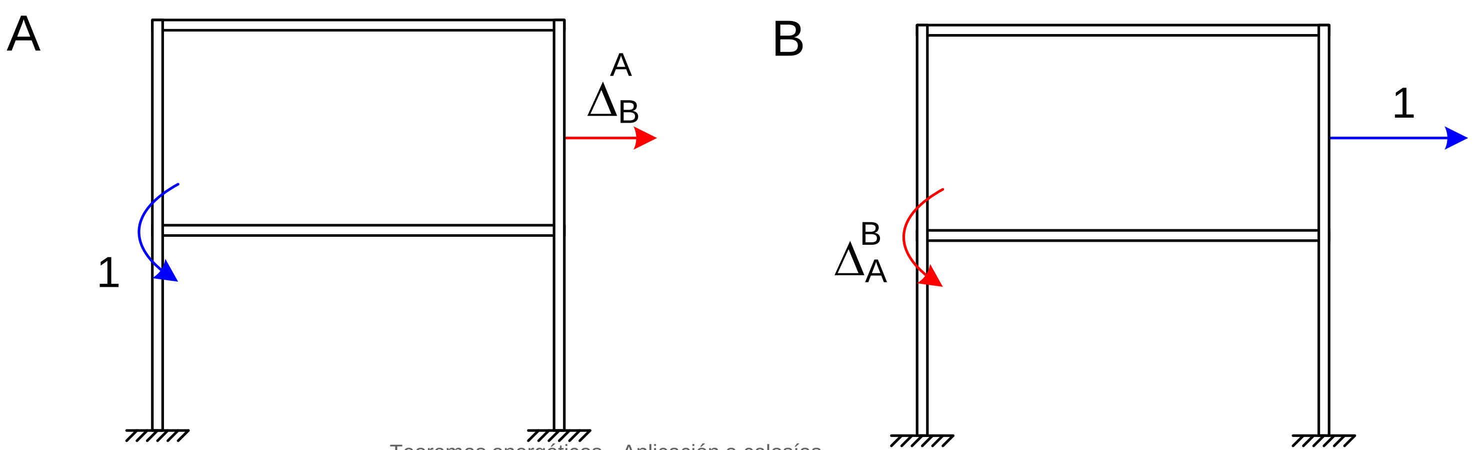


Teorema de la deformación recíproca (Maxwell - 1864)

- Sistemas A y B con **fuerzas unidad**

$$\Delta_A^B = \Delta_B^A$$





Resumen

Teoremas directos

Energía $U_b = \frac{1}{2} k_A \Delta_L^2 - k_A \lambda \Delta_L$

P.T.V: $\delta W = \delta U$

1º Castigliano $P_i = \frac{\partial U}{\partial \Delta_i}$

Método de rigidez

Teoremas complementarios

Energía compl. $U_b^* = \frac{1}{2} \rho N^2 + \lambda N$

P.T.V compl.: $\delta W^* = \delta U^*$

Crotti - Engesser $\Delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i}$

2º Castigliano $\Delta_i = \frac{\partial U}{\partial P_i}$

2º Engesser $\frac{\partial U^*}{\partial X} = 0$

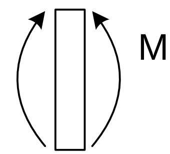
$X \equiv \; N, M, Q$

Método de flexibilidad

Expresiones de la energía elástica complementaria

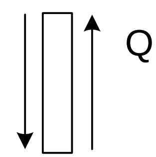
- Axial N: $$U_N^* = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx + \int_L \alpha T_m N dx$$ $$U_b^* = \frac{\rho N^2}{2} + \lambda N$$

- Flector M: $$U_M^* = \int_L \frac{M^2}{2EI} dx - \int_L \alpha T_g M dx$$



$$T_g = \frac{T_S - T_I}{h}$$

- Cortante Q: $$U_Q^* = \int_L \frac{Q^2}{2GA'} dx$$



- Torsor M_T: $$U_T^* = \int_L \frac{M_T^2}{2GJ} dx$$

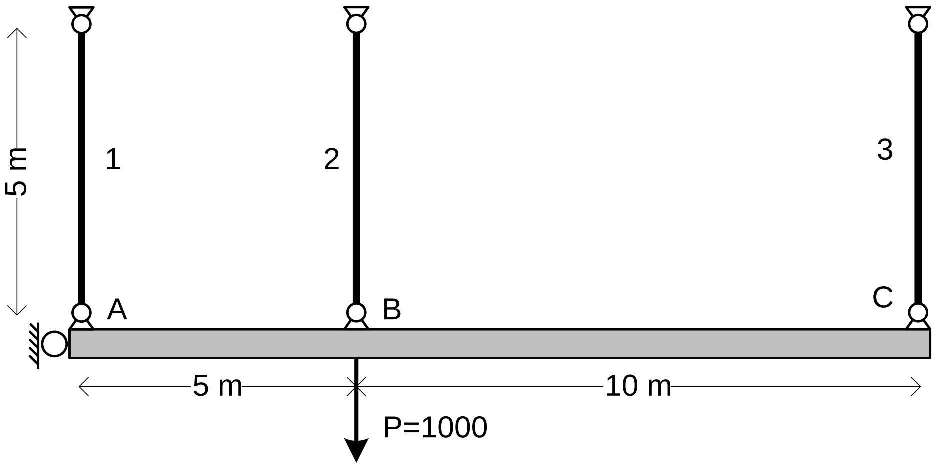
tecnun
Universidad
de Navarra
Escuela de Ingenieros

Teoremas energéticos fundamentales del análisis estructural

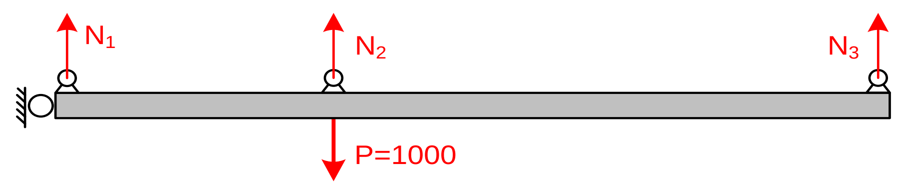
Ejemplos

1. Estructura hiperestática. Método de flexibilidad (1)

ABC rígida.
Barras 1,2,3 iguales. L=5 m
h=1



Equilibrio de la barra ABC:
2 ecuaciones, 3 incógnitas



$$\sum F_Y = 0 \qquad N_1 + N_2 + N_3 = P$$

$$\sum M_A = 0 \qquad 15N_3 + 5N_2 = 5P$$

Consideramos N_2 redundante

Despejamos N_1 y N_3 en función de N_2

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \frac{2}{3}P - \frac{2}{3}N_2 \\ N_3 &= \frac{1}{3}P - \frac{1}{3}N_2 \end{aligned}\right\} \quad \text{(Estática)}$$

1. Estructura hiperestática. Método de flexibilidad (2)

Ecuación de compatibilidad extra (2º T. Engesser)

$$\frac{\partial U^*}{\partial N_2} = 0 \qquad U^* = \sum \frac{1}{2} \frac{L}{EA} N_j^2$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial N_2} = \frac{L}{EA} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial N_2} + \frac{L}{EA} N_2 \frac{\partial N_2}{\partial N_2} + \frac{L}{EA} N_3 \frac{\partial N_3}{\partial N_2} = 0$$

$$\frac{N_1 L}{EA}\left(-\frac{2}{3}\right) + \frac{N_2 L}{EA}\, 1 + \frac{N_3 L}{EA}\left(-\frac{1}{3}\right) = 0$$

Se elimina *L/EA*

$$-\frac{2}{3} N_1 + N_2 - \frac{1}{3} N_3 = 0$$

Ecuación de compatibilidad extra

1. Estructura hiperestática. Método de flexibilidad (3)

2 ecuaciones de la estática + la ecuación extra: 3 ecs. y 3 incógnitas

(Estática) $$\begin{cases} N_1 = \dfrac{2}{3}P - \dfrac{2}{3}N_2 \\ N_3 = \dfrac{1}{3}P - \dfrac{1}{3}N_2 \end{cases}$$

Sustituyendo se obtiene N_2

$$-\frac{2}{3}N_1 + N_2 - \frac{1}{3}N_3 = 0$$

Resolviendo:

$$N_1 = 0.429\,P$$

$$N_2 = 0.357\,P$$

$$N_3 = 0.214\,P$$

Alargamientos:

$$\Delta_{Lj} = N_j L / EA$$

$$\Delta_1 = 2.145\,P / EA$$

$$\Delta_2 = 1.785\,P / EA$$

$$\Delta_3 = 1.070\,P / EA$$

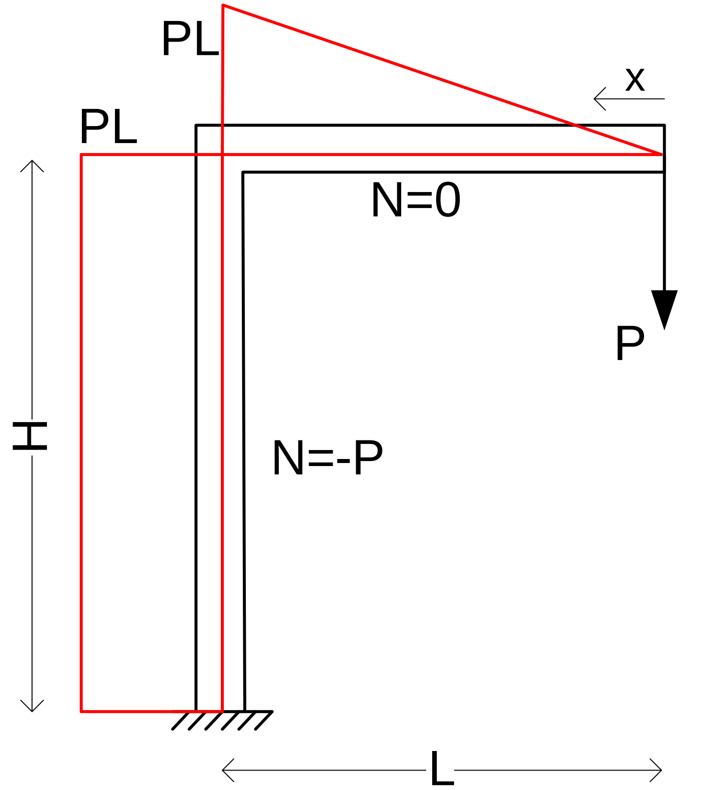
2. Pórtico sencillo isostático. Energía

$$U = \int \frac{N^2}{2EA}dx + \int \frac{M^2}{2EI}dx$$

$$U = \int_0^H \frac{(-P)^2}{2EA}dx + \int_0^L \frac{(Px)^2}{2EI}dx + \int_0^H \frac{(PL)^2}{2EI}dx$$

$$U = \frac{P^2 H}{2EA} + \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{P^2 L^2 H}{2EI}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$



H=400 cm L=500 cm IPE 300 A=53.8 I=8360

$$U = \left(1.8\cdot 10^{-6} + 1.2\cdot 10^{-3} + 3\cdot 10^{-3}\right) P^2$$

Términos:
1. Compresión poste
2. Flexión viga
3. Flexión poste

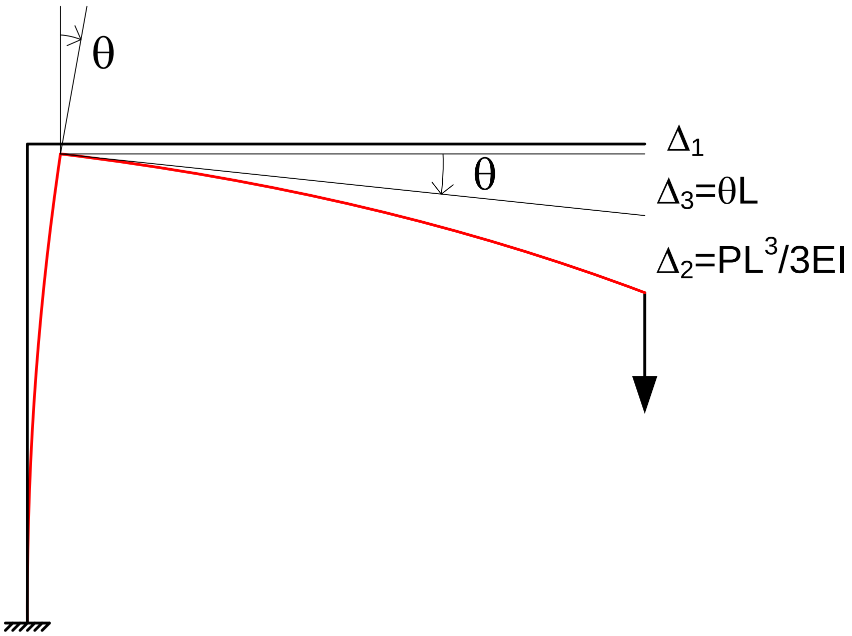
2. Pórtico sencillo isostático. Deformación vertical

2º Teorema de Castigliano $$\Delta_Y = \frac{\partial U}{\partial P}$$

Derivada es inmediata, pues U(P) $$U = \frac{P^2 H}{2EA} + \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{P^2 L^2 H}{2EI}$$

$$\Delta_Y = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PH}{EA} + \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL^2 H}{EI}$$

1. Compresión poste 2. Flexión viga 3. Flexión poste

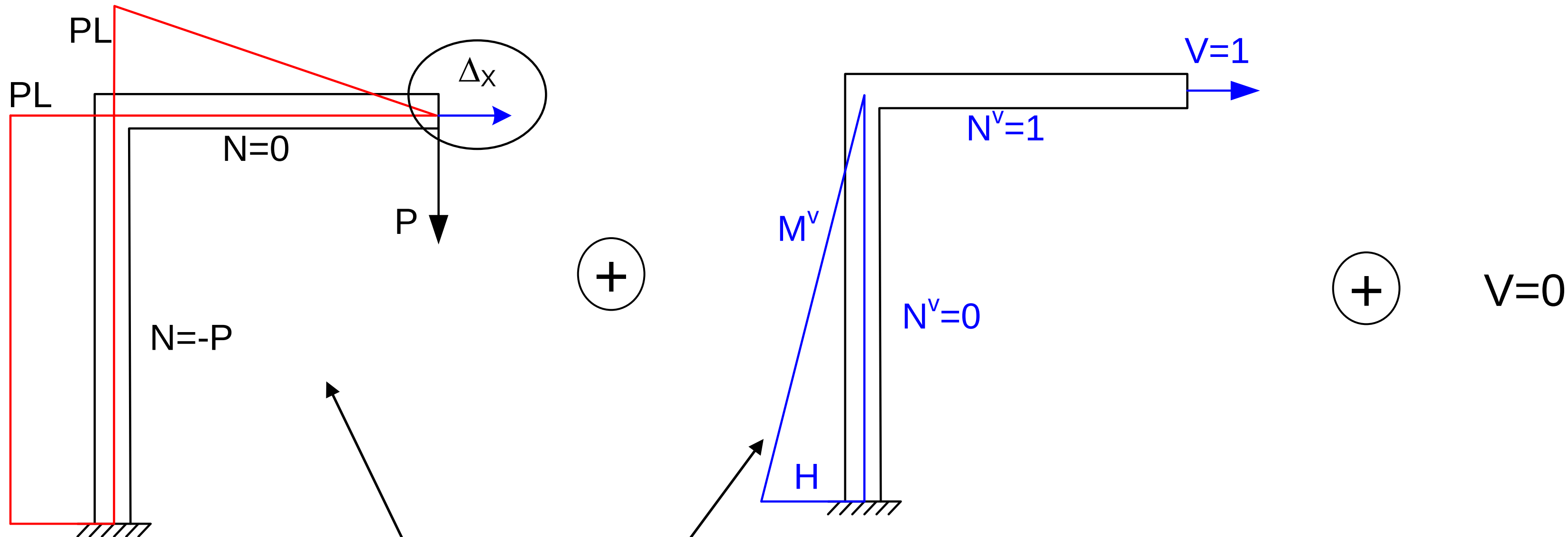


Comprobación. Trabajo de la fuerza exterior

$$W = \frac{1}{2} P \Delta_Y = \frac{P^2 H}{2EA} + \frac{P^2 L^3}{6EI} + \frac{P^2 L^2 H}{2EI} \equiv U$$

tecnun

3. Pórtico sencillo isostático. Deformación horizontal. Planteamiento



Caso real

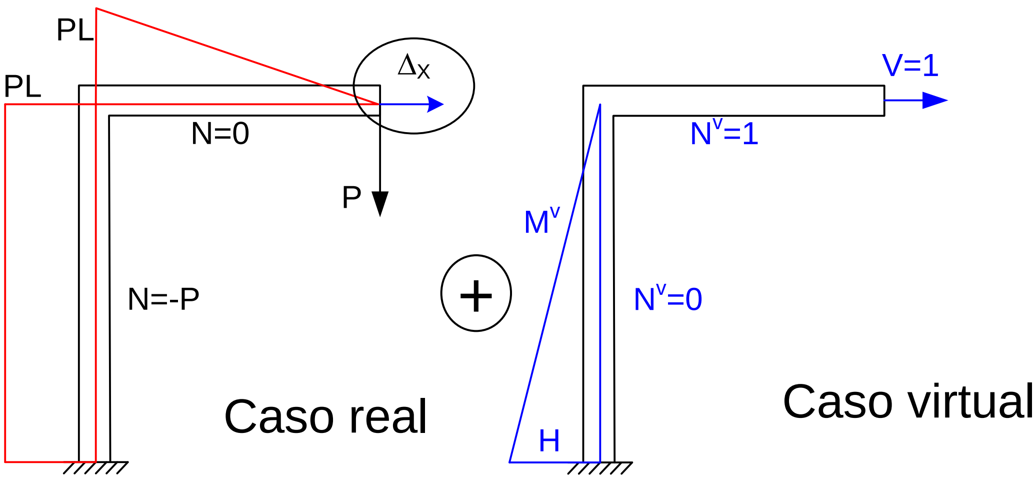
Caso virtual unitario

$$\bar{M} = M + M^V\, V \qquad \bar{N} = N + N^V\, V$$

$$\bar{U} = \int \frac{\bar{N}^2}{2EA}\, dx + \int \frac{\bar{M}^2}{2EI}\, dx$$

$$\boxed{\Delta_X = \left(\frac{\partial\, \bar{U}}{\partial\, V} \right)_{V=0}}$$

3. Pórtico sencillo isostático. Deformación horizontal. Desarrollo.



$$\bar{M} = M + M^V\, V$$

$$\bar{N} = N + N^V\, V$$

$$\bar{U} = \int \frac{\bar{N}^2}{2EA}\,dx + \int \frac{\bar{M}^2}{2EI}\,dx$$

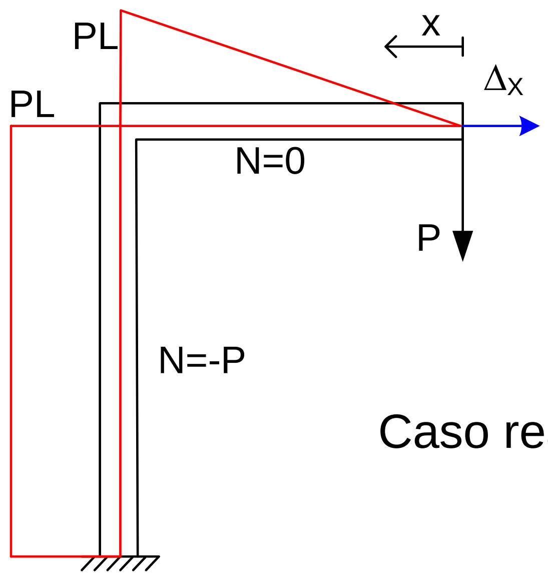
$$\Delta_X = \left(\frac{\partial \bar{U}}{\partial V}\right)_{V=0} = \left(\int \frac{2\bar{N}}{2EA}\frac{\partial \bar{N}}{\partial V}\,dx + \int \frac{2\bar{M}}{2EI}\frac{\partial \bar{M}}{\partial V}\,dx\right)_{V=0}$$

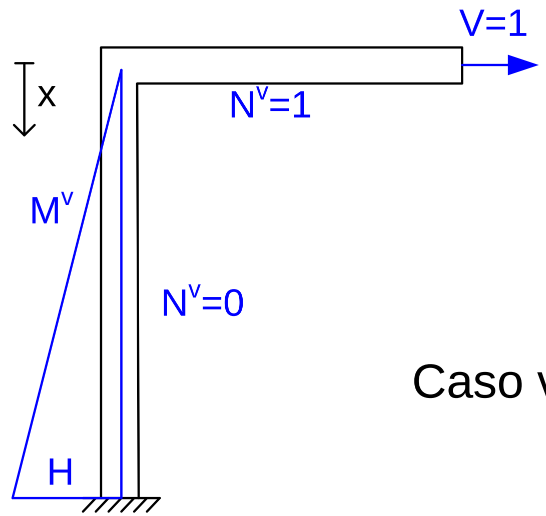
$$\Delta_X = \int \frac{\bar{N}_{V=0}}{EA} N^V\,dx + \int \frac{\bar{M}_{V=0}}{EI} M^V\,dx$$

$$\boxed{\Delta_X = \int \frac{N}{EA} N^V\,dx + \int \frac{M}{EI} M^V\,dx}$$

tecnun

3. Pórtico sencillo isostático. Deformación horizontal. Cálculo





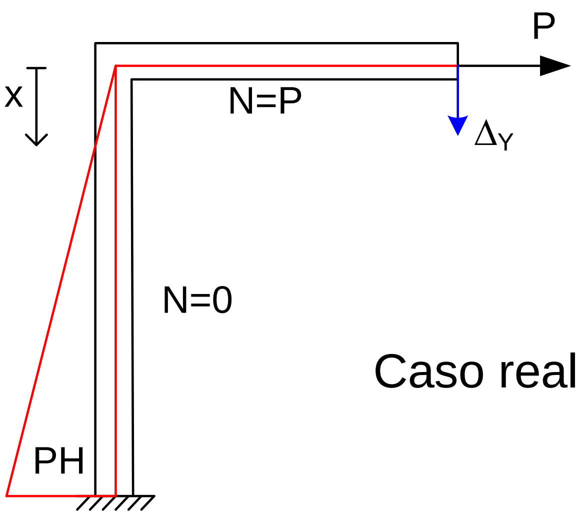
$$\Delta_X = \int \frac{N}{EA} N^V dx + \int \frac{M}{EI} M^V dx$$

$$\Delta_X = \int \frac{(0)}{EA}(1)dx + \int \frac{(-P)}{EA}(0)dx + \int \frac{(Px)}{EI}(0)dx + \int_0^H \frac{(PL)}{EI}(x)dx$$

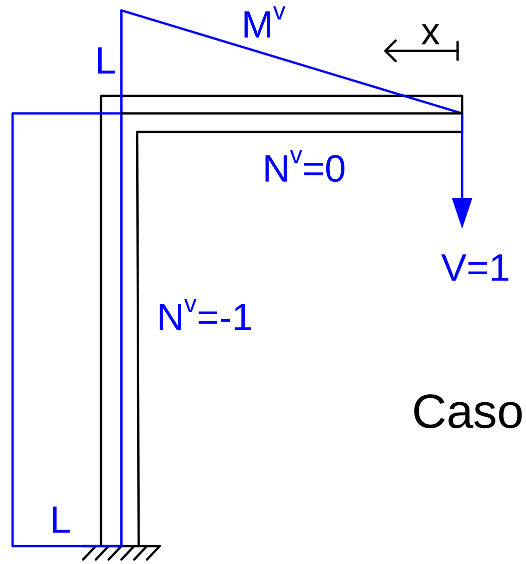
$$\Delta_X = \frac{PL}{EI}\frac{H^2}{2}$$

tecnun

4. Pórtico isostático. Fuerza horizontal. Deformación vertical



Caso real



Caso virtual unitario

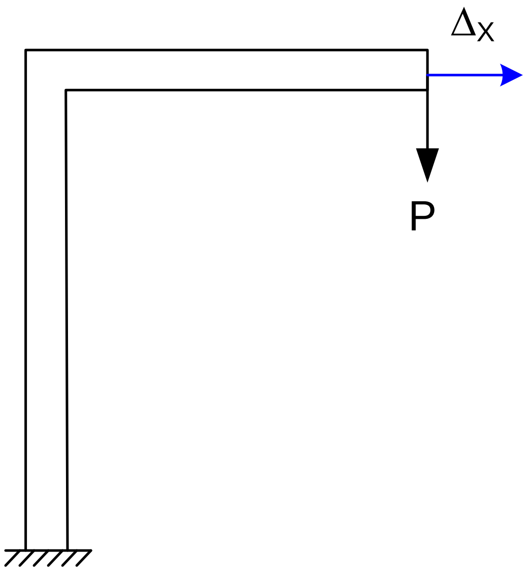
$$\Delta_Y = \int \frac{N}{EA} N^V dx + \int \frac{M}{EI} M^V dx$$

$$\Delta_Y = \int \frac{(0)}{EA}(-1)dx + \int \frac{(P)}{EA}(0)dx + \int_0^H \frac{(Px)}{EI}(L)dx$$

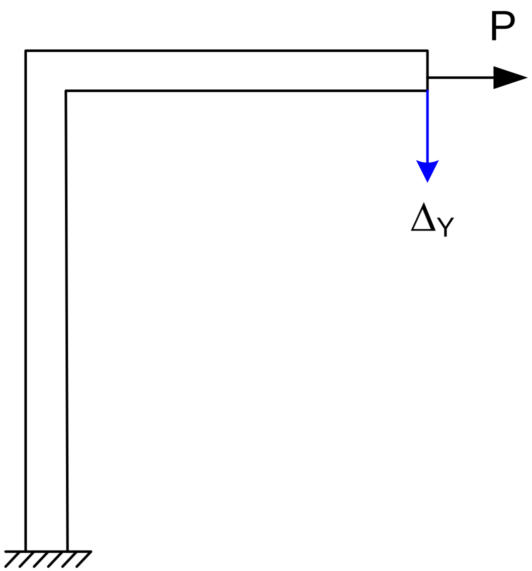
$$\Delta_Y = \frac{PH}{EI}\frac{L^2}{2}$$

Igual a la Δ_X si la fuerza es P_Y

Pórtico isostático. Fuerza - Deformación recíprocas



Fuerza vertical
Deformación horizontal



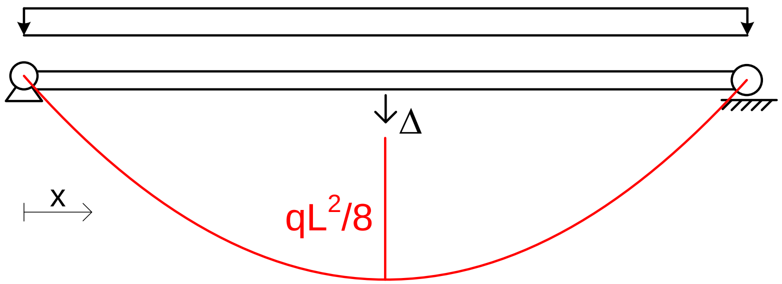
Fuerza horizontal
Deformación vertical

$$\Delta_X^{P_Y} \equiv \Delta_Y^{P_X} = \frac{PHL^2}{2EI}$$

No es casualidad. Consecuencia del Teorema de reciprocidad de deformaciones de Maxwell

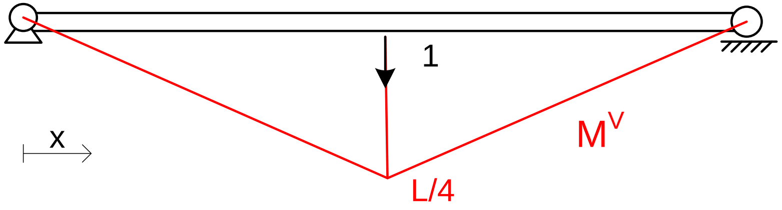
5. Viga apoyada. Carga uniforme. Deformación en el centro

Momento flector:



$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

Caso V



$$M^V = \frac{x}{2} \qquad 0 < x < L/2$$

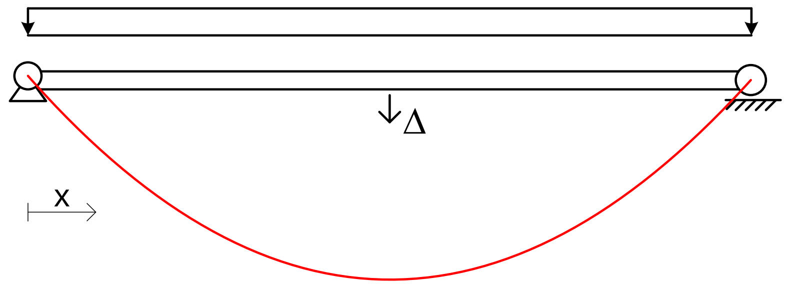
$$\Delta_Y = \int_0^L \frac{M}{EI} M^V dx = 2\int_0^{L/2} \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right) \frac{1}{EI} \left(\frac{x}{2} \right) dx = \frac{5}{384} \frac{qL^4}{EI}$$

Tablas: $$\Delta_Y = \int_0^L \frac{M}{EI} M^V dx = \frac{1}{EI} \frac{L^2 + (L/2)(L/2)}{3L} \left(\frac{qL^2}{8} \right) \left(\frac{L}{4} \right) = \frac{5\,qL^4}{384\,EI}$$

tecnun

5. Viga apoyada. Carga uniforme. Energía

Momento flector:



$$M = \frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2}$$

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \int_0^L \left(\frac{qLx}{2} - \frac{qx^2}{2} \right)^2 \frac{1}{2EI} dx = \frac{q^2 L^5}{240EI}$$

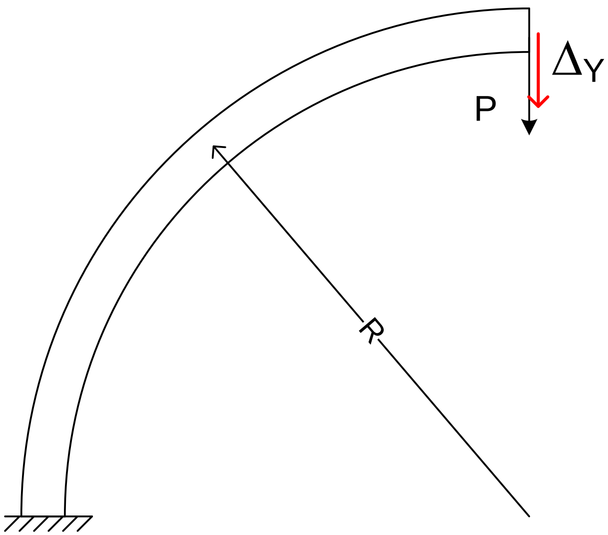
L=500 m q=12 kg/cm IPE 160 E=2.1 10^6 kg/cm^2 I=869 cm^4

M_{max}= 375000 cm kg σ_{max}=3452 kg/cm^2 σ_E=3600 kg/cm^2

U = 10275 (cm-kg) = 1008 (J) = 241 (cal)

Atención: Flecha 5 cm (L/100) muy alta

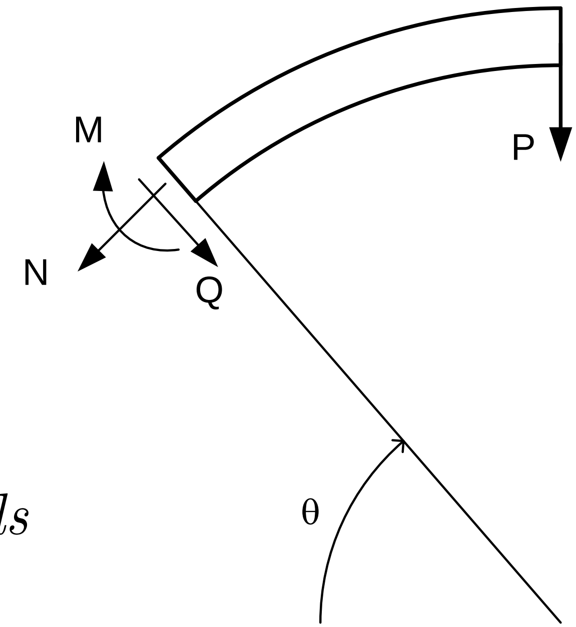
6. Pieza curva. Energía. Deformación vertical



$$M = -PR\cos\theta$$

$$N = -P\cos\theta$$

$$Q = -P\,\mathrm{sen}\,\theta$$



$$U = \int \frac{N^2}{2EA}ds + \int \frac{M^2}{2EI}ds$$

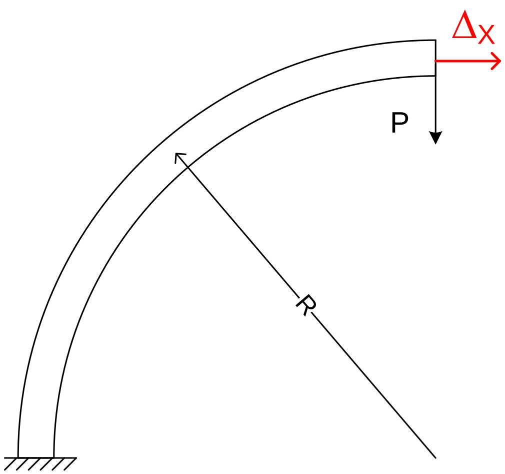
$$R >> h$$

$$U = \int_0^{\pi/2} \frac{P^2\cos^2\theta}{2EA}Rd\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{P^2R^2\cos^2\theta}{2EI}Rd\theta$$

$$U = \frac{P^2R\pi}{8EA} + \frac{P^2R^3\pi}{8EI}$$

Deformación: $$\Delta_Y = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PR\pi}{4EA} + \frac{PR^3\pi}{4EI}$$

6. Pieza curva. Energía. Deformación horizontal

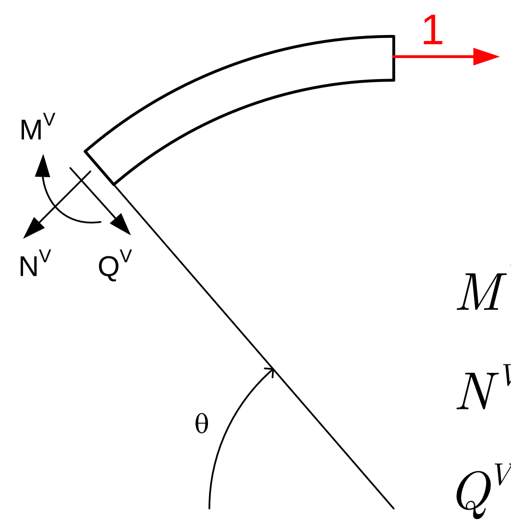


Caso real

$$M = -PR\cos\theta$$

$$N = -P\cos\theta$$

$$Q = -P\,\mathrm{sen}\,\theta$$



Caso V

$$M^V = -(R - R\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$N^V = \mathrm{sen}\,\theta$$

$$Q^V = -\cos\theta$$

$$\Delta_X = \int \frac{N}{EA} N^V ds + \int \frac{M}{EI} M^V ds$$

$$\Delta_X = \int_0^{\pi/2} \frac{(-P\cos\theta)}{EA}\,\mathrm{sen}\,\theta\, R d\theta + \int_0^{\pi/2} \frac{(-PR\cos\theta)}{EI}(-R + R\,\mathrm{sen}\,\theta) R d\theta$$

$$\Delta_X = -\frac{PR}{2EA} + \frac{PR^3}{2EI}$$

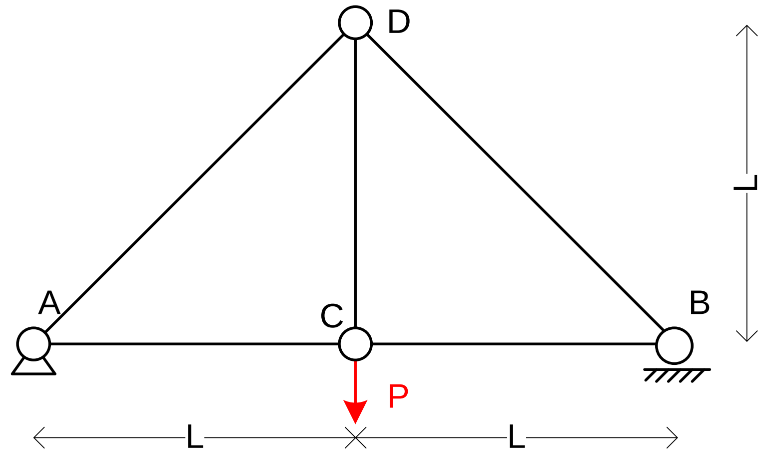
tecnun

tecnun Universidad de Navarra Escuela de Ingenieros

Aplicación a celosías planas de los teoremas energéticos del análisis estructural

Ejemplos

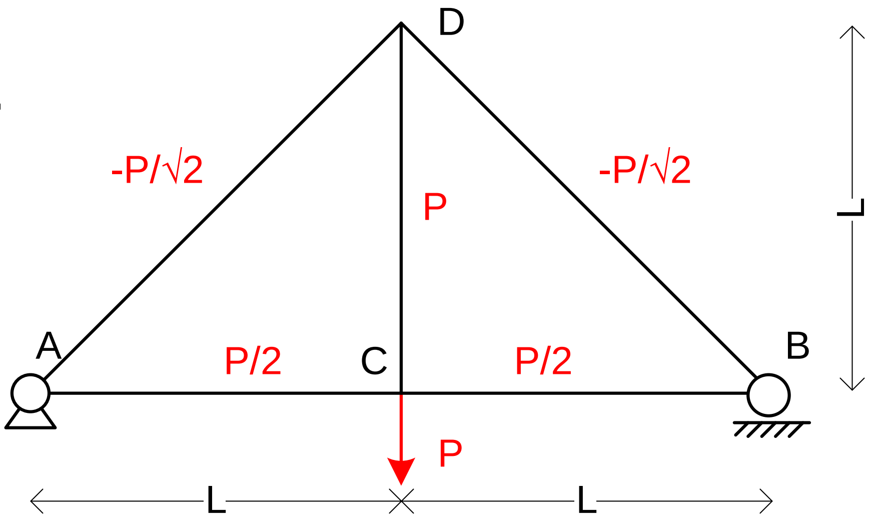
1. Celosía simple isostática



1. Celosía simple isostática. Deformación (1)

Barras misma área.

Esfuerzos por el método de los nudos.



Energía acumulada:

$$U = \sum \frac{N_j^2 L_j}{2EA} = \ldots = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \frac{P^2 L}{EA}$$

Trabajo de la fuerza P: $W = \frac{1}{2} P \, \Delta_{CY}$

Fórmula de Clapeyron: $W = U$

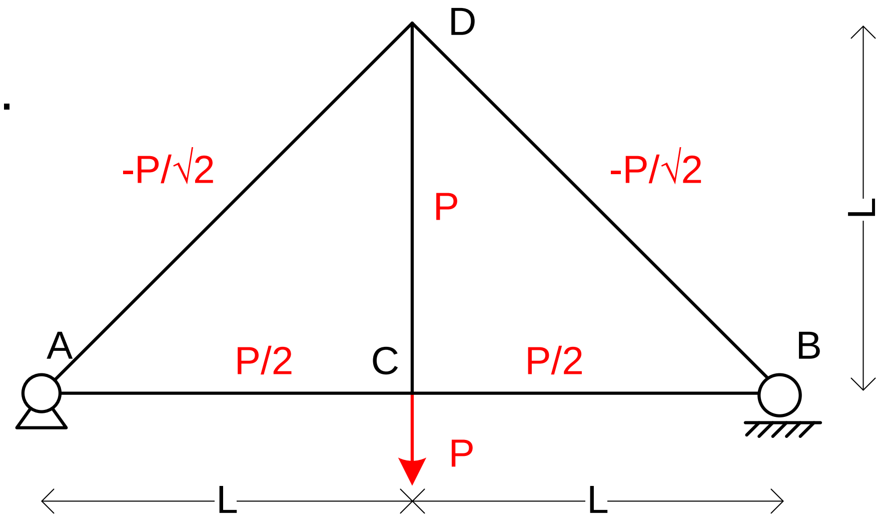
$$\frac{1}{2} P \, \Delta_{CY} = \frac{3+2\sqrt{2}}{4} \frac{P^2 L}{EA} \qquad \Delta_{CY} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2} \frac{PL}{EA}$$

tecnun

1. Celosía simple isostática. Deformación (2)

Barras misma área.

Esfuerzos por el método de los nudos.



2º Castigliano $$\Delta_{CY} = \frac{\partial U}{\partial P}$$

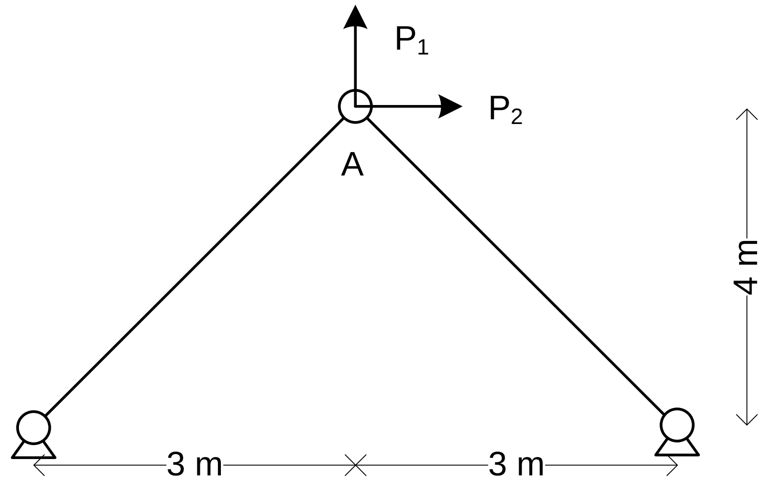
$$U = \sum \frac{N_j^2 L_j}{2EA}$$

$$\Delta_{CY} = \frac{\partial U}{\partial P} = \sum \frac{N_j L_j}{EA} \frac{\partial N_j}{\partial P}$$

$$\Delta_{CY} = \frac{P}{2}\frac{L}{EA}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{P}{2}\frac{L}{EA}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{-P}{\sqrt{2}}\frac{L\sqrt{2}}{EA}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{-P}{\sqrt{2}}\frac{L\sqrt{2}}{EA}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Delta_{CY} = \frac{3+2\sqrt{2}}{2}\frac{PL}{EA}$$

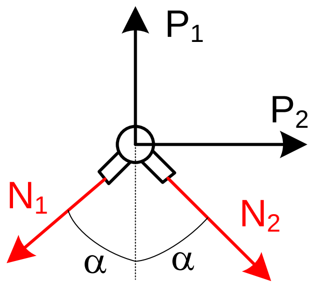
2. Celosía simple isostática

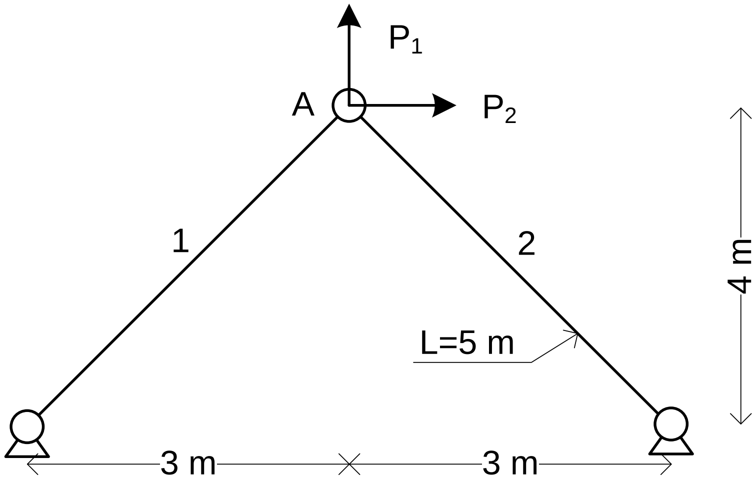


2. Celosía simple isostática. Esfuerzos

Barras misma área.

Esfuerzos por equilibrio de A.





$$P_2 + N_2 \operatorname{sen}\alpha = N_1 \operatorname{sen}\alpha$$
$$P_1 = N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha$$

$$N_1 = \frac{5}{8} P_1 + \frac{5}{6} P_2$$
$$N_2 = \frac{5}{8} P_1 - \frac{5}{6} P_2$$

Energía acumulada:

$$U = \frac{N_1^2 L}{2EA} + \frac{N_2^2 L}{2EA}$$

2. Celosía simple isostática. Deformación (1)

Deformación X de A.

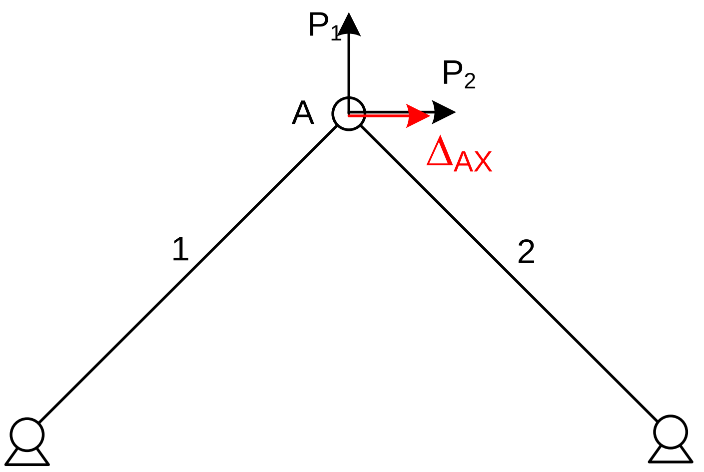
2º Teorema de Castigliano

$$\Delta_{AX} = \frac{\partial U}{\partial P_2}$$

$$\Delta_{AX} = \frac{2N_1L}{2EA}\frac{\partial N_1}{\partial P_2} + \frac{2N_2L}{2EA}\frac{\partial N_2}{\partial P_2}$$

$$\Delta_{AX} = \frac{2N_1L}{2EA}\left(\frac{5}{6}\right) + \frac{2N_2L}{2EA}\left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$\Delta_{AX} = \frac{50}{36}\frac{P_2L}{EA}$$

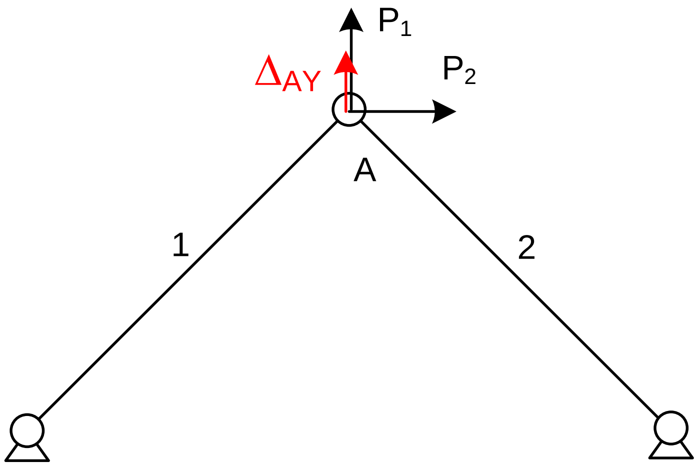


Sustituyendo N

2. Celosía simple isostática. Deformación (2)

Deformación Y de A.

2º Teorema de Castigliano



$$\Delta_{AY} = \frac{\partial U}{\partial P_1}$$

$$\Delta_{AY} = \frac{2N_1L}{2EA}\frac{\partial N_1}{\partial P_1} + \frac{2N_2L}{2EA}\frac{\partial N_2}{\partial P_1}$$

$$\Delta_{AX} = \frac{2N_1L}{2EA}\left(\frac{5}{8}\right) + \frac{2N_2L}{2EA}\left(\frac{5}{8}\right)$$

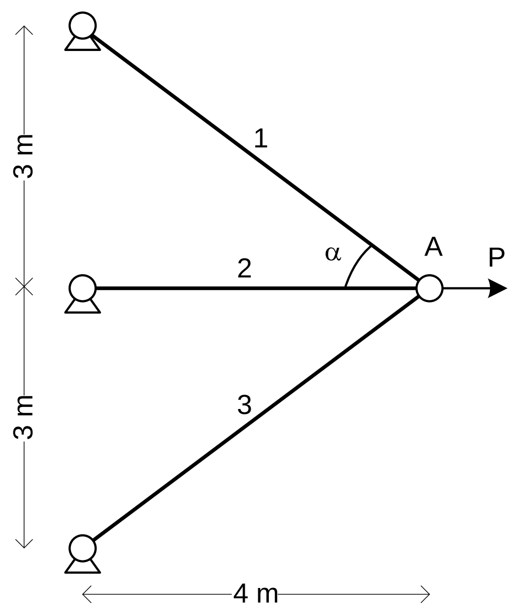
Sustituyendo N

$$\Delta_{AX} = \frac{50}{64}\frac{P_1L}{EA}$$

tecnun

3. Celosía hiperestática

Aplicación (intuitiva) del método de rigidez



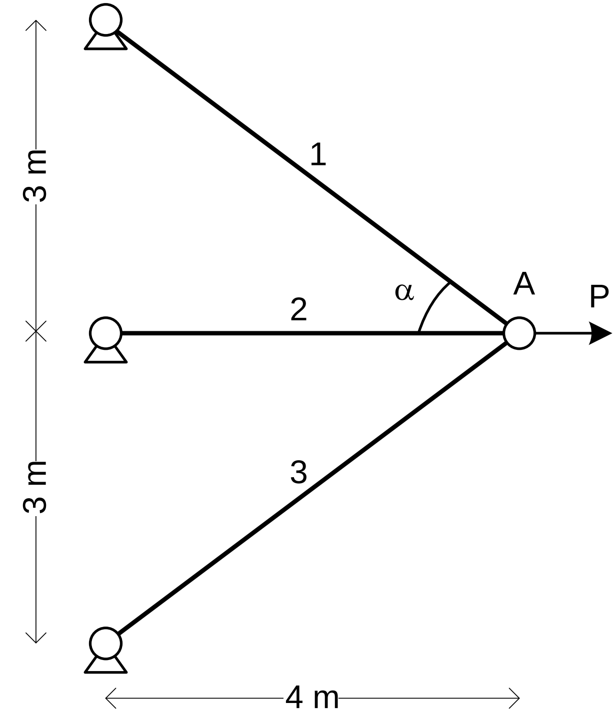
tecnun

3. Celosía hiperestática (1: estudio de la deformación)

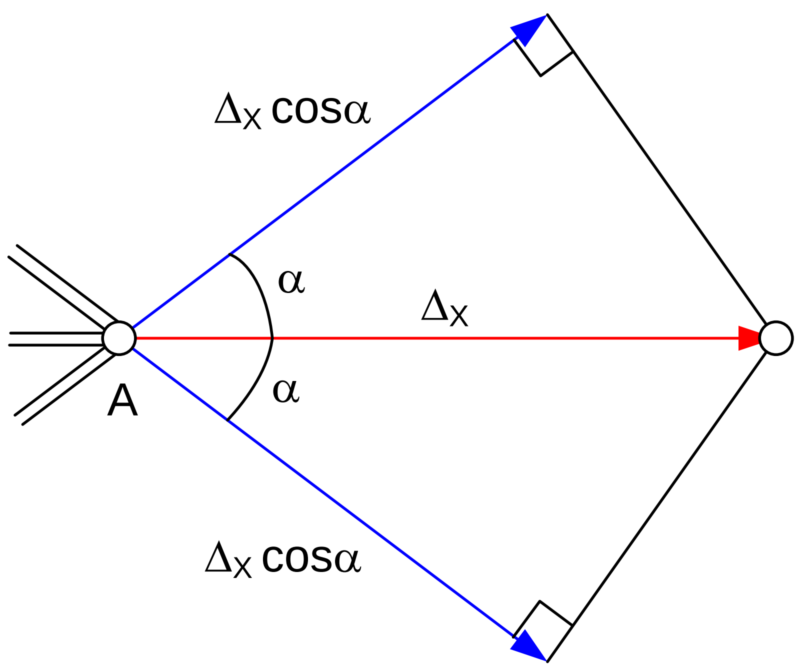
Barras iguales.

b=3   r=6   n=4   h=1

$$U = \sum \frac{1}{2} \frac{EA}{L_j} \Delta_{Lj}^2$$



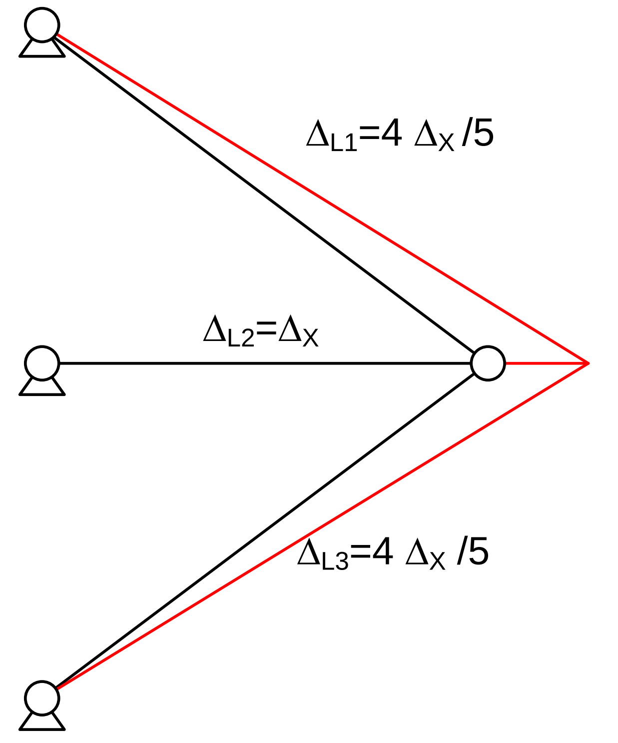
Deformación de la estructura:
Punto A se mueve en horizontal



$$\Delta_{L1} = \Delta_X \cos\alpha = 4\Delta_X / 5$$
$$\Delta_{L2} = \Delta_X$$
$$\Delta_{L3} = \Delta_X \cos\alpha = 4\Delta_X / 5$$

3. Celosía hiperestática (2: resolución)

$$U=\frac{(4\Delta_X/5)^2}{2}\frac{EA}{5\,(\mathrm{m})}+\frac{(\Delta_X)^2}{2}\frac{EA}{4\,(\mathrm{m})}+\frac{(4\Delta_X/5)^2}{2}\frac{EA}{5\,(\mathrm{m})}$$



$$U=\frac{253}{1000}EA(\Delta_X)^2$$

Teorema 1º de Castigliano:

$$P=\frac{\partial U}{\partial \Delta_X}=\frac{2\cdot 253}{1000}EA\,\Delta_X$$

Ecuación de equilibrio de la estructura en la dirección de Δ_X

Dada P, hallamos la deformación $$\Delta_X=\frac{500}{253}\frac{P}{EA}$$

tecnun

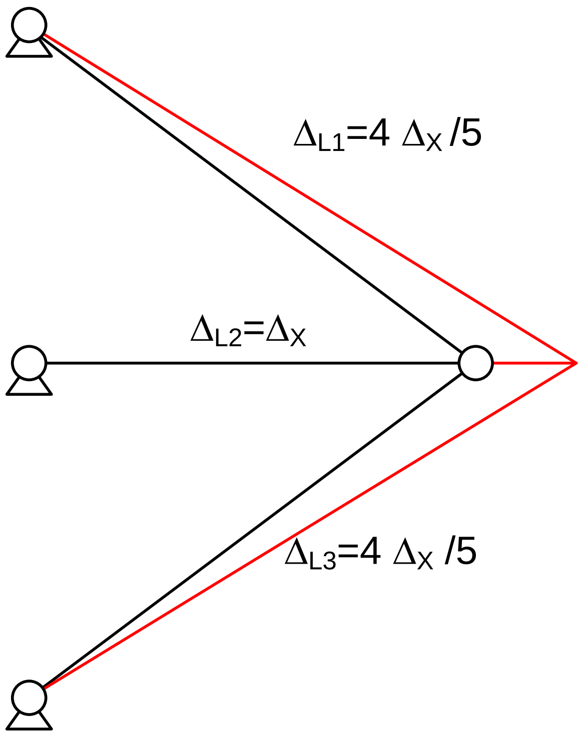
3. Celosía hiperestática (3: esfuerzos en las barras)

Alargamientos de las barras

$$\Delta_{L1} = 4\Delta_X \,/\, 5 = \frac{400}{253}\frac{P}{EA}$$

$$\Delta_{L2} = \Delta_X = \frac{500}{253}\frac{P}{EA}$$

$$\Delta_{L3} = 4\Delta_X \,/\, 5 = \frac{400}{253}\frac{P}{EA}$$



Esfuerzos en las barras

$$N_j = \frac{EA}{L_j}\Delta_{Lj}$$

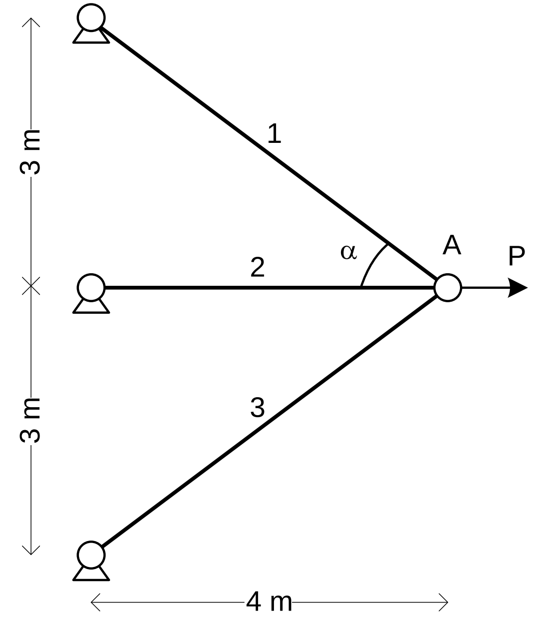
$$N_1 = \frac{80\,P}{253}$$

$$N_2 = \frac{125\,P}{253}$$

$$N_3 = \frac{80\,P}{253}$$

4. Celosía hiperestática

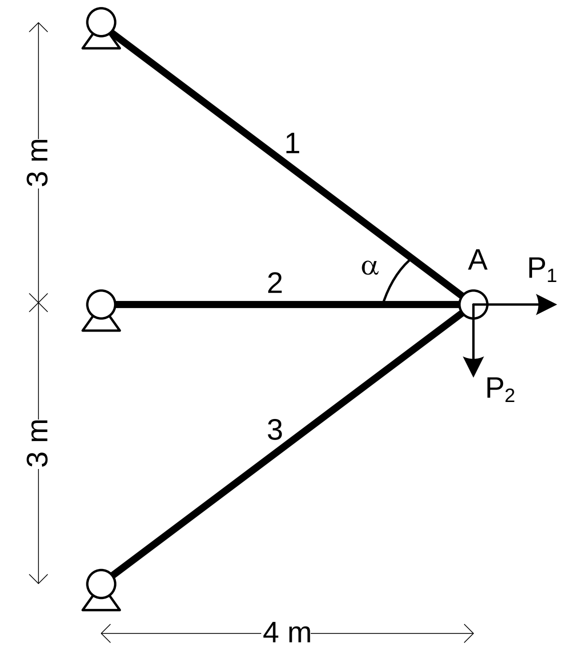
Aplicación (intuitiva) del método de flexibilidad



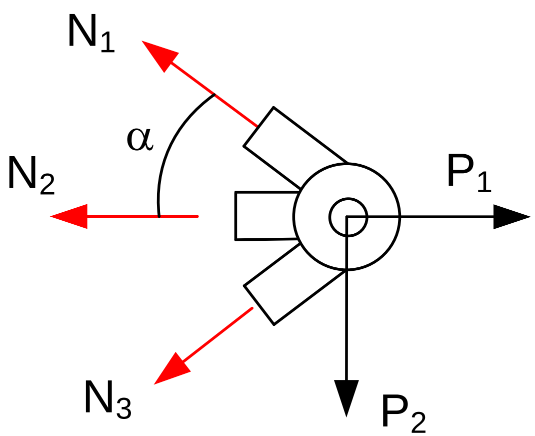
tecnun

4. Celosía hiperestática. Método de flexibilidad (1)

Barras iguales. b=3 r=6 n=4 h=1



Equilibrio del nudo A: 2 ecuaciones, 3 incógnitas



$$P_1 = N_1 \cos\alpha + N_2 + N_3 \cos\alpha$$

$$P_2 = N_1 \operatorname{sen}\alpha - N_3 \operatorname{sen}\alpha$$

Consideramos N_2 redundante

Despejamos N_1 y N_3 en función de N_2

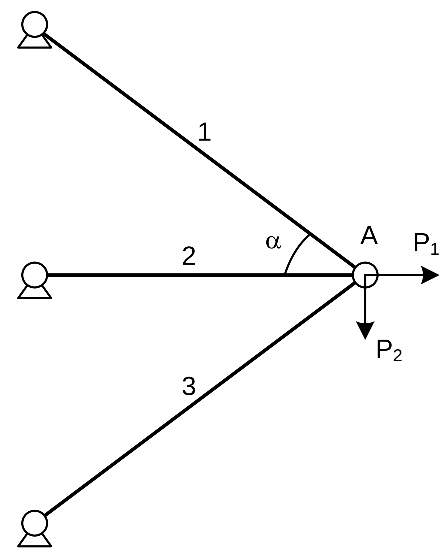
$$N_1 = \frac{5}{8} P_1 + \frac{5}{6} P_2 - \frac{5}{8} N_2$$

$$N_3 = \frac{5}{8} P_1 - \frac{5}{6} P_2 - \frac{5}{8} N_2 \qquad (1)$$

tecnun

4. Celosía hiperestática. Método de flexibilidad (2)

Ecuación de compatibilidad extra (2º Engesser)



$$\frac{\partial U^*}{\partial N_2} = 0 \qquad U^* = \sum \frac{1}{2}\frac{L_j}{EA} N_j^2$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial N_2} = \frac{L_1}{EA} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial N_2} + \frac{L_2}{EA} N_2 \frac{\partial N_2}{\partial N_2} + \frac{L_3}{EA} N_3 \frac{\partial N_3}{\partial N_2} = 0$$

$$\frac{N_1 L_1}{EA}\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{N_2 L_2}{EA}\;1\; + \frac{N_3 L_3}{EA}\left(-\frac{5}{8}\right) = 0$$

$$\frac{N_1 5}{EA}\left(-\frac{5}{8}\right) + \frac{N_2 4}{EA}\;1\; + \frac{N_3 5}{EA}\left(-\frac{5}{8}\right) = 0$$

Se simplifica *EA*

$$\boxed{-\frac{25 N_1}{8} + 4 N_2 - \frac{25 N_3}{8} = 0}$$

Ecuación de compatibilidad extra

4. Celosía hiperestática. Método de flexibilidad (3)

2 ecuaciones de la estática (1) y la ecuación extra: 3 ecs. y 3 incógnitas

(1)

$$N_1 = \frac{5}{8}P_1 + \frac{5}{6}P_2 - \frac{5}{8}N_2$$

$$N_3 = \frac{5}{8}P_1 - \frac{5}{6}P_2 - \frac{5}{8}N_2$$

$$-\frac{25N_1}{8} + 4N_2 - \frac{25N_3}{8} = 0$$

Sustituyendo sale N_2

Resolviendo:

$$N_1 = \frac{80}{253}P_1 + \frac{5}{6}P_2$$

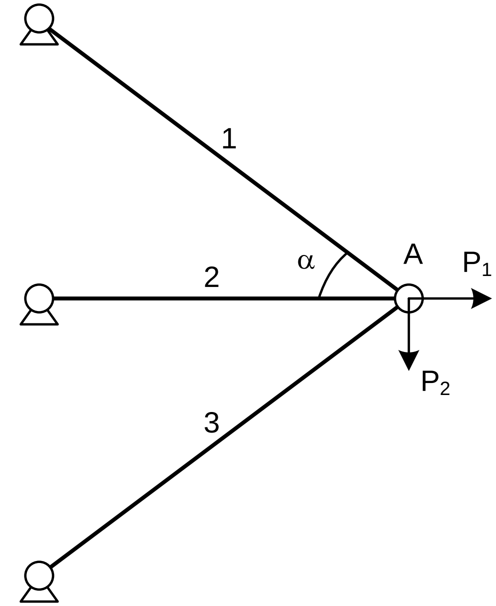
$$N_2 = \frac{125}{253}P_1$$

$$N_3 = \frac{80}{253}P_1 - \frac{5}{6}P_2$$

tecnun

4. Celosía hiperestática. Método de flexibilidad (4)

Deformación vertical (2º Castigliano)



$$\Delta_2 = \frac{\partial U^*}{\partial P_2} \qquad U^* = \sum \frac{1}{2} \frac{L_j}{EA} N_j^2$$

$$\Delta_2 = \frac{\partial U^*}{\partial P_2} = \frac{L_1}{EA} N_1 \frac{\partial N_1}{\partial P_2} + \frac{L_2}{EA} N_2 \frac{\partial N_2}{\partial P_2} + \frac{L_3}{EA} N_3 \frac{\partial N_3}{\partial P_2}$$

$$\Delta_2 = \frac{L_1}{EA} N_1 \left(\frac{5}{6}\right) + \frac{L_2}{EA} N_2 \; 0 \; + \frac{L_3}{EA} N_3 \left(-\frac{5}{6}\right)$$

$$\Delta_2 = \frac{5(m)}{EA} \left(\frac{5}{6}\right) (N_1 - N_3)$$

$$\Delta_2 = \frac{250}{36\, EA} P_2 \qquad (\mathrm{m})$$