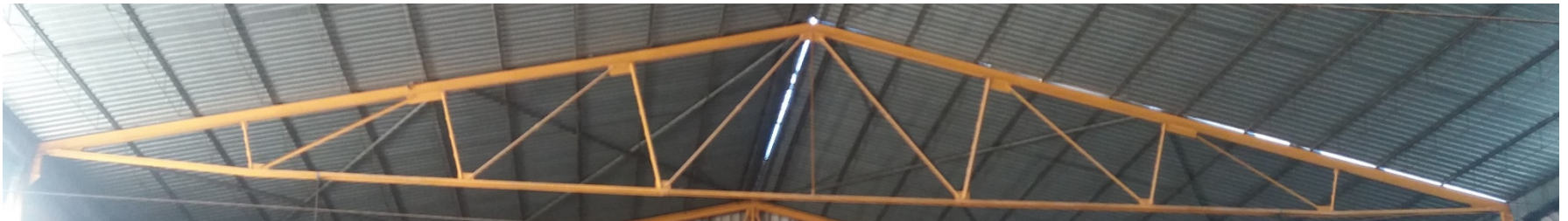
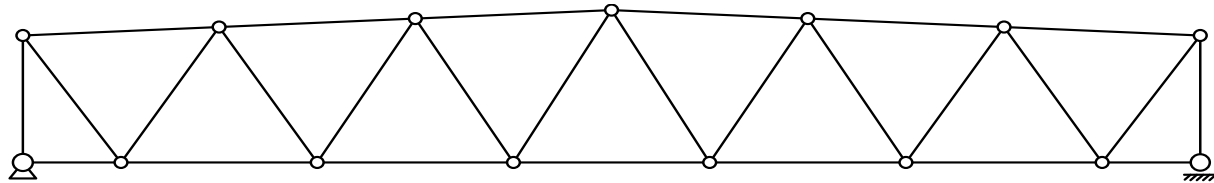


Celosías planas



Celosía plana. Definición

Modelo idealizado de una estructura reticular, formada por **barras rectas** de canto despreciable frente a su longitud.

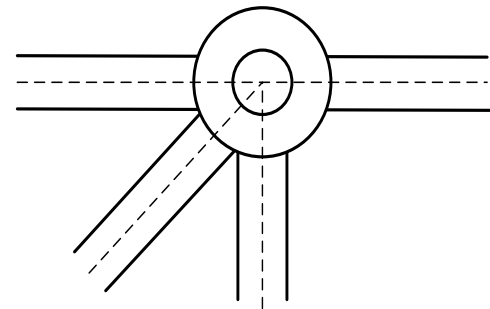
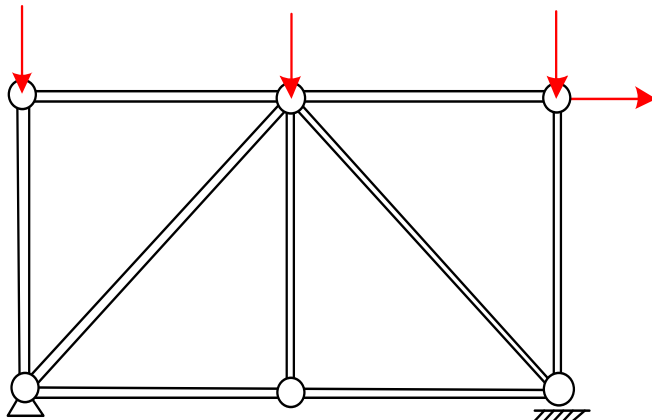
Barras unidas en sus extremos mediante **articulaciones ideales**: sólo se transmiten fuerzas, no se transmite momento.

Eje centroidal de todas las barras contenido en un mismo plano (XY)

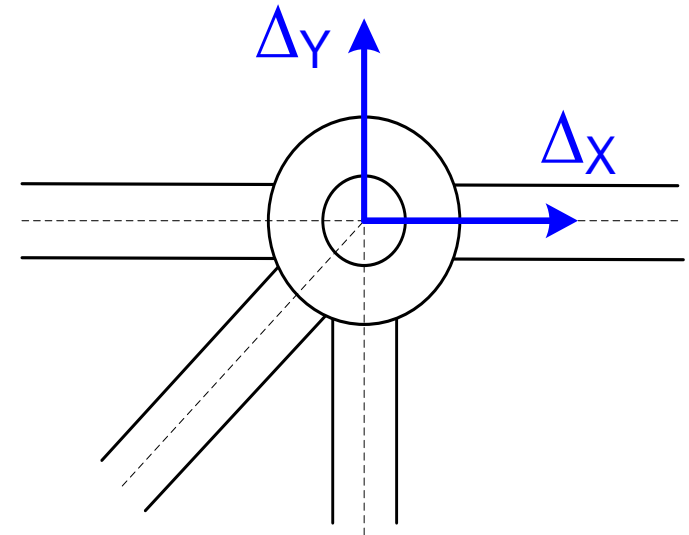
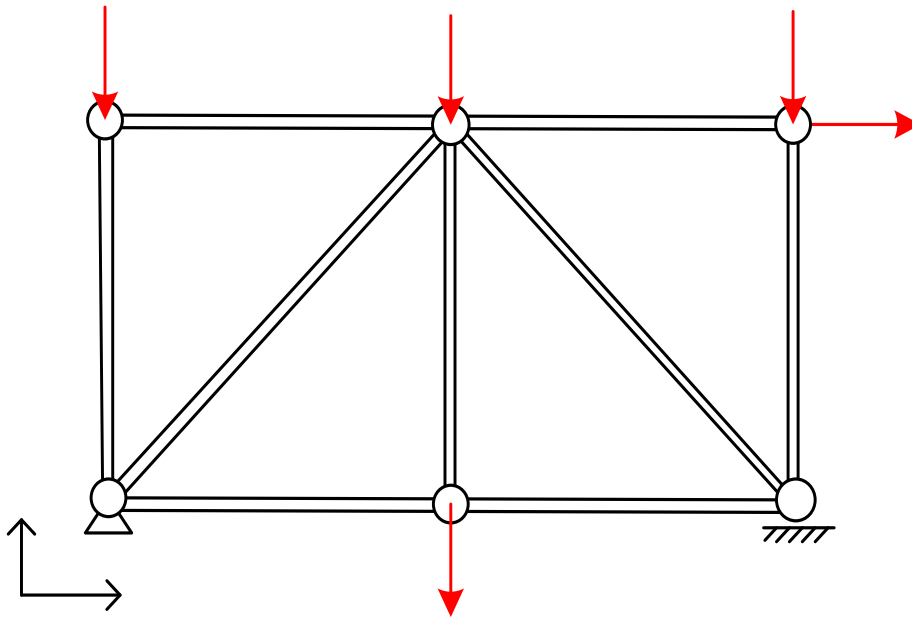
Ejes de las barras pasan por el centro de las dos articulaciones extremas.

Fuerzas aplicadas en los nudos, contenidas en el plano de la estructura (F_X, F_Y).

Fuerzas no en los nudos: se estudian de forma independiente para cada barra y se superponen a las fuerzas en los nudos.



Celosía plana. Comportamiento



Nudos articulados: no se transmiten momentos entre las barras

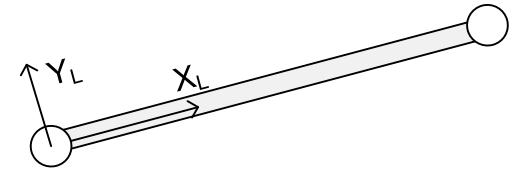
Cada barra tiene un giro θ_z distinto: no interesan en las celosías

Deformación de los nudos: desplazamientos Δ_x Δ_y

Las barras sólo tienen esfuerzo axial (si sólo hay fuerzas aplicadas en los nudos): se deduce del equilibrio de fuerzas de cada barra

Estática de la barra biarticulada plana (1)

Barra sin fuerzas aplicadas sobre ella:



$$\Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad V_2 = 0$$

Cortantes nulos

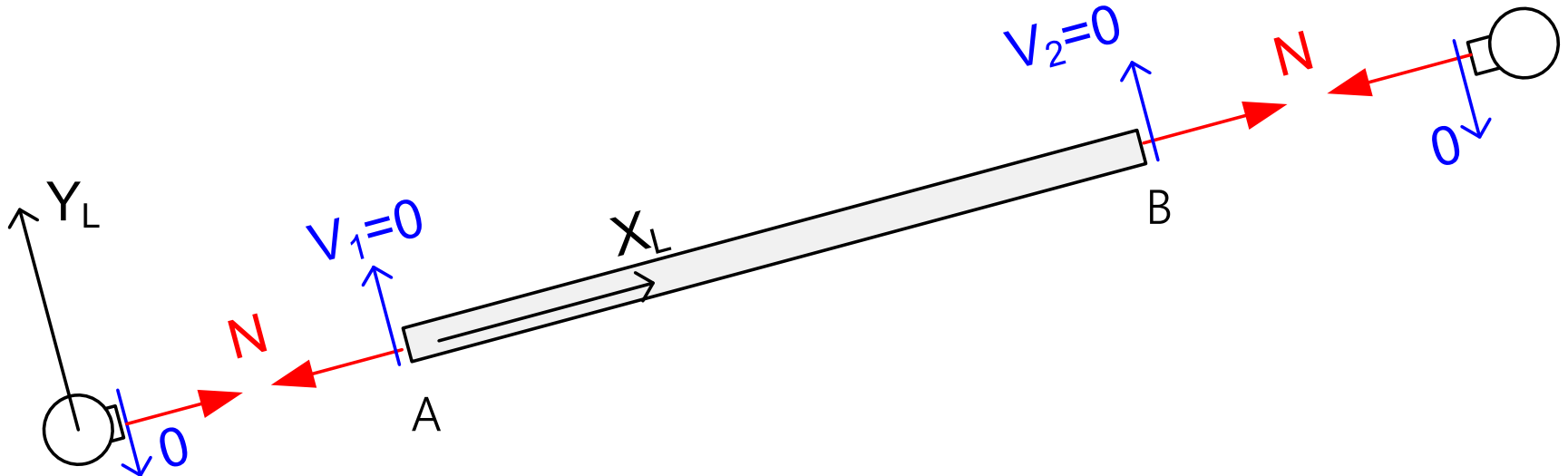
$$\Sigma F_{Y_L} = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 0$$

$$\Sigma F_{X_L} = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = N_2 \equiv N$$

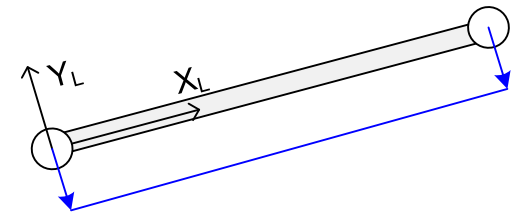
Axial desconocido

Esfuerzo axial N uniforme en la barra
La barra no proporciona el valor de N

$$\text{Tensión: } \sigma = \frac{N}{A}$$



Estática de la barra biarticulada plana (2)



Barra con fuerzas aplicadas sobre ella:

$$\Sigma F_{Y_L} = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Cortantes} \quad V_1 \neq 0 \quad V_2 \neq 0$$

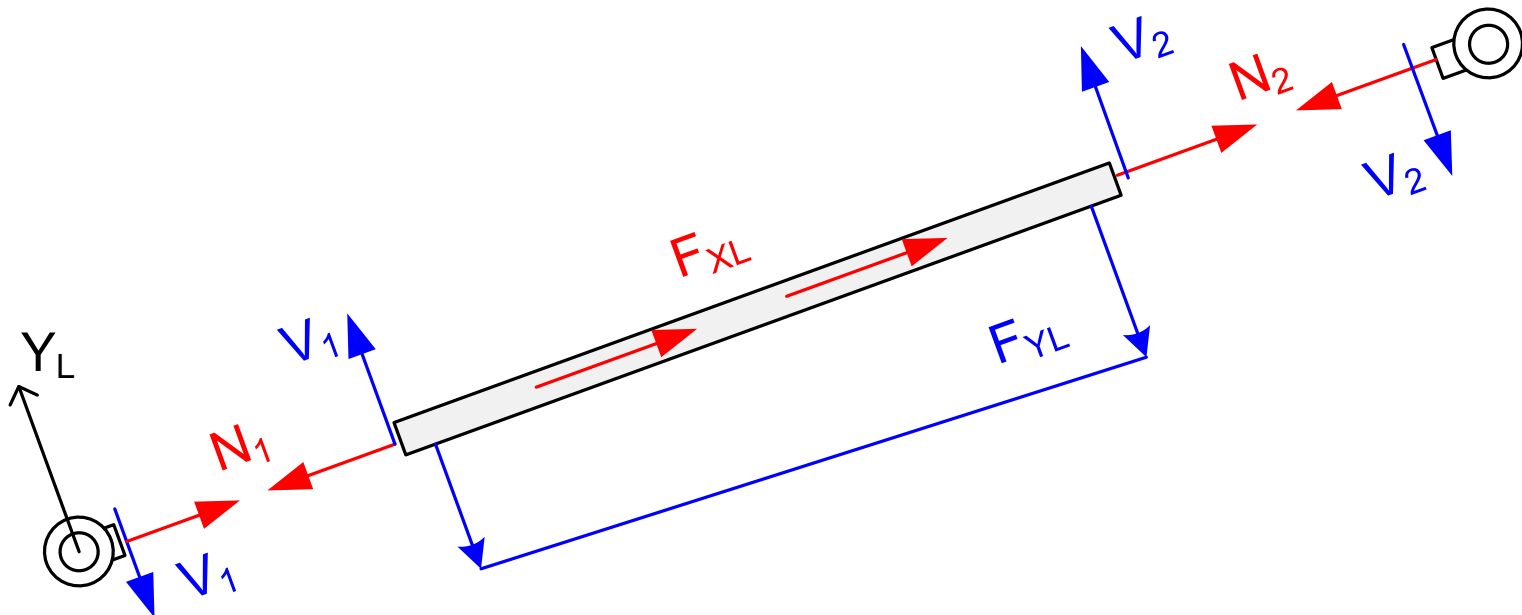
Cortantes conocidos, no nulos, función de las fuerzas exteriores.

La barra **proporciona** los valores de **M** y **V** en su interior

$$\Sigma F_{X_L} = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 + F_{X_L} = N_1$$

Esfuerzos axiales pueden ser diferentes si hay fuerzas exteriores en X

La barra **no proporciona** los axiales, sólo su diferencia



Celosías planas. Estabilidad

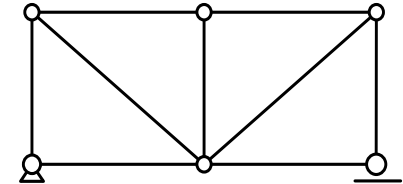
Balance de fuerzas incógnitas y ecuaciones de la estática

Fuerzas incógnitas:

Esfuerzo axial N en cada barra (b)

Reacciones en los apoyos (r)

Ecuaciones de la estática: 2 en cada nudo ($2n$)



A	$b + r < 2n$	→	Inestable
B	$b + r = 2n$	→	Inestable, isostática o hiperestática
C	$b + r > 2n$		

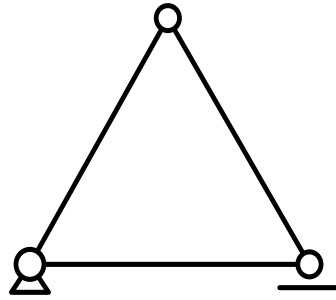
A es condición suficiente para la inestabilidad. B, C no son suficientes

Además de cumplirse B o C, la disposición de las barras debe evitar toda inestabilidad, para asegurar que es condición suficiente

Es posible cumplir B ($b + r = 2n$), y ser a la vez inestable e hiperestática

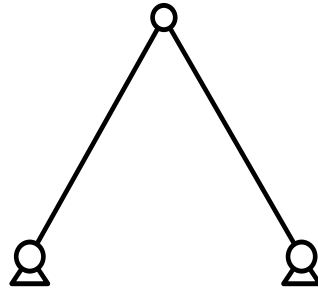
El análisis debe hacerse considerando la disposición de las barras

Celosías planas. Estabilidad



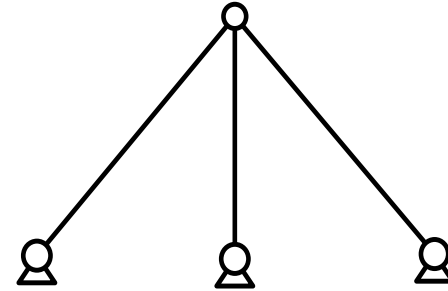
$b=3$ $r=3$ $n=3$

Isostática



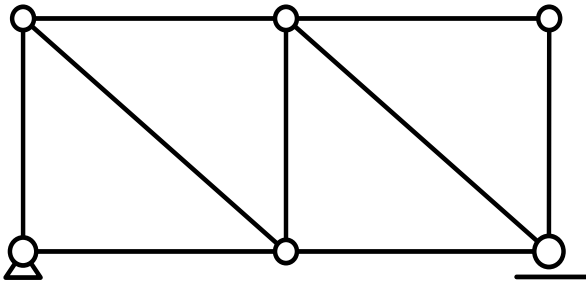
$b=2$ $r=4$ $n=3$

Isostática



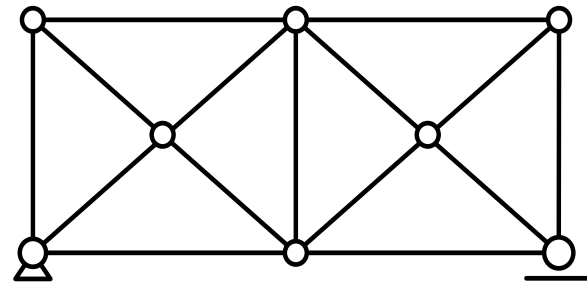
$b=3$ $r=6$ $n=4$

Hiperestática $h=1$



$b=9$ $r=3$ $n=6$

Isostática



$b=15$ $r=3$ $n=8$

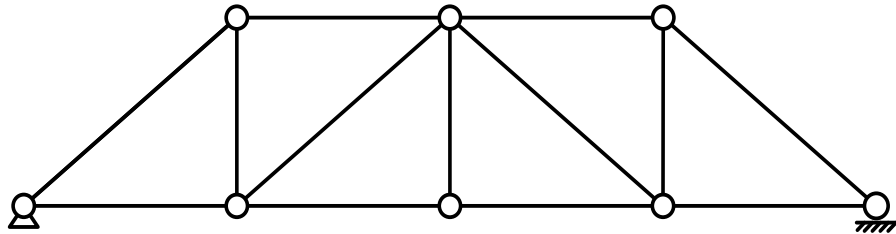
Hiperestática $h=2$

Celosías planas. Estabilidad

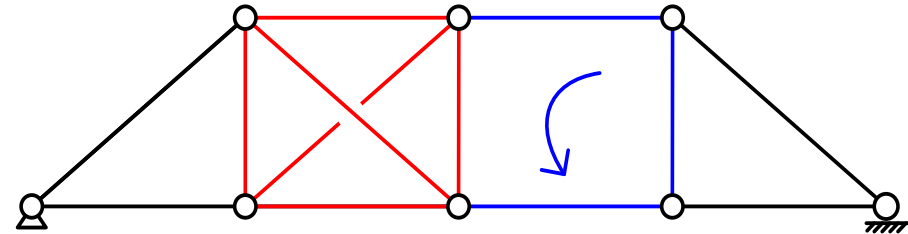
Las cuatro cumplen:

$$b=13 \quad r=3 \quad n=8$$

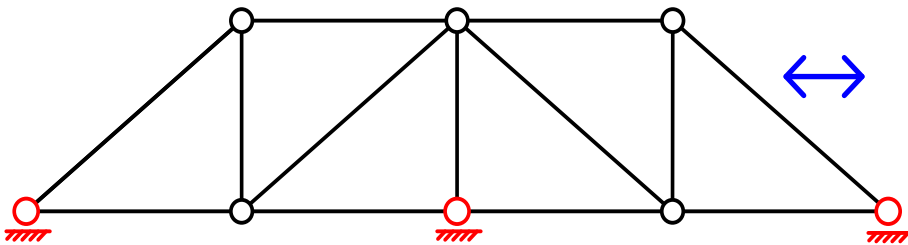
$$b+r=2n$$



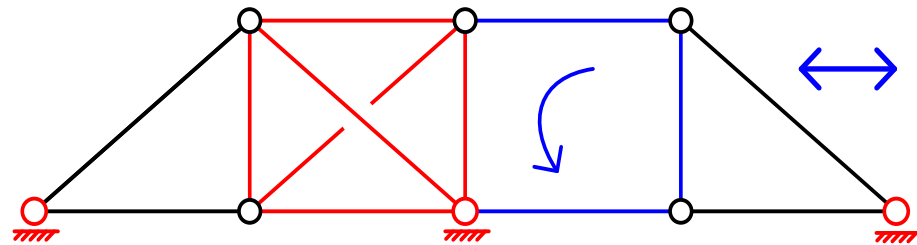
Isostática. Estable



Hiperestática interior + Inestable interior



Hiperestática exterior + Inestable exterior



Hiperestática + Inestable (int. y ext.)

Celosías. Clasificación

Isostáticas ($b+r=2n$)

Simples: mosaico de triángulos adosados

Compuestas: unión de varias celosías simples

Complejas: resto

Hiperestáticas ($b+r > 2n$)

Celosías simples

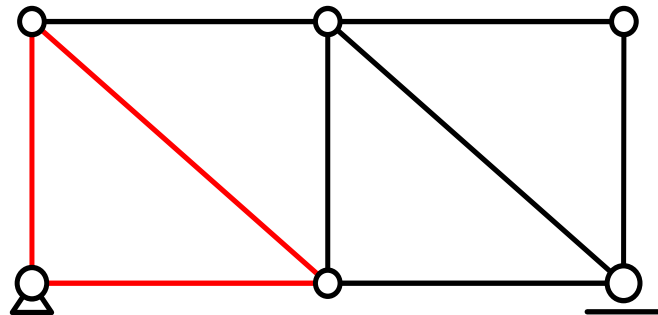
Mosaico de triángulos adosados unos a otros:

A. Partiendo de un triángulo, ir añadiendo nuevos triángulos adosados a él:

Se añaden cada vez dos nuevas barras y un nuevo nudo

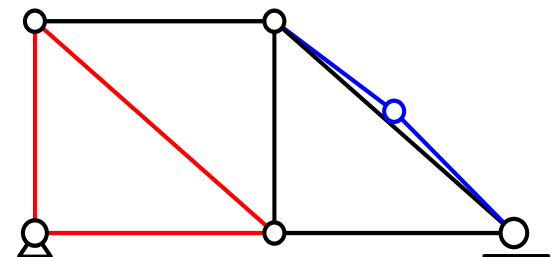
B. Sustentación con 3 reacciones

Cumplen siempre $b + r = 2n$ y son isostáticas y estables



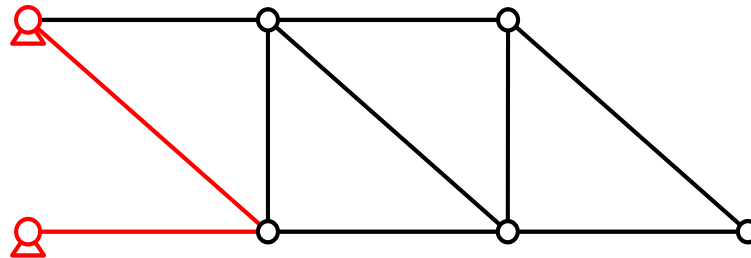
El nudo **añadido no puede estar alineado** con los dos nudos de apoyo, pues entonces la zona añadida es inestable

El triángulo añadido debe tener $\text{área} > 0$



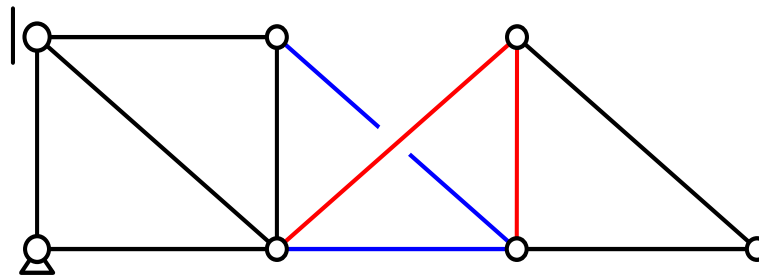
Celosías simples

Triángulo de partida pueden ser dos barras unidas al suelo:
Un lado se sustituye por el suelo. Sustentación con 4 reacciones



$$b=10 \quad r=4 \quad n=7$$

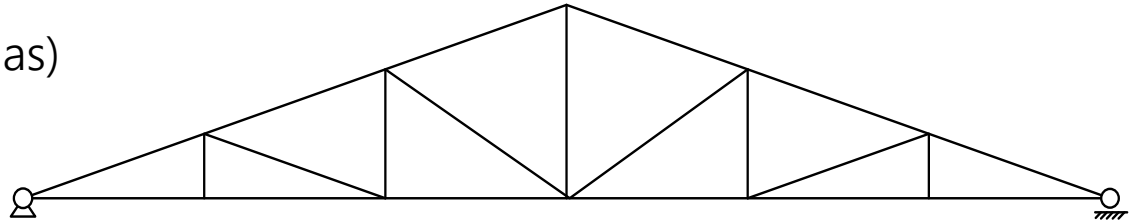
Las barras añadidas pueden cruzar (sin unirse) a las existentes



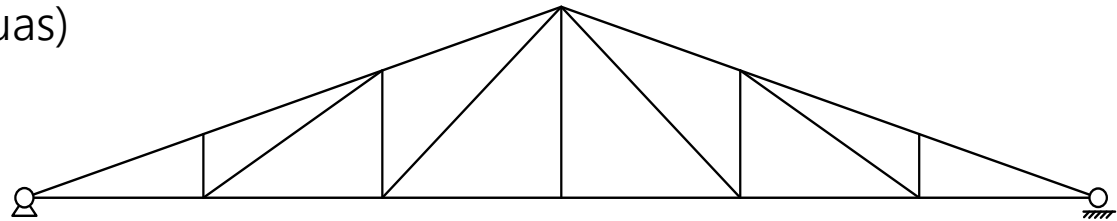
$$b=11 \quad r=3 \quad n=7$$

Celosías simples. A dos aguas

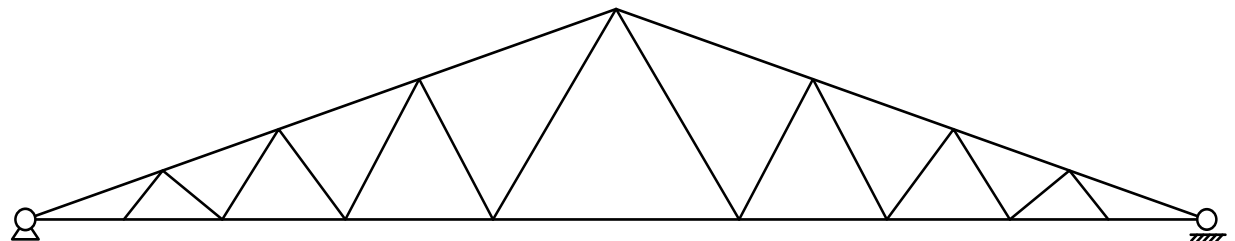
Inglesa (Pratt a dos aguas)



Belga (Howe a dos aguas)

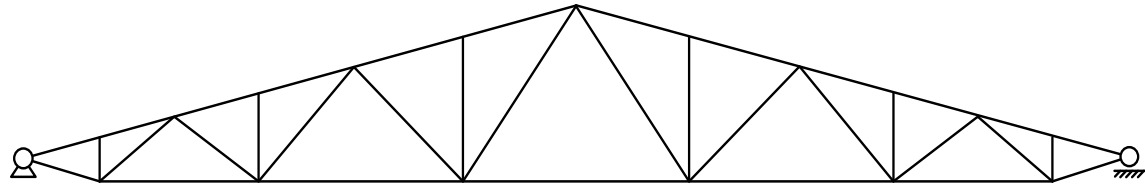


Warren a dos aguas

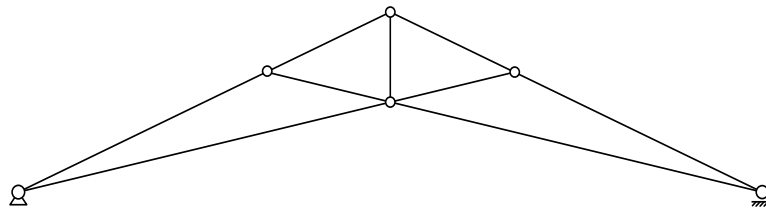


Celosías simples. A dos aguas y voladizo

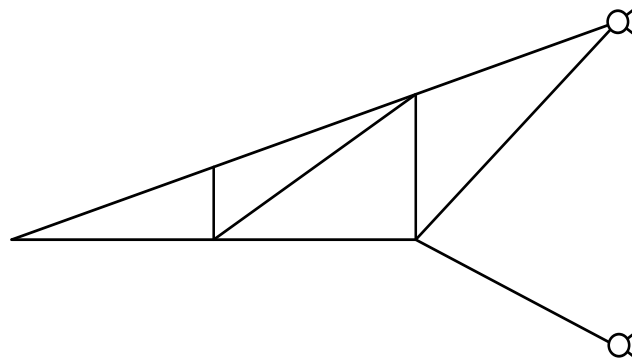
Warren a dos aguas
con montantes



Tijera

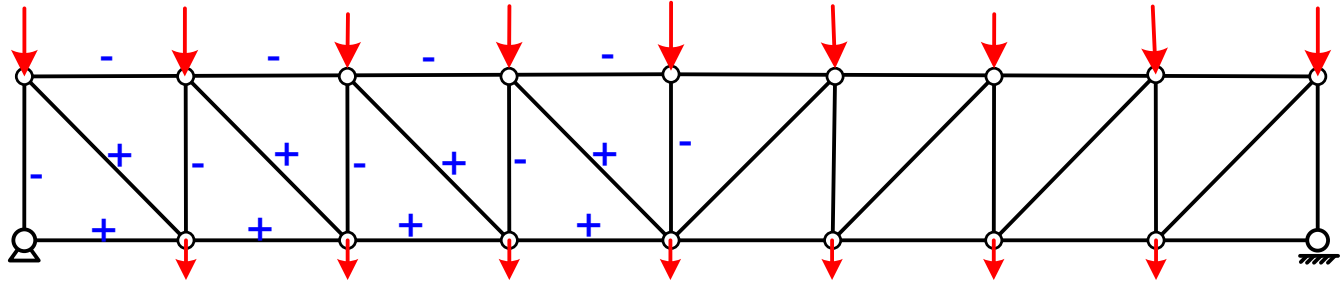


Voladizo



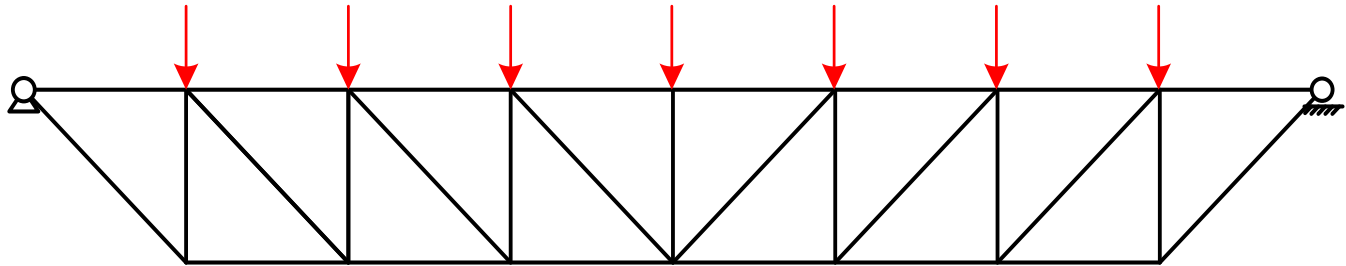
Celosías simples. Rectangulares

Pratt

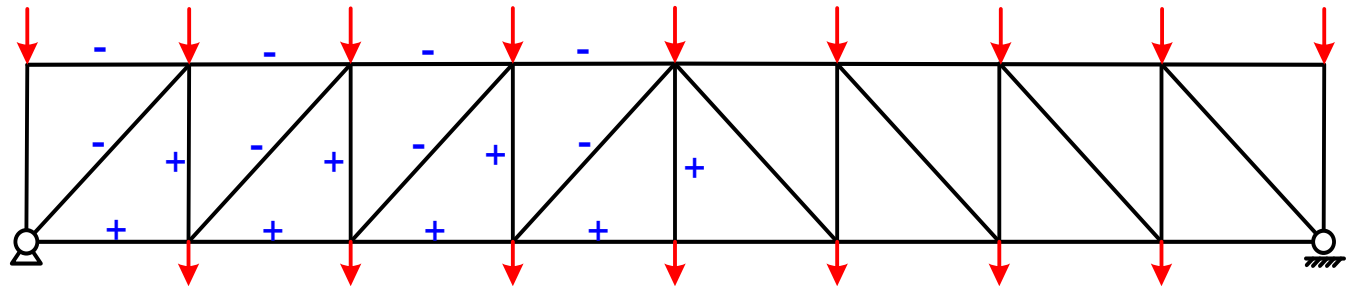


Con cargas hacia abajo: barras diagonales (largas) a tracción

Pratt inferior



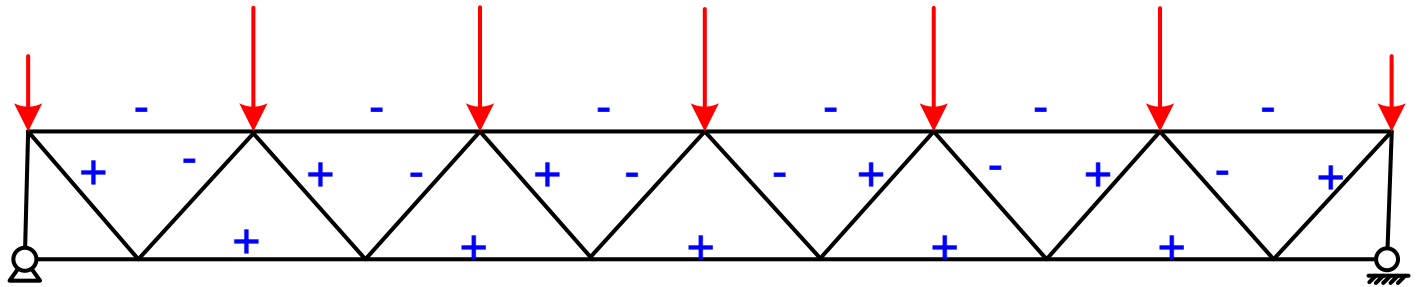
Howe



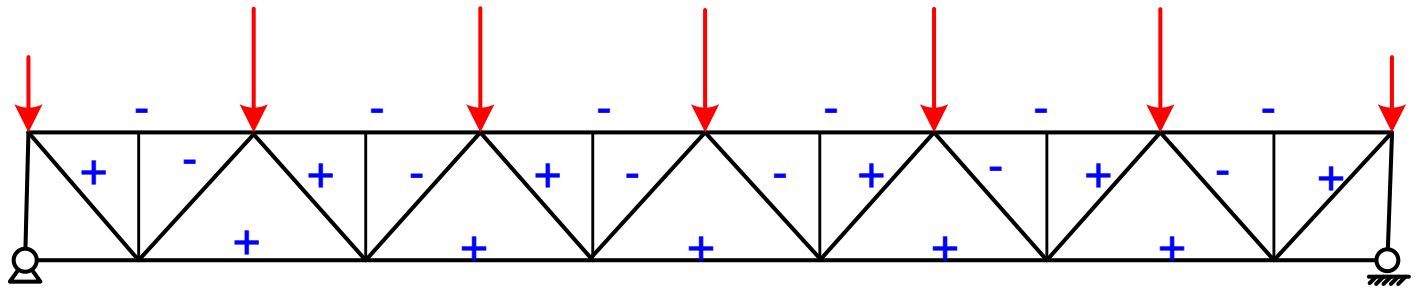
Con cargas hacia abajo: barras diagonales (largas) a compresión Usada con cargas dominantes hacia arriba

Celosías simples. Rectangulares

Warren

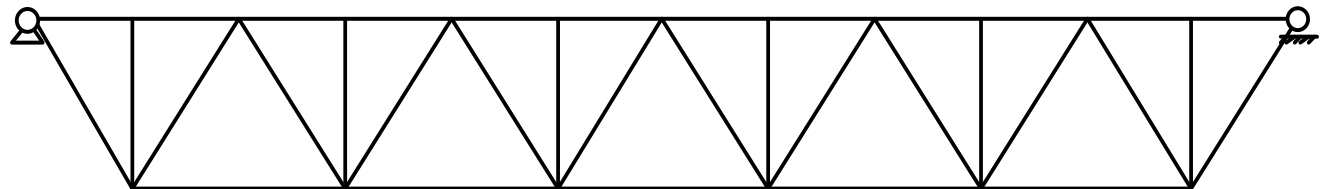


Warren con montantes



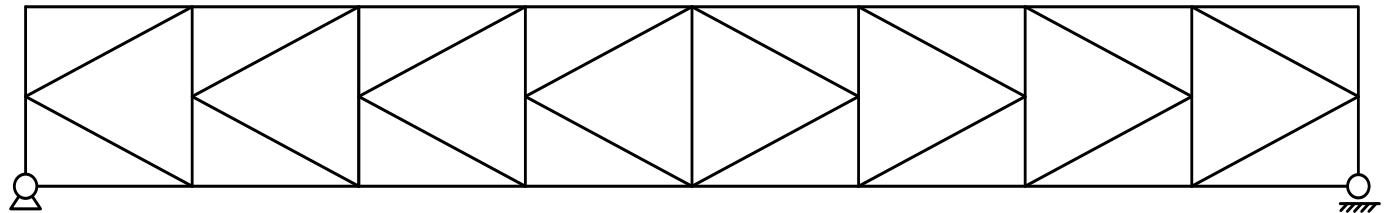
Disminuir la longitud de pandeo del cordón superior comprimido

Warren inferior con montantes

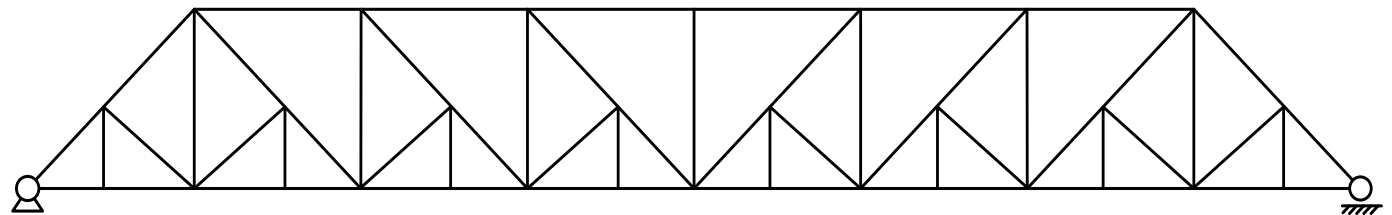


Celosías simples. Rectangulares

Cercha K

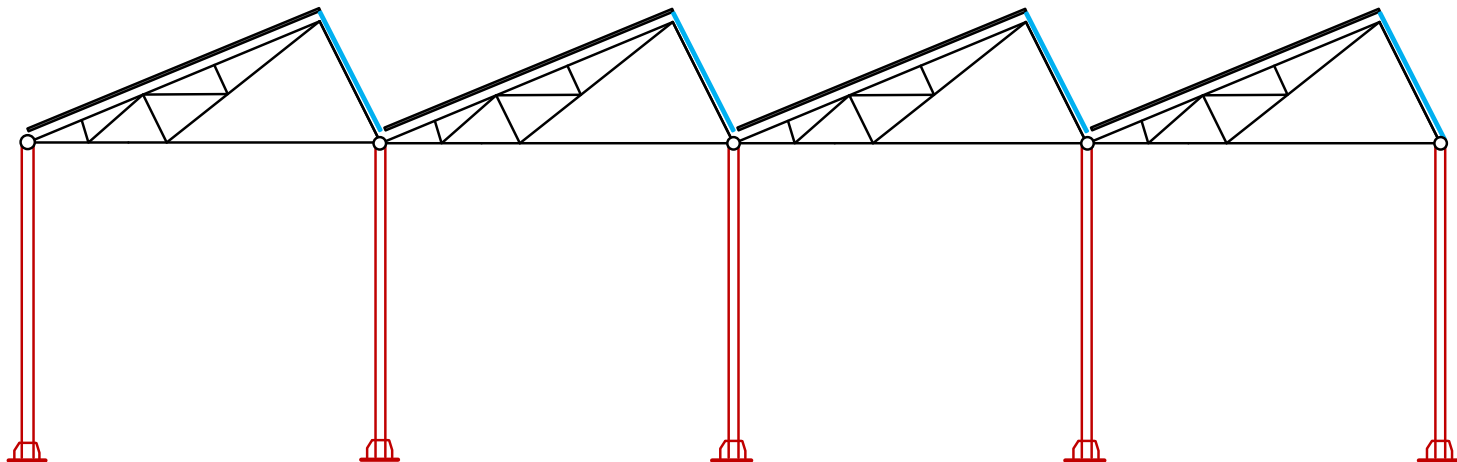
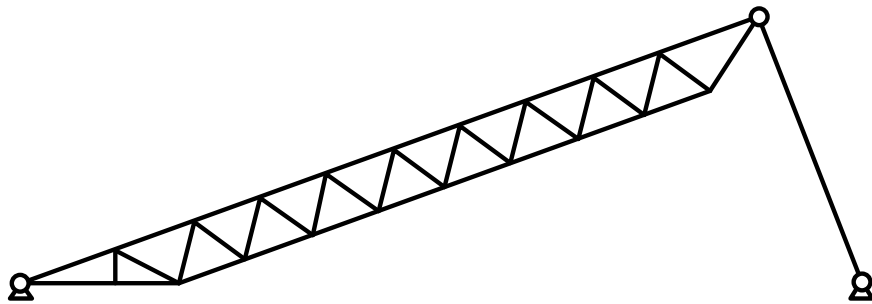
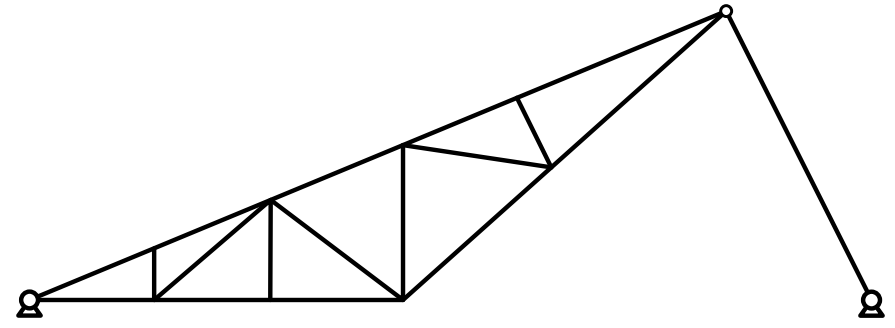
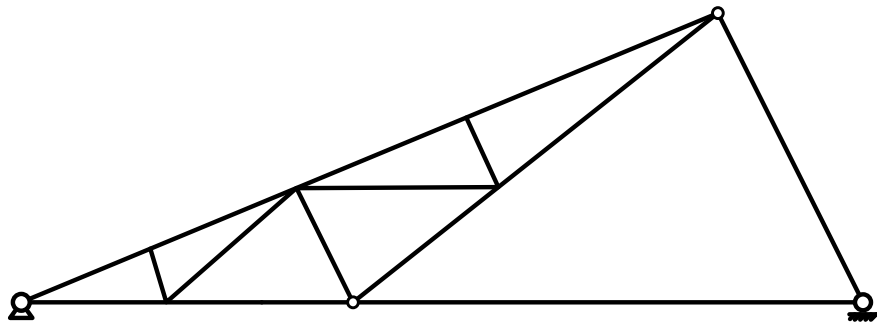


Baltimore

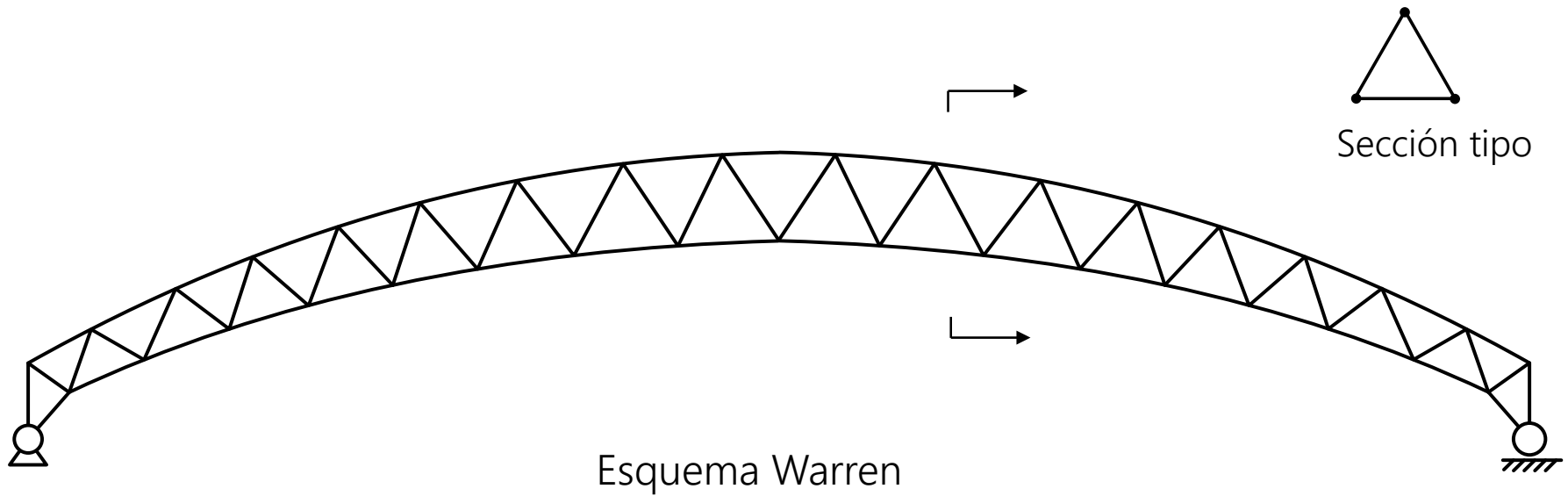


Grandes cargas en el cordón inferior (puentes)

Celosías simples. Dientes de sierra



Celosía simple – Arco – Grandes luces



Celosías simples. Torre

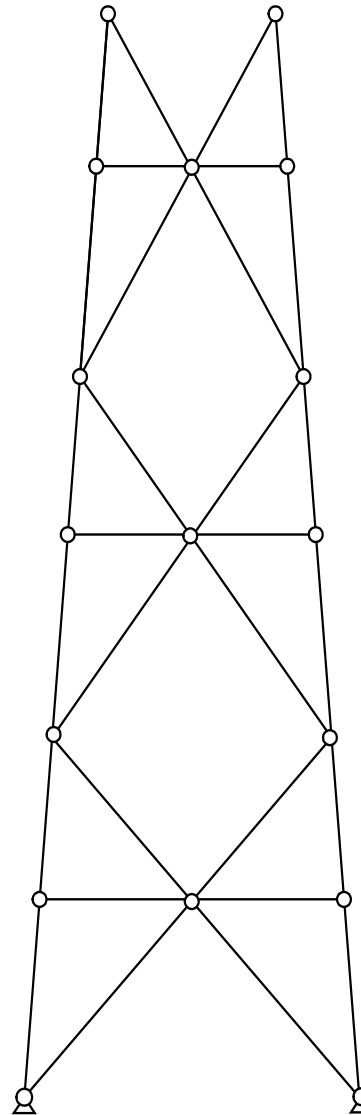
$b=30$

$r=4$

$n=17$

Isostática si todos los nudos son articulados

En realidad muchos nudos están empotrados (cordones exteriores)



Celosías compuestas

Unión de varias celosías simples mediante vínculos adecuados

Vínculo: fuerza de unión entre dos celosías simples

Tipos de vínculos:

una barra (un vínculo = N_{barra})

un nudo común (2 vínculos = F_X, F_Y)

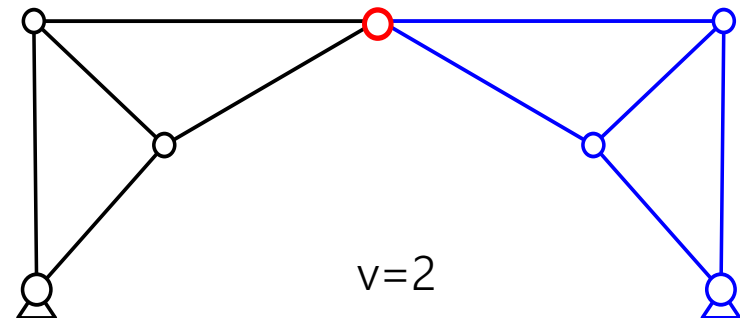
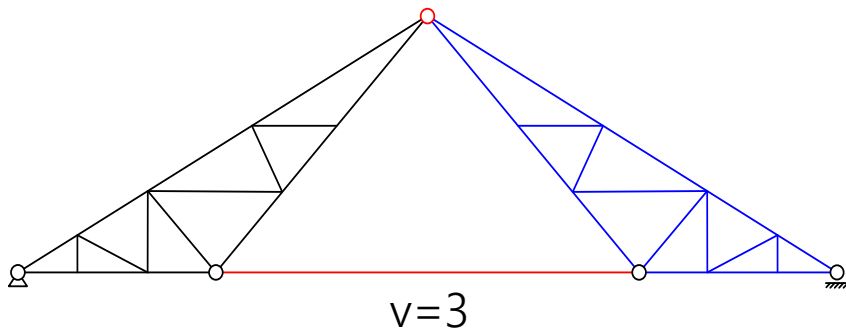
Fuerzas de conexión en los vínculos entre las celosías simples: v

Reacciones: r

Incógnitas en la unión entre celosías simples: $v + r$

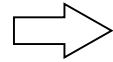
Ecuaciones de equilibrio entre las n_s celosías simples: $3 n_s$

Si cumplen $v + r = 3 n_s$ son isostáticas y estables

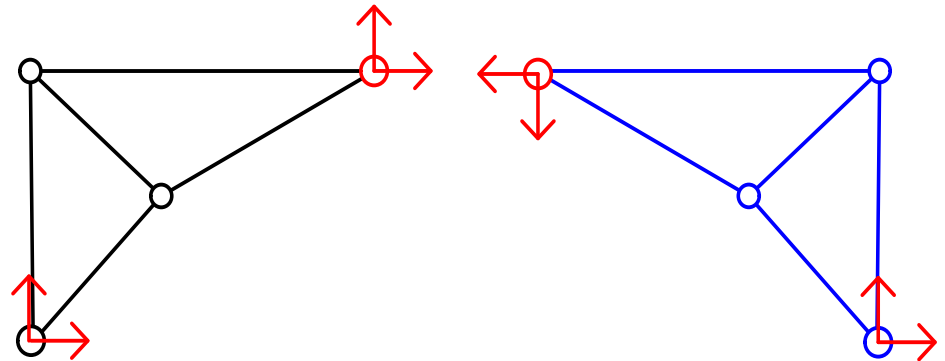
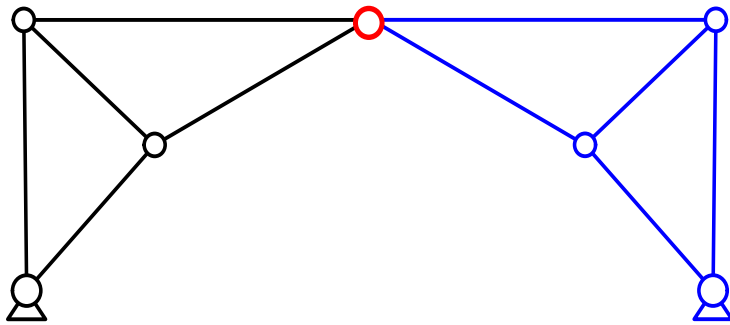


Celosías compuestas

$$v + r = 3 n_s$$



isostáticas y estables



$$n_s = 2 \quad r = 4 \quad v = 2$$

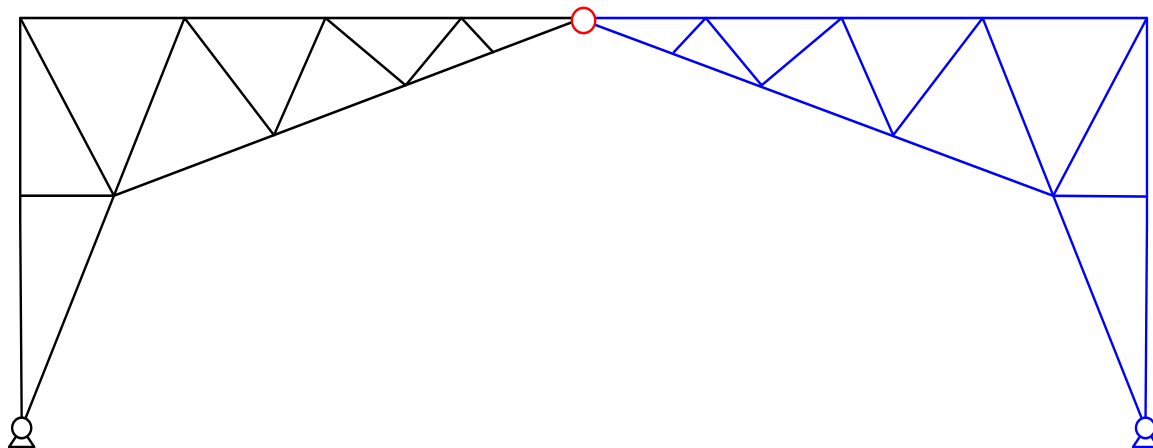
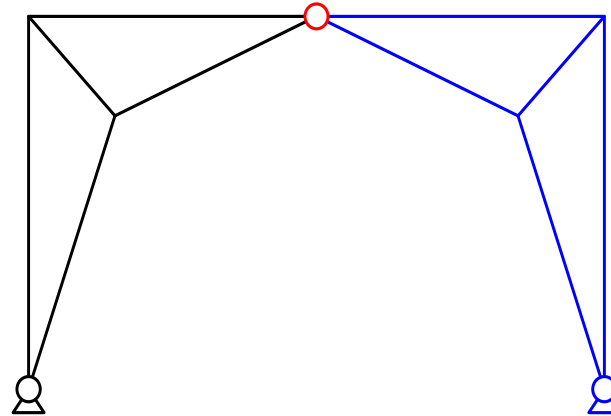
Las ($3 n_s$) ecuaciones permiten hallar las v fuerzas en los vínculos y las r reacciones

Los vínculos deben ser independientes (no cortarse) para poder resolver las ecuaciones

Celosías compuestas. 2 simples 2 vínculos

Dos celosías simples unidas mediante 1 articulación y 2 articulaciones al suelo

$$\begin{aligned}n_s &= 2 \\r &= 4 \\v &= 2\end{aligned}$$



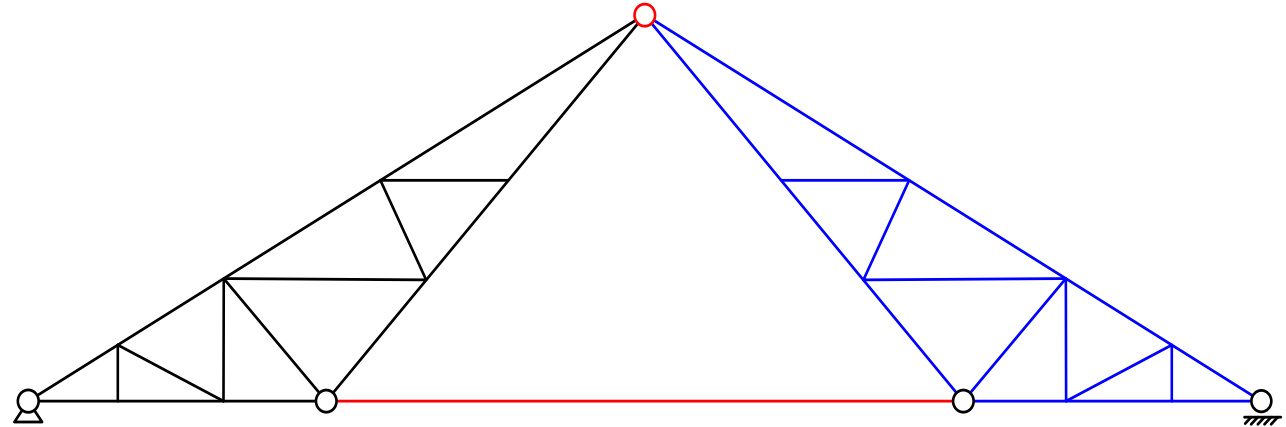
Celosías compuestas. 2 simples 3 vínculos

3 vínculos: un punto común + una barra

Fink

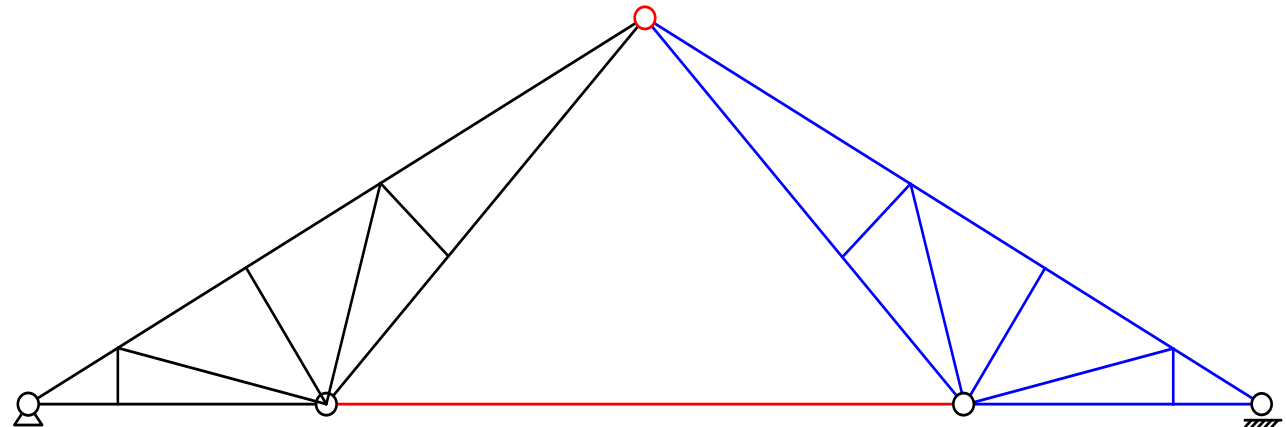
$$n_s=2 \quad r=3 \quad v=3$$

$$b=35 \quad r=3 \quad n=19$$



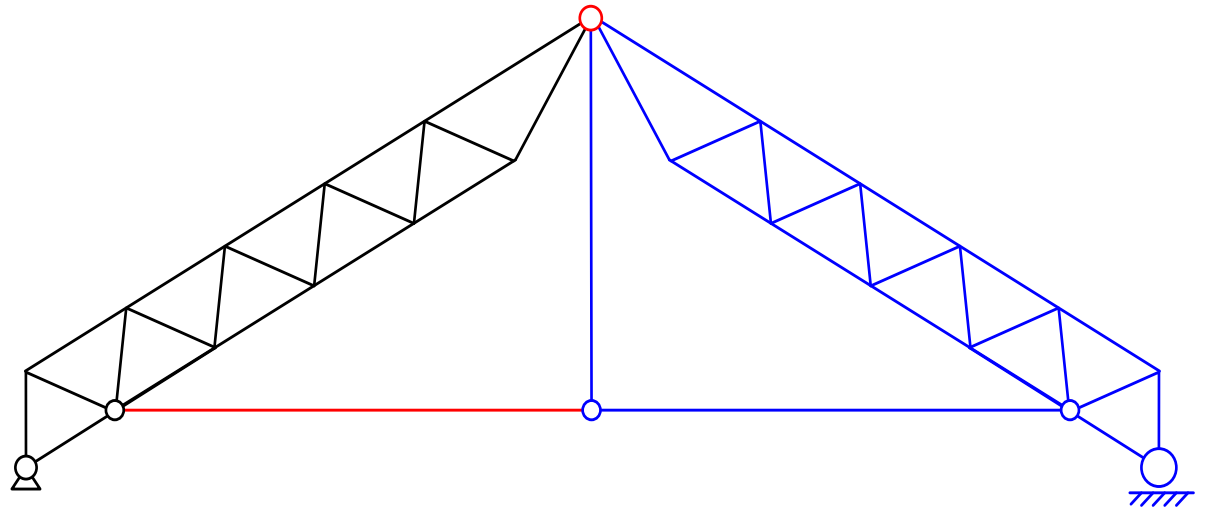
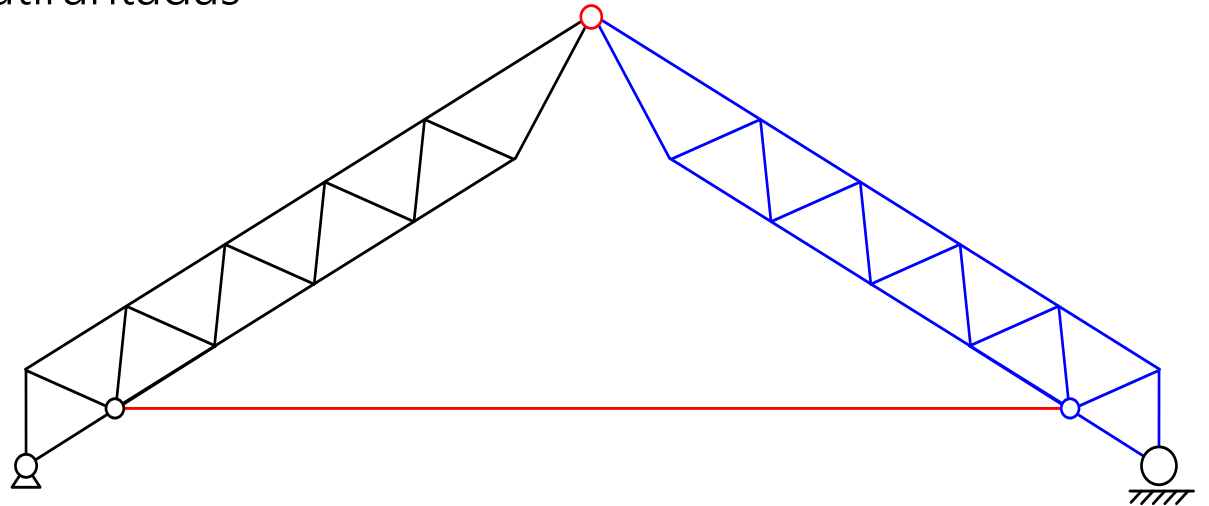
Barra inferior (larga) a tracción con cargas hacia abajo. A compresión con cargas hacia arriba

Polonceau



Celosías compuestas. 2 simples 3 vínculos

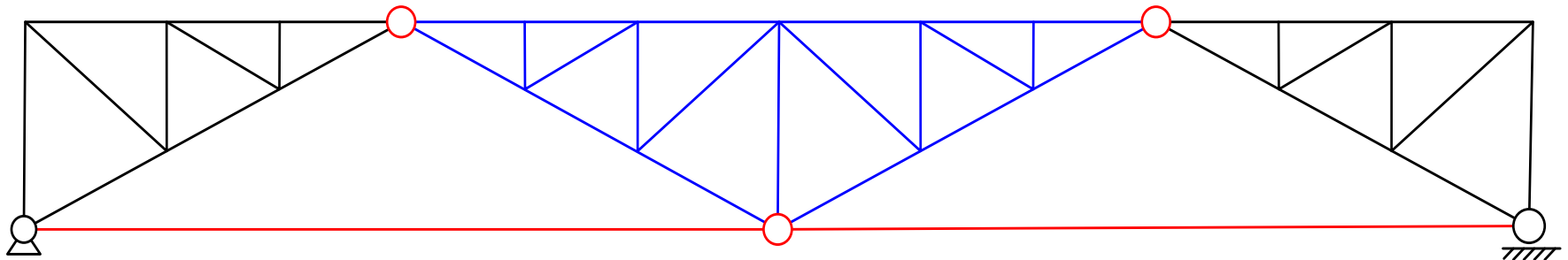
Dos celosías simples atirantadas
 $n_s=2$ $r=3$ $v=3$



Celosías compuestas. Múltiples

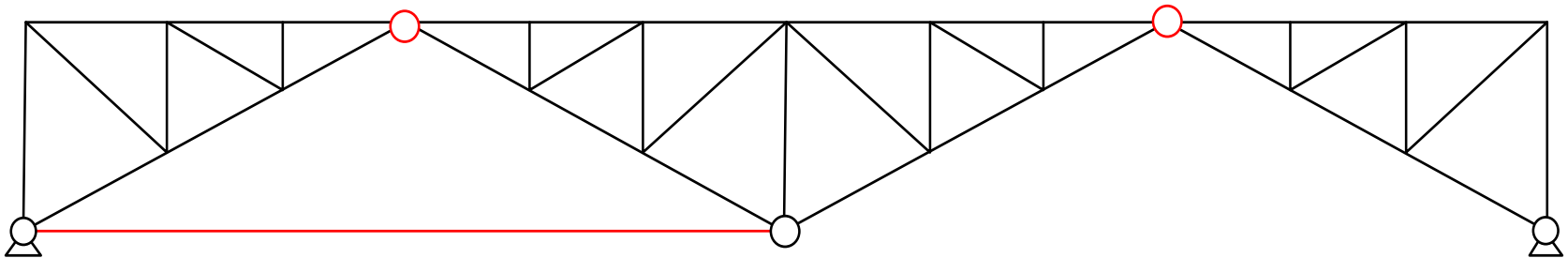
$$n_s=3 \quad r=3 \quad v=6$$

$$b=45 \quad r=3 \quad n=24$$



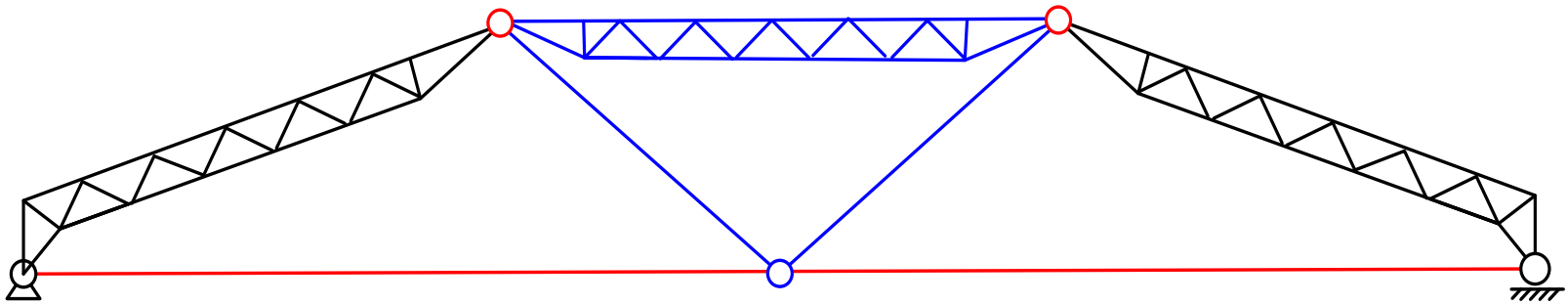
$$n_s=3 \quad r=4 \quad v=5$$

$$b=44 \quad r=4 \quad n=24$$

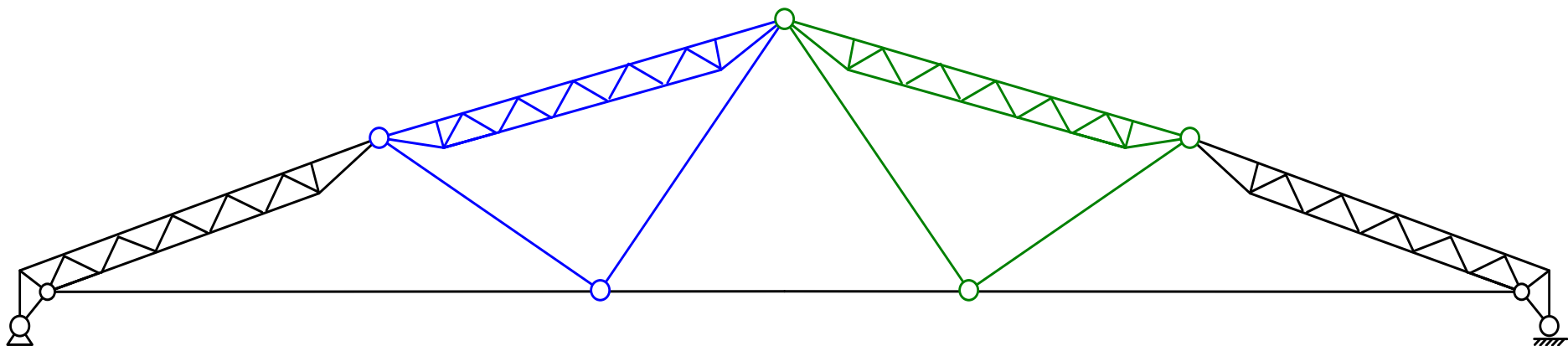


Celosías compuestas. Cubierta atirantada

$$n_s=3 \quad r=3 \quad v=6$$

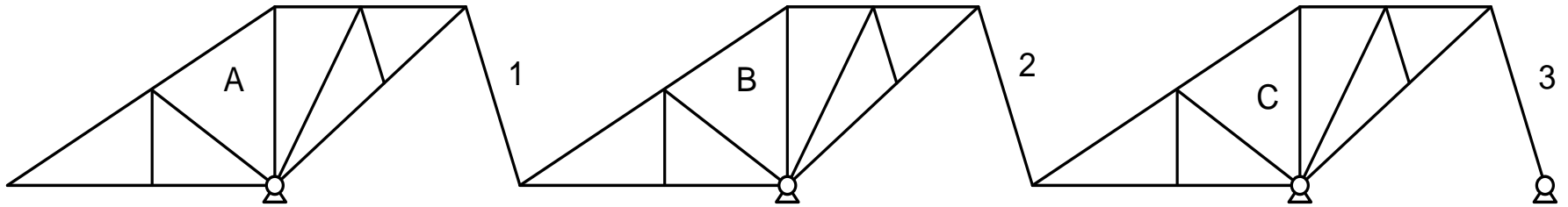


$$n_s=4 \quad r=3 \quad v=9$$



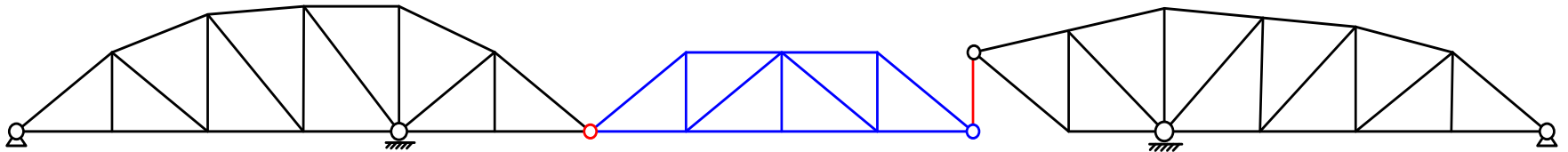
Celosías compuestas

Cercha Houx $n_s=3$ $r=7$ $v=2$



$$N_3 \equiv R_3$$

Puente $n_s=3$ $r=6$ $v=3$ $b=56$ $n=31$



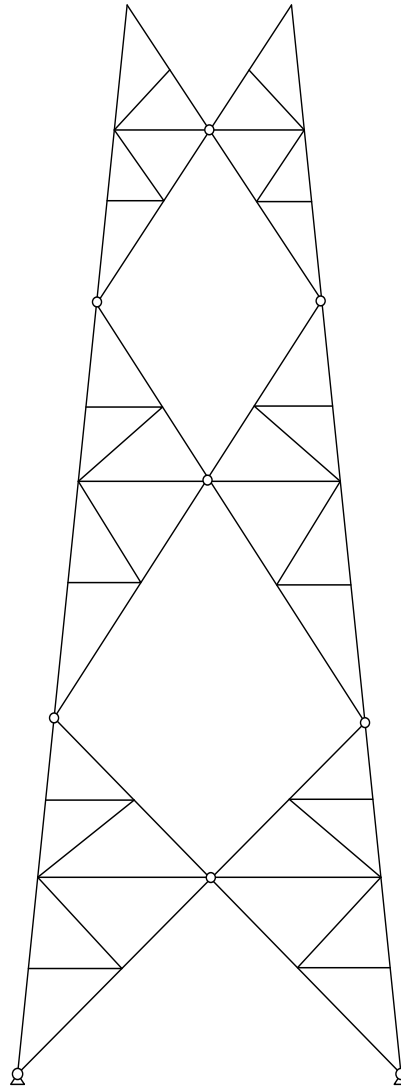
Celosías compuestas. Torres

$$n_s=6 \quad r=4 \quad v=14$$

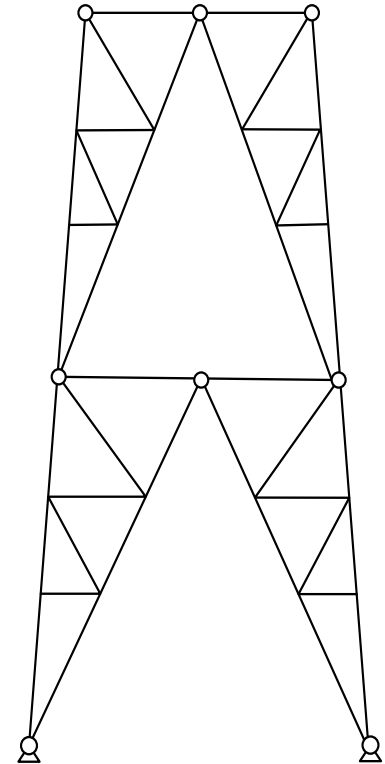
Isostáticas si todos los nudos son articulados

En realidad muchos nudos están empotrados (cordones principales)

El modelo de nudos articulados proporciona una aproximación razonable de los esfuerzos axiales

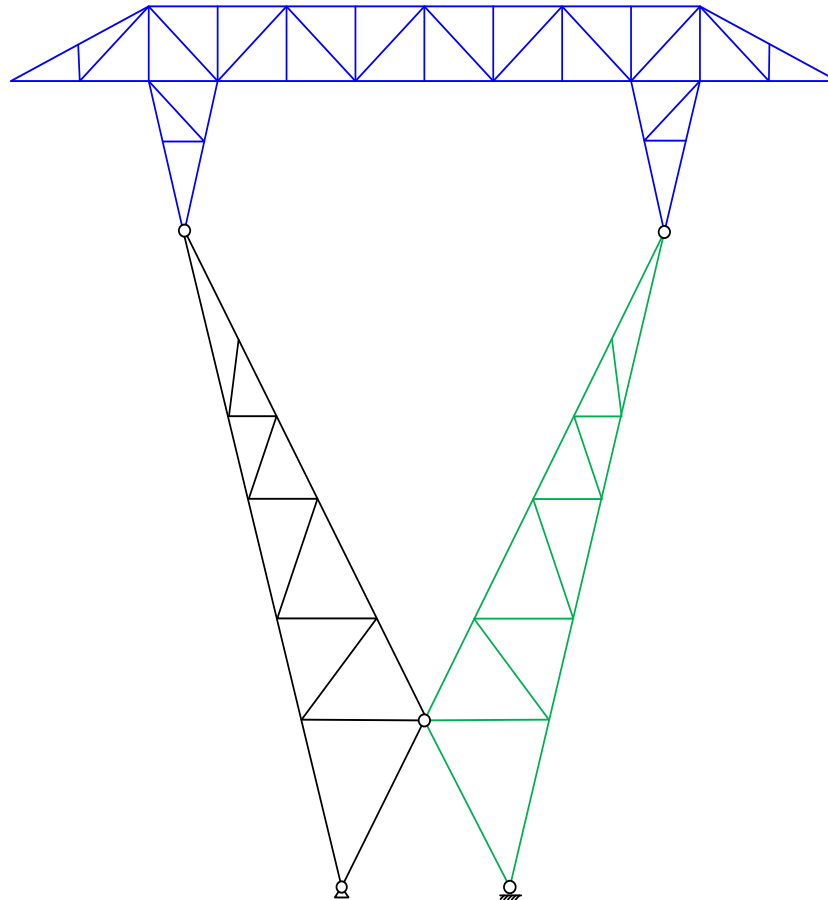


$$n_s=4 \quad r=4 \quad v=8$$



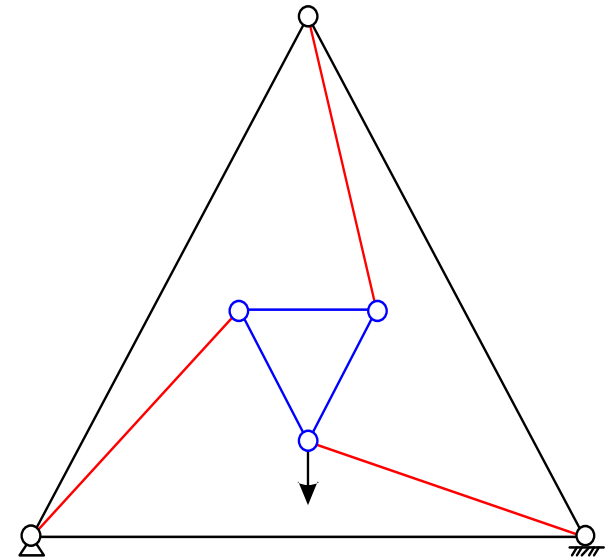
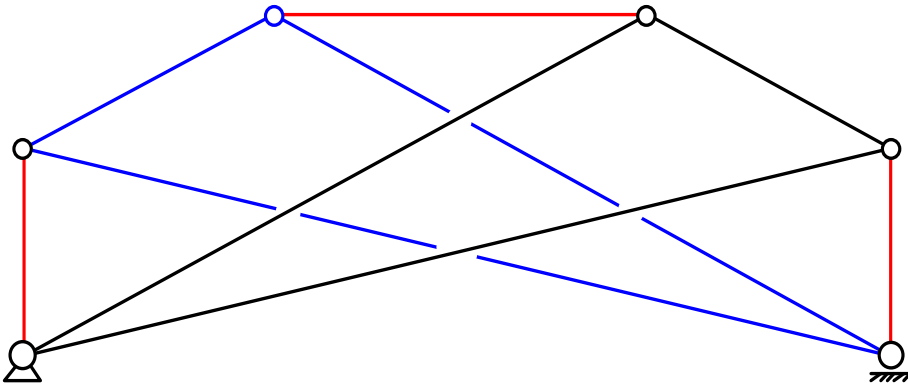
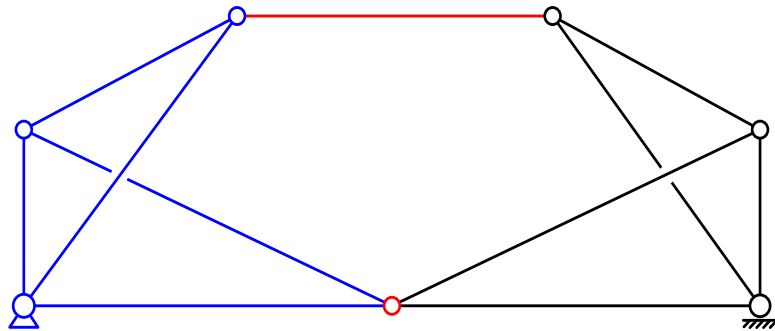
Celosías compuestas

Torre de energía eléctrica (parte superior) $n_s=3$ $r=3$ $v=6$



Celosías compuestas. Varias

$$n_s=2 \quad r=3 \quad v=3$$

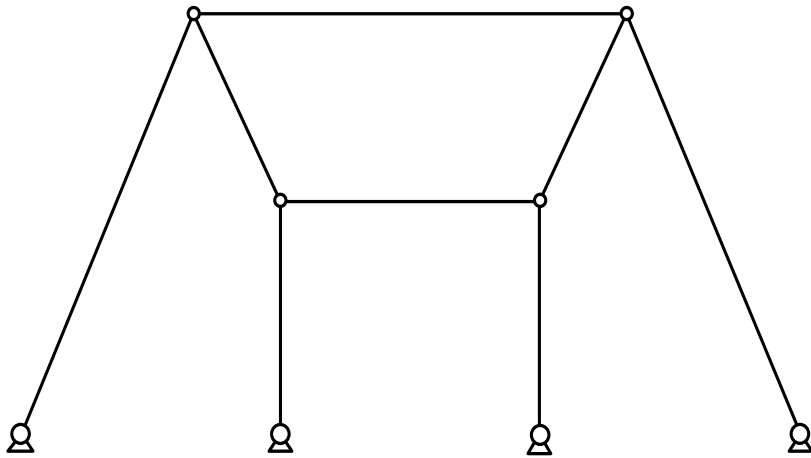


Celosías complejas (1)

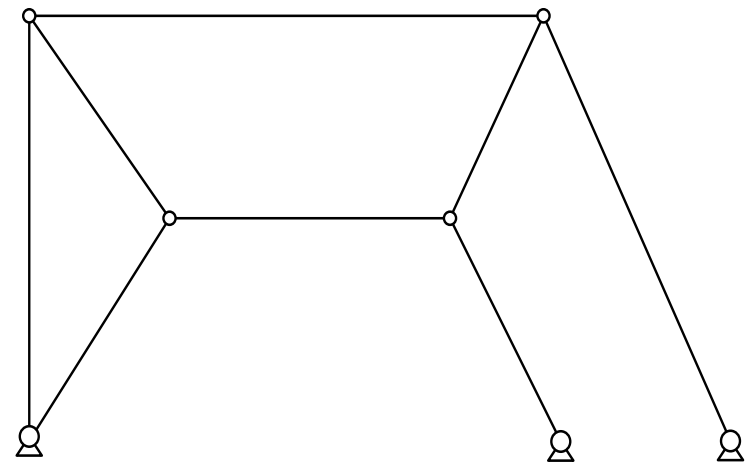
No se identifica **ningún mosaico** de triángulos adosados

Muchas veces no se identifica ningún triángulo

Si cumplen $b+r = 2n$ son isostáticas y estables, pero para una topología dada, son **sensibles a la orientación** de las barras (estables o inestables)



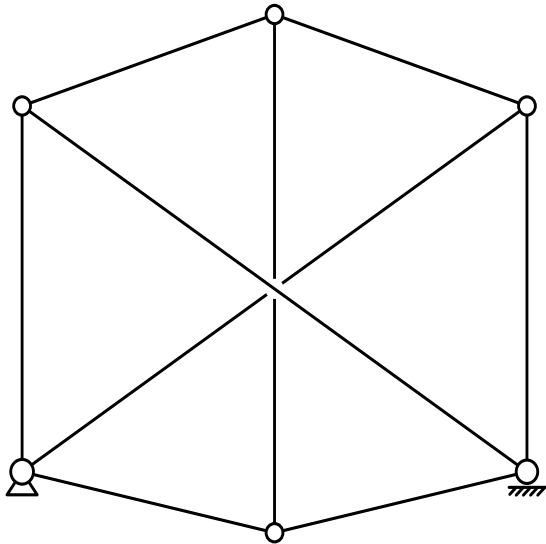
$$b=8 \quad r=8 \quad n=8$$



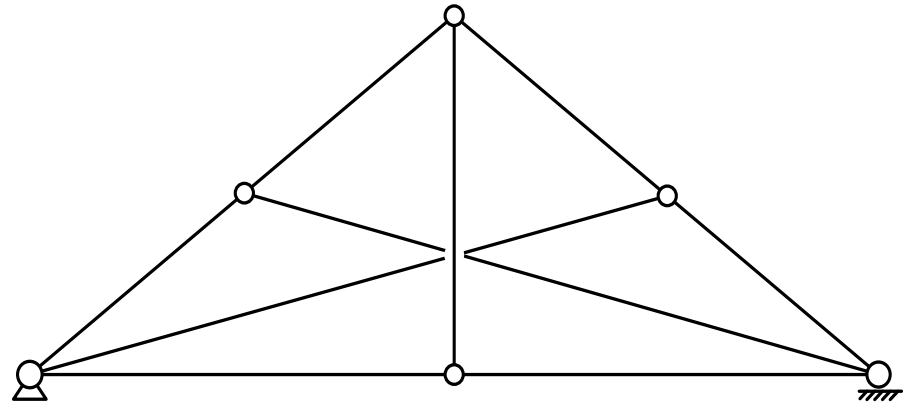
$$b=8 \quad r=6 \quad n=7$$

Celosías complejas (2)

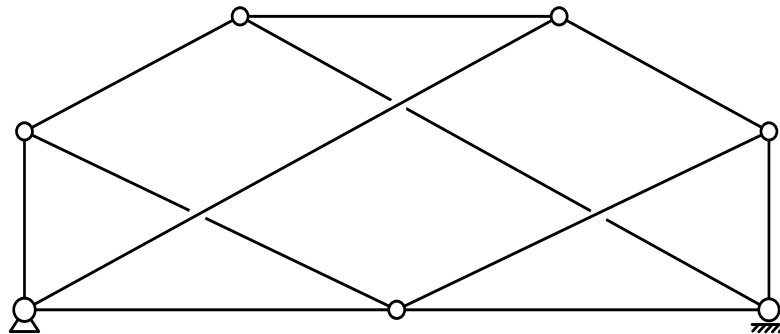
Hexágono con 3 diagonales
que no se cortan



$b=9$ $r=3$ $n=6$



$b=9$ $r=3$ $n=6$



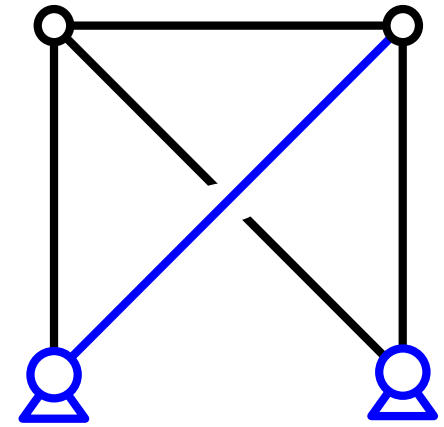
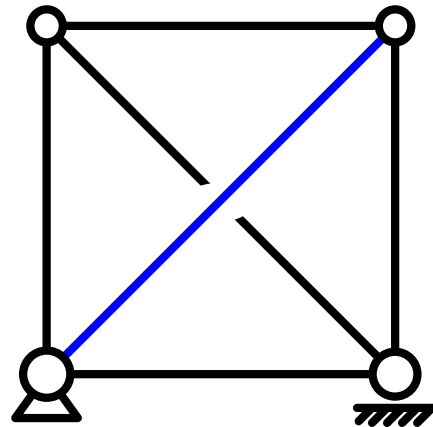
$b=11$ $r=3$ $n=7$

Celosías hiperestáticas

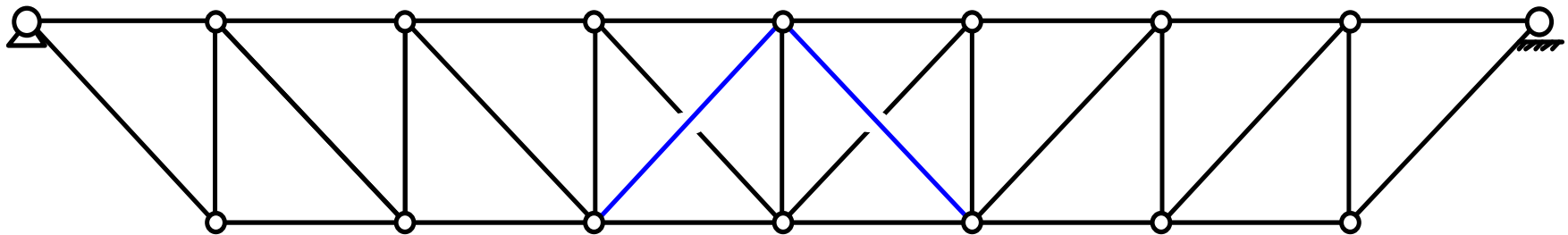
Componente hiperestático habitual: cuadrilátero con doble diagonal

Incluso si se sustenta de forma isostática ($r=3$), es hiperestático (sobra una barra)

$$b=6 \quad r=3 \quad n=4 \quad h=1$$



Barra sustituida por el suelo

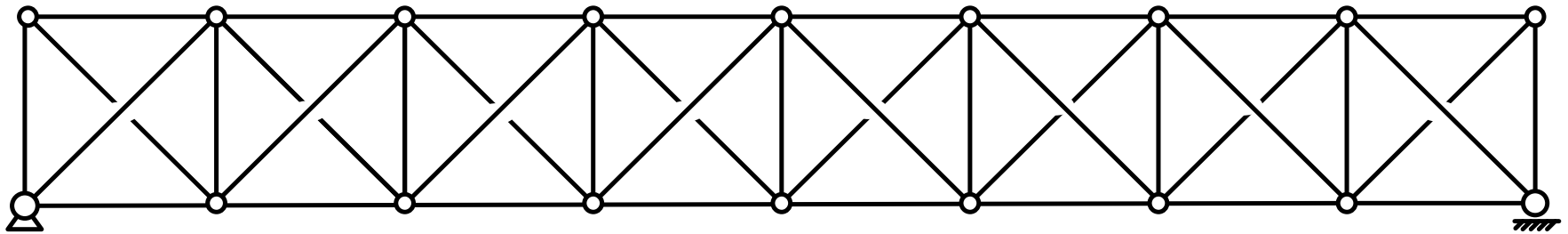


$$b=31 \quad r=3 \quad n=16 \quad h=2$$

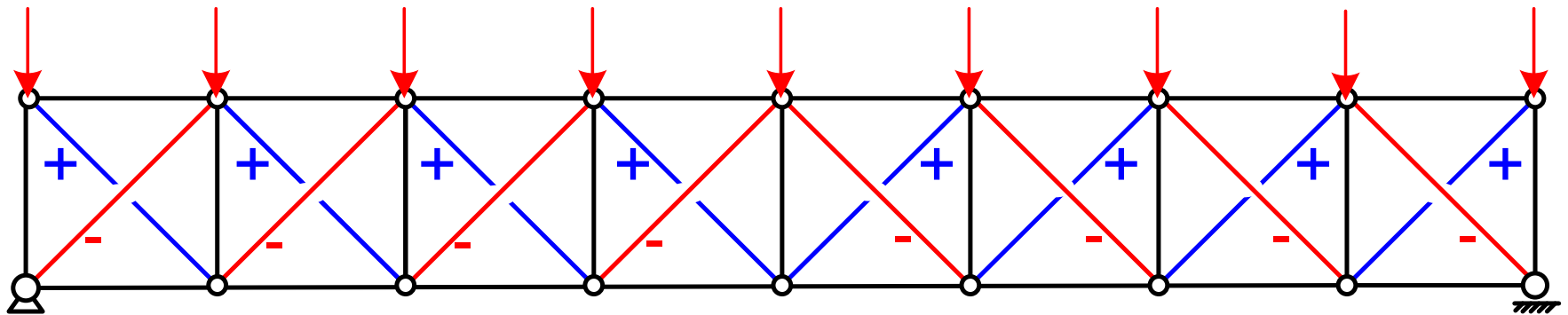
Esquema Pratt reforzado en el centro

Celosías hiperestáticas. Cercha X (1)

Todos los paños con doble diagonal



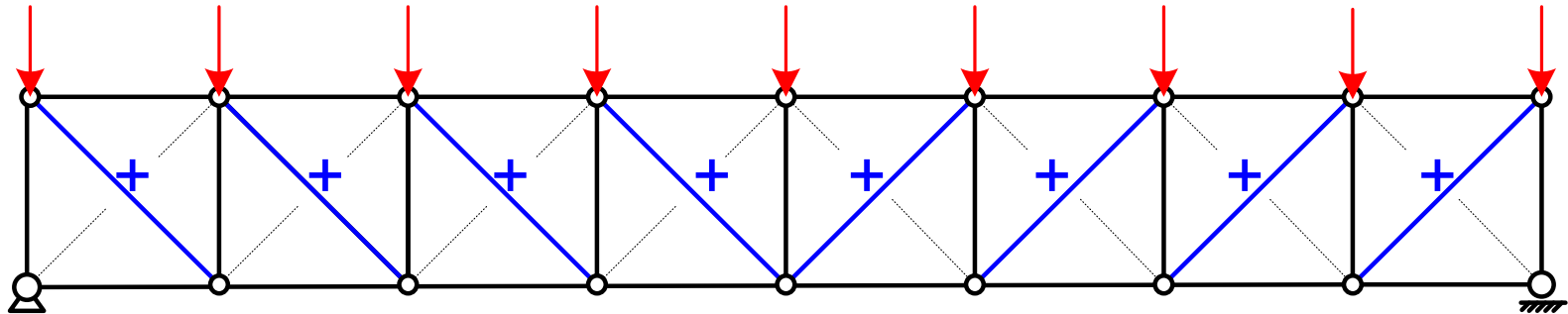
$$b=41 \quad r=3 \quad n=18 \quad h=8$$



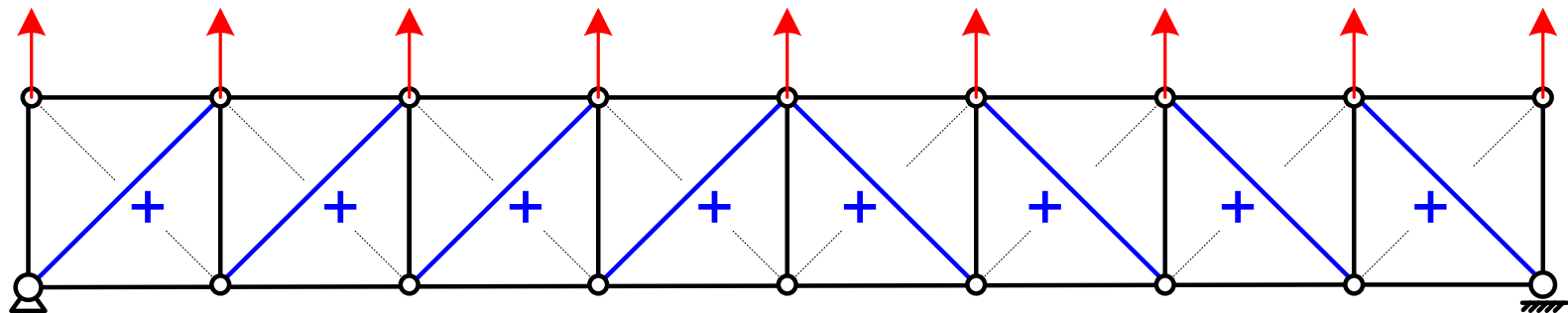
Suposición de diseño habitual: si las diagonales son muy largas y esbeltas, no resisten el esfuerzo axial de compresión (pandeo), y sólo trabajan las diagonales a tracción (se transforma en una celosía Pratt)

Celosías hiperestáticas. Cercha X (2)

Diagonales que trabajan a tracción con carga hacia abajo



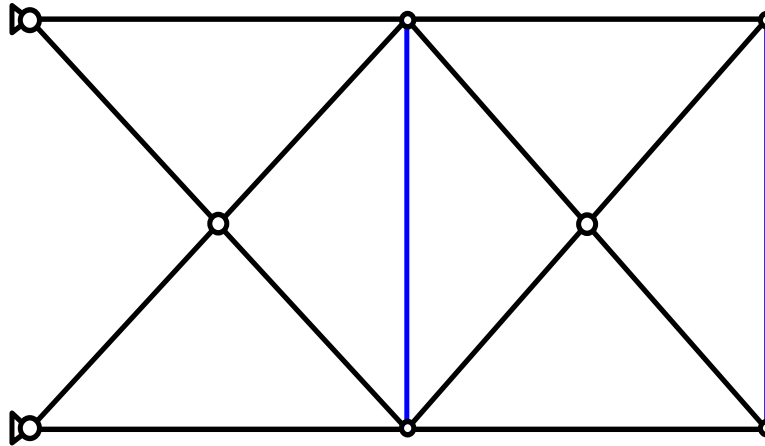
Diagonales que trabajan a tracción con carga hacia arriba



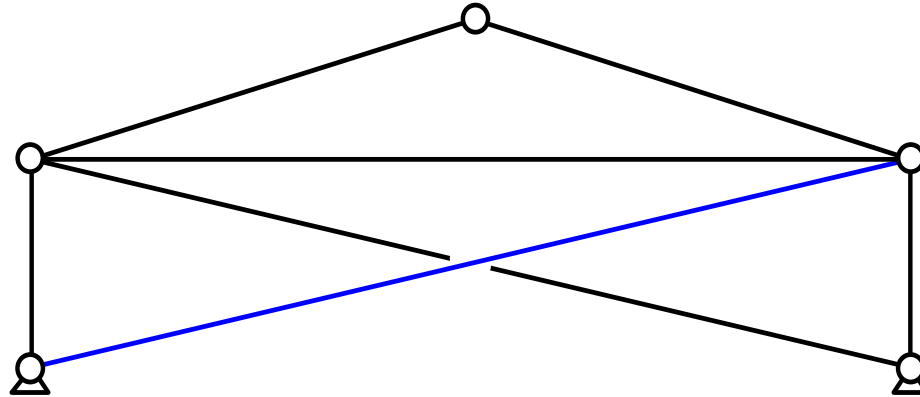
Usada en sistemas contraviento, donde las fuerzas son en direcciones alternas y las diagonales son muy largas (pandean las que están a compresión)

Celosías hiperestáticas

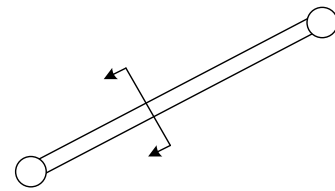
$b=14$ $r=4$ $n=8$ $h=2$



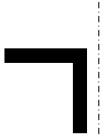
$b=7$ $r=4$ $n=5$ $h=1$



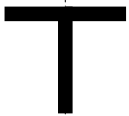
Tipos de perfiles usados en celosías (1)



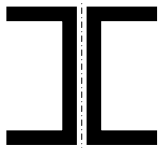
Dos L en paralelo: muy habitual. Cordones, montantes, diagonales. Fácil unión. Atornillada o soldada. Separación=espesor de cartelas



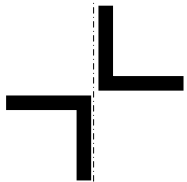
Una L: habitual para montantes y diagonales ligeras. No en cordones. CDG y eje principal de inercia del perfil no están en el plano de la estructura. Situar alternados para respetar estructura plana.



T: muy habitual. Cordones, montantes, diagonales. Soldada. Usar $\frac{1}{2}$ IPE o $\frac{1}{2}$ H mejor que T.



Dos U opuestas: cordones de gran esfuerzo. Fácil unión atornillada o soldada

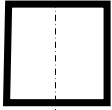
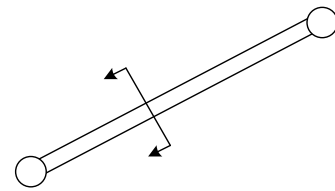


Dos L opuestas. Montantes y diagonales a compresión. Soldada o atornillada.

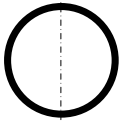


Una L en V. Cargas pequeñas. Preferible montantes y diagonales. Soldada. Unión requiere cortar el vértice del angular.

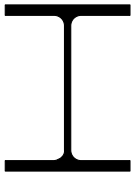
Tipos de perfiles usados en celosías (2)



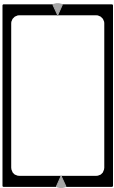
Tubo cuadrado. Unión soldada a tope sencilla. Cordones, montantes, diagonales. Ligero. Económico. $t \geq 2.5 \text{ mm}$ **Tendencia actual.**



Tubo redondo. Buena estética. Cordones, montantes, diagonales. Ligero. Uniones soldadas más complicadas. ($t \geq 2.5 \text{ mm}$)



IPE, HE. Celosías con grandes esfuerzos o muy pesadas (puentes). Cordones, montantes, diagonales. Unión soldada a tope.

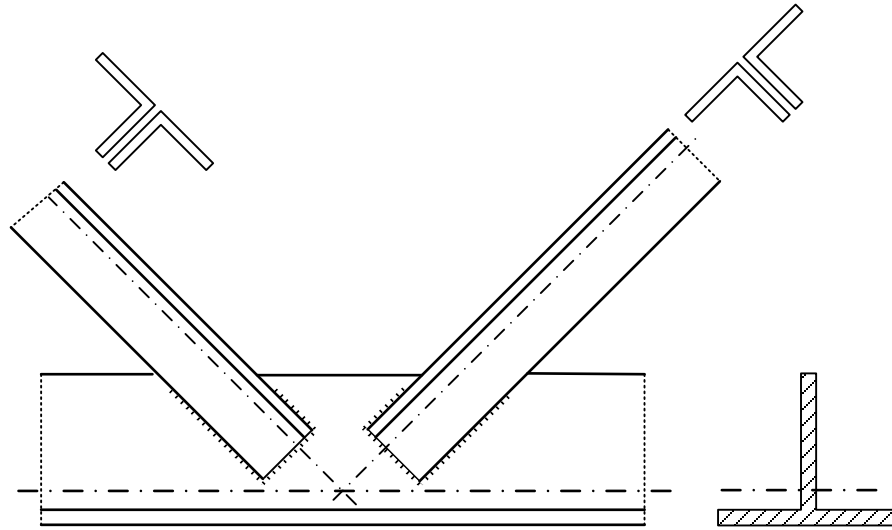


Dos U soldadas en cajón. Piezas de gran esfuerzo. Cordones, montantes, diagonales. Unión soldada a tope

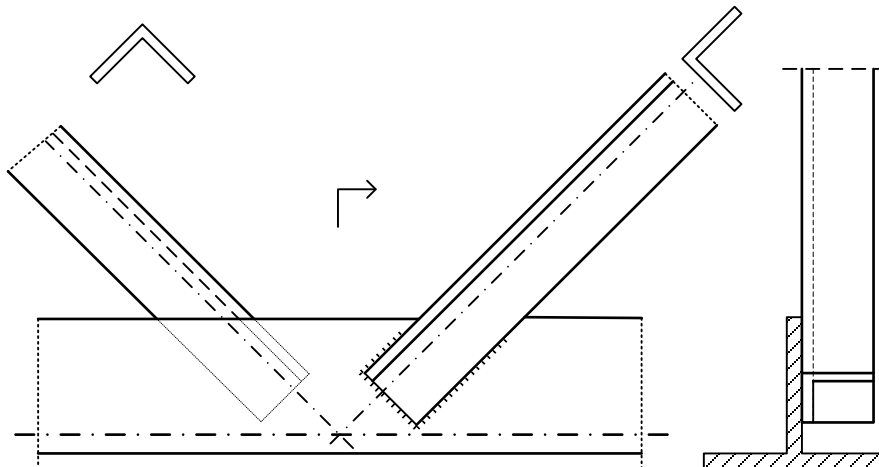


Redondo macizo. Tensor. Elementos siempre a tracción.

Detalles de nudos – Unión directa entre perfiles



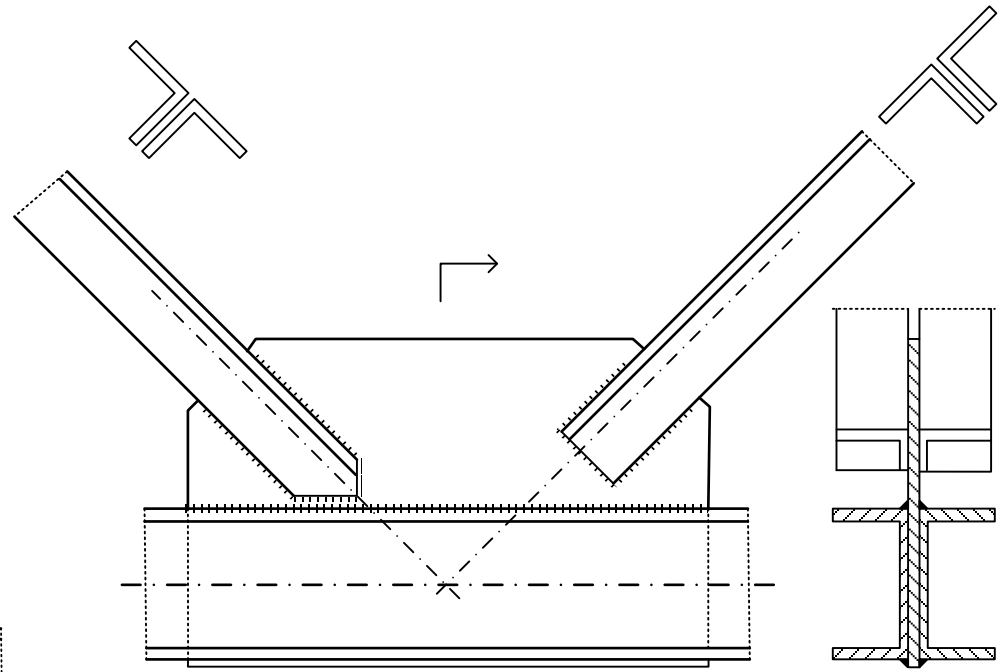
Nudo en solape
Cordón: T
Diagonales: 2L



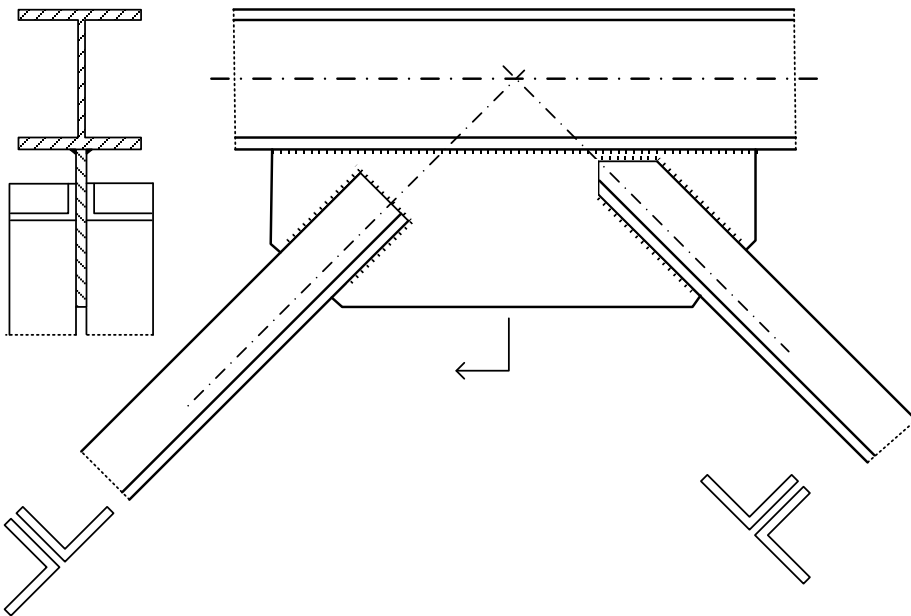
Nudo en solape.
Cordón: T
Diagonales: L simple
alternada

Detalles de nudos – Cartelas (1)

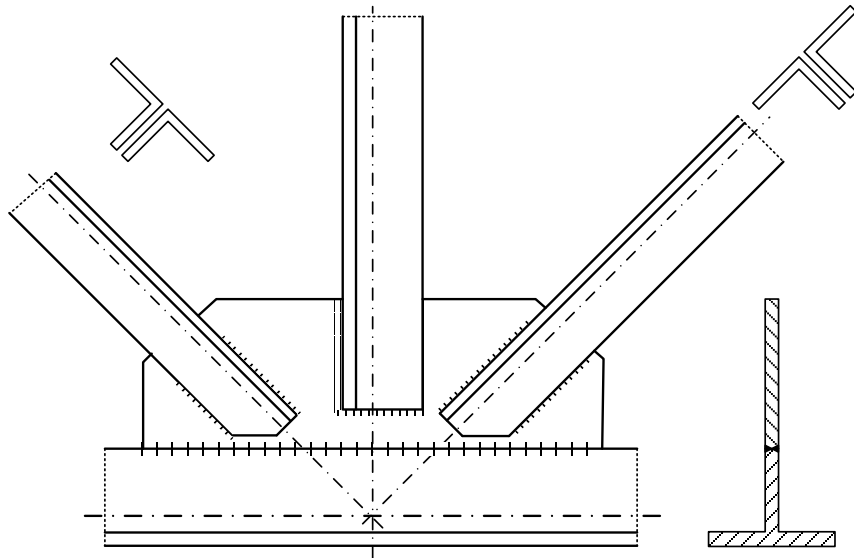
Nudo con cartela.
Cordón: 2 UPE



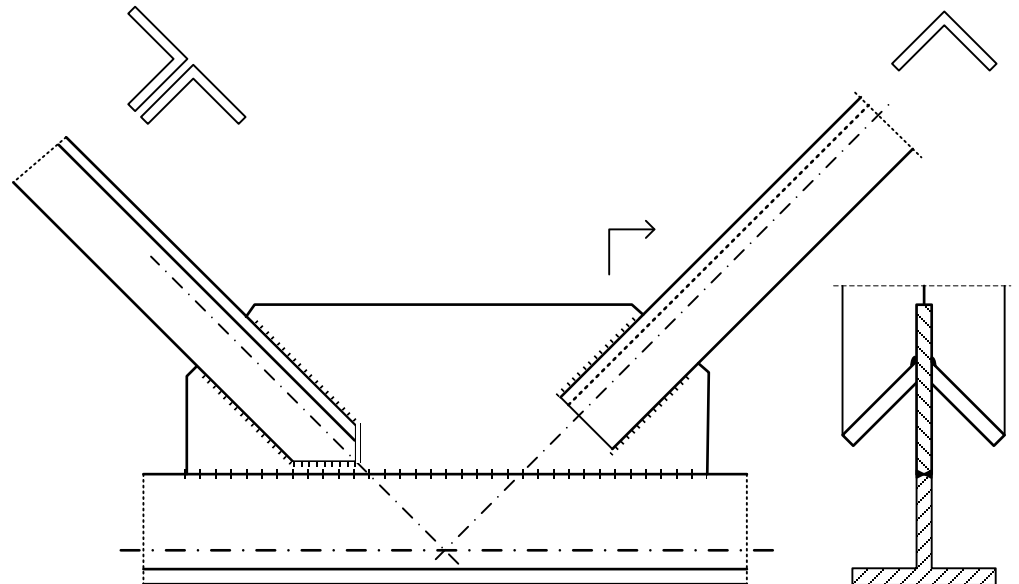
Nudo con cartela.
Cordón: H



Detalles de nudos – Cartelas (2)

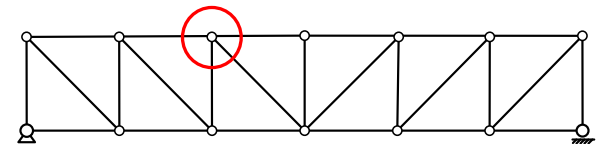
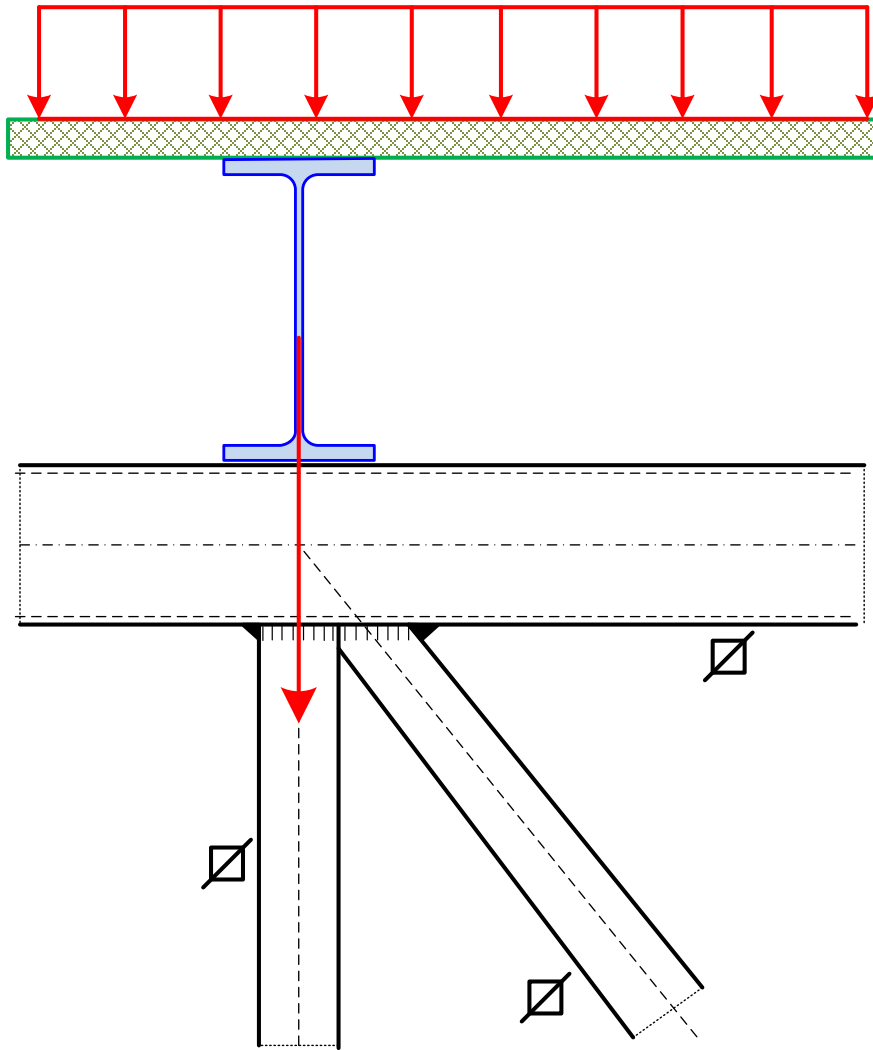


Nudo con cartela
Cordón en T

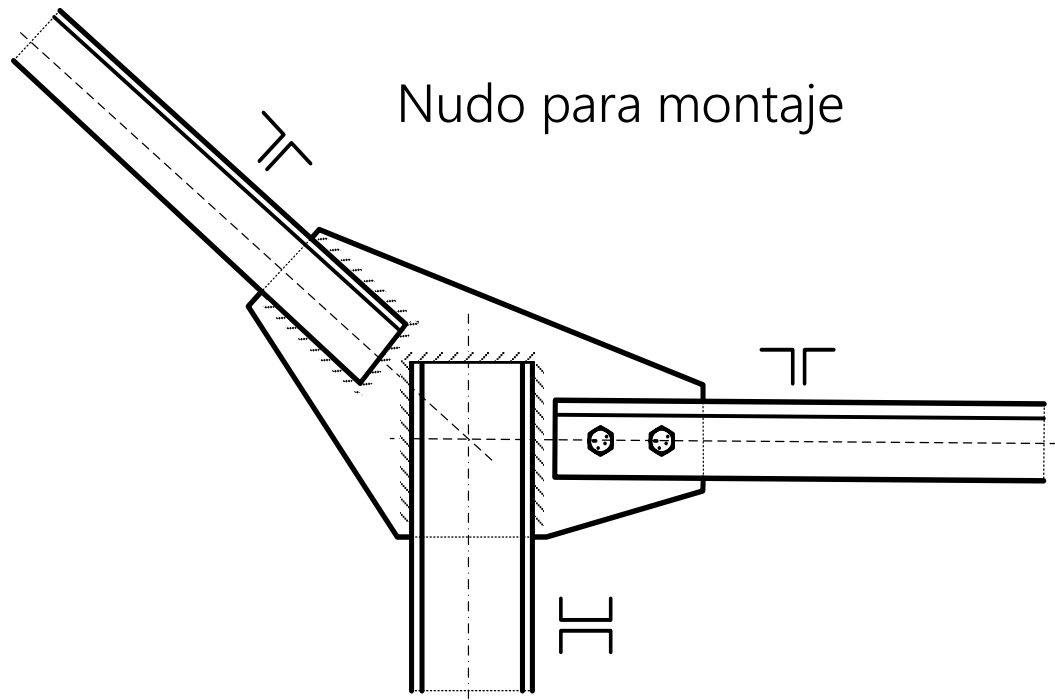


Nudo con cartela.
Cordón en T
L en V invertida

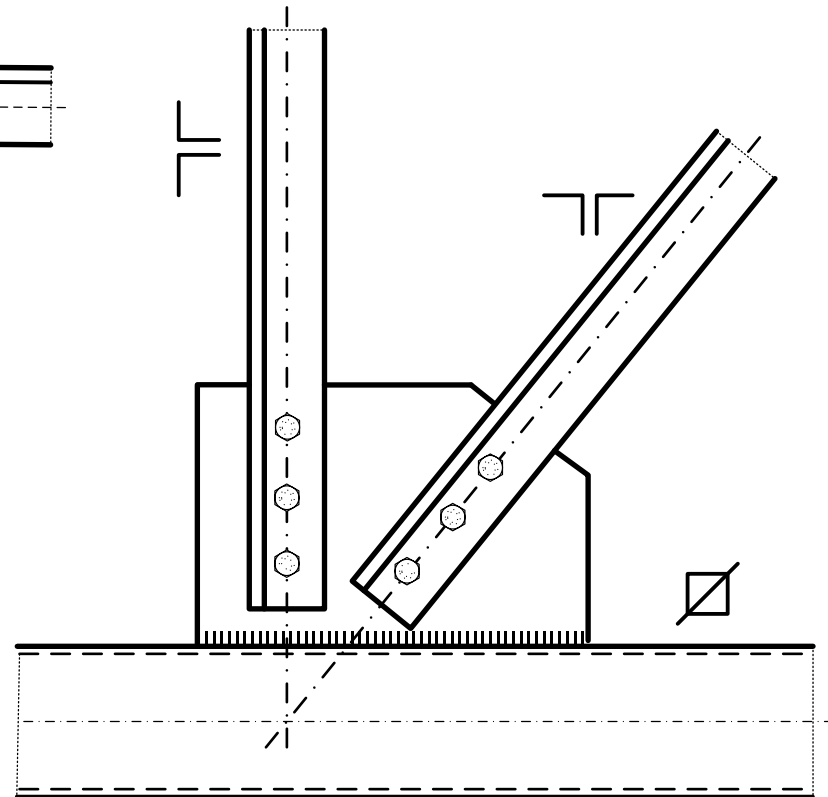
Celosía de tubo. Nudo con apoyo de viga correa



Detalles de nudos

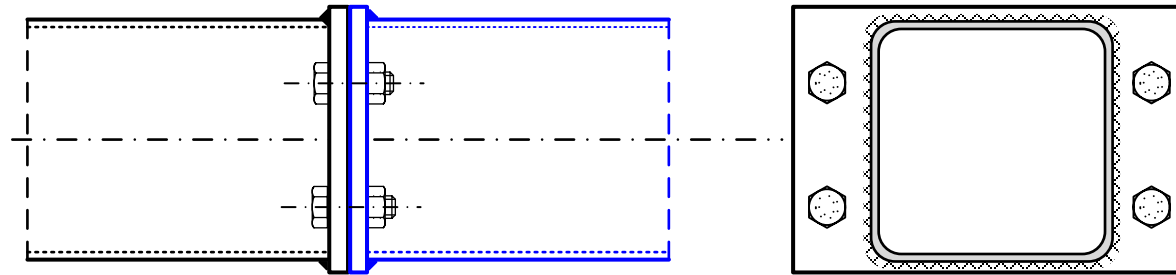


Nudo con cordón de tubo y 2L

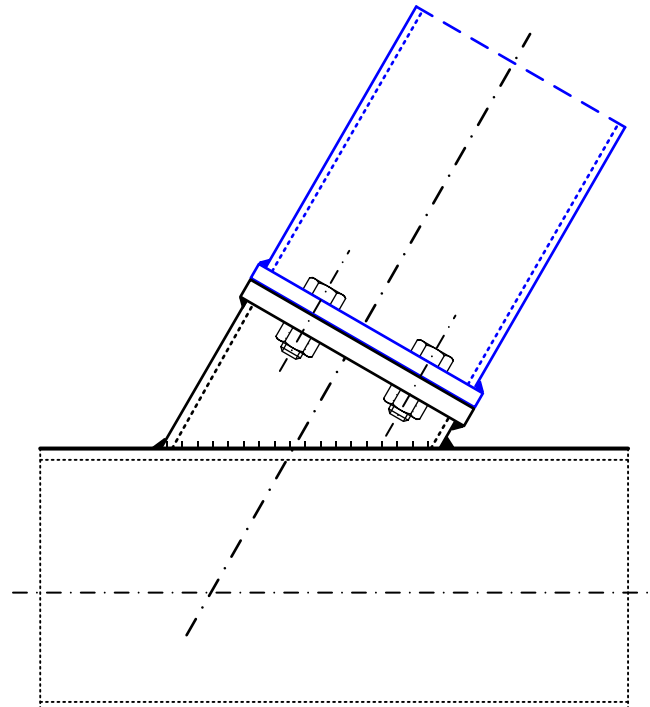


Uniones atornilladas entre tubos

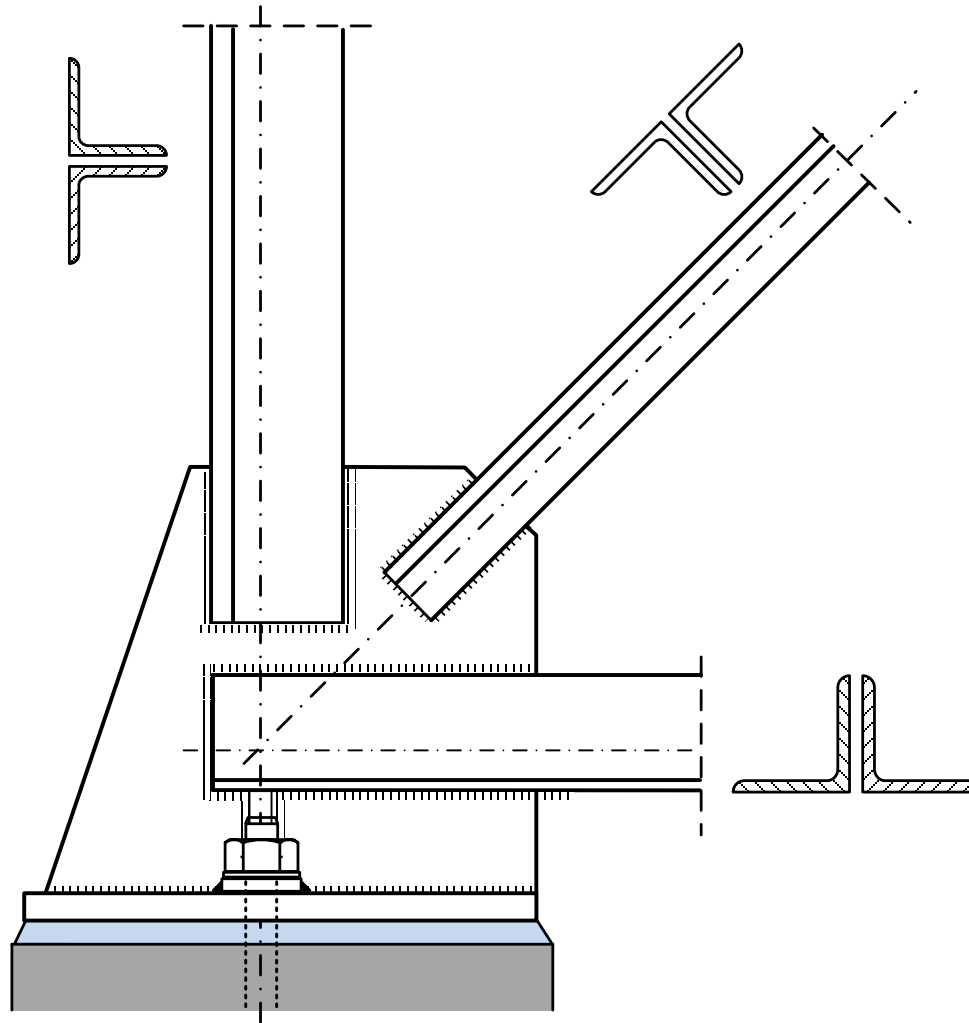
Unión de prolongación entre tubos, no en nudo



Unión de un tubo en un nudo



Detalles de nudos - Apoyo



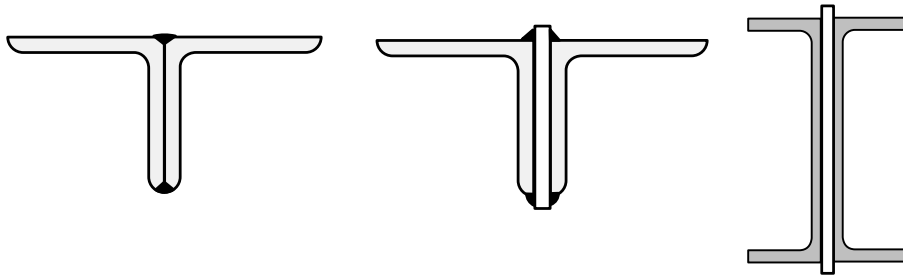
Barra compuesta a compresión

Solución muy habitual con 2 perfiles L o U

Perfiles en contacto, o próximos, unidos mediante chapas de forro discontinuas (soldadura o tornillos). Comprobar como un elemento individual si:

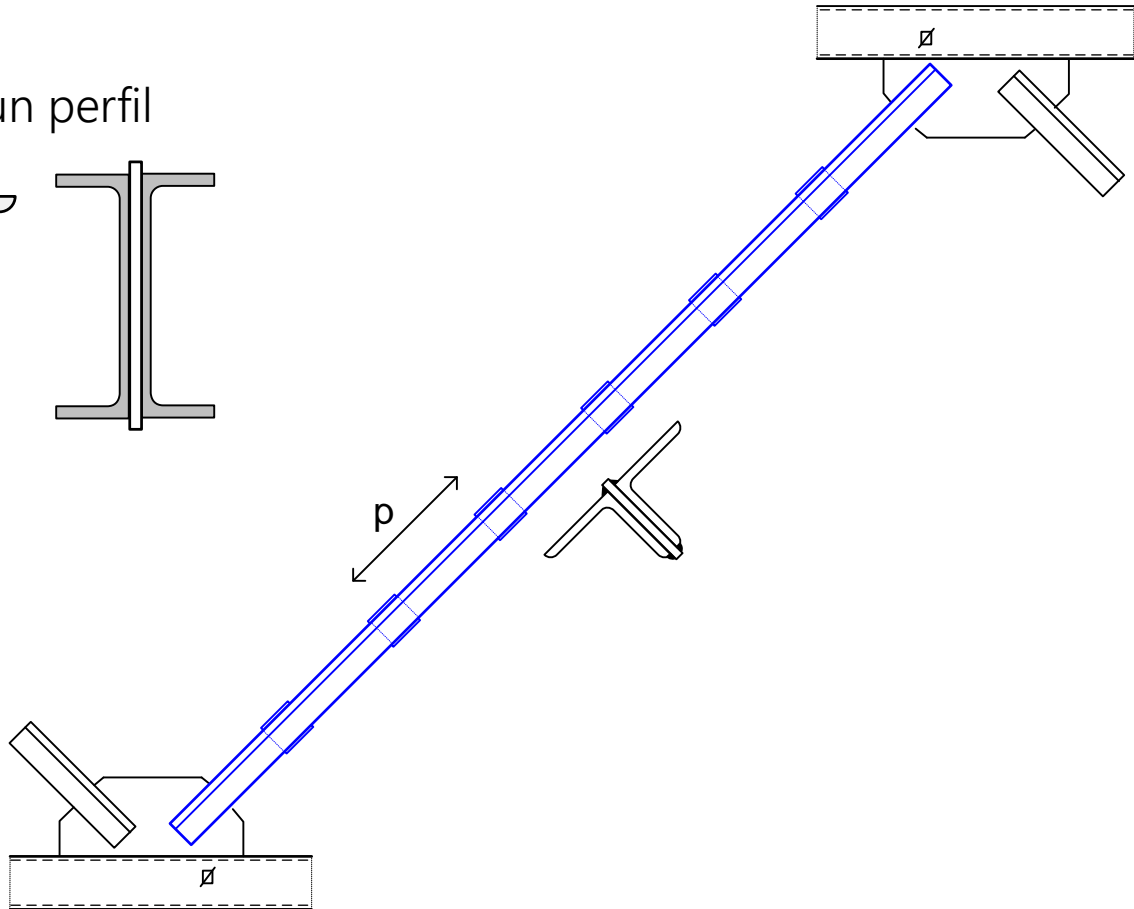
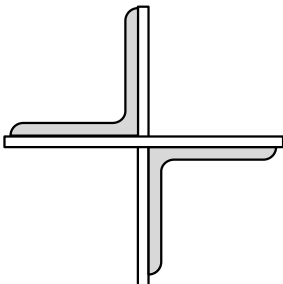
$$p < 15 i_{min}$$

i_{min} : radio de giro mínimo de un perfil



Perfiles en X unidos por dos presillas intermedias a 90°

$$p < 70 i_{min}$$



Cálculo de esfuerzos en celosías (1)

Clasificar. Hallar b, n, r, v, n_s

1. Isostática ($b + r = 2n$): equilibrio de los n nudos

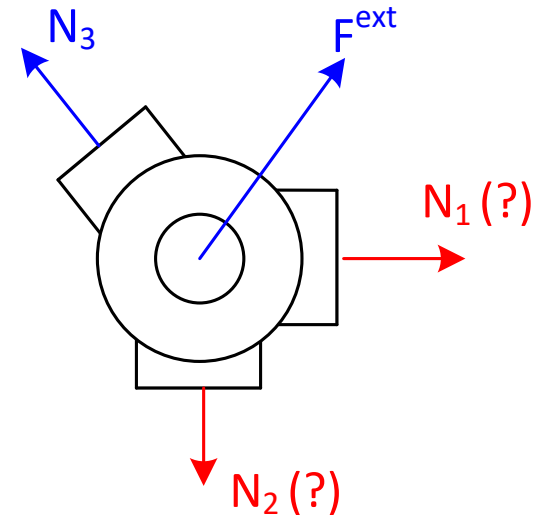
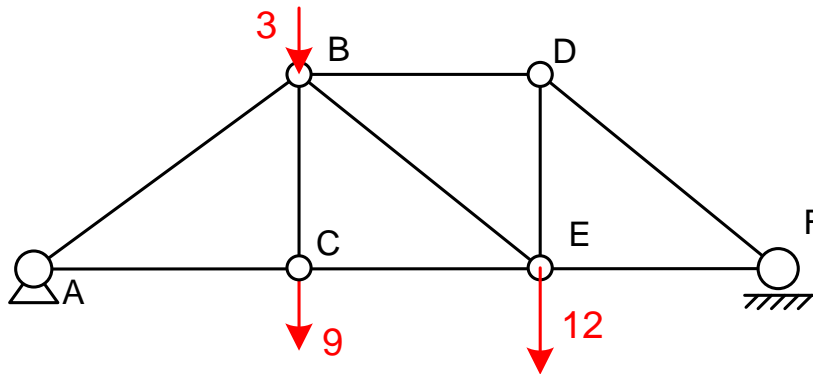
Siempre se pueden aplicar de forma **conjunta** las $2n$ ecuaciones de $\sum F_X \sum F_Y$

1.1 Celosía simple:

Planteamiento **individual** del equilibrio de los n nudos uno tras otro:
2 ecuaciones en cada nudo ($\sum F_X \sum F_Y$).

Buscar nudos con sólo 2 esfuerzos desconocidos

Ver ejemplo: *Celosía simple de 3 vanos*



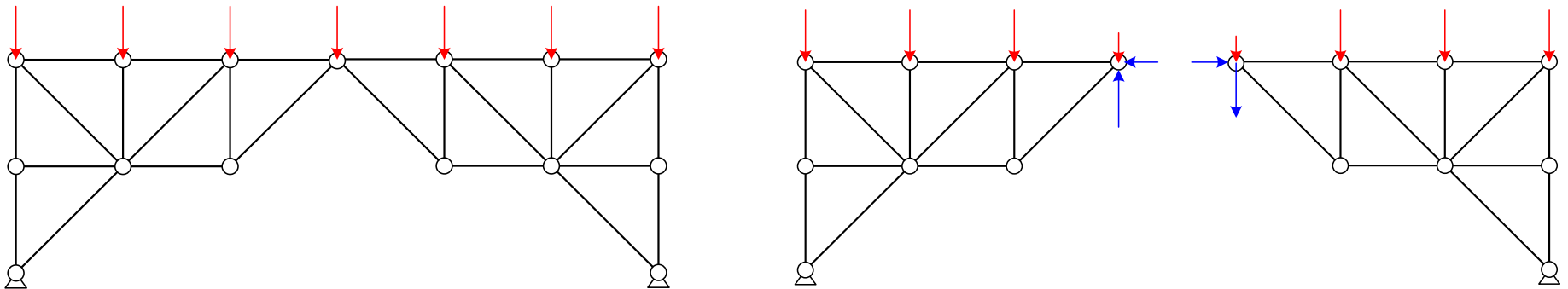
Cálculo de esfuerzos en celosías (2)

1.2 Celosía compuesta: $3 n_s = r + v$

Aislar las n_s celosías simples \rightarrow $3 n_s$ ecuaciones de equilibrio: calcular los v vínculos y las r reacciones

Para cada celosía simple: aplicar equilibrio de los nudos

Ver ejemplos: *Celosía compuesta 3*, *Celosía compuesta para puente*



1.3 Celosía compleja: Método de la barra sustituida

2. Hiperestática: método de flexibilidad o de rigidez.

Métodos de cálculo de esfuerzos en celosías

Tipo	Método de cálculo					
	Basados sólo en las ecuaciones de la estática				Flexibilidad	Rigidez
	Equilibrio de los nudos Planteamiento individual n veces x 2 ecs.	Equilibrio de los nudos Planteamiento conjunto (2n) ecs.	Secciones: Aislar trozos de la celosía	Barra sustituida		
Isostática simple	Siempre	Siempre	Puede ayudar a veces	No	No aplicable	Siempre
Isostática compuesta	No (excepto en algún caso particular)	Siempre	Siempre. Aislar las celosías simples	No	No aplicable	Siempre
Isostática compleja	No	Siempre	No	Siempre	No aplicable	Siempre
Hiperestática	No	No	No	No	Siempre	Siempre

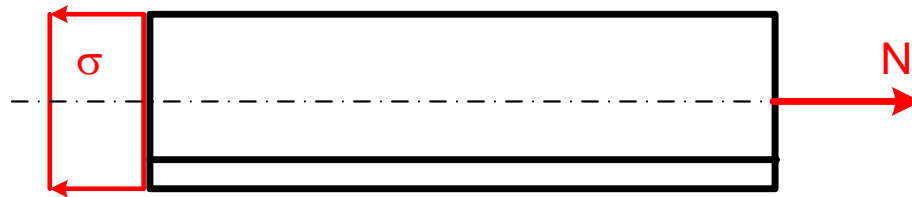
Dependencia de las magnitudes en celosías

Tipo	Esfuerzo axial (N) depende de:	Tensión ($\sigma = \frac{N}{A}$) depende de:	Deformación (Δ) depende de:
ISOS	<ul style="list-style-type: none"> Fuerzas exteriores Ángulos entre las barras NO influyen: <ul style="list-style-type: none"> Longitud de las barras Material Área de las barras Temperatura Deformaciones de los apoyos 	<ul style="list-style-type: none"> Esfuerzo axial (N) Área de la barra (A) NO influyen: <ul style="list-style-type: none"> Longitud de las barras Material (E) Temperatura Deformaciones de apoyos 	<ul style="list-style-type: none"> Esfuerzos en las barras (N) Flexibilidad de las barras $\frac{L}{EA}$
HIPER	<ul style="list-style-type: none"> Fuerzas exteriores Ángulos entre las barras Rigidez axial relativa entre barras: $\frac{\left(\frac{EA}{L}\right)_i}{\left(\frac{EA}{L}\right)_j}$ <ul style="list-style-type: none"> Temperaturas $E A \alpha T$ Deformaciones de los apoyos Δ_a $E A \frac{\Delta_a}{L}$	<ul style="list-style-type: none"> Esfuerzo axial (N) Área de la barra (A) 	<ul style="list-style-type: none"> Temperaturas: $\alpha T L$ Deformaciones de los apoyos Δ_a

Comprobación de estados límite de barras de celosías en acero

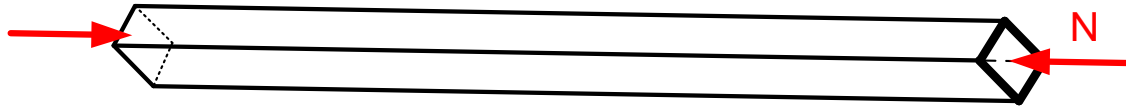
Resistencia de las secciones a esfuerzo axial de tracción

EN 1993-1-1 §6.2.3



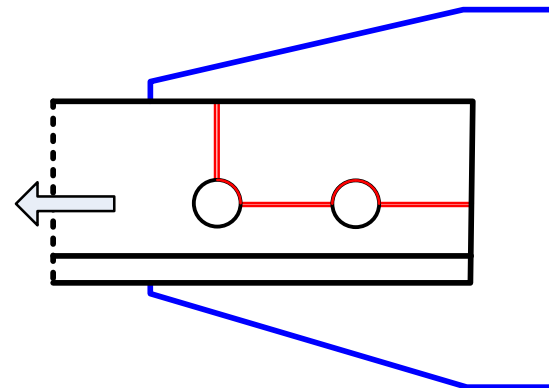
Estabilidad de la pieza en su conjunto (pandeo)

EN 1993-1-1 §6.3



Rotura de las zonas de las barras taladradas, en uniones

EN 1993-1-8 §3



Observación al modelo ideal de nudos articulados (1)

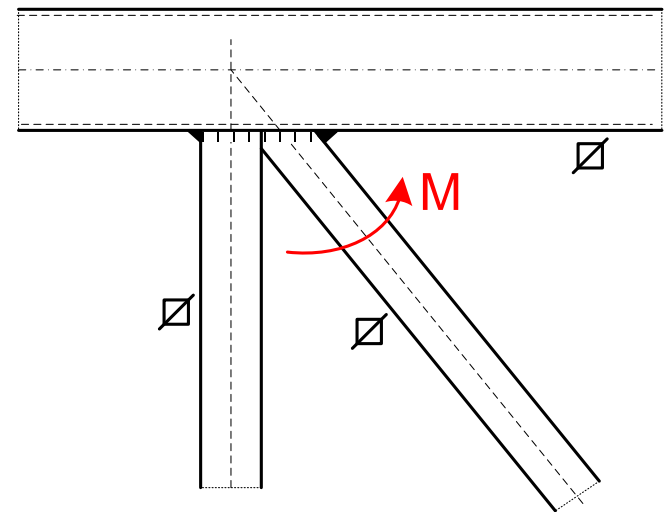
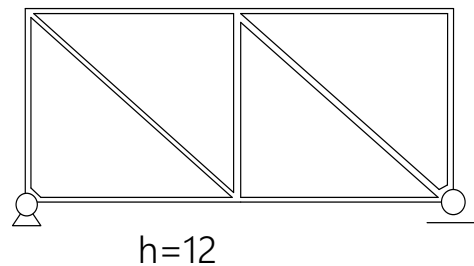
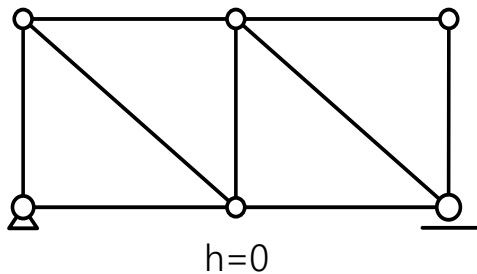
Modelo de nudos articulados: facilidad de cálculo (sólo incógnita N axial)

En realidad muchos nudos (casi siempre) se ejecutan soldados (economía), en particular en estructuras de tubos.

Hay posibilidad de transmitir un pequeño momento entre las barras (momento secundario), y éstas trabajan a tracción y algo de flexión.

Se pueden calcular los momentos secundarios que aparecen, empleando un modelo de nudos rígidos (transformar celosía \rightarrow pórtico).

Muy complejo: mediante programas de computador



Observación al modelo ideal de nudos articulados (2)

A pesar de ello, **el modelo de nudos articulados es válido si:**

Las cargas están sólo en los nudos: no hay flexión local de las barras

La inercia a flexión de los perfiles es pequeña ($L \gg h$)

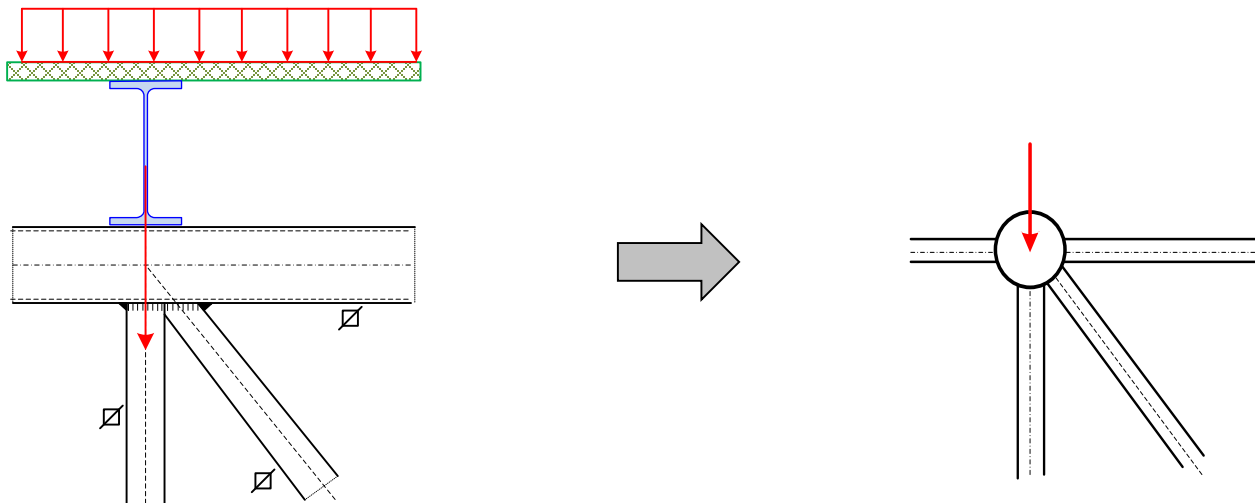
Triangulación regular y ángulos entre barras $> 30^\circ$.

No hay excentricidad: los ejes de las barras se cortan en un punto (nudo)

Cargas \sim estáticas

Estas condiciones se suelen cumplir en la práctica en muchos casos (cubiertas de edificios industriales...): los momentos secundarios son despreciables

Modelo de nudos articulados está permitido por EN 1993-1-8 §5.1.5



Cálculo de celosías con perfiles tubulares según EC3

EN 1993.1.8 (5.1.5) permite analizar celosías soldadas por perfiles huecos circulares (CHS) o rectangulares (RHS) con nudos excéntricos.

Momentos secundarios en las uniones debidos a la rigidez de la unión soldada: pueden despreciarse si:

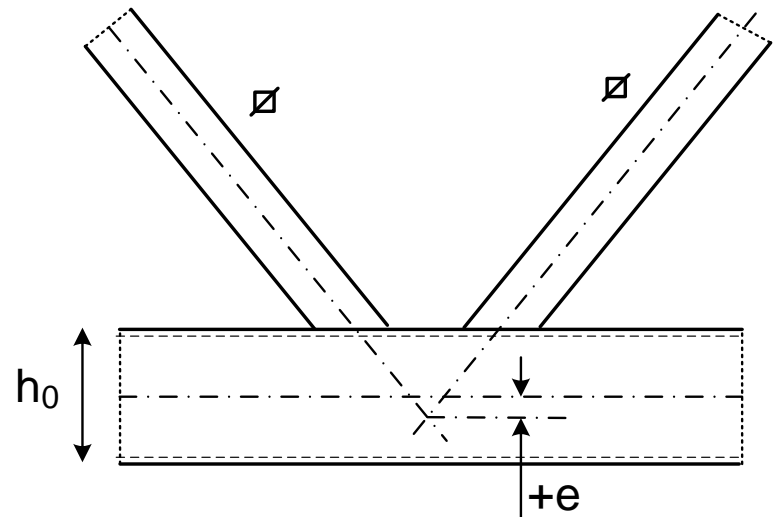
(1) Diseño de nudos según apartado 7, y tablas 7.1, 7.8, etc.

(2) Longitud > 6 canto

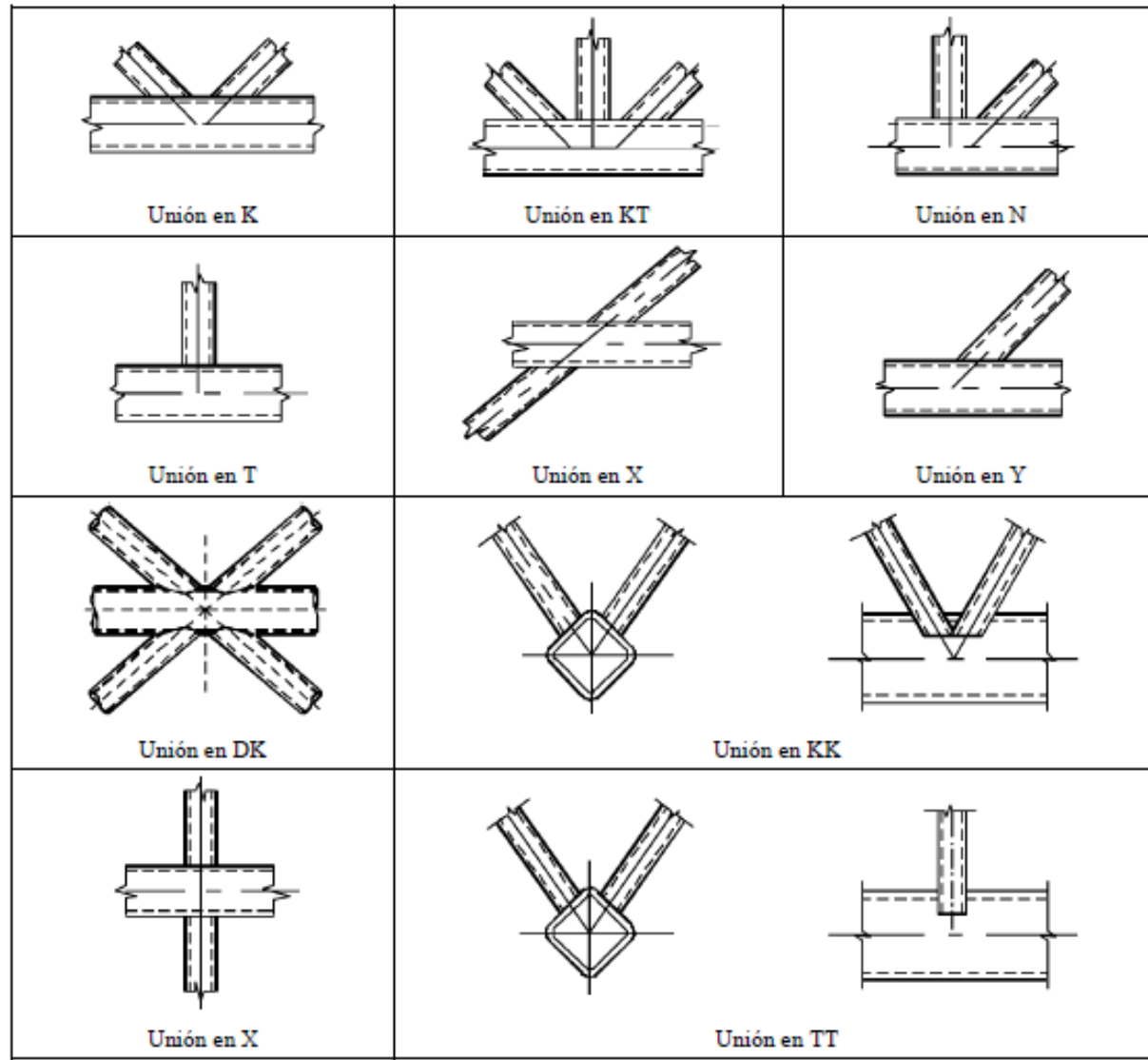
(3) Excentricidad pequeña:

$$-0.55 h_0 \leq e \leq 0.25 h_0$$

$$-0.55 d_0 \leq e \leq 0.25 d_0$$



Cálculo de celosías con perfiles tubulares según EC3

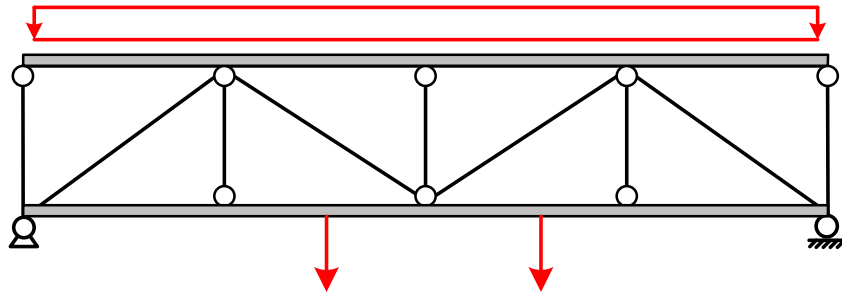


Algunos tipos de uniones en celosías con perfiles huecos. Reproducido de Tabla 7.1 EN 1993-1-8

Cálculo de celosías con perfiles tubulares según EC3

Momentos debidos a las fuerzas aplicadas entre de los nudos: deben tenerse en cuenta. Si se cumplen las condiciones (1) a (3) anteriores:

- Las diagonales pueden suponerse articuladas a los cordones
- Los cordones pueden suponerse vigas continuas apoyadas en los nudos



Momentos debidos a la excentricidad. Si ésta es pequeña:

- Pueden despreciarse en cordones a tracción y diagonales
- Deben considerarse en cordones a compresión: repartir los momentos a cada lado del cordón en proporción a I/L

Si la excentricidad es grande: deben considerarse los momentos. Repartirlos entre todas las piezas unidas según I/L