

# Análisis de estructuras con no linealidad geométrica

**Juan Tomás Celigüeta**

*Escuela Superior de Ingenieros*

*Universidad de Navarra*

**tecnun**

CAMPUS TECNOLÓGICO DE LA UNIVERSIDAD DE NAVARRA  
NAFARROAKO UNIBERTSITATEKO CAMPUS TEKNOLOGIKOA

Copyright © Juan Tomás Celigüeta Lizarza, 2009

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita del titular del copyright, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático y la distribución de ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo públicos.

ISBN: 978-84-921970-3-3

Depósito Legal: D.L. SS-734-2009

Primera edición, mayo 2009.

Segunda edición, enero 2010.

---

Impreso en España - *Printed in Spain*

Imprime: UNICOPIA C.B.  
Manuel Lardizábal, 13  
20018 San Sebastián – Gipuzkoa

# Prólogo

Este texto presenta el estudio del comportamiento de estructuras en las que las cargas aplicadas producen deformaciones de gran magnitud, de tal manera que no puede aceptarse la hipótesis de que la posición deformada final coincide con la posición inicial. Este hecho hace que la respuesta de la estructura sea altamente no lineal, siendo habitual denominar a este fenómeno como no linealidad geométrica, pues está originada en el cambio finito de la configuración geométrica de la estructura debido a la presencia de deformaciones no infinitesimales.

El texto tiene una clara vocación docente, y de hecho se ha confeccionado a partir de una serie de lecciones impartidas en un curso de doctorado sobre temas avanzados en el método de los elementos finitos. Por esta razón está orientado a su uso por estudiantes de posgrado que deseen obtener un conocimiento teórico preciso sobre el análisis de estructuras con grandes deformaciones, tanto en el caso de estructuras reticulares de vigas y barras, como de estructuras continuas planas o curvas. En este sentido se ha pretendido exponer cada tema de forma completa, desde los fundamentos teóricos hasta la formulación matricial detallada, previa a la implementación computacional práctica.

Para la comprensión de los distintos temas expuestos es necesario tener unos conocimientos previos mínimos de mecánica de sólidos y elasticidad, así como sobre el método de rigidez y sobre los fundamentos teóricos del método de los elementos finitos. Desde el punto de vista matemático es necesario manejar con soltura el álgebra de matrices y la notación tensorial, así como conocer los fundamentos de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones algebraicas y diferenciales.

El texto está ordenado en la forma clásica en las obras sobre mecánica de sólidos. Tras una breve introducción al problema, se dedica el capítulo 2 a la medida de la deformación finita del sólido, que es fundamental en el estudio de las grandes deformaciones, pues es necesario emplear medidas específicas no lineales de naturaleza tensorial, en las cuales radica la complejidad del problema. El capítulo 3 se dedica a la medida de los esfuerzos interiores en el sólido, presentándose los tensores de tensiones más habituales. Se estudian asimismo en este capítulo las ecuaciones constitutivas del material, que se limitan a los materiales elásticos e hiperelásticos.

En el capítulo 4 se obtienen las ecuaciones generales que controlan el equilibrio estático de un sólido deformable con grandes deformaciones, en forma del principio de los trabajos virtuales, en el cual se basan los métodos de análisis. Entre éstos, el más habitual es la formulación lagrangiana, a cuyo estudio detallado se dedican dos

## Prólogo

capítulos: en el capítulo 5 se presenta la conocida como formulación total, y en el capítulo 6 la formulación actualizada. En ambos casos se obtienen las ecuaciones linealizadas de equilibrio, introduciendo el concepto de rigidez tangente, y se desarrolla en detalle su implementación práctica mediante el método de los elementos finitos, utilizando la formulación isoparamétrica clásica en desplazamiento. Asimismo se presenta en detalle una formulación mixta del método de los elementos finitos, empleando un campo interpolado de tensiones además del de deformaciones.

El capítulo 7 se dedica al estudio de los elementos estructurales rectos, tipo barra articulada y viga planas. Además de la formulación lagrangiana, se presenta también la formulación co-rotacional, que se adapta muy bien a la deformación de elementos reticulares con grandes desplazamientos de sólido rígido y pequeñas deformaciones elásticas. En el capítulo 8 se estudia la flexión de placas sometidas a deformaciones laterales moderadas pero no despreciables, las cuales producen esfuerzos en el propio plano de la placa, dando lugar a un acople entre los efectos de flexión y membrana.

En el capítulo 9 se estudia el comportamiento de las cáscaras delgadas curvas, empleando el planteamiento lagrangiano y una formulación basada en los esfuerzos resultantes de las tensiones en la cáscara y en las deformaciones unitarias de curvatura y extensión en su plano medio. Se desarrollan en detalle las distintas componentes de la rigidez tangente debidas a la flexión, efecto membrana y cortadura.

Una vez presentado el comportamiento de distintos tipos de estructuras, se estudian en el capítulo 10 los métodos para la resolución en forma incremental de las ecuaciones no lineales de equilibrio estático obtenidas. Se presenta en detalle un método que permite obtener toda la curva de respuesta de la estructura, aún en el caso de existir puntos límite de fuerza o deformación. El estudio de la respuesta dinámica con grandes deformaciones se aborda en el capítulo 11. En primer lugar se obtienen las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico y a continuación se presentan dos métodos para su integración en el tiempo, uno explícito y otro implícito, estudiándose su estabilidad.

Como aplicación práctica de todos los desarrollos teóricos anteriores, en el capítulo 12 se presentan una serie de ejemplos resueltos, que permiten observar los fenómenos de no linealidad asociados a las grandes deformaciones. Todos los ejemplos se han resuelto de forma numérica, empleando para ello una serie de procedimientos de simulación en el entorno Matlab®, que implementan los distintos métodos presentados en el texto, y que no se incluyen por limitaciones de espacio.

Para finalizar, quisiera dedicar este texto, como muestra de mi sincero agradecimiento, a toda mi familia, y muy en especial a mi mujer, por su paciencia y por el continuo apoyo y ánimo recibidos de ella durante la gran cantidad de días de vacaciones, festivos, etc., dedicados a la confección del mismo.

San Sebastián, mayo de 2009

# Contenido

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1	Configuración y movimiento	2
1.2	Planteamientos material y espacial	3
<b>2</b>	<b>MEDIDA DE LA DEFORMACIÓN</b>	<b>5</b>
2.1	Tensor gradiente de deformación	5
2.2	Tensores gradiente de desplazamientos	7
2.3	Tensor derecho de Cauchy-Green.	8
2.4	Tensor izquierdo de Cauchy-Green	9
2.5	Descomposición polar del tensor gradiente de deformación	9
2.6	Cambios de volumen y de área	12
2.7	Variación de los tensores gradiente	13
2.8	Tensor infinitesimal de deformaciones unitarias	14
2.9	Tensor de deformaciones unitarias de Green-Lagrange	15
2.9.1	Expresión vectorial del tensor de Green-Lagrange	17
2.10	Variación del tensor de Green-Lagrange	19
2.10.1	En función del gradiente de desplazamientos.	19
2.10.2	En función del tensor infinitesimal de deformaciones unitarias	19
2.10.3	Variación del tensor de Green-Lagrange en forma de vector	19
2.11	Tensor de deformaciones unitarias euleriano	20
2.12	Tensores incrementales	20
2.12.1	Tensor incremental de Green-Lagrange	21
2.12.2	Tensor incremental actualizado de Green-Lagrange	21
2.13	Velocidad	22
2.13.1	Derivada temporal material	22
2.13.2	Tensor gradiente de velocidad	23

2.13.3	Derivada temporal del tensor de Green	23
2.13.4	Tasa de deformación	23
<b>3</b>	<b>TENSIONES. ECUACIONES CONSTITUTIVAS</b>	<b>26</b>
3.1	Tensor de tensiones de Cauchy	26
3.2	Primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff	29
3.3	Segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff	30
3.4	Ecuaciones constitutivas	32
3.4.1	El tensor de elasticidad	33
3.4.2	Material de St. Venant-Kirchhoff	33
3.4.3	Material hiperelástico isótropo	34
3.4.4	Material neo-hookeano compresible	36
3.4.5	Materiales incompresibles	36
3.4.6	Materiales casi incompresibles	37
<b>4</b>	<b>ECUACIONES DE EQUILIBRIO</b>	<b>40</b>
4.1	Equilibrio de fuerzas	40
4.2	Equilibrio de momentos	41
4.3	Principio del trabajo virtual	42
4.3.1	Expresión del trabajo virtual interior en función del tensor $\mathbf{P}$	44
4.3.2	Expresión del trabajo virtual interior en función del tensor $\mathbf{S}$	44
<b>5</b>	<b>FORMULACIÓN LAGRANGIANA TOTAL</b>	<b>46</b>
5.1	Trabajo virtual interior	46
5.2	Ecuaciones de equilibrio	49
5.3	Linealización de las ecuaciones de equilibrio	49
5.3.1	Componente material	51
5.3.2	Componente geométrica	52
5.3.3	Matriz de rigidez tangente	54
5.3.4	Ecuaciones de equilibrio incrementales	54
5.4	Formulación isoparamétrica	56
5.4.1	Interpolación de coordenadas y deformaciones	56

## Contenido

5.4.2	Transformación de derivadas	56
5.4.3	Gradientes de la deformación	57
5.4.4	Matriz $G_0$	58
5.4.5	Matriz de rigidez tangente	59
5.4.6	Vector de fuerzas interiores	60
5.5	Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores	60
5.6	Fuerzas dependientes de la deformación	61
5.6.1	Fuerza de presión uniforme	63
5.6.2	Formulación isoparamétrica	66
5.6.3	Fuerza de presión sobre el lado de un dominio plano	67
5.7	Formulación mixta	69
5.7.1	Interpolación de tensiones	69
5.7.2	Ecuación de equilibrio	71
5.7.3	Vector de fuerzas interiores	72
5.7.4	Linealización de las ecuaciones de equilibrio	73
<b>6</b>	<b>FORMULACIÓN LAGRANGIANA ACTUALIZADA</b>	<b>75</b>
6.1	Trabajo virtual	75
6.2	Ecuación de equilibrio	77
6.3	Linealización de las ecuaciones de equilibrio	77
6.3.1	Componente material	78
6.3.2	Componente geométrica	78
6.3.3	Matriz de rigidez tangente	79
6.3.4	Ecuaciones de equilibrio incrementales	80
6.4	Formulación isoparamétrica	80
6.4.1	Interpolación de coordenadas y deformaciones	80
6.4.2	Transformación de derivadas	81
6.4.3	Matriz $G$	82
6.4.4	Matriz tangente	82
6.4.5	Vector de fuerzas interiores	83
6.5	Fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores	83

6.6	Cálculo de la tensión de Cauchy. Material lineal	83
6.7	Formulación mixta	85
6.7.1	Interpolación de tensiones	85
6.7.2	Principio variacional de la formulación mixta	85
6.7.3	Ecuación de equilibrio	88
6.7.4	Vector de fuerzas interiores	89
6.7.5	Linealización de las ecuaciones de equilibrio	89
<b>7</b>	<b>ELEMENTOS BARRA ARTICULADA Y VIGA PLANAS</b>	<b>91</b>
7.1	Barra biarticulada plana. Formulación lagrangiana total	91
7.1.1	Deformación unitaria	92
7.1.2	Esfuerzos y tensiones	94
7.1.3	Vector de fuerzas interiores	94
7.1.4	Matriz de rigidez tangente	95
7.1.5	Formulación isoparamétrica	97
7.2	Barra biarticulada plana. Formulación co-rotacional	99
7.2.1	Deformación unitaria	100
7.2.2	Vector de fuerzas interiores	101
7.2.3	Matriz de rigidez tangente	102
7.3	Viga plana. Formulación co-rotacional	103
7.3.1	Deformación axial y esfuerzo axial	104
7.3.2	Deformación y momentos de flexión	105
7.3.3	Deformaciones virtuales	106
7.3.4	Trabajo virtual. Fuerzas interiores	107
7.3.5	Matriz de rigidez tangente	107
<b>8</b>	<b>FLEXIÓN DE PLACAS. FORMULACIÓN LAGRANGIANA</b>	<b>110</b>
8.1	Campo de deformaciones	110
8.2	Deformaciones unitarias	111
8.2.1	Variación de la deformación unitaria	113
8.3	Deformaciones unitarias de cortadura	116
8.4	Tensiones	117



8.5	Esfuerzos interiores	118
8.6	Ecuación constitutiva	118
8.6	Trabajo virtual interior y vector de fuerzas interiores	119
8.7	Linealización. Matriz de rigidez tangente	119
<b>9</b>	<b>CÁSCARAS</b>	<b>123</b>
9.1	Introducción	123
9.2	Definición geométrica	124
9.2.1	Métrica del estado deformado	125
9.2.2	Métrica del estado inicial	126
9.2.3	Sistema convectivo en el plano medio	126
9.3	Parametrización de las rotaciones	127
9.3.1	Rotación del vector director	128
9.4	Deformación unitaria	130
9.5	Formulación en coordenadas cartesianas	131
9.6	Deformaciones unitarias en coordenadas cartesianas	132
9.7	Interpolación por el MEF	132
9.7.1	Jacobiana de la transformación	133
9.7.2	Sistema cartesiano director en los nudos	134
9.7.3	Interpolación del vector director en el estado inicial	135
9.7.4	Interpolación del incremento del vector director	135
9.7.5	Grados de libertad de giro	136
9.8	Variación de las deformaciones unitarias	136
9.8.1	Deformaciones unitarias de membrana	136
9.8.2	Deformaciones unitarias de flexión	137
9.8.3	Deformaciones de cortadura. Formulación en desplazamiento	139
9.8.4	Campo impuesto de deformaciones unitarias de cortadura	139
9.8.5	Expresión final	141
9.9	Esfuerzos interiores	141
9.10	Trabajo virtual. Fuerzas equivalentes a los esfuerzos interiores	143
9.11	Ecuaciones incrementales de equilibrio	143

9.11.1	Componente material de la matriz tangente	144
9.11.2	Componente geométrica de la matriz tangente	144
9.12	Actualización de la geometría	150
<b>10</b>	<b>RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES INCREMENTALES</b>	<b>152</b>
10.1	Introducción	152
10.2	Método incremental puro	154
10.3	Método de Newton-Raphson	155
10.4	Método de Newton modificado	156
10.5	Métodos restringidos	157
10.5.1	Método del plano normal	159
10.5.2	Método del plano normal actualizado	159
10.6	Método de la longitud del arco	160
10.6.1	Comienzo de la iteración en el primer paso de carga	163
10.6.2	Comienzo de la iteración en los restantes pasos de carga	164
10.7	Criterios de convergencia	165
<b>11</b>	<b>DINÁMICA</b>	<b>167</b>
11.1	Ecuaciones de equilibrio en dinámica	167
11.2	Principio del trabajo virtual en dinámica	168
11.3	Formulación lagrangiana total	170
11.4	Método de integración explícito basado en diferencias centrales	171
11.5	Estabilidad del método de diferencias centrales	172
11.5.1	Paso de integración crítico en problemas unidimensionales	173
11.5.2	Pasos críticos de integración para diversos elementos finitos	174
11.6	Métodos implícitos de integración de paso simple	175
11.7	Criterios de convergencia	178
<b>12</b>	<b>EJEMPLOS</b>	<b>180</b>
12.1	Barra apoyada - deslizante	180
12.2	Barra deslizante apoyada elásticamente	183
12.3	Voladizo muy flexible	184

## Contenido

12.4 Celosía en L	186
12.5 Pórtico biarticulado	187
12.5.1 Modelo con elementos viga	187
12.5.2 Modelo con elementos planos de 4 nudos	189
12.6 Barra apoyada – deslizante. Dinámica	191
12.7 Voladizo muy flexible. Dinámica	192
12.8 Cable pretensado	194
12.9 Arco circular esbelto	196
12.9.1 Modelo con elementos viga	196
12.9.2 Modelo con elementos de 4 nudos	197
12.10 Lámina flexible sometida a un momento en el extremo	199
12.10.1 Modelo con vigas	199
12.10.2 Modelo con cáscaras	201
12.11 Semiesfera con orificio	202
<b>13 ANEJOS</b>	<b>205</b>
13.1 Notación	205
13.1.1 Notación de índices	205
13.1.2 Notación de tensores	205
13.1.3 Notación de matrices	206
13.2 Preliminares matemáticos	206
13.2.1 Resumen de álgebra de vectores y tensores	206
13.2.2 Representación de matrices como vectores	208
13.2.3 Traza	209
13.2.4 Gradiente	209
13.2.5 Divergencia	210
13.2.6 Teoremas de integración	212
13.3 Procedimientos Matlab	213
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>214</b>
<b>ÍNDICE DE MATERIAS</b>	<b>217</b>



# Introducción

En muchos problemas de mecánica de sólidos deformables las cargas aplicadas provocan en el sólido unas deformaciones de tal magnitud que no puede aceptarse la hipótesis de que la posición final deformada coincide con la posición inicial. Por lo tanto en este caso no puede emplearse la suposición habitual de plantear las ecuaciones de equilibrio en la posición inicial, descargada, del sólido. La respuesta del sólido es altamente no lineal pues por una parte no se conoce la posición deformada final en la cual plantear las ecuaciones de equilibrio y por otra la presencia de grandes deformaciones implica el uso de medidas de la deformación adecuadas, que son esencialmente no lineales.

Esta no linealidad asociada a las grandes deformaciones se conoce habitualmente como no linealidad de origen geométrico. A ella se puede añadir en algunos casos la no linealidad debida al comportamiento constitutivo del material, el cual puede ser elástico (lineal o no) o bien no elástico, que siempre es no lineal. En principio sólo se considerarán en este texto los materiales elásticos.

La naturaleza no lineal del fenómeno hace que no pueda calcularse en general la situación deformada final en un sólo paso, aplicando la totalidad de la carga de una vez, ni siquiera siguiendo un proceso iterativo. Es necesario por lo tanto seguir un proceso de carga incremental, aplicando las cargas finales paso a paso, por incrementos, y determinando la respuesta para cada uno de esos incrementos. Para identificar los distintos pasos del proceso se empleará un parámetro de tiempo  $t$ , al cual se referirán todos los incrementos de carga y las distintas configuraciones deformadas.

En el caso de que las cargas sean estáticas no tiene sentido hablar del parámetro tiempo en el sentido que tiene en dinámica, pero por comodidad se le denominará así, aunque no se trate nada más que de un parámetro arbitrario para identificar el nivel de carga. Por lo tanto la única diferencia práctica entre los casos estático y dinámico está en la consideración o no de las fuerzas de inercia y amortiguamiento asociadas a los campos de aceleración y velocidad.

La necesidad de un proceso de carga incremental y de un parámetro al cual referir el mismo es importante asimismo cuando existen condiciones de carga de diversa naturaleza, que pueden aplicarse en diferente orden. Al ser el sistema no lineal, la respuesta final depende del orden de aplicación de las cargas y se hace necesario el proceso de carga paso a paso.

### 1.1. CONFIGURACIÓN Y MOVIMIENTO

Consideraremos un sólido continuo, es decir formado por un conjunto continuo de partículas o puntos materiales, de tal manera que la masa y el volumen son funciones continuas en él. Referiremos este sólido continuo a un sistema de coordenadas cartesianas definido por una base ortonormal  $\mathbf{e}_i$  (figura 1.1).

A medida que el cuerpo se mueve, va ocupando una serie de regiones diferentes del espacio, conocidas como configuraciones del cuerpo a lo largo del tiempo. En particular, nos centraremos en las siguientes:

- Configuración inicial o de referencia  $\Omega_0$ , que es la que ocupa el cuerpo al inicio del proceso de carga, en  $t=0$ . En esta configuración, una partícula material cualquiera del sólido queda definida por las coordenadas  $X_i$  del punto que ocupa, y que manejaremos agrupadas en un vector  $\mathbf{X} = \sum X_i \mathbf{e}_i$ . Suele ser habitual denominar a estas coordenadas como las coordenadas materiales del punto.
- Configuración  $\Omega_t$  en un instante cualquiera  $t$  del movimiento, en la que el sólido estará deformado respecto a su configuración inicial, sin que pueda suponerse que ambas configuraciones son casi coincidentes. La posición de cada partícula queda ahora definida por unas coordenadas  $x_i$  agrupadas en un vector  $\mathbf{x} = \sum x_i \mathbf{e}_i$ . Estas coordenadas se suelen denominar coordenadas espaciales del punto.

El movimiento entre  $t=0$  y  $t$  se puede representar matemáticamente como una función:

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) \quad (1.1)$$

Para cada instante de tiempo  $t$ ,  $\phi$  es una función vectorial que proporciona la nueva posición  $\mathbf{x}$  ocupada ahora por la partícula que inicialmente ocupaba la posición  $\mathbf{X}$ . Define por lo tanto una transformación de coordenadas entre las dos configuraciones espaciales, inicial  $\Omega_0$  y final  $\Omega_t$ .

Para una partícula cualquiera de coordenadas iniciales  $\mathbf{X}$ , la ecuación anterior proporciona su trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  a lo largo del tiempo.

Supondremos que existe la inversa de la función de deformación  $\phi^{-1}$ , de tal manera que se pueden obtener las coordenadas iniciales de una partícula cualquiera que ocupa la posición  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$ , es decir:

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2)$$

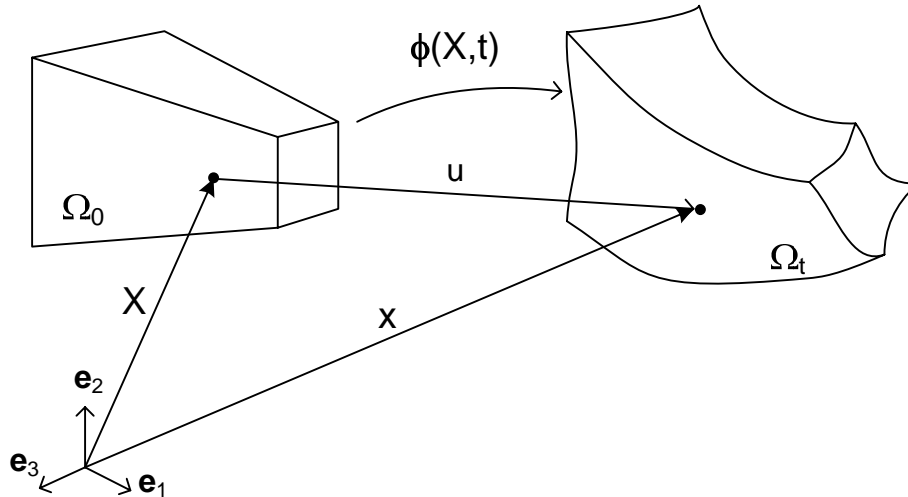


Figura 1.1 Configuraciones inicial y deformada.

## 1.2. PLANTEAMIENTOS MATERIAL Y ESPACIAL

La resolución de un problema no lineal puede abordarse genéricamente de dos maneras distintas, dependiendo de a qué sistema de coordenadas se refieran las magnitudes fundamentales involucradas en el proceso.

- En el planteamiento lagrangiano, o material, el movimiento se caracteriza en función de las coordenadas materiales, es decir que las coordenadas finales de una partícula se expresan en función de sus coordenadas iniciales:

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) \quad (1.3)$$

La deformación del sólido se expresa asimismo en función de dichas coordenadas iniciales:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \phi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (1.4)$$

En este planteamiento por lo tanto se persigue el movimiento de una determinada partícula material cuya posición inicial  $\mathbf{X}$  se conoce y se trata de obtener su posición final. Un cambio en el tiempo en las ecuaciones anteriores implica que la misma partícula ocupa una posición diferente.

El planteamiento lagrangiano es adecuado para el estudio de la mecánica de sólidos, en el que interesa perseguir la evolución de una partícula y además es necesario incluir alguna ecuación constitutiva que representa el comportamiento de las partículas del material.

- En el planteamiento euleriano, o espacial, el comportamiento se refiere a la posición final  $\mathbf{x}$  ocupada por una partícula y se trata de obtener la posición inicial que ocupaba dicha partícula, es decir:

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (1.5)$$

Las deformaciones se obtienen con respecto a esa posición deformada:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{x} - \phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (1.6)$$

En este planteamiento se persigue una determinada posición en el espacio y se determina la posición inicial que tenían las partículas que pasan por dicha posición. Un cambio en el tiempo en las ecuaciones anteriores implica que una determinada posición está ocupada por una partícula diferente. El planteamiento Euleriano es adecuado a problemas de mecánica de fluidos, en el que en principio no interesa tanto la evolución de las partículas sino la distribución espacial de las magnitudes involucradas, como la presión o la velocidad.

- Por ejemplo, si consideramos una magnitud cualquiera, como la temperatura  $T$ , en el planteamiento lagrangiano, su valor se describe con respecto a la posición inicialmente ocupada por una partícula, y se obtiene como la temperatura en esa misma partícula a medida que pasa el tiempo y muy posiblemente también cambie la posición de la partícula (figura 1.2):

$$T = T(\mathbf{X}, t) \quad (1.7)$$

Sin embargo, en el planteamiento euleriano, el valor la temperatura  $T$  se describe con respecto a una posición actual en el espacio, y se obtiene como la temperatura en esa posición del espacio a medida que pasa el tiempo y muy posiblemente también pasen distintas partículas por ese punto:

$$T = T(\mathbf{x}, t) \quad (1.8)$$

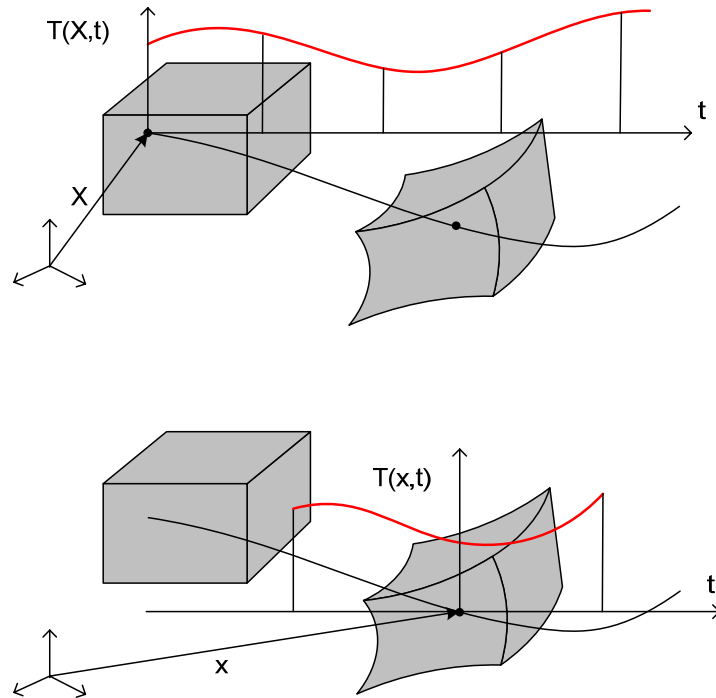


Figura 1.2 Planteamientos material y espacial.



## Medida de la deformación

Una vez establecida la deformación  $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{X}$  entre las configuraciones inicial y final de un sólido deformable, el siguiente paso consiste en establecer medidas de dicha deformación, que permitan relacionar los elementos diferenciales de coordenadas en las dos configuraciones y calcular el alargamiento de las fibras materiales.

### 2.1. TENSOR GRADIENTE DE DEFORMACIÓN

Consideremos un cuerpo en su estado inicial no deformado, y en él un conjunto cualquiera de puntos materiales que forman una curva, definida por el vector de posición de dichos puntos  $\chi_0(\alpha)$ , siendo  $\alpha$  el parámetro que define la curva. A consecuencia de la deformación, los puntos materiales que forman la curva adoptan una posición deformada en la que forman otra curva  $\chi(\alpha, t)$  en el instante  $t$  (figura 2.1). La relación entre ambas expresiones de la curva se establece a través de la función de deformación:

$$\chi(\alpha, t) = \phi(\chi_0(\alpha), t) \quad (2.1)$$

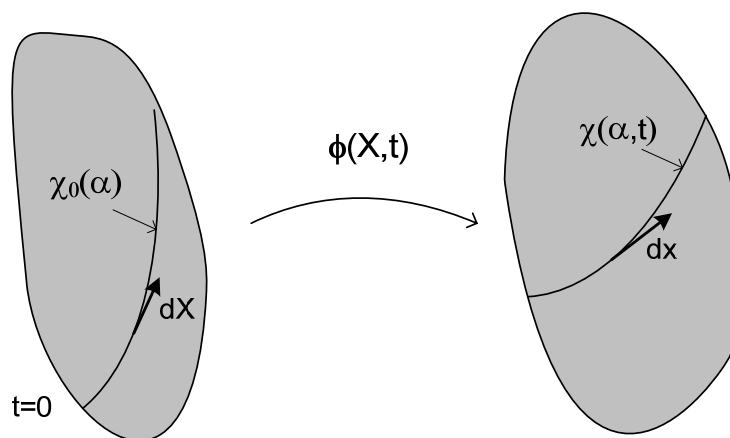


Figura 2.1 Deformación de un elemento diferencial.

El vector tangente a la curva en los estados inicial y deformado es

$$d\mathbf{X} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_0}{\partial \alpha} d\alpha \quad (2.2)$$

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \alpha} d\alpha \quad (2.3)$$

Derivando en cadena y usando la expresión de  $\boldsymbol{\chi}$ :

$$d\mathbf{x} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} \frac{\partial \boldsymbol{\chi}_0}{\partial \alpha} d\alpha = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} d\mathbf{X} \quad (2.4)$$

Por lo tanto la relación entre los vectores diferenciales en la configuración inicial  $\mathbf{X}$  y deformada  $\mathbf{x}$  se puede poner:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{F} d\mathbf{X} \quad (2.5)$$

donde se ha definido:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.6)$$

La magnitud  $\mathbf{F}$  es el tensor gradiente de la deformación, que corresponde al gradiente de las coordenadas deformadas  $\mathbf{x}$  respecto de las coordenadas iniciales  $\mathbf{X}$  y juega un papel fundamental en el estudio de las grandes deformaciones de sólidos.

Se suelen emplear otras denominaciones compactas para este gradiente respecto de las coordenadas iniciales  $\mathbf{X}$ , que se emplean más adelante, tales como:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_0(\cdot) \equiv \text{Grad}(\cdot)$$

Con lo que el tensor  $\mathbf{F}$  se puede poner:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \equiv \nabla_0 \mathbf{x} \equiv \text{Grad}(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

Cada uno de los términos del tensor gradiente de la deformación es:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_j} \quad (2.8)$$

El tensor  $\mathbf{F}$  es un tensor de doble punto, pues relaciona las coordenadas de puntos en dos configuraciones distintas. El primer subíndice ( $i$ ) corresponde a las coordenadas del punto deformado y el segundo ( $j$ ) a las coordenadas del punto sin deformar. Es un tensor definido positivo, como se demuestra más adelante al estudiar la transformación del volumen.

También se puede poner en notación de matrices como:

$$\mathbf{F} = \left( \nabla_0 \mathbf{x}^T \right)^T \quad (2.9)$$

siendo  $\nabla_0$  la representación como vector del operador gradiente respecto de las coordenadas iniciales:

$$\nabla_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} \\ \frac{\partial}{\partial X_2} \\ \frac{\partial}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

• Considerando la inversa de la función de deformación  $\phi^{-1}$ , que proporciona las coordenadas iniciales de una partícula cualquiera  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t) \quad (2.11)$$

se puede definir el inverso del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}^{-1}$ :

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \phi^{-1}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \quad (2.12)$$

que relaciona los elementos diferenciales:

$$d\mathbf{X} = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (2.13)$$

Su valor es:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = (\nabla \mathbf{X}^T)^T \quad (2.14)$$

siendo  $\nabla$  el operador gradiente respecto de las coordenadas deformadas  $\mathbf{x}$ .

## 2.2. TENSORES GRADIENTE DE DESPLAZAMIENTOS

El tensor gradiente de desplazamientos lagrangiano, o material,  $\mathbf{H}$  se define como el gradiente de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  respecto de las coordenadas iniciales:

$$\mathbf{H} = \nabla_0 \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.15)$$

En su representación como matriz, los términos de este tensor son:

$$\mathbf{H} = (\nabla_0 \mathbf{u}^T)^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial X_1} & \frac{\partial u_3}{\partial X_2} & \frac{\partial u_3}{\partial X_3} \end{bmatrix} \quad (2.16)$$

$$H_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial X_j}$$

Considerando la expresión del tensor  $\mathbf{F}$ , y sustituyendo en ella el valor de  $\mathbf{x}$  en función de los desplazamientos  $\mathbf{u}$  se obtiene:

$$\mathbf{F} = (\nabla_0 \mathbf{x}^T)^T = (\nabla_0 (\mathbf{X} + \mathbf{u})^T)^T = \mathbf{I} + (\nabla_0 \mathbf{u}^T)^T \quad (2.17)$$

Es decir:

$$\mathbf{F} = \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{H} \quad (2.18)$$

• Se puede definir asimismo el tensor gradiente de los desplazamientos respecto a las coordenadas deformadas  $\mathbf{x}$  en el instante  $t$ , denominado gradiente de desplazamientos euleriano o espacial:

$$\mathbf{H}_t = \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad H_{tij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \quad (2.19)$$

Considerando la expresión del inverso del tensor gradiente de deformación se obtiene:

$$\mathbf{F}^{-1} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} = \frac{\partial (\mathbf{x} - \mathbf{u})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{I} - \mathbf{H}_t \quad (2.20)$$

• Para desarrollos posteriores, conviene representar ambos tensores gradiente de desplazamientos  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{H}_t$ , en forma de vectores  $\bar{\mathbf{H}}$  y  $\bar{\mathbf{H}}_t$ , de tamaño  $n^2$  siendo  $n$  el número de dimensiones del problema. Para el caso de dos dimensiones, su expresión es:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{H}}_t = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{Bmatrix} \quad (2.21)$$

### 2.3. TENSOR DERECHO DE CAUCHY-GREEN

Se define como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.22)$$

- Este tensor permite determinar el alargamiento que sufre una fibra de material cuya longitud inicial es  $dl^0$  y cuya orientación inicial está dada por un vector unitario  $\mathbf{n}^0$ . La longitud final de dicha fibra es:

$$(dl)^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X} \quad (2.23)$$

El alargamiento de la fibra es  $\lambda = dl / dl^0$  y su valor es:

$$(\lambda)^2 = \left( \frac{dl}{dl^0} \right)^2 = \frac{d\mathbf{X}^T}{dl^0} \mathbf{C} \frac{d\mathbf{X}}{dl^0} \quad (2.24)$$

$$\lambda = \left( \mathbf{n}^{0T} \mathbf{C} \mathbf{n}^0 \right)^{1/2}$$

- Este tensor permite asimismo determinar el ángulo que forman en el estado deformado dos fibras que salen del mismo punto y cuyas direcciones vienen dadas por dos vectores unitarios  $\mathbf{n}^0$  y  $\bar{\mathbf{n}}^0$  en el estado inicial. Sean  $dl$  y  $d\bar{l}$  las longitudes finales de dichas fibras. Se cumple que:

$$d\mathbf{x}^T d\bar{\mathbf{x}} = dl d\bar{l} \cos \theta \quad (2.25)$$

Introduciendo el tensor gradiente de deformación, y teniendo en cuenta que es el mismo para ambas direcciones, pues  $\mathbf{F}$  es una magnitud función sólo del punto:

$$\cos \theta = \frac{d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \bar{\mathbf{F}} d\bar{\mathbf{X}}}{dl d\bar{l}} = \frac{d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\bar{\mathbf{X}}}{dl d\bar{l}} \quad (2.26)$$

Introduciendo los vectores direccionales y los alargamientos se obtiene:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n}^{0T} \mathbf{C} \bar{\mathbf{n}}^0}{\lambda \bar{\lambda}} \quad (2.27)$$

## 2.4. TENSOR IZQUIERDO DE CAUCHY-GREEN

El tensor izquierdo de Cauchy-Green se define como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (2.28)$$

El inverso de este tensor, denominado tensor de Finger, establece una relación entre la longitud inicial de una fibra y su estado deformado:

$$(dl^0)^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} = d\mathbf{x}^T \mathbf{B}^{-1} d\mathbf{x}$$

## 2.5. DESCOMPOSICIÓN POLAR DEL TENSOR GRADIENTE DE DEFORMACIÓN

El tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$  es definido positivo (ver 2.6), luego siempre se puede descomponer en la forma siguiente:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \mathbf{V} \mathbf{R} \quad (2.29)$$

siendo  $\mathbf{R}$  una matriz ortogonal, y  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  dos matrices simétricas. La primera descomposición representa que la deformación total se compone de un alargamiento, representado por la matriz  $\mathbf{U}$ , seguido de una rotación como sólido rígido, representada por la matriz  $\mathbf{R}$ . La segunda descomposición considera la deformación total como la rotación  $\mathbf{R}$  seguida de un alargamiento  $\mathbf{V}$ .

- Para evaluar estas matrices y profundizar en el significado de la descomposición polar, consideramos el tensor derecho de Cauchy-Green y aplicamos la primera descomposición:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{U}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{U} \quad (2.30)$$

Al ser  $\mathbf{R}$  ortogonal y  $\mathbf{U}$  simétrica se obtiene:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{U} \quad (2.31)$$

Por ser  $\mathbf{C}$  simétrica y definida positiva, tiene 3 autovalores positivos  $\lambda_\alpha^2$  y sus vectores propios  $\mathbf{N}_\alpha$  son ortogonales y unitarios. Su descomposición espectral es:

$$\mathbf{C} = \sum_{\alpha=1,3} \lambda_\alpha^2 \mathbf{N}_\alpha \mathbf{N}_\alpha^T = \mathbf{U} \mathbf{U} \quad (2.32)$$

Esta ecuación indica que el tensor de alargamiento  $\mathbf{U}$  tiene los mismos autovectores  $\mathbf{N}_\alpha$  que el  $\mathbf{C}$ ; y estas direcciones se denominan direcciones principales de alargamiento. Los tres autovalores de  $\mathbf{U}$  valen  $\lambda_\alpha$  (la raíz cuadrada de los de  $\mathbf{C}$ ). Por lo tanto  $\mathbf{U}$  se puede poner en función de estas magnitudes:

$$\mathbf{U} = \sum_{\alpha=1,3} \lambda_\alpha \mathbf{N}_\alpha \mathbf{N}_\alpha^T \quad (2.33)$$

Conocido  $\mathbf{U}$ , se puede obtener fácilmente  $\mathbf{R} = \mathbf{F} \mathbf{U}^{-1}$ .

- Considerando la descomposición de  $\mathbf{F}$ , se pueden relacionar las diversas matrices:

$$\mathbf{F} = \mathbf{V} \mathbf{R} = \mathbf{R} \mathbf{U} \quad \rightarrow \quad \mathbf{V} = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{R}^T \quad (2.34)$$

Sustituyendo la descomposición espectral de  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha=1,3} \lambda_\alpha \mathbf{R} \mathbf{N}_\alpha \mathbf{N}_\alpha^T \mathbf{R}^T \quad (2.35)$$

Considerando ahora el tensor izquierdo de Cauchy-Green y la descomposición de  $\mathbf{F}$ :

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{V} \mathbf{R} \mathbf{R}^T \mathbf{V}^T = \mathbf{V} \mathbf{V} \quad (2.36)$$

Al ser  $\mathbf{B}$  simétrica y definida positiva, tiene 3 vectores propios ortogonales unitarios  $\mathbf{n}_\alpha$  y tres autovalores positivos  $\bar{\lambda}_\alpha^2$ , con lo que su descomposición espectral es:

$$\mathbf{B} = \sum_{\alpha=1,3} \bar{\lambda}_\alpha^2 \mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\alpha^T = \mathbf{V} \mathbf{V} \quad (2.37)$$

Esta ecuación indica que el tensor de alargamiento  $\mathbf{V}$  tiene tres autovalores de valor  $\bar{\lambda}_\alpha$  y sus autovectores son los mismos  $\mathbf{n}_\alpha$  de  $\mathbf{B}$ . Estos autovectores corresponden a las direcciones principales de alargamiento en el estado deformado. Finalmente se puede poner:

$$\mathbf{V} = \sum_{\alpha=1,3} \bar{\lambda}_\alpha \mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\alpha^T \quad (2.38)$$

Comparando esta expresión con la obtenida anteriormente (2.35), y considerando que los vectores  $\mathbf{R}\mathbf{N}_\alpha$  son también vectores unitarios, se deduce que:

$$\bar{\lambda}_\alpha = \lambda_\alpha \quad \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{R}\mathbf{N}_\alpha \quad (2.39)$$

Esta ecuación indica que los tensores  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{B}$  tienen los mismos autovalores, y que los autovectores del tensor  $\mathbf{B}$  en el estado deformado  $\mathbf{n}_\alpha$ , se obtienen por rotación mediante la matriz  $\mathbf{R}$  de los autovectores del tensor  $\mathbf{C}$  en el estado inicial  $\mathbf{N}_\alpha$  (figura 2.2).

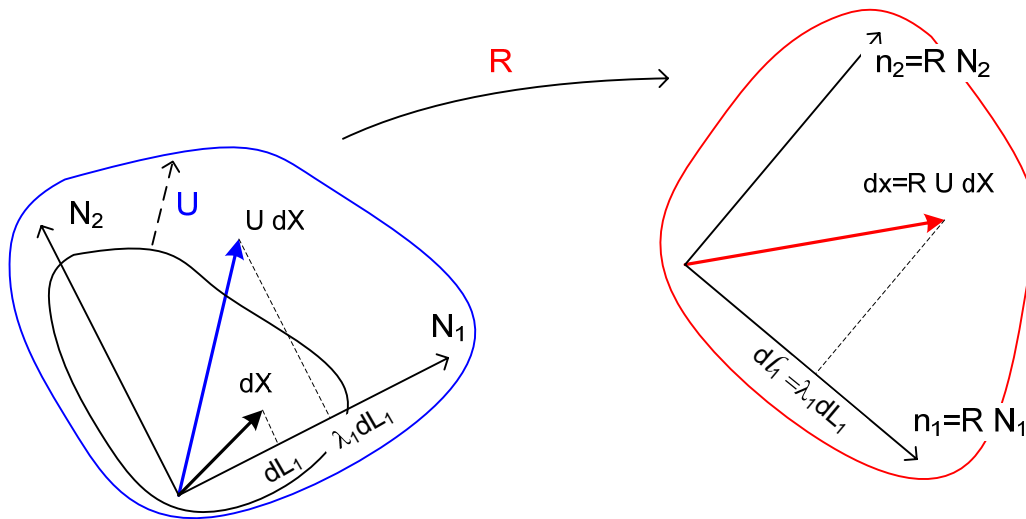


Figura 2.2 Descomposición polar del tensor gradiente de deformación.

- El significado físico de los autovalores de  $\mathbf{U}$  se puede estudiar considerando un vector  $d\mathbf{X}_\alpha$  de módulo  $dL_\alpha$ , orientado en la dirección de uno cualquiera de los autovectores  $\mathbf{N}_\alpha$  (figura 2.2):

$$d\mathbf{X}_\alpha = dL_\alpha \mathbf{N}_\alpha \quad (2.40)$$

En el estado deformado este vector será:

$$d\mathbf{x}_\alpha = \mathbf{F} d\mathbf{X}_\alpha = \mathbf{R} \mathbf{U} \mathbf{N}_\alpha dL_\alpha \quad (2.41)$$

Al ser  $\mathbf{N}_\alpha$  un autovector de  $\mathbf{U}$ , se cumple que  $\mathbf{U} \mathbf{N}_\alpha = \lambda_\alpha \mathbf{N}_\alpha$ , luego el vector deformado es:

$$d\mathbf{x}_\alpha = \lambda_\alpha dL_\alpha \mathbf{R} \mathbf{N}_\alpha \quad (2.42)$$

$$d\mathbf{x}_\alpha = \lambda_\alpha dL_\alpha \mathbf{n}_\alpha$$

Es decir que el módulo del vector deformado vale  $dl_\alpha = \lambda_\alpha dL_\alpha$ . Por lo tanto, se concluye que el autovalor  $\lambda_\alpha$  representa el alargamiento en la dirección del autovector  $\mathbf{N}_\alpha$  de  $\mathbf{U}$ :

$$\lambda_\alpha = \frac{dl_\alpha}{dL_\alpha} \quad (2.43)$$

- La deformación del sólido se puede interpretar en base a la descomposición  $\mathbf{F}=\mathbf{R} \mathbf{U}$  de la forma siguiente. En un punto material cualquiera  $\mathbf{X}$ , en primer lugar actúa la deformación producida por el tensor  $\mathbf{U}$ , de tal manera que el material sufre una extensión  $\lambda_\alpha$  en cada una de las 3 direcciones principales  $\mathbf{N}_\alpha$ : en esta extensión un paralelepípedo infinitesimal de lados paralelos a las direcciones  $\mathbf{N}_\alpha$  mantiene sus lados paralelos a dichas direcciones. A continuación, la matriz  $\mathbf{R}$  produce una rotación del material situado en el punto  $\mathbf{X}$ , sin extensión alguna.

- De forma análoga, se puede interpretar la deformación en base a la descomposición  $\mathbf{F}=\mathbf{V} \mathbf{R}$  de la forma siguiente. En un punto material cualquiera  $\mathbf{X}$ , en primer lugar se produce una rotación  $\mathbf{R}$  del material situado en el punto  $\mathbf{X}$ , sin extensión alguna. A continuación actúa el tensor  $\mathbf{V}$ , de tal manera que el material sufre una extensión  $\lambda_\alpha$  en cada una de las 3 direcciones principales  $\mathbf{n}_\alpha$ .

- Es instructivo expresar el tensor  $\mathbf{F}$  en función de las direcciones principales en ambos estados. Para ello sustituimos el valor de  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{F} = \mathbf{R} \mathbf{U} = \sum_{\alpha=1,3} \lambda_\alpha \mathbf{R} \mathbf{N}_\alpha \mathbf{N}_\alpha^T \quad (2.44)$$

Considerando que  $\mathbf{n} = \mathbf{R} \mathbf{N}$ ,

$$\mathbf{F} = \sum_{\alpha=1,3} \lambda_\alpha \mathbf{n}_\alpha \mathbf{N}_\alpha^T \quad (2.45)$$

Esta expresión muestra la naturaleza de  $\mathbf{F}$  como un tensor de doble punto, en el sentido de que involucra a las direcciones principales en los estados inicial y deformado.

## 2.6. CAMBIOS DE VOLUMEN Y DE ÁREA

- El determinante del tensor gradiente de deformación  $F=|\mathbf{F}|$  establece la relación entre los diferenciales de volumen en los estado 0 y  $t$ . Consideremos el diferencial de volumen en el estado inicial  $dv^0$  formado por un paralelepípedo cuyos lados están definidos por tres vectores diferenciales  $d\mathbf{X}_1$ ,  $d\mathbf{X}_2$ ,  $d\mathbf{X}_3$ . El valor de este diferencial de volumen es el producto mixto de los tres vectores:

$$dv^0 = d\mathbf{X}_1 \cdot (d\mathbf{X}_2 \times d\mathbf{X}_3) \quad (2.46)$$



Estos vectores se transforman en el estado deformado a:  $dx_i = \mathbf{F} d\mathbf{X}_i \quad i = 1, 3$

El diferencial de volumen en el estado deformado es:

$$dv = dx_1 \cdot (dx_2 \times dx_3) = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2 \times \mathbf{F} d\mathbf{X}_3) \quad (2.47)$$

Empleando la siguiente propiedad del producto mixto:  $\mathbf{Aa} \cdot (\mathbf{Ab} \times \mathbf{Ac}) = |\mathbf{A}| \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$  se puede poner:

$$dv = \mathbf{F} d\mathbf{X}_1 \cdot (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2 \times \mathbf{F} d\mathbf{X}_3) = |\mathbf{F}| d\mathbf{X}_1 \cdot (d\mathbf{X}_2 \times d\mathbf{X}_3) = |\mathbf{F}| dv^0 \quad (2.48)$$

$$dv = F dv^0$$

Como ambos diferenciales de volumen siempre deben ser positivos, el determinante del tensor gradiente de deformación  $F$  también lo es.

- La transformación que sufre el diferencial de área a consecuencia de la deformación se establece mediante el tensor gradiente inverso. Consideremos un elemento diferencial de área en el estado inicial  $d\mathbf{A}^0$ : es una cantidad vectorial cuyo módulo  $dA^0$  es igual al área de un paralelogramo definido por dos vectores  $d\mathbf{X}_1$  y  $d\mathbf{X}_2$ , y cuya dirección  $\mathbf{n}^0$  viene dada por su producto vectorial:

$$d\mathbf{A}^0 = \mathbf{n}^0 dA^0 = d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2 \quad (2.49)$$

El diferencial de área en el estado deformado es:

$$d\mathbf{A} = \mathbf{n} dA = dx_1 \times dx_2 = (\mathbf{F} d\mathbf{X}_1) \times (\mathbf{F} d\mathbf{X}_2) \quad (2.50)$$

Empleando la propiedad del producto vectorial  $(\mathbf{Aa}) \times (\mathbf{Ab}) = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-T} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$  se obtiene la expresión:

$$d\mathbf{A} = |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-T} (d\mathbf{X}_1 \times d\mathbf{X}_2) = |\mathbf{F}| \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}^0 \quad (2.51)$$

que es conocida como la fórmula de Nanson:

$$d\mathbf{A} = F \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}^0 \quad (2.52)$$

## 2.7. VARIACIÓN DE LOS TENSORES GRADIENTE

Consideremos un cuerpo en una configuración deformada  $\Omega$ , en la cual existe un campo de desplazamientos  $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{X}$ . Se aplica una variación virtual  $\delta\mathbf{u}$  a dichos desplazamientos, la cual produce una variación de los gradientes de deformaciones.

- La variación del tensor gradiente de desplazamientos lagrangiano al variar los desplazamientos es sencillamente:

$$\delta\mathbf{H} = \frac{\partial\delta\mathbf{u}}{\partial\mathbf{X}} \quad \delta H_{ij} = \frac{\partial\delta u_i}{\partial X_j} \quad (2.53)$$

Si se emplea la definición en función de las coordenadas deformadas  $\mathbf{x}$ , la variación del tensor espacial es:

$$\delta \mathbf{H}_t = \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \quad \delta H_{tij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} \quad (2.54)$$

- La variación del tensor gradiente de la deformación es inmediata:

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{H} \quad (2.55)$$

Esta expresión se puede poner en función de las coordenadas deformadas  $\mathbf{x}$  efectuando la derivación en cadena:

$$\delta F_{ij} = \frac{\partial \delta x_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_j} + \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_j} \quad (2.56)$$

Por lo tanto la variación del gradiente de deformación se puede poner:

$$\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{H}_t \mathbf{F} \quad (2.57)$$

## 2.8. TENSOR INFINITESIMAL DE DEFORMACIONES UNITARIAS

Sea  $\mathbf{u}$  el campo de deformaciones existente en el sólido en el instante  $t$ . Se define el tensor de deformaciones unitarias infinitesimales como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.58)$$

Es un tensor lineal, que corresponde a las deformaciones unitarias empleadas en el análisis con pequeñas deformaciones. Es igual a la parte simétrica del tensor gradiente de desplazamientos  $\mathbf{H}_t$  evaluado respecto de las coordenadas deformadas:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_t^T) \quad (2.59)$$

Se puede representar en forma de matriz y de vector siguiendo la notación de Voigt. Para dos dimensiones:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

Dado su valor, se puede expresar siempre en la forma:

$$\bar{\varepsilon} = \mathbf{A}_C \bar{\mathbf{H}}_t \quad (2.61)$$

siendo  $\mathbf{A}_C$  una matriz constante. Por ejemplo, la expresión detallada para el caso de dos dimensiones es:

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{array} \right\} = \left[ \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{array} \right\} \quad (2.62)$$

• La variación del tensor infinitesimal de deformaciones unitarias al variar los desplazamientos es:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{H}_t + \delta \mathbf{H}_t^T) \quad (2.63)$$

Sus términos valen:

$$\delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.64)$$

En forma vectorial esta variación se puede poner:

$$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}_C \delta \bar{\mathbf{H}}_t \quad (2.65)$$

## 2.9. TENSOR DE DEFORMACIONES UNITARIAS DE GREEN-LAGRANGE

El cuadrado de la distancia entre dos puntos infinitamente próximos en los estados inicial y deformado es:

$$(dl^0)^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} \quad (2.66)$$

$$(dl)^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}$$

El cambio en esta distancia al cuadrado se puede expresar como:

$$(dl)^2 - (dl^0)^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{X}^T (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) d\mathbf{X}$$

Este cambio de la distancia al cuadrado referido a la distancia inicial define el tensor de deformación unitaria de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  entre los estados 0 y  $t$ :

$$(dl)^2 - (dl^0)^2 = 2 d\mathbf{X}^T \mathbf{E} d\mathbf{X} \quad (2.67)$$

Su valor es:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^T \mathbf{F} - \mathbf{I}) = \frac{1}{2} (\mathbf{C} - \mathbf{I}) \quad (2.68)$$

- Considerando la definición de este tensor, y dividiendo por el cuadrado de la longitud inicial se obtiene:

$$\frac{(dl)^2 - (dl^0)^2}{2(dl^0)^2} = \frac{d\mathbf{X}}{dl^0} \cdot \mathbf{E} \frac{d\mathbf{X}}{dl^0} \quad (2.69)$$

Pero  $d\mathbf{X}/dl^0$  es un vector unitario en la dirección de  $d\mathbf{X}$ , que llamaremos  $\mathbf{n}^0$  por lo que:

$$\frac{(dl)^2 - (dl^0)^2}{2(dl^0)^2} = \mathbf{n}^0 \cdot \mathbf{E} \mathbf{n}^0 \quad (2.70)$$

Esta expresión indica que el tensor de Green-Lagrange mide el cambio del cuadrado de la longitud con respecto a su valor inicial, en una dirección cualquiera  $\mathbf{n}^0$ .

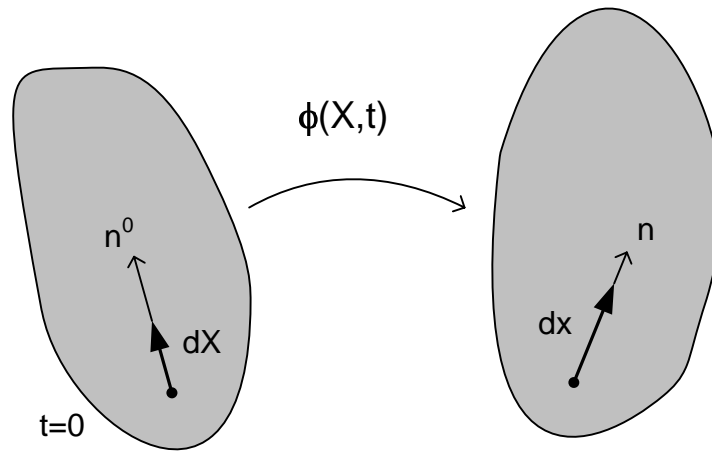


Figura 2.3 Cambio de longitud debido a la deformación.

- El tensor de Green-Lagrange se puede expresar en función de los desplazamientos, sustituyendo el valor del tensor gradiente de deformaciones  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \mathbf{H})^T (\mathbf{I} + \mathbf{H}) - \mathbf{I}]$$

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [\mathbf{H} + \mathbf{H}^T + \mathbf{H}^T \mathbf{H}] \quad (2.71)$$

Empleando el valor del gradiente de desplazamientos  $\mathbf{H}$  queda:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T + \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right)^T \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{X}} \right] \quad (2.72)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j}{\partial X_i} + \sum_k \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right)$$

Los dos primeros sumandos corresponden al tensor infinitesimal lineal de pequeñas deformaciones  $\epsilon$ , y el último término corresponde a los términos no lineales habituales en grandes deformaciones.

- El tensor de Green-Lagrange es invariante ante rotaciones de sólido rígido. Sea un sistema en un instante  $t$ , sometido a un tensor de deformación  $\mathbf{F}^t$ . Entre  $t$  y  $t+\Delta t$  se aplica una rotación de sólido rígido definida por una matriz  $\mathbf{R}$ . El tensor gradiente de deformación en el nuevo estado es:

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{R} \mathbf{F}^t \quad (2.73)$$

El tensor de deformaciones unitarias de Green-Lagrange en el nuevo estado es:

$$\mathbf{E}^{t+\Delta t} = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^{t+\Delta t})^T \mathbf{F}^{t+\Delta t} - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^t)^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \mathbf{F}^t - \mathbf{I}] = \frac{1}{2} [(\mathbf{F}^t)^T \mathbf{F}^t - \mathbf{I}] = \mathbf{E}^t \quad (2.74)$$

### 2.9.1 Expresión vectorial del tensor de Green-Lagrange

El tensor de Green-Lagrange se puede expresar en forma de vector en la forma siguiente, empleando la notación de Voigt, para problemas de 2 y 3 dimensiones (la barra sobre el símbolo indica una representación como vector):

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix} \quad \bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ 2E_{12} \\ 2E_{13} \\ 2E_{23} \end{Bmatrix} \quad (2.75)$$

Como es habitual, se han multiplicado por 2 los términos fuera de la diagonal para poder sustituir el producto contracto de tensores de orden 2 por el producto escalar de vectores. Agrupando los términos lineales y los no lineales se puede poner, para el caso de 2 dimensiones, en la forma:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{Bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{Bmatrix} \quad (2.76)$$

La estructura del primer término, que es lineal, permite expresarlo como:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{Bmatrix} \quad (2.77)$$

Esta expresión se puede poner en forma compacta definiendo dos matrices y recordando la forma vectorial del tensor de desplazamientos  $\mathbf{H}$ :

$$\bar{\mathbf{E}} = \left( \mathbf{A}_C + \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{H}) \right) \bar{\mathbf{H}} \quad (2.78)$$

- La matriz  $\mathbf{A}_C$  es constante, con tamaño 3x4 en 2 dimensiones y 6x9 en 3 dimensiones:

$$\mathbf{A}_C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.79)$$

- La matriz  $\mathbf{A}(\mathbf{H})^1$  depende del vector gradiente de desplazamientos  $\mathbf{H}$ , pues como puede comprobarse, sus términos son sencillamente una reordenación de los términos de  $\mathbf{H}$ . Precisamente la dependencia de  $\mathbf{A}$  de la deformación es el origen de la no-linealidad del problema.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} & \frac{\partial u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial u_2}{\partial X_2} & \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

---

<sup>1</sup> Nota: se emplea el símbolo  $\mathbf{A}$  tanto para el diferencial de área como para la matriz  $\mathbf{A}$ , pero la diferencia entre una y otra magnitud se desprende del contexto de la formulación y no da lugar a dudas.

## 2.10. VARIACIÓN DEL TENSOR DE GREEN-LAGRANGE

Consideramos un cuerpo en un estado deformado  $t$ , sometido a unos desplazamientos  $u_i = x_i - X_i$ . Si se aplica una variación virtual  $\delta \mathbf{u}$  a dichos desplazamientos, la variación del tensor de deformaciones unitarias de Green-Lagrange es, según (2.68):

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{F} \right) \quad (2.81)$$

### 2.10.1 En función del gradiente de desplazamientos

Dado que se cumple que  $\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{H}$ , la variación se puede poner:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{H}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{H} \right) \quad (2.82)$$

### 2.10.2 En función del tensor infinitesimal de deformaciones unitarias

La variación del tensor gradiente  $\mathbf{F}$  es  $\delta \mathbf{F} = \delta \mathbf{H}_t \mathbf{F}$ . Por lo tanto:

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2} \left( \mathbf{F}^T \delta \mathbf{H}_t^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta \mathbf{H}_t \mathbf{F} \right) = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \left( \delta \mathbf{H}_t^T + \delta \mathbf{H}_t \right) \mathbf{F} \quad (2.83)$$

En esta expresión se identifica la variación del tensor infinitesimal de deformaciones unitarias  $\delta \epsilon$  en el instante  $t$ , con lo que finalmente la variación del tensor de deformaciones de Green – Lagrange es:

$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \delta \epsilon \mathbf{F} \quad (2.84)$$

### 2.10.3 Variación del tensor de Green-Lagrange en forma de vector

La variación del tensor de Green-Lagrange en su forma de vector es:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{A}_C \delta \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{H}} \quad (2.85)$$

Observando el valor de  $\mathbf{A}$  se comprueba que se cumple que  $\delta \mathbf{A}(\mathbf{H}) = \mathbf{A}(\delta \mathbf{H})$ . Por otra parte, desarrollando las expresiones, también se comprueba fácilmente que:

$$\mathbf{A}(\delta \mathbf{H}) \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{A}(\mathbf{H}) \delta \bar{\mathbf{H}} \quad (2.86)$$

De esta forma el último sumando de la expresión anterior se puede poner como:

$$\frac{1}{2} \delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\delta \mathbf{H}) \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{A}(\mathbf{H}) \delta \bar{\mathbf{H}} \quad (2.87)$$

Con lo que se obtiene que:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{A}_C \delta \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}} = (\mathbf{A}_C + \mathbf{A}) \delta \bar{\mathbf{H}} \quad (2.88)$$

### 2.11. TENSOR DE DEFORMACIONES UNITARIAS EULERIANO

De forma análoga al tensor de Green-Lagrange se puede definir el tensor de deformación unitaria en el planteamiento euleriano  $\mathbf{E}_A$  o tensor de Almansi.

Para ello se considera la diferencia entre los cuadrados de las distancias entre dos puntos infinitamente próximos, pero referidas al estado deformado final.

$$(dl)^2 - (dl^0)^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{x}^T \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \quad (2.89)$$

$$(dl)^2 - (dl^0)^2 = d\mathbf{x}^T (\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) d\mathbf{x}$$

Con lo que se define este tensor euleriano, en función del tensor de Finger, como:

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^{-1}) = \frac{1}{2}(\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1}) \quad (2.90)$$

Desarrollando la expresión de  $\mathbf{F}^{-1} = \mathbf{I} - \mathbf{H}_t$ , se obtiene su expresión en función del tensor gradiente de desplazamientos espacial:

$$\mathbf{E}_A = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_t^T - \mathbf{H}_t^T \mathbf{H}_t) \quad (2.91)$$

• Este tensor permite medir el cambio del cuadrado de la longitud con respecto a su valor deformado final, en una dirección cualquiera  $\mathbf{n}$ . En efecto, considerando su definición y dividiendo por el cuadrado de la longitud final se obtiene:

$$\frac{(dl)^2 - (dl^0)^2}{2(dl)^2} = \frac{d\mathbf{x}}{dl} \cdot \mathbf{E}_A \frac{d\mathbf{x}}{dl} \quad (2.92)$$

Pero  $d\mathbf{x}/dl$  es un vector unitario  $\mathbf{n}$  en la dirección  $d\mathbf{x}$ , por lo que:

$$\frac{(dl)^2 - (dl^0)^2}{2(dl)^2} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}_A \mathbf{n} \quad (2.93)$$

• La relación entre este tensor y el de Green-Lagrange se obtiene fácilmente sin más que multiplicar este último por la izquierda por  $\mathbf{F}^{-T}$  y por la derecha por  $\mathbf{F}^{-1}$ :

$$\mathbf{E}_A = \mathbf{F}^{-T} \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.94)$$

### 2.12. TENSORES INCREMENTALES

Para el desarrollo de formulaciones incrementales, resulta útil estudiar el incremento que sufre el tensor de Green-Lagrange al pasar desde una configuración  $t$  a otra  $t + \Delta t$ .

A estos efectos se emplean dos tensores incrementales que miden el incremento en el tensor de Green-Lagrange entre los estados  $t$  y  $t + \Delta t$ , pero referidas a estados de referencia distintos: uno emplea el estado inicial como referencia y el otro emplea el estado  $t$  como referencia. Para ello ambos tensores emplean la diferencia entre los



cuadrados de las distancias entre dos puntos próximos, expresadas en los estados indicados.

Para su empleo en las formulaciones incrementales, los dos tensores se expresan en función de la deformación incremental entre los dos estados:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{x}^{t+\Delta t} - \mathbf{x}^t = \mathbf{u}^{t+\Delta t} - \mathbf{u}^t \quad (2.95)$$

### 2.12.1 Tensor incremental de Green-Lagrange

El tensor incremental de Green-Lagrange  $\hat{\mathbf{E}}$  se define como la diferencia entre los cuadrados de las distancias entre dos puntos próximos, en los estados  $t$  y  $t+\Delta t$ , referidas *al estado inicial*:

$$2 d\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = (dl^{t+\Delta t})^2 - (dl^t)^2 \quad (2.96)$$

Este tensor coincide con la diferencia entre los tensores en los instantes  $t$  y  $t+\Delta t$ :

$$2 d\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = \left( (dl^{t+\Delta t})^2 - (dl^0)^2 \right) - \left( (dl^t)^2 - (dl^0)^2 \right)$$

$$2 d\mathbf{X}^T \hat{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{X}^T (\mathbf{E}^{t+\Delta t} - \mathbf{E}^t) d\mathbf{X}$$

$$\hat{\mathbf{E}} = \mathbf{E}^{t+\Delta t} - \mathbf{E}^t \quad (2.97)$$

Sustituyendo el valor de los tensores en función de las deformaciones, el tensor incremental se puede expresar como suma de dos:

$$\hat{\mathbf{E}} = \hat{\mathbf{E}}_L + \hat{\mathbf{E}}_N \quad (2.98)$$

El primer tensor contiene los términos lineales en relación al incremento de deformación  $\hat{\mathbf{u}}$ :

$$\hat{E}_{Lij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial X_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial X_i} + \sum_k \left( \frac{\partial u_k}{\partial X_i} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial X_j} \right) + \sum_k \left( \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial u_k}{\partial X_j} \right) \right) \quad (2.99)$$

Los dos primeros términos son similares al tensor de deformaciones infinitesimales, aunque referidos a las coordenadas iniciales, mientras que los dos últimos se deben a las deformaciones iniciales ya existentes en el material en el instante  $t$ .

El segundo tensor es no lineal en el incremento de deformación:

$$\hat{E}_{Nij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial X_i} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial X_j} \quad (2.100)$$

### 2.12.2 Tensor incremental actualizado de Green-Lagrange

El tensor incremental actualizado de Green-Lagrange  $\hat{\mathbf{E}}_t$  se define como la diferencia entre los cuadrados de las distancias entre dos puntos próximos, en los estados  $t$  y  $t+\Delta t$ , referidas al estado deformado  $t$ :

$$2 d\mathbf{x}^T \hat{\mathbf{E}}_t d\mathbf{x} = (dl^{t+\Delta t})^2 - (dl^t)^2 \quad (2.101)$$

Sustituyendo el valor de los diferenciales en función de las coordenadas y de los incrementos de deformación, el tensor incremental actualizado se puede expresar como suma de dos tensores:

$$\hat{\mathbf{E}}_t = \hat{\mathbf{E}}_{tL} + \hat{\mathbf{E}}_{tN} \quad (2.102)$$

El primer tensor contiene los términos lineales en relación al incremento de deformación  $\hat{\mathbf{u}}$ :

$$\hat{E}_{tLij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.103)$$

El segundo tensor es no lineal en el incremento de deformación y vale:

$$\hat{E}_{tNij} = \frac{1}{2} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_i} \frac{\partial \hat{u}_k}{\partial x_j} \quad (2.104)$$

### 2.13. VELOCIDAD

Consideremos el movimiento de una partícula cualquiera, definida por su posición  $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ . Se define la velocidad material de la partícula como:

$$\mathbf{v}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \phi(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.105)$$

Por su definición resulta obvio que se trata de un campo vectorial material, que representa la velocidad en el instante  $t$  de la partícula que ocupaba la posición  $\mathbf{X}$  en el instante inicial  $t = 0$ .

La velocidad es un campo espacial, a pesar de que se ha expresado en las coordenadas materiales de la partícula  $\mathbf{X}$ . De hecho se puede definir la velocidad como una función de la coordenada espacial  $\mathbf{x}$ :

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{v}(\phi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.106)$$

Se trata de un campo espacial que físicamente representa la velocidad en sentido clásico, es decir la velocidad de la partícula que en el instante de tiempo  $t$  ocupa la posición  $\mathbf{x}$ . Es importante notar que la velocidad espacial no es la derivada temporal de ninguna función.

#### 2.13.1 Derivada temporal material

Sea un campo escalar, vectorial o tensorial cualquiera, expresado en las coordenadas materiales  $\sigma(\mathbf{X}, t)$ , su derivada respecto al tiempo se define como:

$$\dot{\sigma}(\mathbf{X}, t) = \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\partial\sigma(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.107)$$

y se conoce como la derivada temporal material de la magnitud  $\sigma$ , pues mide el cambio de  $\sigma$  asociado con la partícula material que está situada inicialmente en  $\mathbf{X}$ .

Si el campo  $\sigma$  está definido en función de la posición espacial  $\mathbf{x}$ , la derivada temporal material requiere efectuar la derivación en cadena:

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\sigma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial\sigma(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \quad (2.108)$$

$$\dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial\sigma(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + (\nabla\sigma) \mathbf{v}$$

El segundo término de esta expresión se denomina convectivo o de transporte, y está asociado al movimiento de la partícula que ocupa la posición  $\mathbf{x}$ .

### 2.13.2 Tensor gradiente de velocidad

Habiendo definido la velocidad  $\mathbf{v}$ , su derivada respecto a las coordenadas espaciales  $\mathbf{x}$  define el tensor gradiente de velocidad espacial  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)}{\partial \mathbf{x}} = \nabla \mathbf{v} \quad L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \quad (2.109)$$

Este tensor proporciona la velocidad relativa entre dos partículas situadas en puntos muy próximos, separados una magnitud  $d\mathbf{x}$ .

El tensor gradiente de velocidad permite obtener una expresión útil de la derivada temporal del gradiente de deformación:

$$\dot{\mathbf{F}} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right) = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{L} \mathbf{F} \quad (2.110)$$

Esta ecuación proporciona, a su vez, otra expresión del tensor gradiente de velocidad:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.111)$$

### 2.13.3 Derivada temporal del tensor de Green

Se obtiene fácilmente a partir de su definición:

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{C}} = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}}) \quad (2.112)$$

### 2.13.4 Tasa de deformación

El tensor gradiente de velocidad  $\mathbf{L}$  se puede descomponer en sus componentes simétrica y antisimétrica:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.113)$$

El tensor tasa de deformación  $\mathbf{D}_L$  se define como la parte simétrica de  $\mathbf{L}$ :

$$\mathbf{D}_L = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad D_{Lij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.114)$$

La parte antisimétrica de  $\mathbf{L}$  define el tensor de giro  $\mathbf{W}_L$ , también llamado tensor de rotación o de vorticidad:

$$\mathbf{W}_L = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad W_{Lij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \quad (2.115)$$

Estos dos tensores son tensores espaciales, que involucran sólo a las coordenadas y a la velocidad en la configuración  $\Omega$ .

• La tasa de deformación  $\mathbf{D}_L$  se relaciona con la derivada temporal del tensor de Green. Para ello, en la definición de  $\mathbf{D}_L$  se sustituye el valor de  $\mathbf{L}$  dado por (2.111):

$$\mathbf{D}_L = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T) \quad (2.116)$$

Añadiendo los factores identidad por la izquierda de primer sumando y por la derecha del segundo:

$$\mathbf{D}_L = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} \mathbf{F}^{-1} + \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) \quad (2.117)$$

Reordenando y recordando el valor de la derivada temporal de  $\mathbf{E}$  se obtiene:

$$\mathbf{D}_L = \frac{1}{2} \mathbf{F}^{-T} (\mathbf{F}^T \dot{\mathbf{F}} + \dot{\mathbf{F}}^T \mathbf{F}) \mathbf{F}^{-1} = \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} \quad (2.118)$$

• La tasa de deformación  $\mathbf{D}_L$  es una medida de la variación con el tiempo del cuadrado de la longitud de un elemento diferencial:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(dl^2) &= \frac{d}{dt}(d\mathbf{x}^T d\mathbf{x}) = \frac{d}{dt}(d\mathbf{X}^T \mathbf{F}^T \mathbf{F} d\mathbf{X}) = \frac{d}{dt}(d\mathbf{X}^T \mathbf{C} d\mathbf{X}) \\ \frac{d}{dt}(dl^2) &= d\mathbf{X}^T \dot{\mathbf{C}} d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{X}^T \dot{\mathbf{E}} d\mathbf{X} = 2 d\mathbf{x}^T \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{E}} \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{x} \end{aligned} \quad (2.119)$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt}(dl^2) = d\mathbf{x}^T \mathbf{D}_L d\mathbf{x}$$

• Estas magnitudes permiten asimismo estudiar las condiciones para que el volumen del material se mantenga constante. Consideramos para ello la derivada temporal del diferencial de volumen:

$$\frac{d}{dt}(dv) = \frac{d}{dt}(F dv^0) = \dot{F} dv^0 \quad (2.120)$$

La derivada del determinante del tensor  $\mathbf{F}$  se obtiene derivando en cadena:

$$\dot{F} = \sum \frac{\partial F}{\partial F_{ij}} \frac{\partial F_{ij}}{\partial t} = \frac{\partial F}{\partial \mathbf{F}} : \dot{\mathbf{F}} \quad (2.121)$$

Pero la derivada del determinante de una matriz  $\mathbf{A}$  respecto de esa matriz tiene la expresión:

$$\frac{\partial |\mathbf{A}|}{\partial \mathbf{A}} = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-T} \quad (2.122)$$

Empleando esta ecuación para  $\mathbf{F}$ , sustituyendo a continuación el valor de  $\dot{\mathbf{F}}$  dado por (2.111) en (2.121) y operando se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{F} &= F \mathbf{F}^{-T} : \dot{\mathbf{F}} = F \mathbf{F}^{-T} : (\mathbf{L} \mathbf{F}) \\ \dot{F} &= F \mathbf{F}^{-T} \mathbf{F}^T : \mathbf{L} = F \mathbf{I} : \mathbf{L} = F \operatorname{tr}(\mathbf{L}) \end{aligned} \quad (2.123)$$

$$\dot{F} = F \operatorname{tr}(\nabla \mathbf{v}) = F \operatorname{div}(\mathbf{v})$$

Por lo tanto la condición para un comportamiento incompresible puede expresarse en una cualquiera de las formas siguientes:

$$dv = C^{te} \quad \rightarrow \quad \dot{F} = 0 \quad , \quad \mathbf{F}^{-T} \dot{\mathbf{F}} = 0 \quad , \quad \operatorname{div}(\mathbf{v}) = 0 \quad (2.124)$$

# Tensiones. Ecuaciones constitutivas

## 3.1. TENSOR DE TENSIONES DE CAUCHY

Sea un cuerpo continuo en una configuración cualquiera  $\Omega$  de su estado deformado, y considerémoslo cortado por un plano arbitrario, definido por su vector normal  $\mathbf{n}$ . En un punto cualquiera del plano de corte identificamos un elemento diferencial de área de módulo  $dA$ . Consideremos la fuerza de tracción actuante sobre dicho diferencial de área, que denominaremos  $d\mathbf{f}$  y que tendrá una dirección cualquiera (figura 3.1).

Definimos el vector tensión  $\mathbf{t}$  correspondiente a dicha área como la fuerza de tracción actuante por unidad de área:

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = \frac{d\mathbf{f}}{dA} \quad (3.1)$$

En esta definición del vector tensión se ha añadido para mayor claridad la dirección  $\mathbf{n}$  a la que corresponde  $\mathbf{t}$ , para recordar que la fuerza  $d\mathbf{f}$  depende de la dirección del plano de corte.

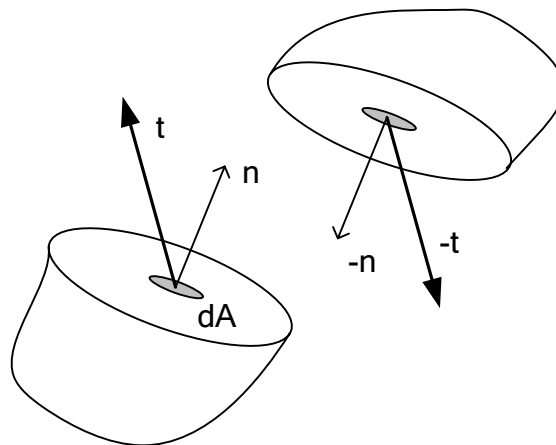


Figura 3.1 Vector tensión en un punto cualquiera.

Con objeto de introducir el concepto de tensor de tensiones, estudiamos ahora un cubo elemental con sus lados dirigidos en las direcciones de los vectores unitarios de la base cartesiana  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$ ,  $\mathbf{e}_3$  a la que referimos el sólido (figura 3.2). Considerando los tres vectores tensión  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$ ,  $\mathbf{t}_3$  correspondientes a los tres planos coordenados, cada uno de ellos puede expresarse en la base de los vectores unitarios mediante sus tres componentes, que denominaremos  $\sigma$ :

$$\mathbf{t}_j = \sigma_{j1} \mathbf{e}_1 + \sigma_{j2} \mathbf{e}_2 + \sigma_{j3} \mathbf{e}_3 = \sum_i \sigma_{ji} \mathbf{e}_i \quad (3.2)$$

Estas componentes  $\sigma_{ij}$  de los vectores tensión corresponden a la fuerza por unidad de área en cada uno de los planos coordenados y en cada una de las direcciones.

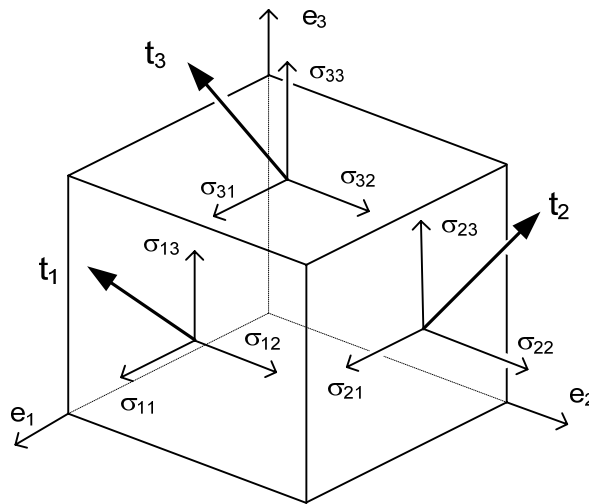


Figura 3.2 Vectores tensión en un cubo elemental.

Consideramos ahora un tetraedro elemental, con una cara en la dirección de cada uno de los ejes coordenados, y la cuarta cara en una dirección arbitraria, definida por un vector unitario normal  $\mathbf{n}$ . Sea  $dA_j$  el área de cada cara y  $dA$  el área de la base (figura 3.3).

Sobre las tres caras orientadas según los ejes coordenados actúan los tres vectores tensión  $-\mathbf{t}_1$ ,  $-\mathbf{t}_2$ ,  $-\mathbf{t}_3$  (con signo negativo pues las caras están orientadas en la dirección negativa de los ejes) y sobre la otra cara actúa un vector tensión  $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ .

El equilibrio de fuerzas de este tetraedro indica que:

$$\mathbf{t} dA - \mathbf{t}_1 dA_1 - \mathbf{t}_2 dA_2 - \mathbf{t}_3 dA_3 = 0 \quad (3.3)$$

La relación entre las áreas de las caras y de la base es:  $dA_j = \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n} dA$  con lo que la ecuación de equilibrio queda:

$$\mathbf{t} dA = \sum_j \mathbf{t}_j dA_j = \sum_j \mathbf{t}_j (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}) dA \quad (3.4)$$

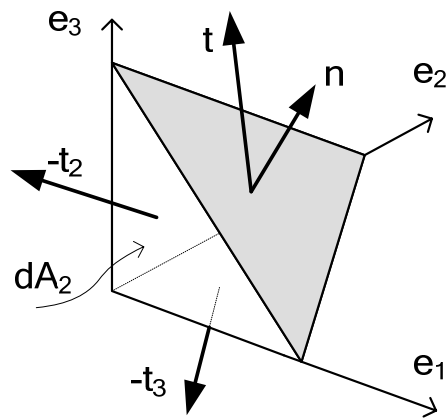


Figura 3.3 Equilibrio del tetraedro elemental.

Eliminado el  $dA$ , que es arbitrario y sustituyendo cada vector  $\mathbf{t}_j$  en función de sus componentes  $\sigma_{ji}$  en los tres ejes:

$$\mathbf{t} = \sum_{j,i} \sigma_{ji} \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}) \quad (3.5)$$

Obsérvese que el vector de cada sumando se puede poner en la forma de un producto tensorial

$$\mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{n} \quad (3.6)$$

El valor del vector tensión  $\mathbf{t}$  queda:

$$\mathbf{t} = \sum_{j,i} \sigma_{ji} (\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j) \mathbf{n} \quad (3.7)$$

El sumatorio define un tensor cartesiano en la base de los vectores  $\mathbf{e}_i$ , cuyas componentes  $\sigma_{ji}$  corresponden a las componentes de los tres vectores tensión (fuerzas por unidad de área) en las caras coordenadas, y que se conoce como *tensor de tensiones de Cauchy*.

Este tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  representa las tensiones reales existentes en el material, definidas como las fuerzas internas por unidad de área en la situación deformada.

De la misma forma la expresión anterior se conoce como fórmula de Cauchy, y proporciona el valor de esta fuerza de tracción por unidad de área en función del tensor de tensiones de Cauchy en dicho punto y de la dirección normal:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} \quad (3.8)$$

**Observación:** como se demostrará más adelante (aplicando el equilibrio de momentos), el tensor de tensiones de Cauchy es simétrico, con lo que la fórmula de Cauchy se empleará en la forma:

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \quad (3.9)$$



### 3.2. PRIMER TENSOR DE TENSIONES DE PIOLA-KIRCHHOFF

Sea un elemento diferencial de área en el estado deformado  $d\mathbf{A}$ , de módulo  $dA$  y vector normal  $\mathbf{n}$ . La fuerza de tracción actuante sobre dicho diferencial de área  $d\mathbf{f}$ , en función del vector tensión  $\mathbf{t}$  es:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{t} dA \quad (3.10)$$

Empleando la fórmula de Cauchy:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \quad (3.11)$$

siendo  $d\mathbf{A}$  un vector de módulo  $dA$  y dirección  $\mathbf{n}$ . La relación entre el área deformada y el área inicial permite poner:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} = \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}^0 \quad (3.12)$$

Esta expresión permite introducir el *primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.13)$$

que relaciona la fuerza en el estado deformado  $d\mathbf{f}$  y el área en el estado sin deformar:

$$d\mathbf{f} = \mathbf{P} d\mathbf{A}^0 \quad (3.14)$$

Por lo tanto este tensor es un tensor de doble punto, que proporciona la fuerza en el estado deformado  $\Omega$ , pero referida a la superficie sin deformar  $\Omega_0$  (figura 3.4). Es un tensor no simétrico.

Observación: en muchos textos (p.e Belytschko, 2000), se emplea el símbolo  $\mathbf{P}$  para la denominada tensión nominal, que es sencillamente la traspuesta del primer tensor de Piola  $\mathbf{P}^{\text{nom}} = \mathbf{P}^T$ .

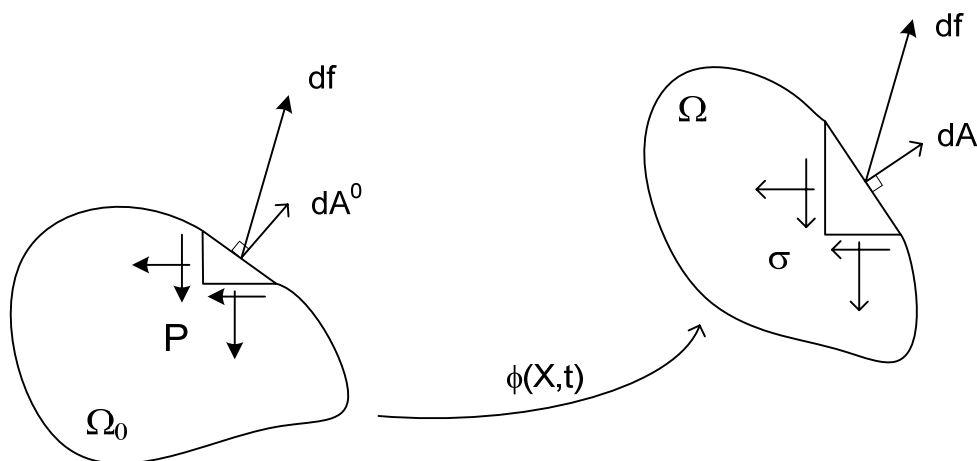


Figura 3.4 Primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

### 3.3. SEGUNDO TENSOR DE TENSIONES DE PIOLA-KIRCHHOFF

Este tensor no tiene mucho significado físico, pero el siguiente proceso explica su naturaleza. Sea un elemento diferencial de área  $d\mathbf{A}$  en el estado deformado, de módulo  $dA$  y dirección  $\mathbf{n}$ , sobre el cual la fuerza actuante es  $d\mathbf{f}$ . Según la fórmula de Cauchy esta fuerza es:

$$d\mathbf{f} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} dA = \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \quad (3.15)$$

Supongamos que transformamos esta fuerza diferencial al estado original indeformado, utilizando para ello el tensor gradiente de la deformación, que puede usarse para transformar cualquier vector diferencial. Esa fuerza transformada al estado inicial es:

$$d\mathbf{f}^0 = \mathbf{F}^{-1} d\mathbf{f} = \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} d\mathbf{A} \quad (3.16)$$

El área en el estado deformado se puede expresar en función del área inicial indeformada:

$$d\mathbf{f}^0 = F \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} d\mathbf{A}^0 \quad (3.17)$$

Esta expresión permite introducir el *segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff*  $\mathbf{S}$ , definido como:

$$\mathbf{S} = F \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad (3.18)$$

Con lo que queda:

$$d\mathbf{f}^0 = \mathbf{S} d\mathbf{A}^0 \quad (3.19)$$

Este tensor representa la fuerza en el estado deformado, pero transformada al estado inicial y referida a la unidad de área del estado inicial (figura 3.5). Como puede comprobarse en (3.18), es un tensor simétrico por serlo  $\boldsymbol{\sigma}$ . Se verá más adelante que es energéticamente conjugado del tensor de deformaciones unitarias de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ . Se emplea de forma habitual en las formulaciones lagrangianas que se desarrollan más adelante.

En la práctica se empleará en sus representaciones como matriz  $\mathbf{S}$  o como vector  $\bar{\mathbf{S}}$ , las cuales son, para dos dimensiones, y empleando la notación de Voigt:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

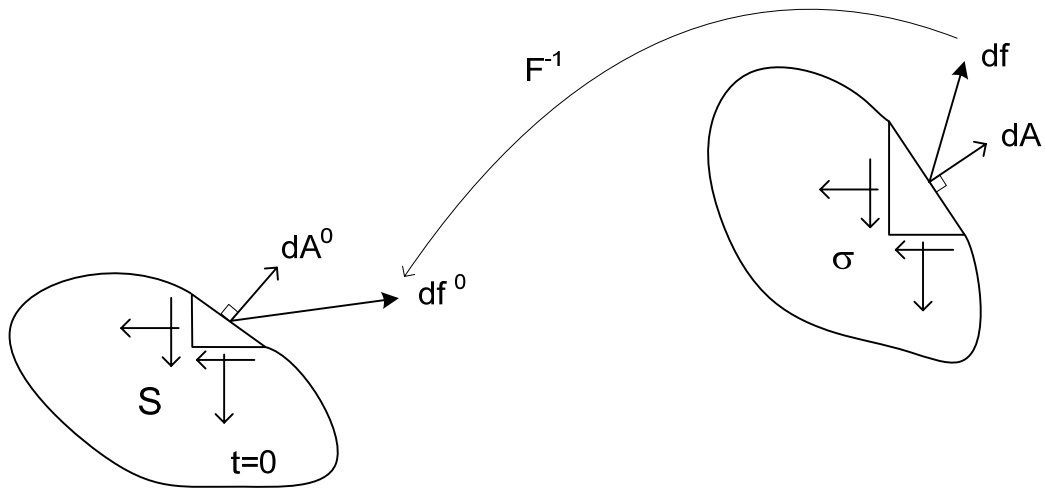


Figura 3.5 Segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff.

- El segundo tensor de Piola-Kirchhoff es invariante ante rotaciones de sólido rígido. Sea un sistema en un instante  $t$ , sometido a un tensor de deformación  $\mathbf{F}^t$ . Entre  $t$  y  $t+\Delta t$  se aplica una rotación de sólido rígido definida por una matriz  $\mathbf{R}$ . El tensor gradiente de deformación en el nuevo estado es:

$$\mathbf{F}^{t+\Delta t} = \mathbf{R} \mathbf{F}^t \quad (3.21)$$

La tensión de Piola-Kirchhoff en el estado  $t+\Delta t$  es:

$$\mathbf{S}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^{t+\Delta t} (\mathbf{F}^{t+\Delta t})^{-1} \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} (\mathbf{F}^{t+\Delta t})^{-T} \quad (3.22)$$

Teniendo en cuenta que el determinante del gradiente de deformaciones es el mismo al aplicar la rotación de sólido rígido:

$$\mathbf{S}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^t (\mathbf{F}^t)^{-1} \mathbf{R}^T \boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} \mathbf{R} (\mathbf{F}^t)^{-T} \quad (3.23)$$

Durante la rotación de sólido rígido las tensiones se mantienen constantes en el sistema móvil y sufren dicha rotación de sólido rígido; por lo tanto su valor es:

$$\boldsymbol{\sigma}^{t+\Delta t} = \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{R}^T \quad (3.24)$$

Sustituyendo este valor se obtiene

$$\mathbf{S}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^t (\mathbf{F}^t)^{-1} \mathbf{R}^T \mathbf{R} \boldsymbol{\sigma}^t \mathbf{R}^T \mathbf{R} (\mathbf{F}^t)^{-T} \quad (3.25)$$

$$\mathbf{S}^{t+\Delta t} = \mathbf{F}^t (\mathbf{F}^t)^{-1} \boldsymbol{\sigma}^t (\mathbf{F}^t)^{-T} \equiv \mathbf{S}^t$$

Es decir que las tensiones de Piola-Kirchhoff son las mismas que antes de efectuar la rotación de sólido rígido. Ello es debido a que se aplica la misma matriz de rotación a las tensiones de Cauchy y al gradiente de deformaciones.

### 3.4. ECUACIONES CONSTITUTIVAS

En apartados anteriores se han establecido las medidas de la deformación y del estado de esfuerzos interiores en el material. El siguiente paso en cualquier método de análisis de mecánica de sólidos consiste en establecer una relación entre dichas magnitudes, empleando para ello una ecuación que represente el comportamiento físico del material, denominada ecuación constitutiva del mismo.

La determinación de estas ecuaciones constitutivas es un problema muy complejo, y nos limitaremos aquí a los casos más simples de materiales elásticos o su generalización los materiales con comportamiento hiperelástico, que resultan convenientes para el estudio de problemas no lineales, además de servir como base para el desarrollo de ecuaciones de comportamiento más complejas.

En forma muy general se conoce como elásticos a aquéllos materiales en los que el estado de tensiones queda definido únicamente en función del estado actual de deformación. Para caracterizar el estado de tensiones usamos el primer tensor de Piola  $\mathbf{P}$ , que es energéticamente conjugado del tensor gradiente de deformación  $\mathbf{F}$ ; por lo tanto, para una partícula cualquiera del sólido  $\mathbf{X}$ , la ecuación constitutiva será una función de la forma  $\mathbf{P}=f(\mathbf{F},\mathbf{X})$ .

El comportamiento de un material se define como hiperelástico cuando el trabajo efectuado por las tensiones a lo largo del proceso de deformación depende únicamente de los estados inicial y final del mismo, y es independiente del camino seguido para pasar de uno a otro. A consecuencia de ello se puede establecer una función de energía de deformación almacenada o *potencial elástico*  $\Psi$ , que representa el trabajo efectuado por las tensiones durante la deformación, por unidad de volumen. Expresado en función de las magnitudes conjugadas  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{F}$ , se puede poner:

$$\Psi(\mathbf{F}) = \int_0^{\mathbf{F}} \mathbf{P} : d\mathbf{F} \quad (3.26)$$

Para que esta función sea independiente del camino, su integrando debe ser una diferencial perfecta, es decir  $d\Psi = \mathbf{P} : d\mathbf{F}$ . Suponiendo conocida la función  $\Psi$  para un material dado, esta relación se puede poner en la forma:

$$\mathbf{P} = \frac{\partial \Psi(\mathbf{F})}{\partial \mathbf{F}} \quad (3.27)$$

Debe considerarse además que el potencial elástico  $\Psi$  debe ser invariable ante rotaciones de sólido rígido. Recordando la descomposición polar del tensor de deformación  $\mathbf{F}=\mathbf{R} \mathbf{U}$ , se concluye que en realidad  $\Psi$  sólo debe depender de la componente de extensión  $\mathbf{U}$  del tensor de deformación  $\mathbf{F}$  y no de la componente de rotación  $\mathbf{R}$ , es decir  $\Psi(\mathbf{U})$ .

Recordando que el tensor derecho de Cauchy es  $\mathbf{C}=\mathbf{U} \mathbf{U}$ , se puede considerar que  $\Psi$  depende de  $\mathbf{C}$  en lugar de  $\mathbf{U}$ , es decir  $\Psi(\mathbf{C})$ . Por lo tanto se cumplirá que:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} : d\mathbf{C} \quad (3.28)$$

Recordando la relación entre el tensor de Cauchy  $\mathbf{C}$  y el de Green  $\mathbf{E} = (1/2)(\mathbf{C} - \mathbf{I})$ , el potencial elástico puede expresarse en función de dicho tensor de Green como  $\Psi(\mathbf{E})$ , con lo que puede ponerse:

$$d\Psi = \frac{\partial\Psi(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} : d\mathbf{E} \quad (3.29)$$

Pero como el tensor  $\mathbf{E}$  es energéticamente conjugado de la 2ª tensión de Piola  $\mathbf{S}$ , esta última expresión se puede poner:

$$d\Psi = \mathbf{S} : d\mathbf{E} \quad (3.30)$$

Dado que  $d\mathbf{C} = 2 d\mathbf{E}$  se concluye que:

$$\mathbf{S} = \frac{\partial\Psi(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}} = 2 \frac{\partial\Psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}} \quad (3.31)$$

### 3.4.1 El tensor de elasticidad

La relación entre  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{E}$  es en general no lineal, por lo que es necesario proceder a obtener una expresión linealizada de la misma, con vista a su utilización en un proceso de simulación incremental. Suponiendo que se produce un incremento en el campo de deformaciones  $\Delta\mathbf{u}$ , éste producirá un incremento en las deformaciones de Green-Lagrange de valor  $\Delta\mathbf{E}$ , y el incremento en la segunda tensión de Piola será:

$$\Delta\mathbf{S} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}} : \Delta\mathbf{E} \quad (3.32)$$

Esta expresión define el tensor de elasticidad constitutivo del material  $\mathbf{C}$  :

$$\Delta\mathbf{S} = \mathbf{C} : \Delta\mathbf{E} \quad (3.33)$$

Es un tensor de cuarto orden, cuyo valor es:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{E}} = 2 \frac{\partial\mathbf{S}}{\partial\mathbf{C}} = \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{E})}{\partial\mathbf{E}^2} = 4 \frac{\partial^2\Psi(\mathbf{C})}{\partial\mathbf{C}^2} \quad (3.34)$$

Dado que relaciona dos tensores  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{E}$  simétricos, este tensor posee simetrías menores:  $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{jkl i} = \mathbb{C}_{ijlk}$ . Asimismo, por su propia definición como derivada segunda del potencial elástico, posee simetría mayor:  $\mathbb{C}_{ijkl} = \mathbb{C}_{klij}$ .

### 3.4.2 Material de St. Venant-Kirchhoff

Una de las formas más simples de un material hiperelástico es el modelo de St. Venant-Kirchhoff, cuya función de potencial elástico, para un material isótropo, es:

$$\Psi(\mathbf{E}) = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}(\mathbf{E})^2 + \mu \mathbf{E} : \mathbf{E} \quad (3.35)$$

Las constantes  $\lambda$  y  $\mu$  son los parámetros de Lamé:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.36)$$

que dependen del módulo de elasticidad del material  $E$  y del módulo de Poisson  $\nu$ .

El tensor de tensiones es:

$$\mathbf{S} = \lambda \operatorname{tr}(\mathbf{E}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E} \quad (3.37)$$

El tensor de elasticidad vale:

$$\mathbf{C} = \lambda (\mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{I}_2) + 2\mu \mathbf{I}_4 \quad (3.38)$$

Siendo  $\mathbf{I}_2$  e  $\mathbf{I}_4$  los tensores unidad de orden 2 y 4 respectivamente. Sus términos, en función de la  $\delta$  de Kronecker, son

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \quad (3.39)$$

Se puede comprobar que este tensor coincide con el de la elasticidad lineal con pequeñas deformaciones (en la que se usa el tensor infinitesimal  $\epsilon$  en lugar del  $\mathbf{E}$ ). Al ser constante se cumple que:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E} \quad (3.40)$$

Por lo tanto este material representa una extensión de las leyes de la elasticidad lineal, pero empleándolas para relacionar las medidas propias de las grandes deformaciones: tensiones de Piola  $\mathbf{S}$  y deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ . Resulta de muy fácil implementación práctica, pero sin embargo su uso queda limitado a problemas en los que las deformaciones unitarias sean pequeñas, aunque las deformaciones sean de gran magnitud.

### 3.4.3 Material hiperelástico isótropo

En el caso de que el material sea isótropo, el comportamiento del material debe ser el mismo en cualquier dirección. Ello implica que el potencial elástico debe ser independiente del sistema de coordenadas empleado, y por lo tanto siempre se puede expresar en función de los tres invariantes ( $I_1, I_2, I_3$ ) del tensor de Cauchy  $\mathbf{C}$ , es decir que debe ser una función  $\Psi(I_1, I_2, I_3)$ . Dichos tres invariantes de  $\mathbf{C}$  son:

$$\begin{aligned} I_1 &= \operatorname{tr}(\mathbf{C}) \\ I_2 &= \frac{1}{2} (I_1^2 - \operatorname{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C})) = \frac{1}{2} (I_1^2 - \mathbf{C} : \mathbf{C}) \\ I_3 &= \det(\mathbf{C}) = \det(\mathbf{F})^2 = F^2 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Por lo tanto el tensor de Piola se puede poner:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2 \left( \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \right) \quad (3.42)$$

Las derivadas de los invariantes respecto de  $\mathbf{C}$  son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{I} \\ \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} &= I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C} \\ \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} &= F^2 \mathbf{C}^{-1} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Con lo que la tensión de Piola queda:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{I} + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{I} - \mathbf{C}) + 2 \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} F^2 \mathbf{C}^{-1} \quad (3.44)$$

Resulta de interés práctico obtener el valor de la tensión de Cauchy, cuya relación con la tensión de Piola se obtiene despejando de (3.18):

$$\boldsymbol{\sigma} = F^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S} \mathbf{F}^T \quad (3.45)$$

Sustituyendo  $\mathbf{S}$  de (3.44) y considerando el valor de  $\mathbf{C}$ :

$$\boldsymbol{\sigma} = 2F^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{F} \mathbf{F}^T + 2F^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{F} \mathbf{F}^T - \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^T) + 2F \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{I} \quad (3.46)$$

Recordando el tensor izquierdo de Cauchy  $\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T$ .

$$\boldsymbol{\sigma} = 2F^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial I_1} \mathbf{B} + 2F^{-1} \frac{\partial \Psi}{\partial I_2} (I_1 \mathbf{B} - \mathbf{B} \mathbf{B}) + 2F \frac{\partial \Psi}{\partial I_3} \mathbf{I} \quad (3.47)$$

Para evaluar esta expresión de la tensión de Cauchy, son necesarias las derivadas del potencial respecto de los invariantes de  $\mathbf{C}$ . Sin embargo es fácil demostrar que los invariantes de  $\mathbf{B}$  son iguales a los invariantes de  $\mathbf{C}$ , por lo que dichas derivadas son las mismas:

$$\begin{aligned} I_{1B} &= \text{tr}(\mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T) = \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \text{tr}(\mathbf{C}) = I_1 \\ I_{2B} &= \frac{1}{2} (I_{1B}^2 - \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{B})) = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^T)) = \\ &= \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{F}^T \mathbf{F})) = \frac{1}{2} (I_1^2 - \text{tr}(\mathbf{C} \mathbf{C})) = I_2 \\ I_{3B} &= \det(\mathbf{B}) = \det(\mathbf{F} \mathbf{F}^T) = \det(\mathbf{F}^T \mathbf{F}) = \det(\mathbf{C}) = I_3 \end{aligned} \quad (3.48)$$

### 3.4.4 Material neo-hookeano compresible

Este material representa una extensión a las grandes deformaciones de la ley lineal isótropa, o ley de Hooke. El potencial de energía almacenada es:

$$\Psi = \frac{\mu}{2}(I_1 - 3) - \mu \ln F + \frac{\lambda}{2}(\ln F)^2 \quad (3.49)$$

Con este potencial, la tensión de Piola es:

$$\mathbf{S} = \mu(\mathbf{I} - \mathbf{C}^{-1}) + \lambda \ln F \mathbf{C}^{-1} \quad (3.50)$$

El tensor de elasticidad se obtiene diferenciando esta expresión respecto de  $\mathbf{C}$ :

$$\mathbf{C} = \lambda \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + 2(\mu - \lambda \ln F) \mathfrak{S} \quad (3.51)$$

El tensor  $\mathfrak{S}$ , de orden 4, vale:

$$\mathfrak{S} = -\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.52)$$

Sus componentes son:

$$\mathfrak{S}_{ijkl} = \frac{1}{2} [(\mathbf{C}^{-1})_{ik}(\mathbf{C}^{-1})_{jl} + (\mathbf{C}^{-1})_{il}(\mathbf{C}^{-1})_{jk}] \quad (3.53)$$

Se puede comprobar que el tensor  $\mathbf{C}$  así construido posee todas las simetrías mayores y menores.

### 3.4.5 Materiales incompresibles

Se pueden construir funciones de potencial elástico para materiales isótropos apoyándose en los 3 alargamientos principales  $\lambda_\alpha$ , dado que dichos alargamientos son invariantes, pues sus cuadrados son los autovalores del tensor  $\mathbf{C}$  (ver capítulo 2). Es decir que se plantea un potencial de la forma  $\Psi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ . Los cuadrados de estos autovalores de  $\mathbf{C}$  se relacionan con sus invariantes mediante:

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr}(\mathbf{C}) = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \\ I_2 &= \frac{1}{2} \left( (\text{tr}(\mathbf{C}))^2 - \text{tr}(\mathbf{C}\mathbf{C}) \right) = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \\ I_3 &= \det(\mathbf{C}) = F^2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \end{aligned} \quad (3.54)$$

En el estado descargado de referencia, los tres autovalores son la unidad, por lo que los tres invariantes valen  $I_1=3$ ,  $I_2=3$ ,  $I_3=1$ . En base a esto, es posible construir una función de potencial elástico genérica, que cumpla con las condiciones de ser siempre positiva, simétrica en los autovalores y nula en el estado inicial, en la forma:

$$\Psi = \sum_{r,s,t=0}^{\infty} C_{rst} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s (I_3 - 1)^t \quad \text{con} \quad C_{000} = 0 \quad (3.55)$$



Para un material incompresible se cumple que  $F=1$ , por lo que  $I_3=1$ , y el potencial queda:

$$\Psi = \sum_{r,s=0}^{\infty} C_{rs} (I_1 - 3)^r (I_2 - 3)^s \quad \text{con} \quad C_{00} = 0 \quad (3.56)$$

En base a esta idea se han desarrollado modelos que consisten en truncar la serie anterior. Por ejemplo el modelo de Mooney-Rivlin, muy empleado para modelizar gomas con grandes deformaciones unitarias, se basa en la siguiente función potencial:

$$\Psi = \mu_1 (I_1 - 3) + \mu_2 (I_2 - 3) \quad (3.57)$$

donde  $\mu_1$  y  $\mu_2$  son parámetros propios del material.

De la misma forma se puede plantear la versión incompresible del material neo-hookeano, mediante el potencial:

$$\Psi = \mu_1 (I_1 - 3) \quad (3.58)$$

### 3.4.6 Materiales casi incompresibles

Los modelos de materiales perfectamente incompresibles tienen problemas numéricos de bloqueo volumétrico (salvo en problemas planos), y por otra parte los materiales suelen tener un cierto margen de compresibilidad. Por lo tanto es interesante desarrollar modelos que permitan modelizar dicha cuasi-incompresibilidad, de tal manera que en el límite pueda llegarse a la incompresibilidad ideal.

Con este objetivo es necesario extraer de la función potencial su componente desviadora, y añadirle un término volumétrico, asociado a la compresibilidad. Con objeto de identificar sólo la componente desviadora del potencial, resulta útil emplear los alargamientos reducidos, definidos como:

$$\hat{\lambda}_\alpha = F^{-1/3} \lambda_\alpha \quad (3.59)$$

de tal manera que estos alargamientos mantienen el volumen:

$$\hat{F} = \hat{\lambda}_1 \hat{\lambda}_2 \hat{\lambda}_3 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 F^{-3/3} = F F^{-1} = 1 \quad (3.60)$$

Esto es equivalente a emplear los tensores de deformación y de Cauchy reducidos, definidos como:

$$\hat{\mathbf{F}} = F^{-1/3} \mathbf{F} \quad \hat{\mathbf{C}} = F^{-2/3} \mathbf{C} \quad (3.61)$$

En consecuencia, la relación entre los invariantes  $\hat{I}_\alpha$  del tensor reducido  $\hat{\mathbf{C}}$  y los originales son:

$$\hat{I}_1 = \hat{\lambda}_1^2 + \hat{\lambda}_2^2 + \hat{\lambda}_3^2 = I_1 F^{-2/3} = I_1 I_3^{-1/3} \quad (3.62)$$

$$\hat{I}_2 = I_2 F^{-4/3} = I_2 I_3^{-2/3}$$

Lógicamente el tercer invariante vale la unidad

$$\hat{I}_3 = \hat{\lambda}_1^2 \hat{\lambda}_2^2 \hat{\lambda}_2^2 = \hat{F}^2 = 1 \quad (3.63)$$

De esta manera la componente desviadora del material de Mooney-Rivlin se puede poner:

$$\Psi_D = \mu_1(\hat{I}_1 - 3) + \mu_2(\hat{I}_2 - 3) \quad (3.64)$$

Para la componente volumétrica, pueden emplearse varias expresiones, pero una de las más habituales es:

$$\Psi_V = \kappa \frac{(F - 1)^2}{2} \quad (3.65)$$

en la que  $\kappa$  es el módulo de compresibilidad del material. Considerando ambos términos, la función potencial para el material de Mooney-Rivlin modificado para ser cuasi incompresible es:

$$\Psi = \mu_1(\hat{I}_1 - 3) + \mu_2(\hat{I}_2 - 3) + \kappa \frac{(F - 1)^2}{2} \quad (3.66)$$

La expresión de la tensión de Piola se obtiene derivando este potencial:

$$\mathbf{S} = 2 \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = 2\mu_1 \frac{\partial \hat{I}_1}{\partial \mathbf{C}} + 2\mu_2 \frac{\partial \hat{I}_2}{\partial \mathbf{C}} + 2\kappa(F - 1) \frac{\partial F}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.67)$$

Derivando los invariantes reducidos se obtiene:

$$\mathbf{S} = \beta_1 \frac{\partial I_1}{\partial \mathbf{C}} + \beta_2 \frac{\partial I_2}{\partial \mathbf{C}} + \beta_3 \frac{\partial I_3}{\partial \mathbf{C}} \quad (3.68)$$

Siendo los coeficientes:

$$\begin{aligned} \beta_1 &= 2\mu_1 F^{-2/3} \\ \beta_2 &= 2\mu_2 F^{-4/3} \\ \beta_3 &= -\frac{2}{3} \mu_1 I_1 F^{-8/3} - \frac{4}{3} \mu_2 I_2 F^{-10/3} + \kappa \frac{(F - 1)}{F} \end{aligned} \quad (3.69)$$

Las derivadas de los invariantes ya han sido calculadas, con lo que se obtiene:

$$\mathbf{S} = \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{C} + \alpha_3 \mathbf{C}^{-1} + \kappa F(F - 1) \mathbf{C}^{-1} \quad (3.70)$$

siendo:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= 2\mu_1 F^{-2/3} + 2\mu_2 F^{-4/3} I_1 \\ \alpha_2 &= -2\mu_2 F^{-4/3} \\ \alpha_3 &= -\frac{2}{3} \mu_1 I_1 F^{-2/3} - \frac{4}{3} \mu_2 I_2 F^{-4/3} \end{aligned} \quad (3.71)$$

En esta expresión de  $\mathbf{S}$  se puede identificar la presión en el material, si se particulariza su valor para el caso de presión uniforme. En este caso se cumple que:  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 \equiv \lambda$ , con lo que el gradiente vale  $\mathbf{F} = \lambda \mathbf{I}$ ,  $\mathbf{C} = \lambda^2 \mathbf{I}$  y los invariantes de  $\mathbf{C}$  son  $I_1 = 3\lambda^2$ ,  $I_2 = 3\lambda^4$ ,  $I_3 = \lambda^6$ ,  $F = \lambda^3$ . Sustituyendo en la expresión anterior, la tensión de Piola para el caso de presión constante es:

$$\mathbf{S}^u = \kappa F(F - 1) \mathbf{C}^{-1} = \kappa(F - 1) \lambda \mathbf{I} \quad (3.72)$$

La tensión de Cauchy correspondiente es:

$$\boldsymbol{\sigma}^u = F^{-1} \mathbf{F} \mathbf{S}^u \mathbf{F}^T = \kappa(F - 1) \mathbf{I} \quad (3.73)$$

Por definición, la presión es (positiva a compresión):

$$p = -\text{tr}(\boldsymbol{\sigma}^u) / 3 = -\kappa(F - 1) \quad (3.74)$$

Por lo tanto la expresión de la relación tensión - deformación para el material de Mooney-Rivlin modificado, casi incompresible, queda:

$$\mathbf{S} = \alpha_1 \mathbf{I} + \alpha_2 \mathbf{C} + \alpha_3 \mathbf{C}^{-1} - p F \mathbf{C}^{-1} \quad (3.75)$$

## Ecuaciones de equilibrio

En este capítulo se obtienen las ecuaciones que controlan el equilibrio estático de un sólido deformable sometido a un sistema de fuerzas tal que las deformaciones que se producen en él no se pueden suponer de pequeña magnitud. Además de las ecuaciones básicas de equilibrio de fuerzas y momentos, se plantea el principio de los trabajos virtuales, el cual proporciona expresiones generales de equilibrio, válidas para cualquier tipo de material y cualquier rango de deformaciones.

### 4.1. EQUILIBRIO DE FUERZAS

Consideremos un trozo arbitrario del sólido en una configuración deformada  $\Omega$  en el instante  $t$ , siendo su volumen  $v$  y su área lateral  $s$ . Sean  $\mathbf{q}_v$  las fuerzas exteriores de volumen aplicadas sobre él y  $\mathbf{q}_s$  las fuerzas en su superficie circundante: al ser el trozo de sólido arbitrario, parte de estas fuerzas de superficie serán fuerzas aplicadas conocidas y otras serán fuerzas interiores desconocidas. El equilibrio estático implica que la resultante de dichas fuerzas es nula:

$$\int_v \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{q}_s ds = 0 \quad (4.1)$$

Las fuerzas en la superficie  $\mathbf{q}_s$  se pueden sustituir por las tensiones en la superficie  $\boldsymbol{\sigma}$  empleando la fórmula de Cauchy  $\mathbf{q}_s = \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}$ , siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal saliente a dicha superficie:

$$\int_v \mathbf{q}_v dv + \int_s \boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n} ds = 0 \quad (4.2)$$

La segunda integral se puede transformar en una integral de volumen empleando el teorema de integración aplicado al tensor  $\boldsymbol{\sigma}$ :

$$\int_v \mathbf{q}_v dv + \int_v \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) dv = 0 \quad (4.3)$$

Como el trozo de sólido es arbitrario, el integrando tiene que ser nulo siempre, es decir:

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) + \mathbf{q}_v = 0 \quad (4.4)$$

Considerando que el tensor de Cauchy es simétrico (se demuestra a continuación):

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{q}_v = 0 \quad (4.5)$$

Esta es la ecuación de equilibrio estático del sólido, en su forma más compacta, puesta en función de las tensiones de Cauchy.

## 4.2. EQUILIBRIO DE MOMENTOS

Se considera de nuevo un trozo arbitrario del sólido, y se aplica la ecuación de equilibrio estático de momentos respecto de un punto cualquiera. Sea  $\mathbf{r}$  el vector que define la posición de la fuerza respecto del punto donde se toman momentos.

$$\int_v \mathbf{r} \times \mathbf{q}_v \, dv + \int_s \mathbf{r} \times \mathbf{q}_s \, ds = 0 \quad (4.6)$$

Las fuerzas en la superficie se pueden sustituir por las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  en la superficie empleando la fórmula de Cauchy:

$$\int_v \mathbf{r} \times \mathbf{q}_v \, dv + \int_s \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\sigma}^T \mathbf{n}) \, ds = 0 \quad (4.7)$$

La segunda integral se puede transformar en dos integrales de volumen empleando el teorema de integración y efectuando ciertos desarrollos algebraicos, con lo que se obtiene:

$$\int_v \mathbf{r} \times \mathbf{q}_v \, dv + \int_v \mathbf{r} \times \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T) \, dv + \int_v \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dv = 0 \quad (4.8)$$

El símbolo  $\boldsymbol{\epsilon}$  representa el tensor alternador de orden 3, definido como  $\epsilon_{ijk} = 1$  si la permutación  $\{i, j, k\}$  es par,  $\epsilon_{ijk} = -1$  si la permutación es impar y  $\epsilon_{ijk} = 0$  si hay índices repetidos. Agrupando las dos primeras integrales:

$$\int_v \mathbf{r} \times (\mathbf{q}_v + \operatorname{div}(\boldsymbol{\sigma}^T)) \, dv + \int_v \boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dv = 0 \quad (4.9)$$

La primera integral es nula pues su integrando contiene la ecuación de equilibrio de fuerzas (4.4). Por otra parte, como el trozo de sólido es arbitrario, el integrando de la segunda integral tiene que ser nulo siempre, con lo que se tiene que cumplir que:

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (4.10)$$

Desarrollando el producto contracto se obtiene un tensor de orden 1 (se contraen 2 índices):

$$\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\sigma} = \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{23} - \sigma_{32} \\ \sigma_{31} - \sigma_{13} \\ \sigma_{12} - \sigma_{21} \end{array} \right\} = 0 \quad (4.11)$$

Esta condición indica que el tensor de tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico.

### 4.3. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL

Sea un cuerpo en equilibrio en una configuración cualquiera  $\Omega$ , bajo la acción de unas fuerzas de volumen  $\mathbf{q}_v$  y de superficie  $\mathbf{q}_s$  aplicadas sobre él, las cuales producen un campo de deformaciones  $\mathbf{u}=\mathbf{x}-\mathbf{X}$ . Si se aplica una variación virtual  $\delta\mathbf{u}$  a dicho campo de deformaciones, compatible con las condiciones de ligadura, las fuerzas exteriores aplicadas (que se mantienen constantes) producen un trabajo virtual  $\delta W_E$  cuyo valor es:

$$\delta W_E \equiv \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_s ds \quad (4.12)$$

Las fuerzas aplicadas sobre la superficie se pueden sustituir por las tensiones de Cauchy  $\boldsymbol{\sigma}$  en la superficie, empleando la fórmula de Cauchy  $\mathbf{q}_s = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ :

$$\delta W_E = \int_s \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v ds + \int_s \delta\mathbf{u} \cdot (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}) ds \quad (4.13)$$

$$\delta W_E = \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s (\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds$$

La integral de superficie se puede transformar en integral de volumen empleando el teorema de la divergencia aplicado al vector  $\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}$ :

$$\delta W_E = \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_v \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}) dv \quad (4.14)$$

El integrando de la segunda integral se puede desarrollar utilizando la propiedad de la divergencia indicada en el apartado 13.2, considerando que  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{u}) = \delta\mathbf{u} \cdot \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta\mathbf{u}) \quad (4.15)$$

Sustituyendo y agrupando las integrales se obtiene:

$$\delta W_E = \int_v \delta\mathbf{u} \cdot [\mathbf{q}_v + \text{div}(\boldsymbol{\sigma})] dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : \nabla(\delta\mathbf{u}) dv \quad (4.16)$$

El integrando de la primera integral es nulo si el sólido está en equilibrio, pues corresponde a la ecuación de equilibrio de fuerzas (4.5). En la segunda integral, el gradiente de la variación de la deformación es igual a la variación del gradiente (ambos operadores son intercambiables) con lo que  $\nabla(\delta\mathbf{u}) = \delta(\nabla\mathbf{u})$ . Tras todas estas

manipulaciones, la expresión inicial (4.12) del trabajo virtual de las fuerzas exteriores se puede poner como:

$$\delta W_E \equiv \int_v \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_s ds = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta(\nabla \mathbf{u}) dv \quad (4.17)$$

El término de la derecha corresponde al trabajo virtual de las fuerzas interiores:

$$\delta W_I \equiv \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta(\nabla \mathbf{u}) dv \quad (4.18)$$

El tensor gradiente de la deformación  $\nabla \mathbf{u} = \mathbf{H}_t$ , se puede descomponer como suma de sus componentes simétrica y hemisimétrica. La componente simétrica es el tensor infinitesimal de deformaciones unitarias  $\varepsilon$  y la hemisimétrica es un tensor que se denominará  $\tilde{\mathbf{H}}_t$ .

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{H}_t = \frac{1}{2}(\mathbf{H}_t + \mathbf{H}_t) + \frac{1}{2}(\mathbf{H}_t - \mathbf{H}_t) \quad (4.19)$$

$$\nabla \mathbf{u} = \varepsilon + \tilde{\mathbf{H}}_t$$

Por ser el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  simétrico, su producto contracto con la parte hemisimétrica es nulo, con lo que el trabajo virtual de las fuerzas interiores queda:

$$\delta W_I \equiv \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta(\nabla \mathbf{u}) dv = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \varepsilon dv + \int_v \cancel{\boldsymbol{\sigma} : \delta \tilde{\mathbf{H}}_t} dv \quad (4.20)$$

Por lo tanto la expresión final del trabajo virtual de las fuerzas interiores es:

$$\delta W_I = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \varepsilon dv \quad (4.21)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación (4.17), se puede poner la siguiente expresión general del principio del trabajo virtual:

$$\int_v \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_s ds = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \varepsilon dv \quad (4.22)$$

En forma compacta:

$$\delta W_E = \delta W_I \quad (4.23)$$

El principio del trabajo virtual establece que la condición para que exista equilibrio en la configuración considerada  $\Omega$  es que el trabajo virtual de las fuerzas exteriores  $\delta W_E$  sea igual al trabajo virtual de las fuerzas interiores  $\delta W_I$ , para cualquier variación virtual de las deformaciones  $\delta \mathbf{u}$ , compatible con las condiciones de ligadura. La expresión (4.22) obtenida se suele denominar descripción espacial del principio del trabajo virtual, pues hace referencia a las magnitudes en la configuración deformada  $\Omega$ . Nótese que, tal y como se ha obtenido, esta condición es necesaria para el

equilibrio, pues se ha hecho uso de la ecuación de equilibrio (en la ecuación (4.16)). De forma similar puede demostrarse que es una condición suficiente.

Este principio es la herramienta fundamental para el desarrollo de una formulación de análisis no lineal. Sin embargo su aplicación directa no es fácil, pues tanto los tensores de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  y de deformaciones infinitesimales  $\boldsymbol{\varepsilon}$  como el volumen de integración se refieren a la configuración deformada  $\Omega$  en el instante  $t$ , que es desconocida.

Para resolver este problema se emplean las magnitudes de medida de tensión y deformación anteriormente definidas, que se refieren a un estado conocido.

### 4.3.1 Expresión del trabajo virtual interior en función del tensor $\mathbf{P}$

Consideramos la expresión inicial del trabajo virtual interior (4.18), y sustituimos en ella el valor de la variación del tensor gradiente de desplazamientos  $\delta\mathbf{H}_t = \delta\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}$  (ver capítulo 2):

$$\delta W_I = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta(\nabla \mathbf{u}) \, dv = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta(\mathbf{H}_t) \, dv = \int_v \boldsymbol{\sigma} : (\delta\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) \, dv \quad (4.24)$$

Utilizando la relación entre el producto contracto y la traza  $\mathbf{A}:\mathbf{B}=\text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$  se obtiene:

$$\delta W_I = \int_v \text{tr}(\boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{F} \mathbf{F}^{-1}) \, dv = \int_v \text{tr}(\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{F}) \, dv \quad (4.25)$$

Sustituyendo el diferencial de volumen por su valor en el estado inicial  $dv = F \, dv^0$ :

$$\delta W_I = \int_{v^0} F \text{tr}(\mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \delta\mathbf{F}) \, dv^0 \quad (4.26)$$

Volviendo a emplear la anterior propiedad de la traza:

$$\delta W_I = \int_{v^0} F (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}) : \delta\mathbf{F} \, dv^0 \quad (4.27)$$

El primer factor del producto contracto corresponde al primer tensor de Piola  $\mathbf{P}$ , con lo que se obtiene la siguiente expresión del trabajo virtual interior:

$$\delta W_I = \int_{v^0} \mathbf{P} : \delta\mathbf{F} \, dv^0 \quad (4.28)$$

Esta expresión puede ser evaluada en la configuración inicial del sólido, pero su principal inconveniente es que da lugar a sistemas de ecuaciones no simétricos por no serlo el tensor  $\mathbf{P}$ .

### 4.3.2 Expresión del trabajo virtual interior en función del tensor $\mathbf{S}$

La variación del tensor de Green-Lagrange tiene la siguiente expresión en función del tensor infinitesimal (lineal) de la deformación unitaria (ver capítulo 2):



$$\delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} \quad (4.29)$$

Despejando se obtiene la variación del tensor de deformaciones unitarias infinitesimales:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \quad (4.30)$$

Sustituyendo esta expresión en (4.21) se obtiene el siguiente valor del trabajo virtual interior:

$$\delta W_I = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \left( \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \right) dv \quad (4.31)$$

Empleando la definición de la traza y la simetría de  $\boldsymbol{\sigma}$  y  $\mathbf{E}$  se puede poner:

$$\delta W_I = \int_v \text{tr} \left( \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \right) dv = \int_v \text{tr} \left( \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \right) dv \quad (4.32)$$

Empleando la propiedad de la traza  $\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A})$  y la relación entre los diferenciales de volumen queda:

$$\delta W_I = \int_{v^0} \text{tr} \left( \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \delta \mathbf{E} \right) F dv^0 \quad (4.33)$$

Aplicando otra vez la relación entre la traza y el producto contracto se llega a:

$$\delta W_I = \int_{v^0} F \left( \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \right) : \delta \mathbf{E} dv^0 \quad (4.34)$$

En esta expresión se identifica el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S} = F \mathbf{F}^{-1} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$ , con lo que finalmente se obtiene:

$$\delta W_I = \int_{v^0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dv^0 \quad (4.35)$$

Este mismo valor del trabajo virtual interior se puede expresar empleando la representación como vectores de los tensores  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{E}$ :

$$\delta W_I = \int_{v^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 \quad (4.36)$$

Se ha obtenido así una expresión del trabajo virtual interior para una configuración deformada cualquiera  $\Omega$  en el instante  $t$ , pero en la que se emplean magnitudes de tensión ( $\mathbf{S}$ ) y de deformación unitaria ( $\mathbf{E}$ ) que están referidas al estado inicial conocido del cuerpo  $\Omega_0$ , por lo que su empleo es mucho más sencillo. Esta expresión es la base de las formulaciones que se desarrollan a continuación.

# Formulación lagrangiana total

La resolución de problemas de mecánica de sólidos con grandes deformaciones se adapta bien al planteamiento lagrangiano, o material, del problema. En este planteamiento se expresa la deformación del sólido en función de las coordenadas iniciales de cada partícula  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ , con lo que como resultado se obtiene la evolución de las partículas materiales durante el proceso de carga. Dentro de este planteamiento lagrangiano existen dos formulaciones distintas del mismo, que se diferencian únicamente en la configuración que se utiliza como referencia para las medidas de la deformación. En la formulación conocida como lagrangiana total, se emplea como configuración de referencia para medir la deformación a la configuración inicial del sólido  $\Omega_0$ . Sin embargo, en la formulación conocida como actualizada se emplea como configuración de referencia a la última configuración de equilibrio hallada durante el proceso incremental de carga. Ambas formulaciones resultan ser totalmente equivalentes en sus resultados y se diferencian únicamente en su implementación práctica que puede dar lugar a diferencias en la eficiencia de una y otra.

En este capítulo se desarrolla una formulación total del planteamiento lagrangiano, aplicada a problemas de elasticidad de sólidos continuos en 2 dimensiones, empleando el método de los elementos finitos para aproximar el campo de deformaciones. Dentro del método de los elementos finitos se adoptan además dos formulaciones distintas: una formulación estándar en desplazamiento y una formulación mixta en tensiones y deformaciones.

## 5.1. TRABAJO VIRTUAL INTERIOR

Sea un sólido en equilibrio en un instante cualquiera  $t$  del proceso de deformación, adoptando una configuración deformada  $\Omega$ . El equilibrio del sólido viene expresado por el principio del trabajo virtual, el cual se ha establecido en el capítulo anterior en función de las magnitudes referidas al estado inicial  $\Omega_0$  (tensores de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  y 2º Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ ) en la forma:

$$\delta W_I \equiv \int_{v^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 = \delta W_E \quad (5.1)$$

donde la expresión integral indicada corresponde al valor del trabajo virtual interior  $\delta W_I$ , y el trabajo virtual de las fuerzas exteriores  $\delta W_E$  tiene las expresiones ya indicadas en el capítulo anterior.

La variación de la deformación unitaria de Green-Lagrange se ha obtenido en capítulo 2 y es:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = (\mathbf{A}_C + \mathbf{A}) \delta \bar{\mathbf{H}} \quad (5.2)$$

donde  $\mathbf{A}_C$  es una matriz constante y  $\mathbf{A}$  es una matriz que depende del gradiente de desplazamientos  $\mathbf{H}$ . Las derivadas de los desplazamientos contenidas en el vector  $\bar{\mathbf{H}}$  se pueden expresar en función del campo de deformaciones  $\mathbf{u}$  a través de un operador de derivación  $\partial_0$ , que en el caso plano es:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial X_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \partial_0 \mathbf{u} \quad (5.3)$$

En este punto se introduce el método de los elementos finitos, y se considera que el dominio continuo está discretizado en una serie de elementos, en cada uno de los cuales el campo de deformaciones  $\mathbf{u}$  se aproxima por interpolación de las deformaciones de los nudos  $\mathbf{U}^1$ , a través de unas funciones de interpolación, que están contenidas en una matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (5.4)$$

El vector  $\mathbf{U}$  contiene las deformaciones de los nudos en el instante  $t$ , que configuran el vector de grados de libertad del elemento. En el caso plano, su expresión para un elemento de  $n$  nudos (figura 5.1) es:

$$\mathbf{U} = \left\{ U_1^1 \quad U_2^1 \quad U_1^2 \quad U_2^2 \quad \dots \quad U_1^n \quad U_2^n \right\}^T \quad (5.5)$$

donde el superíndice especifica el nudo y el subíndice la dirección.

---

<sup>1</sup> El símbolo  $\mathbf{U}$  se ha empleado en el capítulo 2 para identificar al tensor de extensión, pero a partir de aquí se empleará  $\mathbf{U}$  para identificar al vector de grados de libertad de los nudos en el método de los elementos finitos.

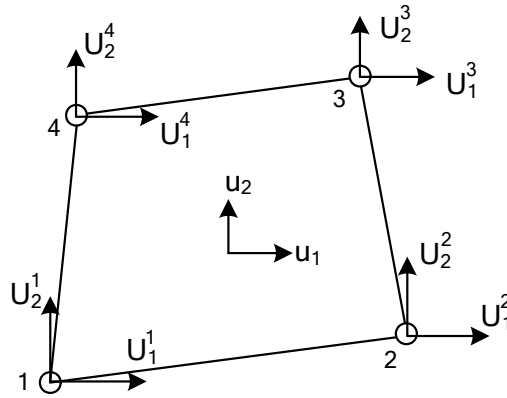


Figura 5.1 Campo de deformaciones y sus valores nodales.

La expresión del gradiente de las deformaciones aproximado por interpolación es:

$$\bar{\mathbf{H}} = \partial_0 \mathbf{u} = \partial_0 \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{G}_0 \mathbf{U} \quad (5.6)$$

La matriz  $\mathbf{G}_0$  contiene las derivadas de las funciones de interpolación con respecto a las coordenadas iniciales y no depende de las deformaciones. Su tamaño en problemas de dos dimensiones es de 4 filas y tantas columnas como grados de libertad tiene el elemento:

$$\mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & 0 & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_1} & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial X_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial X_2} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La variación de las deformaciones unitarias queda por lo tanto:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = (\mathbf{A}_C + \mathbf{A}) \mathbf{G}_0 \delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \quad (5.8)$$

En esta expresión se ha definido la matriz

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_C + \mathbf{A}) \mathbf{G}_0 \quad (5.9)$$

que proporciona la relación entre la variación de las deformaciones de los nudos  $\delta \mathbf{U}$  y la variación de las deformaciones unitarias de Green  $\delta \bar{\mathbf{E}}$ .

Sustituyendo estas expresiones en (5.1), el trabajo virtual interior vale:

$$\delta W_I = \int_{v^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} \, dv^0 = \delta \mathbf{U}^T \int_{v^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} \, dv^0 \quad (5.10)$$

Esta expresión define el vector de fuerzas nodales equivalentes a los esfuerzos interiores en el elemento  $\mathbf{Q}$  como:

$$\mathbf{Q} \equiv \int_{v^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 \quad (5.11)$$

con lo que el trabajo virtual interior en el elemento queda:

$$\delta W_I = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \quad (5.12)$$

## 5.2. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Sustituyendo el valor obtenido para el trabajo virtual interior, el principio del trabajo virtual queda:

$$\delta W_I = \delta \mathbf{U}^T \int_{v^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 = \delta W_E \quad (5.13)$$

El trabajo virtual de las fuerzas exteriores se expresa en función del trabajo virtual producido por las fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores, que se denominarán  $\mathbf{P}$  y cuyo valor se determinará más adelante<sup>2</sup>:

$$\delta W_E = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (5.14)$$

Al ser arbitraria la variación de los desplazamientos se cumple que:

$$\int_{v^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 = \mathbf{P} \quad (5.15)$$

En forma compacta, esta ecuación de equilibrio se puede poner:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P} \quad (5.16)$$

## 5.3. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Supongamos conocida la configuración de equilibrio de la estructura en un instante  $t$  y deseamos obtener la configuración de equilibrio en un instante  $t + \Delta t$ . Esta nueva configuración de equilibrio viene definida por el principio del trabajo virtual en dicho instante:

$$\delta W_I^{t+\Delta t} = \delta W_E^{t+\Delta t} \quad (5.17)$$

---

<sup>2</sup> El símbolo  $\mathbf{P}$  se emplea también para el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, pero su nueva utilización no dará lugar a ambigüedades, por el propio contexto de utilización de ambas magnitudes.

La resolución directa de esta ecuación es muy difícil, pues es no lineal, tanto en  $\mathbf{S}$  como en  $\mathbf{E}$ . Para su resolución se efectúa en la práctica un planteamiento incremental, en el que se busca obtener el equilibrio en  $t+\Delta t$  a partir del equilibrio ya conocido en  $t$ . Ello implicará efectuar un proceso iterativo, el cual requiere linealizar la ecuación de equilibrio anterior con respecto a un incremento en el campo de desplazamientos, que denominaremos  $\hat{\mathbf{u}}$ :

$$\hat{\mathbf{u}} = \left\{ \hat{u}_1 \quad \hat{u}_2 \right\}^T \quad (5.18)$$

A este incremento del campo de desplazamientos corresponde un incremento  $\hat{\mathbf{U}}$  en los desplazamientos de los nudos del elemento finito, de tal manera que ambos están relacionados por las funciones de interpolación  $\mathbf{N}$  del elemento:

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} \quad (5.19)$$

Se considerará por el momento que las fuerzas exteriores no dependen de la deformación (este caso se tratará más tarde), por lo que el término no lineal corresponde al trabajo virtual interior. La aproximación del trabajo virtual interior alrededor del punto de equilibrio  $t$  corresponde a un desarrollo en serie de Taylor en la forma:

$$\delta W_I^{t+\Delta t} \approx \delta W_I + \Delta_{\hat{\mathbf{u}}}(\delta W_I) + O(\hat{\mathbf{u}}) \quad (5.20)$$

El segundo sumando  $\Delta_{\hat{\mathbf{u}}}(\delta W_I)$  es el incremento lineal del trabajo virtual interior al producirse el incremento en los desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}$ . El último sumando es un pequeño término de error que tiende a cero más rápido que  $\hat{\mathbf{u}}$ .

El incremento del trabajo virtual interior corresponde a su derivada direccional (derivada de Gâteaux) en la dirección del incremento de deformación  $\hat{\mathbf{u}}$ , definida como:

$$\Delta_{\hat{\mathbf{u}}}(\delta W_I) \equiv \left. \frac{d}{d\varepsilon} (\delta W_I(\mathbf{u} + \varepsilon \hat{\mathbf{u}})) \right|_{\varepsilon=0} \quad (5.21)$$

en la que  $\varepsilon$  es una variable auxiliar usada para efectuar la derivada. Esta expresión es más ortodoxa, pero la denominación de incremento empleada no da lugar a dudas, considerando siempre que corresponde a un incremento de desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}$ .

Considerando la expresión (5.12), el incremento del trabajo virtual se puede poner en forma proporcional al incremento de las deformaciones de los nudos  $\hat{\mathbf{U}}$ :

$$\Delta_{\hat{\mathbf{u}}}(\delta W_I) = \delta \mathbf{U}^T \Delta_{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{Q}) = \delta \mathbf{U}^T \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \hat{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} \quad (5.22)$$

Esta expresión introduce la matriz de rigidez tangente  $\hat{\mathbf{K}}$ , cuya determinación es el paso fundamental para el establecimiento de un método práctico de búsqueda del equilibrio de forma incremental.

Considerando la expresión (5.1) del trabajo virtual, su incremento al producirse un incremento en las deformaciones es:

$$\Delta_{\bar{\mathbf{u}}}(\delta W_I) = \int_{v^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \Delta \bar{\mathbf{S}} dv^0 + \int_{v^0} \Delta(\delta \mathbf{E}) : \mathbf{S} dv^0 \quad (5.23)$$

$$\Delta(\delta W_I) = \Delta(\delta W_I)_{mat} + \Delta(\delta W_I)_{geo} \quad (5.24)$$

El primer sumando corresponde al incremento de las tensiones manteniendo fijas las deformaciones unitarias y se denomina componente material del incremento del trabajo virtual interior. El segundo sumando corresponde al incremento de las deformaciones unitarias manteniendo las tensiones fijas y da lugar a la componente geométrica del incremento del trabajo virtual interior. En la expresión (5.23) anterior se ha mantenido, por conveniencia para desarrollos posteriores, la notación de vectores para el primer término y la de tensores para el segundo. Para aliviar la notación se ha eliminado el subíndice  $\bar{\mathbf{u}}$  de las expresiones anteriores, simplificación que se mantendrá en adelante.

### 5.3.1 Componente material

Para evaluar la componente material del incremento del trabajo virtual interior es necesario establecer un valor del incremento en la tensión de Piola-Kirchhoff. Al estar empleándose un método incremental, resulta aceptable suponer que el incremento de dicha tensión es proporcional al incremento en las deformaciones de Green-Lagrange:

$$\Delta \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{E}} \quad (5.25)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es constante y representa al tensor de elasticidad del material (este tensor se denominó con el símbolo  $\mathbf{C}$  en el capítulo 3). Esta aproximación es válida para materiales elásticos lineales o no, si los incrementos de las deformaciones unitarias son pequeños. Por lo tanto la componente material es:

$$\Delta(\delta W_I)_{mat} \equiv \int_{v^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \Delta \bar{\mathbf{S}} dv^0 = \int_{v^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{E}} dv^0 \quad (5.26)$$

La variación en la deformación unitaria de Green-Lagrange viene dada por la ecuación (5.8):  $\delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}$ . El incremento de dicha deformación  $\bar{\mathbf{E}}$  tiene una expresión similar a la de la variación, dada la similitud entre variaciones e incrementos, es decir:

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} \quad (5.27)$$

Sustituyendo este incremento de la deformación unitaria en (5.25), así como la variación dada por (5.8), se obtiene la componente material del incremento del trabajo virtual interior:

$$\Delta(\delta W_I)_{mat} \equiv \int_{v^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \Delta \bar{\mathbf{S}} dv^0 = \delta \mathbf{U}^T \int_{v^0} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dv^0 \hat{\mathbf{U}} \quad (5.28)$$

### 5.3.2 Componente geométrica

Para calcular la componente geométrica del incremento del trabajo virtual (segundo sumando de (5.23)) es necesario establecer una expresión del incremento de la variación de la deformación unitaria de Green-Lagrange. Para ello nos apoyamos en la variación de  $\mathbf{E}$  en función de  $\mathbf{F}$  ya obtenida en el apartado 2.10:

$$\delta\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{H}^T \mathbf{F} + \mathbf{F}^T \delta\mathbf{H}) \quad (5.29)$$

Considerando que al aplicar el incremento de deformación  $\hat{u}$  la variación de  $\mathbf{H}$  es constante, pues variaciones e incrementos son independientes, el incremento de  $\delta\mathbf{E}$  es:

$$\Delta(\delta\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{H}^T \Delta\mathbf{F} + \Delta\mathbf{F}^T \delta\mathbf{H}) \quad (5.30)$$

Dado que  $\Delta\mathbf{F} = \Delta\mathbf{H}$  queda:

$$\Delta(\delta\mathbf{E}) = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{H}^T \Delta\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H}^T \delta\mathbf{H}) \quad (5.31)$$

Con esta expresión, la componente geométrica del incremento del trabajo virtual es:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} \equiv \int \Delta(\delta\mathbf{E}) : \mathbf{S} dv^0 = \frac{1}{2} \int (\delta\mathbf{H}^T \Delta\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H}^T \delta\mathbf{H}) : \mathbf{S} dv^0 \quad (5.32)$$

Transponiendo el segundo sumando queda

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \frac{1}{2} \int (\delta\mathbf{H}^T \Delta\mathbf{H}) : \mathbf{S} dv^0 + \frac{1}{2} \int (\delta\mathbf{H}^T \Delta\mathbf{H})^T : \mathbf{S} dv^0 \quad (5.33)$$

En ambas integrales la matriz que multiplica a  $\mathbf{S}$  es la misma pero transpuesta. Al ser  $\mathbf{S}$  simétrica, los dos productos contractos son iguales, con lo que ambas integrales son iguales y se suman:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \int (\delta\mathbf{H}^T \Delta\mathbf{H}) : \mathbf{S} dv^0 \quad (5.34)$$

La evaluación del integrando en esta forma resulta complicada para la implementación práctica, por lo que se desarrolla en función del valor de los tensores  $\mathbf{H}$  y  $\mathbf{S}$ . Al ser  $\mathbf{H}$  lineal en las deformaciones, su variación  $\delta\mathbf{H}$  e incremento  $\Delta\mathbf{H}$  tienen la misma expresión que  $\mathbf{H}$ , pero sustituyendo  $u$  por  $\delta u$  y por su incremento  $\hat{u}$  respectivamente, es decir:

$$(\delta\mathbf{H})_{ij} = \frac{\partial \delta u_i}{\partial X_j} \quad (\Delta\mathbf{H})_{ij} = \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial X_j} \quad (5.35)$$



Para el caso de dos dimensiones la integral (5.34) queda:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \int \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial X_1} & \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial X_1} & \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial X_2} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} dv^0 \quad (5.36)$$

Desarrollando los productos se puede demostrar que es posible poner el integrando en la forma siguiente:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \int \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial X_2} \end{array} \right\}^T \left[ \begin{array}{cc|cc} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{12} & S_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right\} dv^0 \quad (5.37)$$

El primer factor del integrando es la variación del vector gradiente de desplazamientos  $\bar{\mathbf{H}}$ , cuyo valor es  $\delta \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{G}_0 \delta \mathbf{U}$ . El último factor corresponde a las derivadas de los incrementos de los desplazamientos  $\hat{\mathbf{u}}$  y define un nuevo vector gradiente de los incrementos de los desplazamientos:

$$\hat{\mathbf{H}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial X_2} \end{array} \right\} \quad (5.38)$$

Con lo que se obtiene:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \int \delta \bar{\mathbf{H}}^T \tilde{\mathbf{S}} \hat{\mathbf{H}} dv^0 \quad (5.39)$$

En esta expresión se ha definido la matriz  $\tilde{\mathbf{S}}$ , que consiste en una agrupación diagonal del segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff tantas veces como dimensiones tenga el problema. Para el caso plano es:

$$\tilde{\mathbf{S}} = \left[ \begin{array}{cc|cc} S_{11} & S_{12} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & S_{11} & S_{12} \\ 0 & 0 & S_{12} & S_{22} \end{array} \right] \quad (5.40)$$

El vector  $\hat{\mathbf{H}}$  se puede expresar en función de los incrementos de las deformaciones de los nudos efectuando el mismo desarrollo que para el vector  $\mathbf{H}$  (ver (5.6)):

$$\hat{\mathbf{H}} = \partial_0 \hat{\mathbf{u}} = \partial_0 \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{G}_0 \hat{\mathbf{U}} \quad (5.41)$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión de la componente geométrica del incremento del trabajo virtual:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} \equiv \int_{v^0} \Delta(\delta \mathbf{E}) : \mathbf{S} \, dv^0 = \delta \mathbf{U}^T \int_{v^0} \mathbf{G}_0^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G}_0 \, dv^0 \hat{\mathbf{U}} \quad (5.42)$$

### 5.3.3 Matriz de rigidez tangente

Con las expresiones obtenidas para la componente material (5.28) y geométrica (5.42), el incremento del trabajo virtual queda en la forma:

$$\Delta(\delta W_I) = \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dv^0 \hat{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{G}_0^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G}_0 \, dv^0 \hat{\mathbf{U}} \quad (5.43)$$

$$\Delta(\delta W_I) = \delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_D \hat{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_\sigma \hat{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}}$$

Esta expresión define la matriz de rigidez tangente  $\hat{\mathbf{K}}$ , que tiene dos sumandos. El primer sumando  $\hat{\mathbf{K}}_D$  corresponde a la rigidez asociada al incremento de las tensiones, sobre un material dado, y se denomina componente material de la rigidez tangente. Nótese su similitud con la matriz de rigidez en el análisis lineal, aunque ahora la matriz  $\mathbf{B}$  es dependiente de las deformaciones existentes, y por lo tanto no lineal.

$$\hat{\mathbf{K}}_D \equiv \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} \, dv^0 \quad (5.44)$$

La segunda matriz  $\hat{\mathbf{K}}_\sigma$  se denomina matriz de rigidez geométrica y corresponde a la rigidez asociada al incremento de las deformaciones unitarias actuando sobre un estado de tensiones ya existente. No depende de las propiedades del material sino sólo del estado de tensiones (a través de  $\mathbf{S}$ ) y de la geometría (a través de  $\mathbf{G}$ ), de ahí su nombre.

$$\hat{\mathbf{K}}_\sigma \equiv \int \mathbf{G}_0^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G}_0 \, dv^0 \quad (5.45)$$

### 5.3.4 Ecuaciones de equilibrio incrementales

Tras la linealización del trabajo virtual, la ecuación de equilibrio aproximada en  $t + \Delta t$  queda:

$$\delta W_I^{t+\Delta t} \approx \delta W_I + \Delta(\delta W_I) = \delta W_E^{t+\Delta t} \quad (5.46)$$

Sustituyendo el incremento linealizado del trabajo virtual dado por (5.43) y reordenando:

$$\delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \delta W_E^{t+\Delta t} - \delta W_I \quad (5.47)$$

En el término de la derecha, el trabajo virtual de las fuerzas interiores en el instante conocido  $t$  viene dado por (5.10). Por otra parte el trabajo virtual de las fuerzas exteriores se sustituye por sus fuerzas nodales equivalentes  $\mathbf{P}^{t+\Delta t}$ , con lo que la ecuación de equilibrio queda:

$$\delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \delta \mathbf{U}^T \int_{v^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 \quad (5.48)$$

Al ser arbitraria la variación de las deformaciones, se debe cumplir:

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \int_{v^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 \quad (5.49)$$

y en forma compacta:

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q} \quad (5.50)$$

Esta expresión es la ecuación incremental de equilibrio del elemento finito. El término de la derecha representa el desequilibrio entre las fuerzas exteriores aplicadas en  $t+\Delta t$  y las fuerzas interiores  $\mathbf{Q}$  existentes en el instante  $t$ . El término de la izquierda representa el incremento aproximado de fuerza interior que se obtiene al aplicar un incremento a la deformación. La figura 5.2 muestra una representación unidimensional de la ecuación de equilibrio linealizada, en la que la curva representa la respuesta no lineal de la estructura, en forma del vector de fuerzas interiores  $\mathbf{Q}(\mathbf{U})$ , y la tangente geométrica a ella es la rigidez tangente.

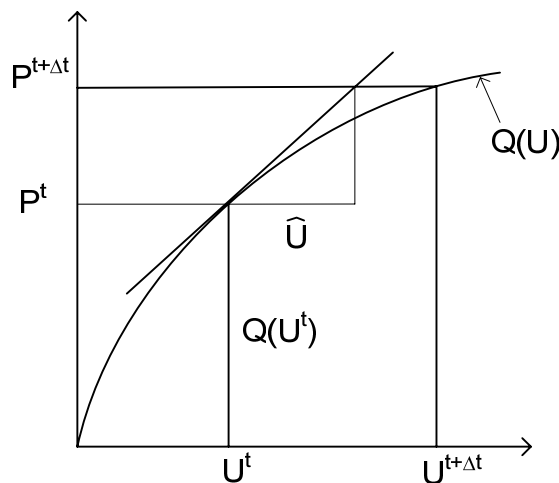


Figura 5.2 Sistema linealizado.

## 5.4. FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA

Asumiendo una formulación isoparamétrica para el elemento finito, resulta sencillo desarrollar el proceso para obtener su matriz de rigidez tangente y su vector de fuerzas interiores. Se emplea un sistema de coordenadas normalizadas  $\xi_i$  local al elemento, en el que se definen las funciones de interpolación  $N$  (figura 5.3). Para elementos de 4 lados es habitual emplear coordenadas normalizadas en el rango  $(-1, +1)$ .

### 5.4.1 Interpolación de coordenadas y deformaciones

Las coordenadas de un punto cualquiera del elemento en el estado inicial se interpolan en base a las coordenadas de los nudos  $X_i^k$  (el índice  $k$  indica el nudo):

$$X_i = \sum_k N_k X_i^k \quad (5.51)$$

Para las deformaciones en el instante  $t$  la interpolación sigue el mismo esquema:

$$u_i = \sum_k N_k U_i^k \quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (5.52)$$

Para los incrementos de deformaciones se emplea una expresión similar, que ya ha sido introducida:

$$\hat{u}_i = \sum_k N_k \hat{U}_i^k \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} \quad (5.53)$$

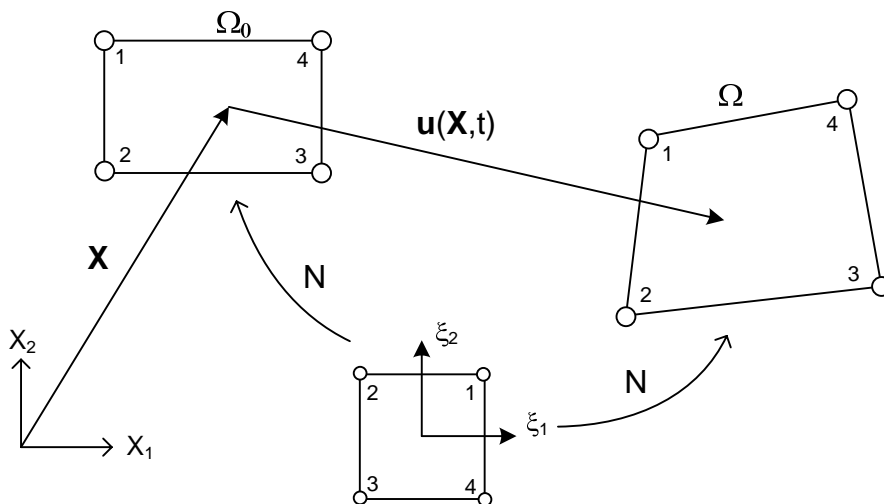


Figura 5.3 Interpolación de coordenadas y deformaciones.

### 5.4.2 Transformación de derivadas

Las derivadas de las distintas magnitudes involucradas se transforman entre el sistema local normalizado y el general por medio de la matriz jacobiana habitual. Por ejemplo, para las derivadas de una función de interpolación:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial X_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial X_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial X_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

$$\frac{\partial N_k}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \mathbf{J}_0 \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{X}}$$

Los distintos términos de la jacobiana se obtienen mediante la interpolación de coordenadas y las derivadas de las funciones de interpolación en coordenadas locales:

$$J_{0ij} = \frac{\partial X_j}{\partial \xi_i} = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i} X_j^k \quad (5.55)$$

Es necesaria asimismo la transformación de derivadas inversa:

$$\frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}_0^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (5.56)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial X_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_0^{-1})_{11} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_0^{-1})_{12} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ (\mathbf{J}_0^{-1})_{21} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_0^{-1})_{22} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \end{bmatrix}$$

### 5.4.3 Gradientes de la deformación

- Las coordenadas en el estado deformado  $\mathbf{x}$  se interpolan de la misma forma que las coordenadas iniciales y los desplazamientos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u} = \sum_k N_k (\mathbf{X}^k + \mathbf{U}^k) = \sum_k N_k \mathbf{x}^k \quad (5.57)$$

En esta expresión  $\mathbf{x}^k$  son las coordenadas de los nudos del elemento finito en la posición deformada.

- El tensor gradiente de la deformación vale  $\mathbf{F} = \nabla_0 \mathbf{x}$ , por lo tanto su valor tras aplicar la hipótesis de interpolación se obtiene aplicando el gradiente a la expresión (5.57):

$$\mathbf{F} = \sum_k \mathbf{x}^k (\nabla_0 N_k)^T \quad (5.58)$$

La derivada de las funciones de interpolación respecto de las coordenadas iniciales se obtiene mediante la transformación de derivadas:

$$\nabla_0 N_k \equiv \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{X}} = \mathbf{J}_0^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \boldsymbol{\xi}} \quad (5.59)$$

- El vector gradiente de los desplazamientos  $\bar{\mathbf{H}}$  contiene las derivadas de las deformaciones en el interior del elemento respecto de las coordenadas iniciales. Su cálculo es asimismo inmediato derivando en la ley de interpolación (5.52).

Para el caso de dos dimensiones su valor es:

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{Bmatrix} H_{11} \\ H_{12} \\ H_{21} \\ H_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial X_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial X_2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial X_1} U_1^k \\ \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial X_2} U_1^k \\ \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial X_1} U_2^k \\ \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial X_2} U_2^k \end{Bmatrix} \quad (5.60)$$

Finalmente, la matriz  $\mathbf{A}$  contiene los términos del tensor  $\mathbf{H}$ , ordenados de otra manera:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{21} & 0 \\ 0 & H_{12} & 0 & H_{22} \\ H_{12} & H_{11} & H_{22} & H_{21} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

#### 5.4.4 Matriz $\mathbf{G}_0$

Para los desarrollos posteriores es necesario asimismo obtener la matriz  $\mathbf{G}_0$ , que relaciona las deformaciones nodales con el vector gradiente de desplazamientos (ver (5.6)). Esta matriz está formada por tantos bloques como nudos tiene el elemento, cada uno de los cuales contiene las derivadas de una función de interpolación respecto de las coordenadas iniciales:

$$\mathbf{G}_0 \equiv \partial_0 \mathbf{N} = \left[ \mathbf{G}_0^1 \quad \mathbf{G}_0^2 \quad \dots \quad \mathbf{G}_0^n \right]$$

$$\mathbf{G}_0^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial X_1} & 0 \\ \frac{\partial N_k}{\partial X_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial X_1} \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial X_2} \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Su cálculo es inmediato empleando la transformación de coordenadas inversa:

$$\mathbf{G}_0^k = \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_0^{-1})_{11} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_0^{-1})_{12} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} & 0 \\ (\mathbf{J}_0^{-1})_{21} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_0^{-1})_{22} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} & 0 \\ 0 & (\mathbf{J}_0^{-1})_{11} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_0^{-1})_{12} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ 0 & (\mathbf{J}_0^{-1})_{21} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_0^{-1})_{22} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (5.63)$$

#### 5.4.5 Matriz de rigidez tangente

Su expresión tiene los dos sumandos (material y geométrico) ya obtenidos:

$$\hat{\mathbf{K}} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dv^0 + \int \mathbf{G}_0^T \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{G}_0 dv^0 \quad (5.64)$$

• En la componente material (primera integral), la matriz  $\mathbf{B}$  se puede descomponer en dos sumandos:

$$\mathbf{B} = (\mathbf{A}_C + \mathbf{A}) \mathbf{G}_0 = \mathbf{A}_C \mathbf{G}_0 + \mathbf{A} \mathbf{G}_0 = \mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{N0} \quad (5.65)$$

El primer sumando proviene de los términos lineales en la deformación y da lugar a la matriz constante  $\mathbf{B}_{L0}$ . El segundo es proporcional al estado de deformaciones existente a través de la matriz  $\mathbf{A}$  y da lugar a la matriz no lineal  $\mathbf{B}_{N0}$ . Los valores de estas matrices se obtienen fácilmente a partir de las  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}_C$  y  $\mathbf{G}_0$ , y tienen una estructura de bloques similar a la de  $\mathbf{G}_0$ , con un bloque para cada nudo.

La expresión de la matriz constante es:

$$\mathbf{B}_{L0} = \mathbf{A}_C \mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{L0}^{(1)} & \mathbf{B}_{L0}^{(2)} & \dots & \mathbf{B}_{L0}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

$$\mathbf{B}_{L0}^{(k)} = \mathbf{A}_C \mathbf{G}_0^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial X_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial X_2} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X_2} & \frac{\partial N_k}{\partial X_1} \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

La matriz no lineal es:

$$\mathbf{B}_{N0} = \mathbf{A} \mathbf{G}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{N0}^{(1)} & \mathbf{B}_{N0}^{(2)} & \dots & \mathbf{B}_{N0}^{(n)} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$\mathbf{B}_{N0}^{(k)} = \mathbf{A} \mathbf{G}_0^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial X_1} H_{11} & \frac{\partial N_k}{\partial X_1} H_{21} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X_2} H_{12} & \frac{\partial N_k}{\partial X_2} H_{22} \\ \frac{\partial N_k}{\partial X_2} H_{11} + \frac{\partial N_k}{\partial X_1} H_{12} & \frac{\partial N_k}{\partial X_2} H_{21} + \frac{\partial N_k}{\partial X_1} H_{22} \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

Sustituyendo en la expresión de la componente material de la matriz tangente se obtiene (primer sumando de (5.64)):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_D &= \int (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{N0})^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_{L0} + \mathbf{B}_{N0}) dv^0 & (5.70) \\ \hat{\mathbf{K}}_D &= \int \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{L0} dv^0 + \int \mathbf{B}_{L0}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{N0} dv^0 \\ &+ \int \mathbf{B}_{N0}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{L0} dv^0 + \int \mathbf{B}_{N0}^T \mathbf{C} \mathbf{B}_{N0} dv^0 \end{aligned}$$

El primer sumando corresponde a la matriz de rigidez lineal  $\hat{\mathbf{K}}_{D0}$  y los 3 restantes a la componente no lineal.

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \hat{\mathbf{K}}_{D0} + \hat{\mathbf{K}}_{D1} + \hat{\mathbf{K}}_{D1}^T + \hat{\mathbf{K}}_{D2} \quad (5.71)$$

- El término geométrico de la matriz tangente (segundo sumando de (5.64)) se puede evaluar directamente a partir de su expresión.

#### 5.4.6 Vector de fuerzas interiores

Su expresión general es:

$$\mathbf{Q} = \int_{v^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 \quad (5.72)$$

Es sencillo de evaluar, en base a la matriz  $\mathbf{B}$  y al vector de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\bar{\mathbf{S}}$  en el estado conocido  $t$ :

$$\mathbf{Q} = \int_{v^0} \mathbf{G}_0^T (\mathbf{A}_C + \mathbf{A})^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 \quad (5.73)$$

### 5.5. FUERZAS NODALES EQUIVALENTES A LAS FUERZAS EXTERIORES

Las fuerzas nodales  $\mathbf{P}$  equivalentes a las fuerzas exteriores producen el mismo trabajo virtual que ellas. En el instante  $t+\Delta t$  su valor es:

$$\delta W_E^{t+\Delta t} = \int_{v^{t+\Delta t}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_v^{t+\Delta t} dv^{t+\Delta t} + \int_{s^{t+\Delta t}} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{q}_s^{t+\Delta t} ds^{t+\Delta t} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P}^{t+\Delta t} \quad (5.74)$$



Introduciendo la interpolación de deformaciones, las variaciones de deformación se pueden poner en función de las variaciones de deformación nodales:

$$\delta W_E^{t+\Delta t} = \delta \mathbf{U}^T \int_{v^{t+\Delta t}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v^{t+\Delta t} dv^{t+\Delta t} + \delta \mathbf{U}^T \int_{s^{t+\Delta t}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s^{t+\Delta t} ds^{t+\Delta t} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P}^{t+\Delta t}$$

Por lo tanto las fuerzas nodales equivalentes son:

$$\int_{v^{t+\Delta t}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_v^{t+\Delta t} dv^{t+\Delta t} + \int_{s^{t+\Delta t}} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_s^{t+\Delta t} ds^{t+\Delta t} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} \quad (5.75)$$

La evaluación de estas fuerzas no es posible pues no se conoce ni el volumen ni la superficie en  $t+\Delta t$ . Para poderlas evaluar se transforman al estado inicial. El proceso requiere sustituir los diferenciales de volumen y de área empleando para ello las relaciones ya conocidas. Se obtiene la siguiente expresión:

$$\mathbf{P}^{t+\Delta t} = \int_{v^0} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{v0}^{t+\Delta t} dv^0 + \int_{s^0} \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{s0}^{t+\Delta t} ds^0 \quad (5.76)$$

En esta expresión  $\mathbf{q}_{v0}^{t+\Delta t}$  y  $\mathbf{q}_{s0}^{t+\Delta t}$  son los valores de las fuerzas de volumen y superficie en el instante  $t+\Delta t$ , pero referidas al volumen y superficie iniciales.

Estas expresiones son válidas si las fuerzas no dependen de la deformación, como es el caso de muchas fuerzas habitualmente (p.e. fuerzas constantes, peso propio, etc.). En caso contrario, la presencia de fuerzas dependientes de la deformación origina nuevos términos específicos que se estudian a continuación.

## 5.6. FUERZAS DEPENDIENTES DE LA DEFORMACIÓN

En un problema de grandes deformaciones existen fuerzas cuyo valor es dependiente del estado deformado de la estructura. Esta dependencia puede corresponder a la dirección de la fuerza (si por ejemplo dicha dirección está referida al estado deformado), o puede corresponder al módulo de la fuerza (p.e. si la presión en un fluido es proporcional a la profundidad más la deformación) o también puede corresponder al área sobre la que actúa (figura 5.4).

Estas fuerzas dependientes de la deformación son fuerzas de superficie, cuyo valor se puede expresar en la forma:

$$\mathbf{q}_s = q \mathbf{n}_q \quad (5.77)$$

siendo  $q$  el módulo de la fuerza y  $\mathbf{n}_q$  el vector unitario que define su dirección. Ambos son en general variables, función de las coordenadas en las que se define el problema.

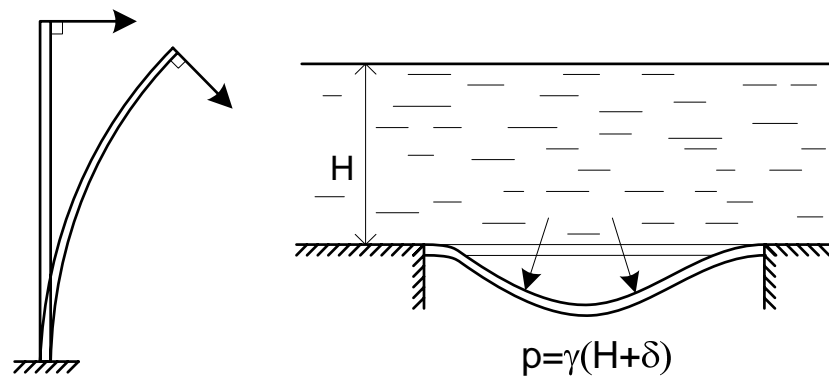


Figura 5.4 Fuerzas dependientes de la deformación

Una clasificación de las fuerzas dependientes de la deformación incluye dos grandes categorías, según sean su dirección y su módulo. En primer lugar, según sea la dirección de la fuerza pueden considerarse: a) fuerzas de dirección constante, es decir fuerzas cuya dirección se mantiene igual a la del estado inicial, definidas como  $\mathbf{n}_q(\mathbf{X})$ , y b) fuerzas de dirección asociada al estado deformado  $\mathbf{n}_q(\mathbf{x})$ , llamadas fuerzas seguidoras del cuerpo (p.e. una fuerza perpendicular al estado deformado). La segunda categoría se centra en el módulo  $q$  de la fuerza, y en ella pueden considerarse dos tipos: a) fuerzas cuyo valor está asociado a las partículas del sólido (seguidoras del cuerpo) y por lo tanto está definido en las coordenadas iniciales  $q(\mathbf{X})$ , y b) fuerzas cuyo módulo está asociado a las coordenadas espaciales en el estado deformado  $q(\mathbf{x})$ .

Ambas categorías pueden combinarse y por lo tanto pueden considerarse los siguientes tipos de fuerzas dependientes de la deformación:

- A. Fuerzas con dirección constante y módulo asociado al sólido. Es decir que la dirección de la fuerza está definida en el estado inicial  $\mathbf{n}_q(\mathbf{X})$  y se mantiene a lo largo de la deformación, y el módulo de la fuerza está asimismo definido en el estado inicial  $q(\mathbf{X})$ . En realidad esta fuerza no depende de la deformación, pues sólo depende de las coordenadas iniciales  $\mathbf{X}$ . El ejemplo típico son las fuerzas gravitatorias.
- B. Fuerzas con dirección constante y módulo asociado a las coordenadas espaciales deformadas. En este caso también es  $\mathbf{n}_q(\mathbf{X})$ , pero ahora el módulo es  $q(\mathbf{x})$ . Este caso tiene poco interés en la práctica.
- C. Fuerzas de dirección asociada al estado deformado (seguidoras del sólido) y de módulo asociado al sólido. En este caso la dirección de la fuerza es variable  $\mathbf{n}_q(\mathbf{x})$  mientras que su módulo queda definido en el estado inicial  $q(\mathbf{X})$  y por lo tanto se mantiene constante.
- D. Fuerzas de dirección asociada al estado deformado (seguidoras del sólido) y de módulo asociado al espacio. En este caso tanto la dirección de la fuerza  $\mathbf{n}_q(\mathbf{x})$  como su módulo  $q(\mathbf{x})$  son variables a lo largo del proceso de carga. Este caso corresponde a la presión hidrostática de un fluido.

### 5.6.1 Fuerza de presión uniforme

De todos los tipos anteriores de fuerzas, nos centraremos en el estudio del caso habitual de una presión uniforme, que actúa en dirección perpendicular al estado deformado. En este caso coinciden los tipos C y D anteriores.

Sea  $p$  el valor de la presión uniforme aplicada, y  $\mathbf{n}_s(\mathbf{x})$  el vector normal unitario saliente a la superficie  $A$  en la que se aplica (figura 5.5). La fuerza de superficie se puede poner en la forma (se considera positiva cuando succiona la superficie):

$$\mathbf{q}_s = p \mathbf{n}_s(\mathbf{x}) \quad (5.78)$$

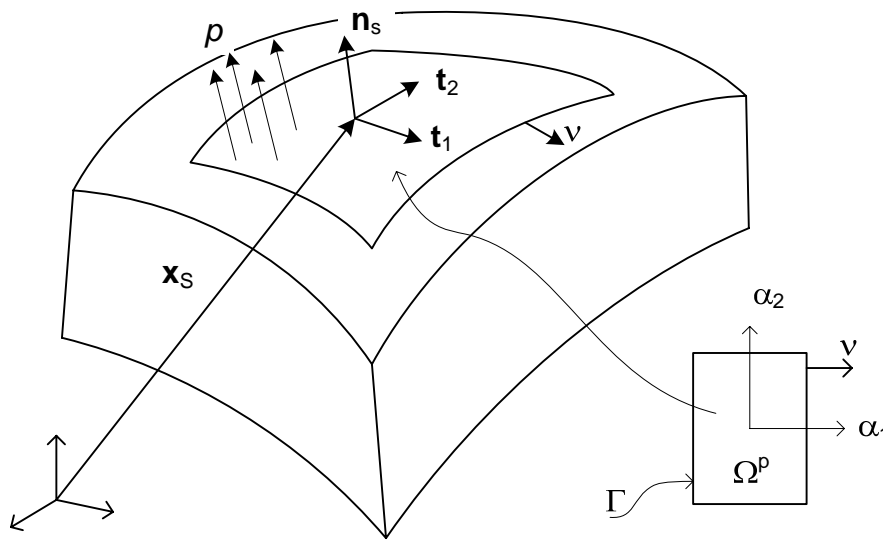


Figura 5.5 Fuerza de presión.

El trabajo virtual efectuado por la fuerza es:

$$\delta W_E^p = \int_A \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_s \, dA = \int_A p \, \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}_s \, dA \quad (5.79)$$

La superficie real  $A$  sobre la que actúa la fuerza se define de forma paramétrica, empleando un vector  $\mathbf{x}_s(\alpha_1, \alpha_2)$ , que define los puntos que forman parte de dicha superficie, en función de dos coordenadas  $\alpha_1, \alpha_2$ , que están definidas en un dominio  $\Omega^p$ . Lo más sencillo en la práctica es definir esta superficie por medio de una interpolación similar a la empleada para definir la geometría de los elementos finitos, y adoptar para el dominio  $\Omega^p$  la forma estándar de un elemento finito. De esta forma se pueden emplear superficies de tipo rectangular o triangular, con lados curvos, etc., o se pueden emplear las caras de los elementos espaciales como la superficie de aplicación de la carga. En todo caso se desarrollará la formulación de forma general.

Los dos vectores tangentes y el vector normal a la superficie son:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \quad \mathbf{n}_s = \frac{\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2}{|\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2|} \quad (5.80)$$

El diferencial de área expresado en las coordenadas que definen la superficie de aplicación de la fuerza es:

$$dA = |\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2| d\alpha_1 d\alpha_2 = |\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2| d\Omega^p \quad (5.81)$$

De esta forma el trabajo virtual de la fuerza de presión se puede expresar extendido al dominio  $\Omega^p$  en el que se ha definido la superficie:

$$\delta W_E^p = \int_{\Omega^p} p \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2) d\Omega^p \quad (5.82)$$

En esta ecuación los vectores tangentes a la superficie  $\mathbf{t}_i$  son dependientes de la deformación a través de  $\mathbf{x}_s$ , por lo que es necesario proceder a su linealización, al igual que se ha hecho con el trabajo virtual interior, con objeto de permitir un proceso iterativo de búsqueda del equilibrio:

$$\delta W_E^{p,t+\Delta t} \approx \delta W_E^{p,t} + \Delta(\delta W_E^p) \quad (5.83)$$

El incremento del trabajo virtual al aplicar un incremento  $\hat{\mathbf{u}}$  a las deformaciones es:

$$\Delta(\delta W_E^p) = \int_{\Omega^p} p [\delta \mathbf{u} \cdot (\Delta \mathbf{t}_1 \times \mathbf{t}_2) + \delta \mathbf{u} \cdot (\mathbf{t}_1 \times \Delta \mathbf{t}_2)] d\Omega^p \quad (5.84)$$

El incremento de los vectores tangentes al aplicarse el incremento de deformación es sencillamente:

$$\Delta \mathbf{t}_1 = \Delta \left( \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \right) = \frac{\partial(\Delta \mathbf{x}_s)}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_1} \quad \Delta \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_2} \quad (5.85)$$

Por lo tanto el trabajo virtual linealizado es:

$$\Delta(\delta W_E^p) = \int_{\Omega^p} p \left[ \delta \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \right) + \delta \mathbf{u} \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \times \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_2} \right) \right] d\Omega^p \quad (5.86)$$

Empleando las propiedades cíclicas del producto triple, y cambiando el orden de los dos sumandos del integrando, se puede poner:

$$\Delta(\delta W_E^p) = \int_{\Omega^p} p \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \cdot \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_2} \times \delta \mathbf{u} \right) - \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \cdot \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_1} \times \delta \mathbf{u} \right) \right] d\Omega^p \quad (5.87)$$

Esta expresión del incremento del trabajo virtual lleva a una matriz de rigidez tangente no simétrica, ya que intercambiando  $\delta \mathbf{u}$  y  $\hat{\mathbf{u}}$  se obtiene un valor distinto de la integral. Sin embargo, puede modificarse integrando por partes, con objeto de transferir las derivadas del incremento del desplazamiento a las otras magnitudes. Efectuando esta integración se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\delta W_E^p) &= - \int_{\Omega^p} p \left[ \hat{\mathbf{u}} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \alpha_2} \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \right) + \hat{\mathbf{u}} \cdot \left( \delta \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1 \partial \alpha_2} \right) \right] d\Omega^p \\
 &+ \int_{\Gamma} p v_2 \hat{\mathbf{u}} \cdot \left( \delta \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \right) d\Gamma \\
 &+ \int_{\Omega^p} p \left[ \hat{\mathbf{u}} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \right) + \hat{\mathbf{u}} \cdot \left( \delta \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2 \partial \alpha_1} \right) \right] d\Omega^p - \int_{\Gamma} p v_1 \hat{\mathbf{u}} \cdot \left( \delta \mathbf{u} \times \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \right) d\Gamma
 \end{aligned}$$

En esta expresión las integrales segunda y cuarta representan los términos del contorno en la integración por partes y se extienden a la curva  $\Gamma$  circundante del dominio  $\Omega^p$  que define las coordenadas  $\alpha_1, \alpha_2$ . El vector  $\mathbf{v}$  de componentes  $(v_1, v_2)$  es el vector normal a dicha curva circundante.

Simplificando (obsérvese que la derivada cruzada de la superficie se anula), reordenando y agrupando términos se llega a:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\delta W_E^p) &= \int_{\Omega^p} p \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \alpha_2} \times \hat{\mathbf{u}} \right) - \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \cdot \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} \times \hat{\mathbf{u}} \right) \right] d\Omega^p \\
 &+ \int_{\Gamma} p \left( v_2 \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} - v_1 \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \right) \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \delta \mathbf{u}) d\Gamma
 \end{aligned} \tag{5.88}$$

La integral al contorno se anula en los siguientes casos: si la fuerza exterior  $p$  es nula en todo él, o si dicho contorno tiene desplazamientos de valor conocido pues en este caso  $\delta \mathbf{u} = 0$ . Puede obtenerse otra condición, más compleja, para que dicha integral se anule considerando que el corchete de su integrando define el vector  $\mathbf{t}_C$  tangente a la curva  $\Gamma$  circundante, con lo que dicho integrando es  $\mathbf{t}_C \cdot (\hat{\mathbf{u}} \times \delta \mathbf{u})$ . Este producto triple es nulo si los tres vectores son coplanares, es decir si el contorno está obligado a deformarse en un plano que contiene al vector tangente  $\mathbf{t}_C$ .

En los desarrollos siguientes supondremos que alguna de dichas condiciones se cumple, y supondremos nula la integral al contorno. Si dicha integral no se anula, ello da lugar a términos hemisimétricos en la matriz de rigidez tangente, que están asociados a términos de disipación de energía. De la misma forma pueden aparecer términos no simétricos si la presión no es uniforme, sino que depende de las coordenadas. Estos casos se tratan en la bibliografía especializada.

Las dos expresiones del trabajo virtual, la inicial y la obtenida tras la integración por partes se pueden sumar y dividir por 2, para obtener la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\delta W_E^p) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} p \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_2} \times \delta \mathbf{u} \right) + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \alpha_2} \times \hat{\mathbf{u}} \right) \right] d\Omega^p \\
 &- \frac{1}{2} \int_{\Omega^p} p \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_1} \times \delta \mathbf{u} \right) + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} \times \hat{\mathbf{u}} \right) \right] d\Omega^p
 \end{aligned} \tag{5.89}$$

Esta expresión del incremento del trabajo virtual proporciona una matriz de rigidez tangente simétrica, como se comprueba al intercambiar la variación y el incremento de deformación.

### 5.6.2 Formulación isoparamétrica

Adoptando un planteamiento isoparamétrico, los desplazamientos incrementales y las variaciones de los desplazamientos, se interpolan en función de las deformaciones correspondientes de los nudos:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_I N_I(\alpha_1, \alpha_2) \hat{\mathbf{U}}_I \quad \delta \mathbf{u} = \sum_I N_I(\alpha_1, \alpha_2) \delta \mathbf{U}_I \quad (5.90)$$

En estas interpolaciones se han empleado las mismas coordenadas paramétricas usadas para definir la superficie de aplicación de la carga. Estas coordenadas coincidirán en algunos casos con las empleadas por el propio elemento finito para definir su campo de desplazamientos (p.e. en el caso de una cáscara) y en otros no coincidirán, como en el caso de un elemento sólido en una de cuyas caras se aplica la presión. En este segundo caso, se efectuará el cambio de variables necesario para expresar la interpolación como se ha indicado.

Para simplificar las expresiones se considera la contribución al incremento del trabajo virtual de las deformaciones de dos nudos cualesquiera del elemento, siendo I el nudo donde se aplica la variación  $\delta \mathbf{U}_I$  y J el nudo donde se aplica el incremento  $\hat{\mathbf{U}}_J$ . Sustituyendo las interpolaciones, se obtiene el incremento del trabajo virtual asociado a dichos dos nudos en función de los valores nodales:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_E^p)[\delta \mathbf{U}_I, \hat{\mathbf{U}}_J] &= \frac{1}{2}(\delta \mathbf{U}_I \times \hat{\mathbf{U}}_J) \cdot \left[ \int_{\Omega^p} p \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \left( -\frac{\partial N_J}{\partial \alpha_2} N_I + \frac{\partial N_I}{\partial \alpha_2} N_J \right) d\Omega^p \right] \\ &\quad - \frac{1}{2}(\delta \mathbf{U}_I \times \hat{\mathbf{U}}_J) \cdot \left[ \int_{\Omega^p} p \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \left( -\frac{\partial N_J}{\partial \alpha_1} N_I + \frac{\partial N_I}{\partial \alpha_1} N_J \right) d\Omega^p \right] \end{aligned}$$

Esta contribución de una pareja de nudos se puede poner:

$$\Delta(\delta W_E^p)[\delta \mathbf{U}_I, \hat{\mathbf{U}}_J] = (\delta \mathbf{U}_I \times \hat{\mathbf{U}}_J) \cdot \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \quad (5.91)$$

Siendo  $\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p$  un vector de coeficientes de rigidez, de tamaño 3, cuya expresión es:

$$\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p = \frac{1}{2} \int_{\Omega} p \left[ \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} \left( -\frac{\partial N_J}{\partial \alpha_2} N_I + \frac{\partial N_I}{\partial \alpha_2} N_J \right) - \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \left( -\frac{\partial N_J}{\partial \alpha_1} N_I + \frac{\partial N_I}{\partial \alpha_1} N_J \right) \right] d\Omega^p \quad (5.92)$$

El producto triple presente en la expresión del trabajo virtual se puede poner en la forma:

$$\Delta(\delta W_E^p)[\delta \mathbf{U}_I, \hat{\mathbf{U}}_J] = \delta \mathbf{U}_I \cdot \hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p \hat{\mathbf{U}}_J \quad (5.93)$$

El tensor  $\hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p$  es un tensor hemisimétrico asociado al vector  $\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p$ , cuya expresión en función del tensor alternador de orden 3, y cuya representación como matriz son:

$$\left[ \hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p \right]_{ij} = \sum_k \mathbf{e}_{ijk} \left[ \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \right]_k \quad \hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p = \begin{bmatrix} 0 & \left( \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \right)_3 & -\left( \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \right)_2 \\ -\left( \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \right)_3 & 0 & \left( \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \right)_1 \\ \left( \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \right)_2 & -\left( \hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p \right)_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.94)$$

Finalmente, el trabajo virtual total es la suma de las contribuciones de todos los nudos:

$$\Delta(\delta W_E^p) = \sum_{I,J} \Delta(\delta W_E^p) \left[ \delta \mathbf{U}_I, \hat{\mathbf{U}}_J \right] \quad (5.95)$$

Por lo tanto la matriz de rigidez tangente asociada a estas fuerzas dependientes de la deformación se obtiene por ensamblado de las distintas matrices  $\hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p$ .

Obsérvese que para  $I=J$ , el vector  $\hat{\mathbf{k}}_{II}^p$  es nulo, es decir que no existe rigidez en la diagonal principal.

Además, la estructura del vector  $\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p$  hace que  $\hat{\mathbf{k}}_{JI}^p = -\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p$ . Por lo tanto las matrices que relacionan dos nudos cualesquiera son de signo contrario una de otra y al ser hemisimétricas, son traspuestas una de otra:

$$\hat{\mathbf{K}}_{JI}^p = -\hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p = \left( \hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p \right)^T \quad (5.96)$$

Por lo tanto se obtiene una matriz de rigidez tangente simétrica.

### 5.6.3 Fuerza de presión sobre el lado de un dominio plano

Se estudia el caso de un dominio continuo plano, situado en el plano  $x_1, x_2$  y sometido a una fuerza de presión en su borde lateral (figura 5.6). La superficie lateral del dominio, sobre la que actúa la presión, viene definida por un vector:

$$\mathbf{x}_S = \begin{Bmatrix} x_{S1}(\alpha_1) \\ x_{S2}(\alpha_1) \\ h \alpha_2 \end{Bmatrix} \quad (5.97)$$

Las dos primeras componentes son dos funciones que definen la forma del borde lateral del dominio en el plano  $x_1, x_2$ , en función de la coordenada  $\alpha_1$ . La última componente representa el espesor lateral del dominio, de valor  $h$ , siendo  $\alpha_2$  una coordenada que varía entre 0 y 1.

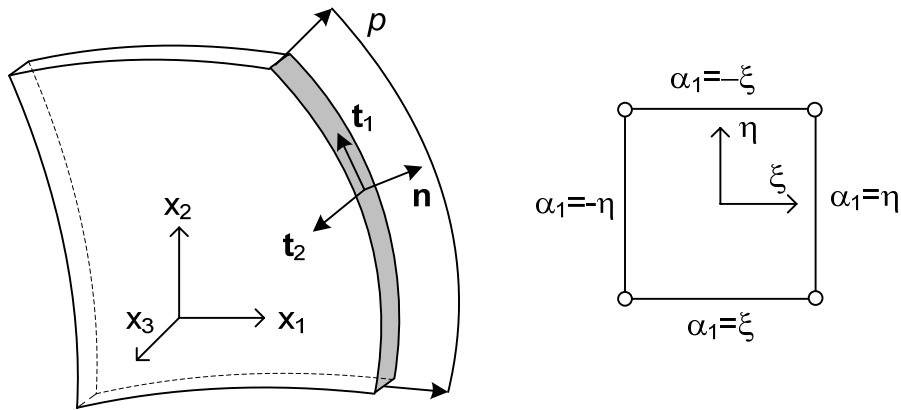


Figura 5.6 Fuerza de presión sobre el lado de un dominio plano.

Los dos vectores tangentes a la superficie son:

$$\mathbf{t}_1 = \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_1} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_{s1}}{\partial \alpha_1} \\ \frac{\partial x_{s2}}{\partial \alpha_1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{bmatrix} \quad (5.98)$$

El incremento de los vectores tangentes al aplicarse el incremento de deformación es sencillamente:

$$\Delta \mathbf{t}_1 = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_1} \quad \Delta \mathbf{t}_2 = \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_2} = \mathbf{0} \quad (5.99)$$

Sustituyendo en la expresión general del trabajo virtual linealizado obtenida previamente se obtiene:

$$\Delta (\delta W_E^p) = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^p} p \frac{\partial \mathbf{x}_s}{\partial \alpha_2} \cdot \left[ \left( \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial \alpha_1} \times \delta \mathbf{u} \right) + \left( \frac{\partial \delta \mathbf{u}}{\partial \alpha_1} \times \hat{\mathbf{u}} \right) \right] d\Omega^p \quad (5.100)$$

Para simplificar el desarrollo, se considera a partir de ahora un único elemento finito del dominio, sobre uno de cuyos lados actúa la presión. Se adoptan las interpolaciones habituales de los desplazamientos, empleando para ello dos coordenadas locales al elemento:

$$\hat{\mathbf{u}} = \sum_I N_I(\xi, \eta) \hat{\mathbf{U}}_I \quad \delta \mathbf{u} = \sum_I N_I(\xi, \eta) \delta \mathbf{U}_I \quad (5.101)$$

Estas coordenadas  $\xi, \eta$  se deberán relacionar con las  $\alpha_i$  empleadas para definir la superficie dependiendo de cuál sea la cara del elemento sobre la que actúa la presión, como indica la figura 5.5.

El vector de coeficientes de rigidez  $\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p$  resulta ser:



$$\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p = -\frac{1}{2} \int_{\Omega^p} p \frac{\partial \mathbf{x}_S}{\partial \alpha_2} \left( -\frac{\partial N_J}{\partial \alpha_1} N_I + \frac{\partial N_I}{\partial \alpha_1} N_J \right) d\alpha_1 d\alpha_2 \quad (5.102)$$

Nótese que este vector sólo tiene no nulo su tercer término, por lo que se puede poner (efectuando la integración en  $\alpha_2$ ):

$$\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \int \left( -\frac{p h}{2} \right) \left( -\frac{\partial N_J}{\partial \alpha_1} N_I + \frac{\partial N_I}{\partial \alpha_1} N_J \right) d\alpha_1 \quad (5.103)$$

En función de cuál sea el lado sobre el que se aplica la carga, deberá particularizarse la coordenada  $\alpha_1$  para efectuar la integración anterior.

La matriz hemisimétrica  $\hat{\mathbf{K}}_{IJ}^p$  que define la rigidez tangente cruzada entre dos nudos I y J, sólo tiene el término correspondiente:

$$\hat{\mathbf{K}}_{I,J}^p = \begin{bmatrix} 0 & (\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p)_3 & 0 \\ -(\hat{\mathbf{k}}_{IJ}^p)_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.104)$$

Como era de esperar, no hay ninguna contribución en la dirección  $x_3$  y sólo parece el término hemisimétrico entre las direcciones  $x_1, x_2$ .

## 5.7. FORMULACIÓN MIXTA

En la formulación mixta se interpolan de manera independiente el campo de desplazamientos y el campo de tensiones; es decir que este último no se obtiene directamente a través de la ecuación constitutiva aplicada a las deformaciones unitarias, sino que se emplea para las tensiones otra interpolación diferente. De esta manera se evitan ciertos problemas de excesiva rigidez que afectan a los elementos basados únicamente en la formulación en desplazamiento clásica.

El campo de deformaciones en el elemento se aproxima mediante la expresión habitual  $\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U}$ . Estas deformaciones dan lugar a unas deformaciones unitarias representadas por el tensor de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$ , de tal forma que se cumple la relación habitual  $\delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}$ , donde  $\mathbf{B}$  es no lineal en  $\mathbf{U}$  (ver ecuación (5.9)).

### 5.7.1 Interpolación de tensiones

En esta formulación, el campo de tensiones no se obtiene a partir de las deformaciones unitarias mediante la ecuación constitutiva, sino que se presupone para él una cierta variación dentro del elemento. Considerando un elemento plano de 4 nudos, el campo de tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  supuesto corresponde a un campo lineal en sus

coordenadas locales, diferente para cada una de las tres componentes de la tensión en los ejes locales. Este campo de tensiones se proyecta sobre los ejes cartesianos, y se pone en la forma:

$$\begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & J_{11}^0 J_{11}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{21}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ 0 & 1 & 0 & J_{12}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{22}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \\ 0 & 0 & 1 & J_{11}^0 J_{12}^0 (\eta - \bar{\eta}) & J_{21}^0 J_{22}^0 (\xi - \bar{\xi}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_5 \end{Bmatrix} \quad (5.105)$$

En forma compacta esta expresión de la interpolación de tensiones se expresará como:

$$\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{N}_s \boldsymbol{\beta} \quad (5.106)$$

en la que  $\mathbf{N}_s$  es la matriz de tamaño  $3 \times 5$  y  $\boldsymbol{\beta}$  un vector con los 5 parámetros del ajuste.

Las constantes  $J_{ij}$  son las componentes de la jacobiana evaluada en el centro del elemento  $\mathbf{J}^0$ , con objeto de garantizar el cumplimiento del patch test:

$$\mathbf{J}^0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}_{\xi=\eta=0} = \begin{bmatrix} J_{11}^0 & J_{12}^0 \\ J_{21}^0 & J_{22}^0 \end{bmatrix} \quad (5.107)$$

Las constantes  $\bar{\xi}, \bar{\eta}$  se introducen en la ley de interpolación con objeto de obtener matrices desacopladas y representan las coordenadas del centro de gravedad del elemento:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A} \int \xi dA = \frac{1}{A} \int \xi J d\xi d\eta \quad \bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta dA = \frac{1}{A} \int \eta J d\xi d\eta \quad (5.108)$$

El área del elemento se obtiene empleando la expresión habitual del determinante de la jacobiana:

$$A = \int dA = \int_{-1}^{+1} J d\xi d\eta \quad (5.109)$$

El valor de las constantes es:

$$\bar{\xi} = \frac{1}{A} \int \xi dA = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \xi J d\xi d\eta \quad \bar{\eta} = \frac{1}{A} \int \eta dA = \frac{1}{A} \int_{-1}^{+1} \eta J d\xi d\eta \quad (5.110)$$

Esta interpolación de tensiones en el caso plano puede extenderse a elementos en tres dimensiones de forma conceptualmente similar, como puede verse en Jog (2005) y Jog y Jog y Kelkar (2006), que desarrollan elementos de 21 y 27 nudos, aunque el elevado número de grados de libertad (63 y 81) implica el uso de un elevado número de parámetros para interpolar el campo de tensiones (57 y 75 respectivamente).

### 5.7.2 Ecuación de equilibrio

Al ser los campos de deformaciones  $\mathbf{u}$  y de tensiones  $\mathbf{S}$  independientes, las ecuaciones de equilibrio se obtienen empleando un principio variacional de campo doble, basado en la funcional de Hellinger-Reissner. Como el campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$  contiene únicamente desplazamientos compatibles, pues la interpolación de deformaciones cumple las condiciones de compatibilidad entre elementos, la expresión de dicha funcional es:

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{S}}) = \int_{v^0} \left( -\frac{1}{2} \bar{\mathbf{S}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{S}} + \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} \right) dv^0 - \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (5.111)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  representa al tensor de elasticidad del material en el estado plano (denominada  $\mathbf{C}$  en el capítulo 3). Su inversa en la expresión anterior proporciona las deformaciones unitarias producidas por el campo interpolado de tensiones  $\mathbf{S}$ . El vector  $\mathbf{P}$  son las fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores de volumen y de superficie. La funcional anterior está referida a la configuración inicial de la estructura, respecto de la cual están calculadas la tensión de Piola y la deformación de Green. La integral indicada está extendida por lo tanto al volumen de dicha configuración inicial.

Es habitual separar en esta expresión la primera integral, que corresponde al potencial de los esfuerzos interiores  $\Pi_{HRi}$ , y el último sumando, que corresponde al potencial de las fuerzas exteriores:

$$\Pi_{HR}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{S}}) = \Pi_{HRi}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{S}}) + \Pi_{ext} \quad (5.112)$$

La condición estacionaria de la funcional anterior es:

$$\delta \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{S}}) = \delta \Pi_{HRi}(\mathbf{u}, \bar{\mathbf{S}}) + \delta \Pi_{ext} = 0 \quad (5.113)$$

La parte correspondiente a los esfuerzos interiores vale:

$$\delta \Pi_{HRi} = \int \left[ -\delta \bar{\mathbf{S}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{S}} + \delta \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} + \delta \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{E}} \right] dv^0 \quad (5.114)$$

En esta expresión se pueden sustituir las variaciones del campo de deformaciones unitarias  $\delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}$  y de las tensiones interpoladas  $\delta \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{N}_s \delta \boldsymbol{\beta}$ .

$$\delta \Pi_{HRi} = \int \left[ -\delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s \boldsymbol{\beta} + \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \mathbf{N}_s \boldsymbol{\beta} + \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}_s^T \bar{\mathbf{E}} \right] dv^0 \quad (5.115)$$

La variación del potencial de las fuerzas exteriores corresponde al trabajo virtual de las fuerzas nodales equivalentes a ellas  $\mathbf{P}$ , cambiado de signo:

$$\delta \Pi_{ext} = -\delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (5.116)$$

Considerando los dos sumandos, y agrupando por una parte los términos correspondientes a los coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  y por otra los correspondientes a las deformaciones de los nudos  $\mathbf{U}$  queda:

$$\begin{aligned} \delta\Pi_{HR} = \delta\boldsymbol{\beta}^T & \left[ -\int \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s dv^0 \boldsymbol{\beta} + \int \mathbf{N}_s^T \bar{\mathbf{E}} dv^0 \right] \\ & + \delta\mathbf{U}^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{N}_s dv^0 \boldsymbol{\beta} - \delta\mathbf{U}^T \mathbf{P} = 0 \end{aligned} \quad (5.117)$$

Definiendo las magnitudes:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_s &= \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s dv^0 \\ \mathbf{G}_s &= \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{B} dv^0 \\ \mathbf{F}_E &= \int \mathbf{N}_s^T \bar{\mathbf{E}} dv^0 \end{aligned} \quad (5.118)$$

y agrupando los distintos términos, la condición estacionaria de la funcional se puede poner en la forma compacta:

$$\delta\Pi_{HR} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[ -\mathbf{H}_s \boldsymbol{\beta} + \mathbf{F}_E \right] + \delta\mathbf{U}^T \left[ \mathbf{G}_s^T \boldsymbol{\beta} - \mathbf{P} \right] = 0 \quad (5.119)$$

De esta condición se deduce que las ecuaciones de equilibrio son:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_s^T \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{P} \\ -\mathbf{H}_s \boldsymbol{\beta} + \mathbf{F}_E &= 0 \end{aligned} \quad (5.120)$$

La naturaleza no lineal de estas ecuaciones radica tanto en la matriz  $\mathbf{B}$ , que está presente en  $\mathbf{G}_s$ , como en el vector  $\mathbf{F}_E$ , el cual depende del tensor de deformación de Green-Lagrange  $\bar{\mathbf{E}}$ .

### 5.7.3 Vector de fuerzas interiores

En la ecuación de equilibrio se identifica el vector de fuerzas interiores del elemento:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_s^T \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{F}_E - \mathbf{H}_s \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} \quad (5.121)$$

De tal manera que la ecuación de equilibrio queda:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.122)$$

Las componentes del vector de esfuerzos interiores se pueden desarrollar en la forma siguiente, más adaptada a la implementación práctica:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \mathbf{G}_s^T \boldsymbol{\beta} = \int \mathbf{B}^T \mathbf{N}_s \boldsymbol{\beta} dv^0 = \int \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 \\ \mathbf{Q}_2 &= \mathbf{F}_E - \mathbf{H}_s \boldsymbol{\beta} = \int \mathbf{N}_s^T \left( \bar{\mathbf{E}} - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s \boldsymbol{\beta} \right) dv^0 = \int \mathbf{N}_s^T \left( \bar{\mathbf{E}} - \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{S}} \right) dv^0 \end{aligned} \quad (5.123)$$

### 5.7.4 Linealización de las ecuaciones de equilibrio

Suponiendo conocida la configuración de equilibrio en un instante  $t$ , se busca la configuración de equilibrio en el instante  $t+\Delta t$ , la cual vendrá definida por la condición estacionaria de la funcional en dicho instante:

$$\delta\Pi_{HR}^{t+\Delta t} = \delta\Pi_{HRi}^{t+\Delta t} + \delta\Pi_{ext}^{t+\Delta t} = 0 \quad (5.124)$$

Suponiendo fuerzas conservativas e independientes de la deformación, el potencial de las fuerzas exteriores es lineal. Sin embargo el término debido a los esfuerzos interiores es no lineal, por lo cual se considera para él una aproximación linealizada. Esto permite poner la expresión estacionaria de la funcional anterior en la forma:

$$\delta\Pi_{HRi}^t + \Delta\delta\Pi_{HRi}^t + \delta\Pi_{ext}^{t+\Delta t} = 0 \quad (5.125)$$

El incremento de la variación de la funcional de Hellinger-Reissner se obtiene directamente a partir de su expresión (5.114), considerando que ahora el incremento debe hacerse en la dirección de un incremento del campo de deformaciones y también de un incremento del campo de tensiones, es decir:

$$\Delta\delta\Pi_{HRi}^t = \int \left[ -\delta\bar{\mathbf{S}}^T \mathbf{C}^{-1} \Delta\bar{\mathbf{S}} + \delta\bar{\mathbf{E}}^T \Delta\bar{\mathbf{S}} + \Delta\delta\bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} + \delta\bar{\mathbf{S}}^T \Delta\bar{\mathbf{E}} \right] dv^0 \quad (5.126)$$

Denominando  $\hat{\mathbf{U}}$  al incremento de los grados de libertad del elemento y  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  al incremento en los parámetros para la interpolación de tensiones, se puede poner que:

$$\Delta\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}} \quad \Delta\bar{\mathbf{S}} = \mathbf{N}_s \hat{\boldsymbol{\beta}} \quad (5.127)$$

Sustituyendo en (5.126) y reagrupando se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta\delta\Pi_{HRi}^t = & -\delta\boldsymbol{\beta}^T \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s dv^0 \hat{\boldsymbol{\beta}} + \delta\mathbf{U}^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{N}_s dv^0 \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ & + \int \Delta\delta\bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 + \delta\boldsymbol{\beta}^T \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{B} dv^0 \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (5.128)$$

La tercera integral contiene el incremento de la variación del tensor de deformaciones de Green y da lugar a la matriz de rigidez geométrica, como ya se ha deducido en el apartado 5.3.2:

$$\int \Delta\delta\bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} dv^0 = \delta\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_\sigma \hat{\mathbf{U}} \quad (5.129)$$

Sustituyendo en la expresión del incremento (5.128), e identificando en ella nuevamente a las matrices  $\mathbf{H}_s$  y  $\mathbf{G}_s$  se obtiene:

$$\Delta\delta\Pi_{HRi}^t = -\delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H}_s \hat{\boldsymbol{\beta}} + \delta\mathbf{U}^T \mathbf{G}_s^T \hat{\boldsymbol{\beta}} + \delta\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_\sigma \hat{\mathbf{U}} + \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{G}_s \hat{\mathbf{U}} \quad (5.130)$$

Sustituyendo este valor en la expresión linealizada de la funcional (5.125), introduciendo a continuación en ella la expresión (5.115) de la variación de la funcional  $\delta\Pi_{HRi}^t$  y la (5.116) del potencial de las fuerzas exteriores en  $t+\Delta t$ , y finalmente reordenando se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ \delta \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\sigma} & \mathbf{G}_S^T \\ \mathbf{G}_S & -\mathbf{H}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U} \\ \delta \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_S^T \boldsymbol{\beta} - \mathbf{P}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{F}_E - \mathbf{H}_S \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} = 0 \quad (5.131)$$

Por lo tanto las ecuaciones de equilibrio incrementales son:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\sigma} & \mathbf{G}_S^T \\ \mathbf{G}_S & -\mathbf{H}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{G}_S^T \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{H}_S \boldsymbol{\beta} - \mathbf{F}_E \end{Bmatrix} \quad (5.132)$$

Recordando el valor del vector de fuerzas interiores  $\mathbf{Q}$  dado por (5.121), esta expresión se puede poner de forma compacta:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_{\sigma} & \mathbf{G}_S^T \\ \mathbf{G}_S & -\mathbf{H}_S \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\boldsymbol{\beta}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q}_1 \\ -\mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} \quad (5.133)$$

La segunda ecuación de equilibrio permite despejar el incremento de los parámetros  $\boldsymbol{\beta}$  en función del incremento de las deformaciones nodales.

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{H}_S^{-1} (\mathbf{G}_S \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{Q}_2) \quad (5.134)$$

Sustituyendo en la primera ecuación se obtiene:

$$(\hat{\mathbf{K}}_{\sigma} + \mathbf{G}_S^T \mathbf{H}_S^{-1} \mathbf{G}_S) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q}_1 - \mathbf{G}_S^T \mathbf{H}_S^{-1} \mathbf{Q}_2 \quad (5.135)$$

En esta ecuación se identifican la componente material de la matriz de rigidez tangente y el vector de fuerzas interiores equivalente:

$$\hat{\mathbf{K}}_{mat} = \mathbf{G}_S^T \mathbf{H}_S^{-1} \mathbf{G}_S \quad (5.136)$$

$$\mathbf{Q}_{eq} = \mathbf{Q}_1 + \mathbf{G}_S^T \mathbf{H}_S^{-1} \mathbf{Q}_2.$$

Por lo tanto la ecuación de equilibrio incremental se puede poner en la forma habitual:

$$(\hat{\mathbf{K}}_{\sigma} + \hat{\mathbf{K}}_{mat}) \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q}_{eq} \quad (5.137)$$

Esta ecuación permite hallar el incremento de las deformaciones de los nudos conociendo las fuerzas exteriores aplicadas en  $t+\Delta t$  y el estado de tensiones y deformaciones del elemento en  $t$ .

# Formulación lagrangiana actualizada

En el planteamiento lagrangiano para la resolución de problemas de mecánica de sólidos se expresa la deformación del sólido en función de las coordenadas iniciales de cada partícula  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$ . En el capítulo anterior se ha presentado la formulación conocida como total, que emplea como configuración de referencia para la medida de la deformación a la configuración inicial del sólido  $\Omega_0$ . En este capítulo se desarrolla la formulación conocida como actualizada, en la que se emplea como configuración de referencia a la última configuración de equilibrio hallada durante el proceso incremental de carga. Esta formulación actualizada conduce a unas ecuaciones muy similares a las de la formulación total, que producen los mismos resultados y se diferencian únicamente en su implementación práctica.

La formulación actualizada se aplica aquí a problemas de elasticidad de sólidos continuos de dos dimensiones, empleando el método de los elementos finitos para aproximar el campo continuo de deformaciones. A su vez, se adoptan dos formulaciones distintas del método de los elementos finitos: una estándar en desplazamiento y una formulación mixta en tensiones y deformaciones.

## 6.1. TRABAJO VIRTUAL

Sea un sólido en equilibrio en un instante cualquiera  $t$  del proceso de deformación, adoptando una configuración deformada  $\Omega$ . La condición de equilibrio viene dada por el principio del trabajo virtual, cuya expresión en dicha configuración deformada es:

$$\delta W_I \equiv \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dv \equiv \int_v \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \delta W_E \quad (6.1)$$

La variación de la deformación unitaria infinitesimal se relaciona con la del gradiente de los desplazamientos por medio de una matriz constante  $\mathbf{A}_C$  (ver capítulo 2):

$$\delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{A}_C \delta \bar{\mathbf{H}}_t \quad (6.2)$$

A su vez, las derivadas de los desplazamientos contenidas en  $\bar{\mathbf{H}}_t$  se pueden expresar en función del campo de deformaciones a través de un operador de derivación  $\partial_t$ , que en el caso plano es:

$$\bar{\mathbf{H}}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \partial_t \mathbf{u} \quad (6.3)$$

Considerando la hipótesis de interpolación del método de los elementos finitos, las deformaciones  $\mathbf{u}$  se pueden poner en función de los grados de libertad de los nudos  $\mathbf{U}$  y de las funciones de interpolación del elemento agrupadas en la matriz  $\mathbf{N}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (6.4)$$

con lo que la expresión aproximada del tensor gradiente de la deformación es:

$$\bar{\mathbf{H}}_t = \partial_t \mathbf{u} = \partial_t \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{G}_t \mathbf{U} \quad (6.5)$$

La matriz  $\mathbf{G}_t$  contiene las derivadas de las funciones de interpolación con respecto a las coordenadas deformadas  $\mathbf{x}$  y no depende de las deformaciones. Su tamaño en problemas de dos dimensiones es de 4 filas y tantas columnas como grados de libertad tiene el elemento.

$$\mathbf{G}_t = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \dots \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \dots \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & \dots \end{bmatrix} \quad (6.6)$$

La variación de las deformaciones unitarias queda por lo tanto:

$$\delta \bar{\epsilon} = \mathbf{A}_C \mathbf{G}_t \delta \mathbf{U} = \mathbf{B}_t \delta \mathbf{U} \quad (6.7)$$

La matriz  $\mathbf{B}_t$  relaciona la variación de las deformaciones de los nudos y la variación de las deformaciones unitarias:

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{A}_C \mathbf{G}_t \quad (6.8)$$



Sustituyendo la variación de la deformación unitaria, el trabajo virtual interior vale:

$$\delta W_I = \int_v \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \delta \mathbf{U}^T \int_v \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \quad (6.9)$$

En esta expresión se ha definido el vector  $\mathbf{Q}$  de fuerzas nodales equivalentes a los esfuerzos interiores en el instante  $t$ :

$$\mathbf{Q} \equiv \int_v \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv \quad (6.10)$$

## 6.2. ECUACIÓN DE EQUILIBRIO

Sustituyendo el valor obtenido para el trabajo virtual interior, el principio del trabajo virtual queda:

$$\delta W_I = \delta \mathbf{U}^T \int_v \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \delta W_E \quad (6.11)$$

El trabajo virtual de las fuerzas exteriores se sustituye por el trabajo virtual producido por las fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores  $\mathbf{P}$ , cuya determinación se efectúa más adelante:

$$\delta W_E = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (6.12)$$

Finalmente, al ser arbitraria la variación de los desplazamientos, la ecuación de equilibrio resulta:

$$\mathbf{Q} \equiv \int_v \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \mathbf{P} \quad (6.13)$$

## 6.3. LINEALIZACIÓN DE LAS ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Supongamos conocida la configuración de equilibrio en el instante  $t$  del proceso de carga y busquemos la configuración de equilibrio en  $t + \Delta t$ , que viene definida por el principio del trabajo virtual en dicho instante:

$$\delta W_I^{t+\Delta t} = \delta W_E^{t+\Delta t} \quad (6.14)$$

De la misma manera que en la formulación total (ver apartado 5.3), procedemos a linealizar el trabajo virtual interior en el punto  $t$ , en la dirección de un incremento de la deformación  $\hat{\mathbf{u}}$ , expresándolo mediante una matriz de rigidez tangente  $\hat{\mathbf{K}}$ :

$$\delta W_I^{t+\Delta t} \approx \delta W_I + \Delta_{\hat{\mathbf{u}}}(\delta W_I) = \delta W_I + \delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} \quad (6.15)$$

El vector  $\hat{\mathbf{U}}$  contiene los incrementos en las deformaciones nodales del elemento asociados al incremento  $\hat{\mathbf{u}}$ . El valor del trabajo virtual viene dado por la ecuación (6.1) y su incremento incluye dos términos semejantes a los obtenidos en la

formulación lagrangiana total, de los cuales el primero corresponde a la componente material y el segundo a la geométrica:

$$\Delta_{\hat{u}}(\delta W_I) = \int_v \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv + \int_v \Delta(\delta \boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\sigma} \, dv \quad (6.16)$$

$$\Delta(\delta W_I) = \Delta(\delta W_I)_{mat} + \Delta(\delta W_I)_{geo} \quad (6.17)$$

### 6.3.1 Componente material

Para evaluar el término material, es necesario establecer un valor del incremento de la tensión. Al estar empleando un método incremental, y ser los incrementos de deformaciones pequeños, resulta aceptable suponer que el incremento de la tensión es proporcional al incremento en las deformaciones unitarias:

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (6.18)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es constante y representa al tensor de elasticidad del material (este tensor se denominó  $\mathbf{C}$  en el capítulo 3). Esta aproximación es válida para materiales elásticos lineales o no, si los incrementos de las deformaciones unitarias son pequeños.

Dada la equivalencia entre incrementos y variaciones, el incremento de la deformación unitaria viene dado por una expresión similar a la de su variación (6.7):

$$\Delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{B}_t \hat{\mathbf{U}} \quad (6.19)$$

Sustituyendo el incremento de la deformación y su variación, se obtiene el valor de la componente material del incremento del trabajo virtual interior:

$$\Delta(\delta W_I)_{mat} \equiv \int_v \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \delta \mathbf{U}^T \int_v \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t \, dv \hat{\mathbf{U}} \quad (6.20)$$

### 6.3.2 Componente geométrica

Para evaluar el término geométrico del incremento del trabajo virtual se emplea el incremento de la variación de la deformación unitaria, cuyo valor es:

$$\Delta(\delta \boldsymbol{\varepsilon}) = \frac{1}{2} \left( \delta \mathbf{H}_t^T \Delta \mathbf{H}_t + \Delta \mathbf{H}_t^T \delta \mathbf{H}_t \right) \quad (6.21)$$

Sustituyendo este valor en la integral del término geométrico, trasponiendo el segundo sumando y considerando que el tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  es simétrico, se obtiene:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} \equiv \int \left( \delta \mathbf{H}_t^T \Delta \mathbf{H}_t \right) : \boldsymbol{\sigma} \, dv \quad (6.22)$$

La evaluación del integrando en esta forma resulta complicada para la implementación práctica, por lo que se desarrolla en función del valor de los tensores. Para el caso de dos dimensiones es:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \int \begin{bmatrix} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} dv \quad (6.23)$$

Desarrollando los productos se puede demostrar que es posible poner el integrando en la forma siguiente:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \int \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \delta u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \delta u_2}{\partial x_2} \end{array} \right\}^T \left[ \begin{array}{cc|cc} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ 0 & 0 & \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \end{array} \right\} dv \quad (6.24)$$

El primer factor de esta expresión es la variación del tensor  $\mathbf{H}_t$ , puesta en forma de vector. El último factor del integrando corresponde al gradiente de los incrementos de las deformaciones puesto en forma de vector:

$$\hat{\mathbf{H}}_t = \left\{ \begin{array}{cccc} \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{u}_1}{\partial x_2} & \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \hat{u}_2}{\partial x_2} \end{array} \right\}^T \quad (6.25)$$

Con estas consideraciones, y definiendo la matriz  $\tilde{\sigma} = \text{diag}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma})$  que consiste en una agrupación diagonal del tensor de tensiones tantas veces como dimensiones tenga el problema, se puede poner:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} = \int \delta \bar{\mathbf{H}}_t^T \tilde{\sigma} \hat{\mathbf{H}}_t dv \quad (6.26)$$

Efectuando el mismo desarrollo que para el vector  $\bar{\mathbf{H}}_t$ , el vector  $\hat{\mathbf{H}}_t$  se puede expresar en función de los incrementos de las deformaciones de los nudos (ver (6.5)):

$$\hat{\mathbf{H}}_t = \partial_t \hat{\mathbf{u}} = \partial_t \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{G}_t \hat{\mathbf{U}}$$

Finalmente se obtiene la siguiente expresión de la componente geométrica:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo} \equiv \int_v \Delta(\delta \boldsymbol{\varepsilon}) : \boldsymbol{\sigma} dv = \delta \mathbf{U}^T \int_v \mathbf{G}_t^T \tilde{\sigma} \mathbf{G}_t dv \hat{\mathbf{U}} \quad (6.27)$$

### 6.3.3 Matriz de rigidez tangente

El incremento del trabajo virtual queda finalmente como:

$$\Delta(\delta W_I) = \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t dv \hat{\mathbf{U}} + \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{G}_t^T \tilde{\sigma} \mathbf{G}_t dv \hat{\mathbf{U}} \quad (6.28)$$

$$\Delta(\delta W_I) = \delta \mathbf{U}^T (\hat{\mathbf{K}}_D + \hat{\mathbf{K}}_\sigma) \hat{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} \quad (6.29)$$

En esta expresión se ha definido la matriz de rigidez tangente  $\hat{\mathbf{K}}$ , que tiene dos sumandos. La primera matriz  $\hat{\mathbf{K}}_D$  corresponde al término material y coincide con la matriz de rigidez en el análisis lineal, pues  $\mathbf{B}_t$  es constante y coincide con la matriz empleada en dicho análisis lineal.

$$\hat{\mathbf{K}}_D \equiv \int_v \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t dv \quad (6.30)$$

La matriz de rigidez *geométrica*  $\hat{\mathbf{K}}_\sigma$  tiene una estructura muy similar a la correspondiente en la formulación lagrangiana total, aunque empleando la tensión de Cauchy en lugar de la tensión de Piola Kirchhoff, y evaluando todos sus términos en el estado  $t$  en lugar de en el estado inicial.

$$\hat{\mathbf{K}}_\sigma \equiv \int_v \mathbf{G}_t^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{G}_t dv \quad (6.31)$$

### 6.3.4 Ecuaciones de equilibrio incrementales

Efectuando el mismo desarrollo que en la formulación lagrangiana total se llega a las ecuaciones de equilibrio incrementales, que tienen la forma:

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \int_v \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} dv \quad (6.32)$$

En forma compacta, introduciendo el vector de fuerzas interiores  $\mathbf{Q}$ :

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q} \quad (6.33)$$

Las ecuaciones incrementales obtenidas tienen la misma expresión general que en la formulación total, utilizan los mismos grados de libertad incrementales y sólo se diferencian en los valores particulares de la matriz de rigidez tangente y del vector de fuerzas interiores. Esto hace que ambas formulaciones sean intercambiables pudiéndose emplear incluso mezcladas en la resolución de un mismo problema.

## 6.4. FORMULACIÓN ISOPARAMÉTRICA

### 6.4.1 Interpolación de coordenadas y deformaciones

En principio sólo son necesarias las coordenadas en el estado  $t$ , las cuales se interpolan en la forma habitual:

$$x_i = \sum_k N_k x_i^k \quad (6.34)$$

Estas coordenadas se deben ir actualizando a medida que progresa el análisis incremental, a base de añadirles las deformaciones obtenidas en cada paso de carga.

Para las deformaciones en el instante  $t$  la interpolación es:

$$u_i = \sum_k N_k U_i^k \quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (6.35)$$

Para los incrementos de deformaciones se emplea una expresión similar:

$$\hat{u}_i = \sum_k N_k \hat{U}_i^k \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} \quad (6.36)$$

### 6.4.2 Transformación de derivadas

Las derivadas de las distintas magnitudes involucradas se transforman entre las coordenadas del sistema local normalizado y las coordenadas generales  $\mathbf{x}$  por medio de la matriz jacobiana habitual. Por ejemplo, para la derivada de una función de interpolación:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \end{bmatrix} \\ \frac{\partial N_k}{\partial \xi} &= \mathbf{J}_t \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{x}} \end{aligned} \quad (6.37)$$

Los distintos términos de la jacobiana se obtienen mediante la interpolación de coordenadas y las derivadas de las funciones de interpolación en coordenadas locales:

$$J_{tij} = \frac{\partial x_j}{\partial \xi_i} = \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i} x_i^k \quad (6.38)$$

Es necesaria asimismo la transformación de coordenadas inversa:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{J}_t^{-1} \frac{\partial N_k}{\partial \xi} \\ \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} (\mathbf{J}_t^{-1})_{11} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_t^{-1})_{12} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ (\mathbf{J}_t^{-1})_{21} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + (\mathbf{J}_t^{-1})_{22} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.39)$$

### 6.4.3 Matriz $\mathbf{G}$

Está formada por tantos bloques como nudos tiene el elemento, cada uno de los cuales contiene las derivadas de la función de interpolación de ese nudo respecto de las coordenadas en el instante  $t$ .

$$\mathbf{G}_t = \left[ \mathbf{G}_t^1 \quad \mathbf{G}_t^2 \quad \dots \quad \mathbf{G}_t^n \right] \quad \mathbf{G}_t^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

Su cálculo es inmediato empleando la transformación de coordenadas inversa:

$$\mathbf{G}_t^k = \begin{bmatrix} \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{11} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{12} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} & 0 \\ \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{21} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{22} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} & 0 \\ 0 & \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{11} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{12} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \\ 0 & \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{21} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_1} + \left( \mathbf{J}_t^{-1} \right)_{22} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_2} \end{bmatrix} \quad (6.41)$$

### 6.4.4 Matriz tangente

Su expresión tiene dos sumandos, material y geométrico:

$$\hat{\mathbf{K}} = \int_v \mathbf{B}_t^T \mathbf{C} \mathbf{B}_t dv + \int_v \mathbf{G}_t^T \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{G}_t dv \quad (6.42)$$

La matriz  $\mathbf{B}$  es constante y tiene una estructura de bloques similar a la de  $\mathbf{G}$ , con un bloque para cada nudo:

$$\mathbf{B}_t = \mathbf{A}_C \mathbf{G}_t = \left[ \mathbf{B}_t^1 \quad \mathbf{B}_t^2 \quad \dots \quad \mathbf{B}_t^n \right] \quad (6.43)$$

$$\mathbf{B}_t^k = \mathbf{A}_C \mathbf{G}_t^k = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_k}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_k}{\partial x_2} & \frac{\partial N_k}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (6.44)$$

#### 6.4.5 Vector de fuerzas interiores

Su expresión es sencilla de obtener, en base a la matriz  $\mathbf{B}$  y al vector de tensiones  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  en el estado conocido  $t$ :

$$\mathbf{Q} \equiv \int_v \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv = \int_v \mathbf{G}_t^T \mathbf{A}_C^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv \quad (6.45)$$

### 6.5. FUERZAS NODALES EQUIVALENTES A LAS FUERZAS EXTERIORES

Al igual que en la formulación total, las fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores se evalúan con los valores de éstas en el instante  $t+\Delta t$ , pero referidas al área y volumen de la posición conocida  $t$ .

$$\mathbf{P}^{t+\Delta t} = \int_v \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{vt}^{t+\Delta t} \, dv + \int_s \mathbf{N}^T \mathbf{q}_{St}^{t+\Delta t} \, ds \quad (6.46)$$

### 6.6. CÁLCULO DE LA TENSIÓN DE CAUCHY. MATERIAL LINEAL

La presencia del tensor de tensiones de Cauchy en la formulación actualizada no presenta ninguna dificultad teórica. Sin embargo desde el punto de vista práctico, se puede obtener un método más sencillo para su obtención en determinados casos.

Se ha demostrado que el trabajo virtual interior puede expresarse en cualquiera de las dos formas:

$$\delta W_I = \int_{v^0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} \, dv^0 = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \boldsymbol{\sigma} \, dv \quad (6.47)$$

Consideremos que la ecuación constitutiva del material corresponde al denominado material de St.Venant-Kirchhoff. En este material se supone que la relación entre el 2º tensor de tensión de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$  y el tensor de deformación de Green  $\mathbf{E}$ , es un tensor constante que coincide con el del material elástico lineal en pequeñas deformaciones. Este tensor se denomina  $\mathbf{C}$  en su representación como matriz 2x2 y  $\mathbf{C}_4$  en su representación como tensor de orden 4, es decir:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}_4 : \mathbf{E} \quad \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}} \quad (6.48)$$

Por lo tanto, empleando la primera de las expresiones del trabajo virtual interior:

$$\delta W_I = \int_{v^0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{S} dv^0 = \int_{v^0} \delta \mathbf{E} : \mathbf{C}_4 : \mathbf{E} dv^0 \quad (6.49)$$

Sustituimos a continuación las expresiones de la variación del tensor de Green en función del tensor infinitesimal  $\delta \mathbf{E} = \mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F}$  y del tensor de Green en función del de Almansi  $\mathbf{E} = \mathbf{F}^T \mathbf{E}_A \mathbf{F}$  y se obtiene:

$$\delta W_I = \int_{v^0} \mathbf{F}^T \delta \boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{F} : \mathbf{C}_4 : \mathbf{F}^T \mathbf{E}_A \mathbf{F} dv^0 \quad (6.50)$$

Desarrollando el integrando e introduciendo la relación entre los volúmenes  $dv = F dv^0$ , dicho integrando se puede poner en la forma:

$$\delta W_I = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \left( \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{C}_4 \mathbf{F} \mathbf{F}^T \right) : \mathbf{E}_A \frac{1}{F} dv \quad (6.51)$$

Introduciendo un nuevo tensor material definido como:

$$\bar{\mathbf{C}}_4 = \frac{1}{F} \mathbf{F}^T \mathbf{F} \mathbf{C}_4 \mathbf{F} \mathbf{F}^T \quad (6.52)$$

el trabajo virtual se puede poner

$$\delta W_I = \int_v \delta \boldsymbol{\varepsilon} : \bar{\mathbf{C}}_4 : \mathbf{E}_A dv \quad (6.53)$$

Comparando con la segunda expresión del trabajo virtual interior de (6.47), esta expresión demuestra que la tensión de Cauchy se puede poner en la forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \bar{\mathbf{C}}_4 : \mathbf{E}_A \quad (6.54)$$

Por otra parte, si se supone que las deformaciones unitarias son pequeñas, aunque las deformaciones y rotaciones totales sean grandes, y que el material es isótropo, se puede demostrar que el nuevo tensor  $\bar{\mathbf{C}}_4$  es prácticamente igual que el tensor original del material elástico lineal  $\mathbf{C}_4$ . Ello es debido a que al ser las deformaciones unitarias pequeñas, el tensor  $\mathbf{F}$  que interviene en la expresión de  $\bar{\mathbf{C}}_4$  corresponde básicamente a traslaciones y rotaciones, las cuales no afectan al tensor constitutivo del material si éste es isótropo. Por lo tanto se puede suponer que, para el caso de un material de Kirchhoff isótropo y pequeñas deformaciones unitarias, las tensiones de Cauchy pueden obtenerse a partir de las deformaciones unitarias de Almansi mediante la expresión aproximada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_4 : \mathbf{E}_A \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C} \bar{\mathbf{E}}_A \quad (6.55)$$



## 6.7. FORMULACIÓN MIXTA

En la formulación mixta se interpolan de manera independiente el campo de desplazamientos y el campo de tensiones; es decir que este último no se obtiene directamente a través de la ecuación constitutiva aplicada a las deformaciones unitarias, sino que se emplea para las tensiones otra interpolación diferente.

El campo de deformaciones del elemento se aproxima mediante la expresión habitual  $\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{U}$ . Estas deformaciones dan lugar a unas deformaciones unitarias representadas por el tensor de infinitesimal  $\epsilon$ , de tal forma que se cumple la relación habitual  $\delta\bar{\epsilon} = \mathbf{B}_t \delta\mathbf{U}$ , donde  $\mathbf{B}_t$  es constante.

### 6.7.1 Interpolación de tensiones

En esta formulación el campo de tensiones no se obtiene a partir de las deformaciones unitarias mediante la ecuación constitutiva, sino que se presupone para él una cierta variación dentro del elemento. Considerando un elemento de 4 nudos, el campo de tensiones de Cauchy supuesto corresponde a un campo lineal en sus coordenadas locales, diferente para cada una de las tres componentes de la tensión en los ejes locales.

Siguiendo las mismas ideas que en la formulación total, la interpolación que se emplea para el campo de tensiones de Cauchy es:

$$\bar{\sigma} = \mathbf{N}_s \beta \quad (6.56)$$

En esta expresión  $\mathbf{N}_s$  es una matriz de tamaño  $3 \times 5$  y  $\beta$  es un vector con los 5 parámetros del ajuste (ver apartado 5.7.1).

### 6.7.2 Principio variacional en la formulación mixta

Dado que se emplean dos campos interpolados de forma independiente: el de deformaciones  $\mathbf{u}$  y el de tensiones  $\sigma$ , es necesario emplear un principio variacional que los tenga en cuenta para obtener la ecuación de equilibrio.

El campo de deformaciones  $\mathbf{u}$  da lugar a unas deformaciones unitarias, que por conveniencia con el desarrollo posterior se caracterizan mediante el tensor de Almansi  $\bar{\mathbf{E}}_A$ .

El campo de tensiones da lugar a unas deformaciones unitarias, que dependen de la ecuación constitutiva del material. Suponiendo un material de St.Venant-Kirchhoff, se ha demostrado que la relación entre las tensiones verdaderas, o de Cauchy, y el tensor de Almansi se establece mediante el tensor  $\mathbf{C}$  de la elasticidad lineal, si las deformaciones unitarias son pequeñas y el material isótropo. Es decir:

$$\bar{\mathbf{E}}_A^\sigma = \mathbf{C}^{-1} \bar{\sigma} \quad (6.57)$$

En esta expresión se ha denominado  $\mathbf{E}_A^\sigma$  a las deformaciones unitarias de Almansi producidas por las tensiones, para diferenciarlas de las producidas por las deformaciones  $\mathbf{E}_A$  que no serán iguales a ellas. Por lo tanto es necesario satisfacer, aunque sea de forma débil, la ecuación:

$$\mathbf{E}_A^\sigma = \mathbf{E}_A \quad (6.58)$$

Las tensiones en el material deberán satisfacer las ecuaciones de equilibrio:

$$\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{q}_v = 0 \quad (6.59)$$

Además se deberán satisfacer las ecuaciones de contorno que representan el equilibrio entre las fuerzas aplicadas en la superficie  $\mathbf{q}_s$  y las tensiones en dicha superficie, mediante la fórmula de Cauchy:  $\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \mathbf{q}_s$ .

Para imponer el cumplimiento de las tres ecuaciones mencionadas, se emplea el método de los multiplicadores de Lagrange. Multiplicando el residuo de cada una de ellas por un multiplicador  $\boldsymbol{\lambda}_i$  (que en este caso es una función vectorial) e integrando a todo el dominio se obtiene la forma débil de las ecuaciones:

$$\int_v (\bar{\mathbf{E}}_A - \bar{\mathbf{E}}_A^\sigma) \cdot \boldsymbol{\lambda}_1 dv + \int_v (\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{q}_v) \cdot \boldsymbol{\lambda}_2 dv + \int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{q}_s) \cdot \boldsymbol{\lambda}_3 ds = 0 \quad (6.60)$$

Los multiplicadores deben corresponder a variaciones del campo de deformaciones  $\delta \mathbf{u}$  o de tensiones  $\delta \boldsymbol{\sigma}$ , y su naturaleza se puede establecer por consideraciones energéticas, a fin de que cada término tenga dimensiones de energía. Así el multiplicador  $\boldsymbol{\lambda}_1$  debe corresponder a una variación de la tensión, mientras que los  $\boldsymbol{\lambda}_2$  y  $\boldsymbol{\lambda}_3$  deben corresponder a variaciones de los desplazamientos. Por lo tanto la ecuación anterior se puede poner (considerando  $\boldsymbol{\lambda}_2 = -\delta \mathbf{u}$  por conveniencia) como:

$$\int_v (\bar{\mathbf{E}}_A - \bar{\mathbf{E}}_A^\sigma) \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} dv - \int_v (\text{div}(\boldsymbol{\sigma}) + \mathbf{q}_v) \cdot \delta \mathbf{u} dv + \int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{q}_s) \cdot \delta \mathbf{u} ds = 0 \quad (6.61)$$

• El primer término de la segunda integral se puede desarrollar, empleando la siguiente relación entre un tensor  $\mathbf{D}$  de orden 2 y un vector  $\mathbf{a}$ , demostrada en el anejo:

$$\text{div}(\mathbf{D} \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \text{div}(\mathbf{D}) + \mathbf{D}^T : \text{grad}(\mathbf{a}) \quad (6.62)$$

Por lo tanto:

$$-\int_v \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} dv = -\int_v \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) dv \quad (6.63)$$

La primera integral se puede transformar en integral a la superficie del dominio empleando el teorema de la divergencia:

$$\int_v \text{div}(\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) dv = \int_S (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} ds \quad (6.64)$$

En la segunda integral se identifica la variación del tensor gradiente de desplazamientos  $\text{grad}(\delta \mathbf{u}) \equiv \delta \mathbf{H}_t$ . Al ser el tensor  $\boldsymbol{\sigma}$  simétrico, su producto contrato por este gradiente de los desplazamientos sólo afecta a la componente simétrica de dicho tensor gradiente, pues la componente hemisimétrica se anula:

$$\int_v \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) \, dv = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \mathbf{H}_t \, dv = \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{H}_t + \delta \mathbf{H}_t^T) \, dv + \frac{1}{2} \int_v \boldsymbol{\sigma} : (\cancel{\delta \mathbf{H}_t - \delta \mathbf{H}_t^T}) \, dv \quad (6.65)$$

Pero la parte simétrica de  $\mathbf{H}_t$  define el tensor infinitesimal de deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$ , con lo que:

$$\int_v \boldsymbol{\sigma} : \text{grad}(\delta \mathbf{u}) \, dv = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dv \quad (6.66)$$

Finalmente la ecuación (6.63) queda:

$$-\int_v \text{div}(\boldsymbol{\sigma}) \cdot \delta \mathbf{u} \, dv = -\int_S (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dv \quad (6.67)$$

- Sustituyendo este resultado en la expresión inicial (6.61) se obtiene:

$$\int_v (\bar{\mathbf{E}}_A - \bar{\mathbf{E}}_A^\sigma) \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv - \int_S (\boldsymbol{\sigma} \delta \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} \, ds + \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dv - \int_v \mathbf{q}_v \cdot \delta \mathbf{u} \, dv + \int_S (\boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} - \mathbf{q}_s) \cdot \delta \mathbf{u} \, ds = 0 \quad (6.68)$$

Simplificando la 2ª integral con la 4ª, y sustituyendo el valor de  $\bar{\mathbf{E}}_A^\sigma$  se obtiene la expresión final del principio variacional buscado:

$$\int_v (\bar{\mathbf{E}}_A - \mathbf{C}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \cdot \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} \, dv - \int_v \mathbf{q}_v \cdot \delta \mathbf{u} \, dv - \int_S \mathbf{q}_s \cdot \delta \mathbf{u} \, ds = 0 \quad (6.69)$$

Este principio variacional es muy similar al habitual de Hellinger-Reissner, aunque modificado por la presencia de dos tensores de deformación unitaria, el infinitesimal y el de Almansi.

Las dos primeras integrales definen un término que corresponde al potencial de los esfuerzos interiores  $\Pi_{HRi}$ , y las dos últimas integrales definen otro término que corresponde al potencial de las fuerzas exteriores:

$$\delta \Pi_{HR}(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) = \delta \Pi_{HRi}(\mathbf{u}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) + \delta \Pi_{ext} = 0 \quad (6.70)$$

La parte correspondiente a los esfuerzos interiores vale (empleando notación de vectores y matrices):

$$\delta \Pi_{HRi} = \int_v \left[ -\delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \bar{\mathbf{E}}_A \right] dv \quad (6.71)$$

La parte correspondiente a la variación del potencial de las fuerzas exteriores corresponde al trabajo virtual de las fuerzas nodales equivalentes a ellas  $\mathbf{P}$ , cambiado de signo:

$$\delta\Pi_{ext} = -\int_v \mathbf{q}_v \cdot \delta\mathbf{u} \, dv - \int_s \mathbf{q}_s \cdot \delta\mathbf{u} \, ds = -\delta\mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (6.72)$$

### 6.7.3 Ecuación de equilibrio

Considerando el término correspondiente a los esfuerzos interiores del principio variacional (6.71), se pueden sustituir en él la variación del campo de deformaciones unitarias  $\delta\bar{\epsilon} = \mathbf{B}_t^T \delta\mathbf{U}$  y la variación de las tensiones interpoladas  $\delta\bar{\sigma} = \mathbf{N}_s^T \delta\boldsymbol{\beta}$ , con lo que se obtiene:

$$\delta\Pi_{HRi} = \int \left[ -\delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s \boldsymbol{\beta} + \delta\mathbf{U}^T \mathbf{B}_t^T \mathbf{N}_s \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}_s^T \bar{\mathbf{E}}_A \right] dv \quad (6.73)$$

Agrupando por una parte los términos correspondientes a los coeficientes  $\boldsymbol{\beta}$  y por otra los correspondientes a las deformaciones de los nudos  $\mathbf{U}$  queda:

$$\delta\Pi_{HRi} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[ -\int \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s \, dv \, \boldsymbol{\beta} + \int \mathbf{N}_s^T \bar{\mathbf{E}}_A \, dv \right] + \delta\mathbf{U}^T \int \mathbf{B}_t^T \mathbf{N}_s \, dv \, \boldsymbol{\beta} \quad (6.74)$$

Definiendo las matrices y el vector:

$$\mathbf{H}_s = \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s \, dv \quad (6.75)$$

$$\mathbf{G}_s = \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{B}_t \, dv \quad (6.76)$$

$$\mathbf{F}_E = \int \mathbf{N}_s^T \bar{\mathbf{E}}_A \, dv \quad (6.77)$$

el término debido a los esfuerzos interiores se puede poner:

$$\delta\Pi_{HRi} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[ -\mathbf{H}_s \boldsymbol{\beta} + \mathbf{F}_E \right] + \delta\mathbf{U}^T \mathbf{G}_s^T \boldsymbol{\beta} \quad (6.78)$$

Agrupando este término con el de las fuerzas exteriores (6.72), la condición estacionaria (6.70) se puede poner en forma compacta:

$$\delta\Pi_{HR} = \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[ -\mathbf{H}_s \boldsymbol{\beta} + \mathbf{F}_E \right] + \delta\mathbf{U}^T \left[ \mathbf{G}_s^T \boldsymbol{\beta} - \mathbf{P} \right] = 0 \quad (6.79)$$

La consideración de que las variaciones son arbitrarias permite obtener las ecuaciones de equilibrio:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_s^T \boldsymbol{\beta} &= \mathbf{P} \\ -\mathbf{H}_s \boldsymbol{\beta} + \mathbf{F}_E &= 0 \end{aligned} \quad (6.80)$$

### 6.7.4 Vector de fuerzas interiores

En la ecuación de equilibrio (6.80) se identifica el vector de fuerzas interiores del elemento:

$$\mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_S^T \boldsymbol{\beta} \\ \mathbf{F}_E - \mathbf{H}_S \boldsymbol{\beta} \end{Bmatrix} \quad (6.81)$$

de tal manera que dicha ecuación de equilibrio queda:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_1 \\ \mathbf{Q}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (6.82)$$

Las componentes del vector de esfuerzos interiores se pueden desarrollar en la forma siguiente, más adaptada a la implementación práctica:

$$\mathbf{Q}_1 = \mathbf{G}_S^T \boldsymbol{\beta} = \int \mathbf{B}_t^T \mathbf{N}_S \boldsymbol{\beta} \, dv^0 = \int \mathbf{B}_t^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \, dv \quad (6.83)$$

$$\mathbf{Q}_2 = \mathbf{F}_E - \mathbf{H}_S \boldsymbol{\beta} = \int \mathbf{N}_S^T (\bar{\mathbf{E}}_A - \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_S \boldsymbol{\beta}) \, dv = \int \mathbf{N}_S^T (\bar{\mathbf{E}}_A - \mathbf{C}^{-1} \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \, dv \quad (6.84)$$

### 6.7.5 Linealización de las ecuaciones de equilibrio

La configuración de equilibrio en el instante  $t+\Delta t$ , vendrá definida por la condición estacionaria de la funcional en dicho instante:

$$\delta \Pi_{HR}^{t+\Delta t} = \delta \Pi_{HRi}^{t+\Delta t} + \delta \Pi_{ext}^{t+\Delta t} = 0 \quad (6.85)$$

El potencial de las fuerzas exteriores es lineal, suponiendo fuerzas conservativas e independientes de la deformación. Sin embargo el sumando debido a los esfuerzos interiores es no lineal, por lo cual se considera para él una aproximación linealizada, en la forma:

$$\delta \Pi_{HRi}^t + \Delta \delta \Pi_{HRi}^t + \delta \Pi_{ext}^{t+\Delta t} = 0 \quad (6.86)$$

El incremento de la variación de la funcional se obtiene directamente a partir de su expresión (6.70). Todas las magnitudes involucradas en ella están calculadas en la última configuración de equilibrio conocida, en el instante  $t$ :

$$\Delta \delta \Pi_{HRi}^t = \int \left[ -\delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{C}^{-1} \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \Delta \delta \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} + \delta \bar{\boldsymbol{\sigma}}^T \Delta \bar{\mathbf{E}}_A \right] dv \quad (6.87)$$

Considerando la expresión (6.56) de la interpolación de tensiones, el incremento de las tensiones es  $\Delta \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{N}_S \hat{\boldsymbol{\beta}}$ , siendo  $\hat{\boldsymbol{\beta}}$  el incremento en los parámetros de la interpolación.

El incremento del tensor de Almansi se puede poner en la forma linealizada  $\Delta \bar{\mathbf{E}}_A = \mathbf{B}_t \hat{\mathbf{U}}$ , siendo  $\hat{\mathbf{U}}$  el incremento de los grados de libertad del elemento.

Sustituyendo en (6.87) y reagrupando:

$$\begin{aligned} \Delta\delta\Pi_{HRi}^t = & -\delta\beta^T \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{N}_s dv \hat{\beta} + \delta\mathbf{U}^T \int \mathbf{B}_t^T \mathbf{N}_s dv \hat{\beta} \\ & + \int \Delta\delta\bar{\epsilon}^T \bar{\sigma} dv + \delta\beta^T \int \mathbf{N}_s^T \mathbf{B}_t dv \hat{\mathbf{U}} \end{aligned} \quad (6.88)$$

En el tercer sumando, la integral con el incremento de la variación del tensor de deformaciones unitarias  $\Delta\delta\bar{\epsilon}$  da lugar a la matriz de rigidez geométrica, como ya se ha deducido en 6.3.2:

$$\int \Delta\delta\bar{\epsilon}^T \bar{\sigma} dv = \delta\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_\sigma \hat{\mathbf{U}} \quad (6.89)$$

Sustituyendo en la expresión (6.88) del incremento e identificando en ella nuevamente a las matrices  $\mathbf{H}_s$  y  $\mathbf{G}_s$  se obtiene:

$$\Delta\delta\Pi_{HRi}^t = -\delta\beta^T \mathbf{H}_s \hat{\beta} + \delta\mathbf{U}^T \mathbf{G}_s^T \hat{\beta} + \delta\mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_\sigma \hat{\mathbf{U}} + \delta\beta^T \mathbf{G}_s \hat{\mathbf{U}} \quad (6.90)$$

Sustituyendo este valor en la expresión linealizada de la funcional (6.86), introduciendo a continuación en ella la expresión (6.78) de la variación de la funcional  $\delta\Pi_{HRi}^t$  y la del potencial de las fuerzas exteriores en  $t+\Delta t$ , y finalmente reordenando se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\beta \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_\sigma & \mathbf{G}_s^T \\ \mathbf{G}_s & -\mathbf{H}_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\beta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U} \\ \delta\beta \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \mathbf{G}_s^T \beta - \mathbf{P}^{t+\Delta t} \\ \mathbf{F}_E - \mathbf{H}_s \beta \end{Bmatrix} = 0 \quad (6.91)$$

Por lo tanto las ecuaciones de equilibrio incrementales son:

$$\begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{K}}_\sigma & \mathbf{G}_s^T \\ \mathbf{G}_s & -\mathbf{H}_s \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}} \\ \hat{\beta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{G}_s^T \beta \\ \mathbf{H}_s \beta - \mathbf{F}_E \end{Bmatrix} \quad (6.92)$$

Estas ecuaciones de equilibrio tienen exactamente la misma forma que las obtenidas en la formulación lagrangiana total en el apartado 5.7.4, aunque los distintos términos que en ellas aparecen se calculan de forma diferente. Por lo tanto pueden emplearse de la misma forma que en el caso de la formulación total para obtener la respuesta de la estructura.

# Elementos barra articulada y viga planas

En este capítulo se estudian los elementos estructurales convencionales rectos de dos nudos que forman las estructuras de celosías y pórticos. Se consideran en primer lugar elementos con sus dos nudos extremos totalmente articulados, que sólo transmiten fuerza axial en la dirección de su eje, empleándose para ello dos formulaciones distintas: en primer lugar la formulación lagrangiana total ya desarrollada para problemas continuos de 2 dimensiones, y en segundo lugar la formulación conocida como co-rotacional. En esta última la deformación total de la barra se considera como la suma de un movimiento de arrastre como sólido rígido, al cual se suma una deformación que se supone de pequeña magnitud con relación al movimiento de arrastre. En segundo lugar se estudia una viga con capacidad para absorber momentos de flexión en ambos extremos, empleando la teoría de la flexión de Euler-Bernoulli y la formulación co-rotacional.

Ambos elementos se estudian en el caso plano, por su mayor sencillez de exposición. Se obtienen las expresiones detalladas de los vectores de fuerzas interiores y de la matriz de rigidez tangente.

## 7.1. BARRA BIARTICULADA PLANA. FORMULACIÓN LAGRANGIANA TOTAL

Consideremos un elemento biarticulado plano, definido en su configuración inicial mediante las coordenadas de sus nudos extremos 1 y 2 (figura 7.1):

$$\mathbf{X}^e = \{X_1 \quad Y_1 \quad X_2 \quad Y_2\}^T \quad (7.1)$$

Las deformaciones de los nudos en el instante  $t$  son:

$$\mathbf{U} = \{U_1 \quad V_1 \quad U_2 \quad U_2\}^T \quad (7.2)$$

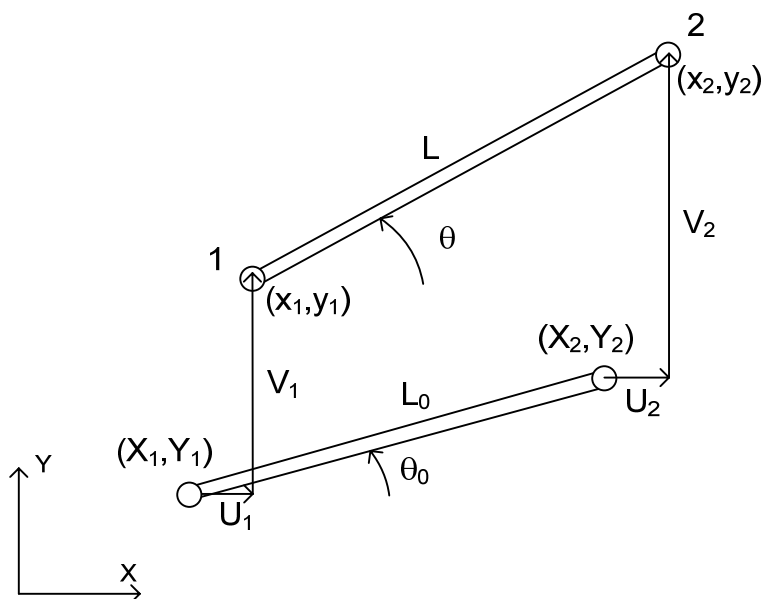


Figura 7.1 Elemento barra articulada plana. Formulación lagrangiana.

En su posición deformada, las coordenadas de los nudos son:

$$\mathbf{x}^e = \{x_1 \quad y_1 \quad x_2 \quad y_2\}^T \quad (7.3)$$

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{X}^e + \mathbf{U} \quad (7.4)$$

### 7.1.1 Deformación unitaria

El cuadrado de la longitud inicial del elemento se puede poner en la forma

$$L_0^2 = (X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 = \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{X}_{21} \quad (7.5)$$

siendo el vector de diferencias entre las coordenadas:

$$\mathbf{X}_{21} = \{(X_2 - X_1) \quad (Y_2 - Y_1)\}^T \quad (7.6)$$

La longitud final deformada del elemento es:

$$L^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 = \mathbf{x}_{21}^T \mathbf{x}_{21} = (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21})^T (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21}) \quad (7.7)$$

siendo, análogamente, los vectores de diferencias entre las coordenadas finales y entre las deformaciones:

$$\mathbf{x}_{21} = \{(x_2 - x_1) \quad (y_2 - y_1)\}^T = \mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21} \quad (7.8)$$

$$\mathbf{U}_{21} = \{(U_2 - U_1) \quad (V_2 - V_1)\}^T \quad (7.9)$$

- El tensor de deformación unitaria de Green-Lagrange es un escalar  $E_{11}$ , de cuya definición se puede obtener el tensor gradiente de la deformación  $F$ :



$$E_{11} = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{L^2}{L_0^2} - 1 \right) = \frac{1}{2} (F F - 1) \quad \rightarrow \quad F = \frac{L}{L_0} \quad (7.10)$$

- La deformación unitaria de Green-Lagrange se puede poner en función de las coordenadas y deformaciones en la forma:

$$E_{11} = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2} = \frac{(\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21})^T (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21}) - \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{X}_{21}}{2L_0^2}$$

$$E_{11} = \frac{1}{L_0^2} \left( \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{U}_{21} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{21}^T \mathbf{U}_{21} \right) \quad (7.11)$$

Desarrollando, se puede expresar en función de las deformaciones de los nudos  $\mathbf{U}$ :

$$E_{11} = \mathbf{B}_L \mathbf{U} + \frac{1}{2L_0^2} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} \quad (7.12)$$

La matriz  $\mathbf{B}_L$  es constante y depende de las coordenadas iniciales de los nudos, y la matriz  $\mathbf{A}$  es constante:

$$\mathbf{B}_L = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} -X_{21} & -Y_{21} & X_{21} & Y_{21} \end{bmatrix} \quad (7.13)$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (7.14)$$

- La variación de la deformación unitaria de Green-Lagrange se obtiene de (7.12):

$$\delta E_{11} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{U} + \frac{2}{2L_0^2} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \delta \mathbf{U}$$

$$\delta E_{11} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{U} + \mathbf{B}_N \delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \quad (7.15)$$

siendo  $\mathbf{B}_N$  una matriz proporcional a las deformaciones de los nudos:

$$\mathbf{B}_N = \frac{1}{L_0^2} \mathbf{U}^T \mathbf{A} = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} (U_1 - U_2) & (V_1 - V_2) & (U_2 - U_1) & (V_2 - V_1) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}_N = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} -U_{21} & -V_{21} & U_{21} & V_{21} \end{bmatrix} \quad (7.16)$$

Sumando las expresiones de la parte lineal y no lineal, la matriz  $\mathbf{B}$  resulta ser:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} (-X_{21} - U_{21}) & (-Y_{21} - V_{21}) & (X_{21} + U_{21}) & (Y_{21} + V_{21}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} -x_{21} & -y_{21} & x_{21} & y_{21} \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

Esta matriz tiene la misma expresión que la componente lineal (7.13), pero evaluada en la situación deformada.

### 7.1.2 Esfuerzos y tensiones

Al estar el elemento biarticulado, la única fuerza en él es una fuerza axial, orientada siempre en la dirección del elemento, y cuyo módulo en el estado deformado es:

$$N = \sigma A \quad (7.18)$$

siendo  $\sigma$  la tensión real (de Cauchy) en el elemento deformado. Esta fuerza se puede referir al estado inicial mediante el gradiente de la deformación  $F$ :

$$N^0 = N F^{-1} = \sigma A \frac{L_0}{L} \quad (7.19)$$

Esta fuerza, referida al área en el estado inicial, define la segunda tensión de Piola  $S$ :

$$S = \frac{N^0}{A_0} = \sigma \frac{A}{A_0} \frac{L_0}{L} \quad (7.20)$$

### 7.1.3 Vector de fuerzas interiores

Su expresión es:

$$\mathbf{Q} = \int_{v^0} \mathbf{B}^T S \, dv^0 \quad (7.21)$$

siendo  $S$  la tensión de Piola-Kirchhoff en la barra. Como  $\mathbf{B}$  es constante dentro del elemento la integración es inmediata:

$$\mathbf{Q} = S A_0 L_0 \mathbf{B}^T = \frac{S A_0 L_0}{L_0^2} \begin{Bmatrix} -(X_{21} + U_{21}) \\ -(Y_{21} + V_{21}) \\ X_{21} + U_{21} \\ Y_{21} + V_{21} \end{Bmatrix} = \frac{S A_0}{L_0} \begin{Bmatrix} -x_{21} \\ -y_{21} \\ x_{21} \\ y_{21} \end{Bmatrix} \quad (7.22)$$

Sustituyendo el valor de la tensión de Piola  $S$  en función de la de Cauchy, y considerando que  $y_{21}/L = \sin \theta$  y  $x_{21}/L = \cos \theta$ , se obtiene:

$$\mathbf{Q} = \sigma A \begin{Bmatrix} -x_{21}/L \\ -y_{21}/L \\ x_{21}/L \\ y_{21}/L \end{Bmatrix} = N \begin{Bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix} \quad (7.23)$$

Esta expresión indica, como es lógico, que el vector  $\mathbf{Q}$  corresponde a la fuerza interior en el elemento  $N$  en la situación deformada, proyectada sobre los ejes de coordenadas.

#### 7.1.4 Matriz de rigidez tangente

Su obtención es sencilla si se considera su definición como derivada del vector de fuerzas interiores:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \quad (7.24)$$

Derivando en la expresión de las fuerzas interiores (7.22) se obtiene:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} = A_0 L_0 \mathbf{B}^T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{U}} + S A_0 L_0 \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{U}} = \hat{\mathbf{K}}_D + \hat{\mathbf{K}}_\sigma \quad (7.25)$$

▪ La primera matriz  $\hat{\mathbf{K}}_D$  corresponde al término material de la rigidez tangente y se debe a la variación de la tensión  $S$  al deformarse la barra. Se supone que dicha tensión de Piola es proporcional a la deformación unitaria de Green-Lagrange siendo la constante de proporcionalidad el módulo de elasticidad del material  $E$  (material de Kirchhoff-St. Venant). Por lo tanto:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = A_0 L_0 \mathbf{B}^T \frac{\partial S}{\partial \mathbf{U}} = A_0 L_0 \mathbf{B}^T \frac{\partial (E E_{11})}{\partial \mathbf{U}} = E A_0 L_0 \mathbf{B}^T \frac{\partial E_{11}}{\partial \mathbf{U}} \quad (7.26)$$

La derivada de la deformación unitaria de Green-Lagrange se obtiene de (7.12):

$$\frac{\partial E_{11}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{B}_L + \frac{2}{2L_0^2} \mathbf{U}^T \mathbf{A} = \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N = \mathbf{B} \quad (7.27)$$

Luego:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = E A_0 L_0 \mathbf{B}^T \mathbf{B} \quad (7.28)$$

Desarrollando se obtiene:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \frac{E A_0}{L_0^3} \left[ \begin{array}{cc|cc} x_{21}^2 & x_{21}y_{21} & -x_{21}^2 & -x_{21}y_{21} \\ & y_{21}^2 & -x_{21}y_{21} & -y_{21}^2 \\ \hline & \text{Sim} & x_{21}^2 & x_{21}y_{21} \\ & & & y_{21}^2 \end{array} \right] \quad (7.29)$$

Esta matriz coincide con la matriz de rigidez convencional de una barra biarticulada evaluada en su posición deformada, salvo por el empleo del área y longitud iniciales. Considerando los valores del seno y coseno del ángulo final de la barra  $\theta$ , la matriz anterior se puede poner:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \frac{EA_0}{L} \left( \frac{L}{L_0} \right)^3 \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta & -\cos^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta \\ & \sin^2 \theta & -\cos \theta \sin \theta & -\sin^2 \theta \\ \hline & \text{Sim.} & \cos^2 \theta & \cos \theta \sin \theta \\ & & & \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad (7.30)$$

Esta expresión coincide con la matriz convencional lineal de la barra biarticulada, pero evaluada en su posición deformada, e introduciendo el factor de proporción cúbico entre las longitudes deformada e inicial. Si ambas longitudes son muy similares (lo cual puede suponerse siempre que los alargamientos sean pequeños), la matriz tangente coincide con la matriz de rigidez convencional.

En la ecuación (7.28) puede desarrollarse el valor de  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_D &= EA_0 L_0 (\mathbf{B}_L^T + \mathbf{B}_N^T)(\mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N) \\ \hat{\mathbf{K}}_D &= EA_0 L_0 (\mathbf{B}_L^T \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_L^T \mathbf{B}_N + \mathbf{B}_N^T \mathbf{B}_L + \mathbf{B}_N^T \mathbf{B}_N) \end{aligned} \quad (7.31)$$

Se obtienen cuatro sumandos, el primero de los cuales corresponde a la matriz de rigidez lineal de la barra en su posición inicial:

$$\hat{\mathbf{K}}_{D0} = EA_0 L_0 \mathbf{B}_L^T \mathbf{B}_L = \frac{EA_0}{L_0} \begin{bmatrix} X_{21}^2 & X_{21}Y_{21} & -X_{21}^2 & -X_{21}Y_{21} \\ & Y_{21}^2 & -X_{21}Y_{21} & -Y_{21}^2 \\ & \text{sim.} & X_{21}^2 & X_{21}Y_{21} \\ & & & Y_{21}^2 \end{bmatrix} \quad (7.32)$$

Los sumandos 2° y 3° son traspuestos uno del otro y corresponden a los términos lineales en las deformaciones:

$$\hat{\mathbf{K}}_{D1} = EA_0 L_0 \mathbf{B}_L^T \mathbf{B}_N = \frac{EA_0}{L_0} \begin{bmatrix} X_{21}U_{21} & X_{21}V_{21} & -X_{21}U_{21} & -X_{21}V_{21} \\ Y_{21}U_{21} & Y_{21}V_{21} & -Y_{21}U_{21} & -Y_{21}V_{21} \\ -X_{21}U_{21} & -X_{21}V_{21} & X_{21}U_{21} & X_{21}V_{21} \\ -Y_{21}U_{21} & -Y_{21}V_{21} & Y_{21}U_{21} & Y_{21}V_{21} \end{bmatrix} \quad (7.33)$$

El último sumando es cuadrático en la deformación:

$$\hat{\mathbf{K}}_{D2} = EA_0 L_0 \mathbf{B}_N^T \mathbf{B}_N = \frac{EA_0}{L_0} \begin{bmatrix} U_{21}^2 & U_{21}V_{21} & -U_{21}^2 & -U_{21}V_{21} \\ & V_{21}^2 & -U_{21}V_{21} & -V_{21}^2 \\ & \text{sim.} & U_{21}^2 & U_{21}V_{21} \\ & & & V_{21}^2 \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

- La segunda matriz de (7.25) es la matriz de rigidez geométrica, cuyo valor es:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\sigma} = SA_0 L_0 \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{U}} = SA_0 L_0 \frac{\partial \mathbf{B}_N^T}{\partial \mathbf{U}} = SA_0 L_0 \frac{1}{L_0^2} \mathbf{A}^T = \frac{SA_0}{L_0} \mathbf{A}^T$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\sigma} = \frac{SA_0}{L_0} \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} = \frac{\sigma A}{L} \begin{bmatrix} +1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & +1 \end{bmatrix} \quad (7.35)$$

Obsérvese que esta matriz es independiente de la orientación de la barra y sólo depende de su nivel de esfuerzo ( $\sigma A$ ) y de su longitud deformada.

### 7.1.5 Formulación isoparamétrica

El elemento biarticulado se puede formular empleando funciones de interpolación y la formulación isoparamétrica estándar en el método de los elementos finitos. Ello permite obtener expresiones más generales de las propiedades del elemento, que pueden emplearse para elementos más complejos.

Las interpolaciones de coordenadas y desplazamientos son:

$$\mathbf{X} = \mathbf{N} \mathbf{X}^e \quad \mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (7.36)$$

Las funciones de interpolación para el elemento de dos nudos son las correspondientes a la interpolación lineal, empleando la coordenada normalizada  $\xi$  que varía entre -1 en el nudo inicial y +1 en el nudo final:

$$\mathbf{N} = \left[ \begin{array}{cc|cc} \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\xi}{2} & 0 & \frac{1+\xi}{2} \end{array} \right] \quad (7.37)$$

La deformación unitaria de Green-Lagrange es:

$$E_{11} = \frac{d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} - d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}}{2 d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}} \quad (7.38)$$

Los diferenciales valen:

$$d\mathbf{X} = \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} d\xi \quad (7.39)$$

$$d\mathbf{x} = d(\mathbf{X} + \mathbf{u}) = \left( \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} + \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \right) d\xi$$

con lo que el valor de la deformación de Green-Lagrange es:

$$E_{11} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \frac{d\mathbf{X}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + \frac{1}{2} \frac{d\mathbf{u}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{u}}{d\xi} \right) \quad (7.40)$$

La constante  $\lambda^2$  representa la expresión del denominador de la deformación unitaria:

$$\lambda^2 = \frac{d\mathbf{X}^T d\mathbf{X}}{d\xi d\xi} = \frac{d\mathbf{X}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{X}}{d\xi} \quad (7.41)$$

Sustituyendo las interpolaciones de deformaciones y coordenadas se obtiene:

$$E_{11} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \mathbf{X}^{eT} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \mathbf{U} + \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \mathbf{U} \right) \quad (7.42)$$

$$\lambda^2 = \mathbf{X}^{eT} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \mathbf{X}^e \quad (7.43)$$

La variación de la deformación unitaria es:

$$\delta E_{11} = \frac{1}{\lambda^2} \left( \mathbf{X}^{eT} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \delta \mathbf{U} + \mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \delta \mathbf{U} \right) \quad (7.44)$$

Esta expresión define las dos matrices  $\mathbf{B}$ :

$$\delta E_{11} = \mathbf{B}_L \delta \mathbf{U} + \mathbf{B}_N \delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \quad (7.45)$$

$$\mathbf{B}_L = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{X}^{eT} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \quad (7.46)$$

$$\mathbf{B}_N = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{U} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \quad (7.47)$$

Para el elemento de dos nudos las expresiones a emplear son:

$$\frac{d\mathbf{N}}{d\xi} = \left[ \begin{array}{cc|cc} -\frac{1}{2} & 0 & +\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & +\frac{1}{2} \end{array} \right] \quad (7.48)$$

$$\lambda^2 = \mathbf{X}^{eT} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \mathbf{X}^e = \frac{\mathbf{X}_{21} \mathbf{X}_{21}^T}{4} = \frac{L_0^2}{4} \quad (7.49)$$

Por lo tanto las matrices  $\mathbf{B}$  son:

$$\mathbf{B}_L = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{X}^{eT} \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} -X_{21} & -Y_{21} & X_{21} & Y_{21} \end{bmatrix} \quad (7.50)$$

$$\mathbf{B}_N = \frac{1}{\lambda^2} \mathbf{U}^T \frac{d\mathbf{N}^T}{d\xi} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} -U_{21} & -V_{21} & U_{21} & V_{21} \end{bmatrix} \quad (7.51)$$

Se trata de las mismas expresiones ya obtenidas antes de forma directa para este elemento en particular.

## 7.2. BARRA BIARTICULADA PLANA. FORMULACIÓN CO-ROTACIONAL

La formulación lagrangiana, tanto en su planteamiento total como actualizado, emplea un único sistema de ejes global al cual se refieren todos los movimientos y deformaciones del sólido. La formulación co-rotacional sin embargo emplea un sistema de ejes asociado a cada elemento de la estructura, de tal manera que este sistema de ejes co-rotacional del elemento contiene su movimiento de sólido rígido y se mueve con él.

El movimiento total se descompone en una parte de sólido rígido, caracterizada por el movimiento del sistema de ejes co-rotacional y una parte de deformación del sólido con respecto a dicho sistema de ejes. La limitación principal de la formulación co-rotacional está en que se supone a priori que la deformación del elemento respecto del sistema co-rotacional es de pequeña magnitud comparada con el movimiento global. Esta limitación hace que esta formulación sea de aplicación más limitada, empleándose para el estudio de barras, vigas, placas y cáscaras. La definición de la posición del sistema co-rotacional de ejes para el caso de problemas en 3 dimensiones requiere de técnicas adecuadas de parametrización de las rotaciones, pudiéndose emplear diversos métodos para ello.

La figura 7.2 muestra un elemento plano, en el que se define un sistema de ejes co-rotacional con él  $\bar{x}, \bar{y}$ , de tal manera que el eje  $\bar{x}$  pasa por la posición deformada de ambos nudos. El movimiento total de la barra se puede descomponer en tres fases: en primer lugar una traslación desde la posición inicial hasta hacer coincidir el nudo inicial con su posición deformada, la cual queda definida por la deformación del nudo inicial  $u_1$ , seguida a continuación por una rotación de valor  $\alpha$  hasta alcanzar la orientación deformada final. En tercer lugar se produce la deformación de la barra, que en este caso consta únicamente de un alargamiento axial, cuya magnitud es  $\bar{u}_1$ .

$$\bar{u}_1 = L - L_0 \quad (7.52)$$

$$\bar{u}_1 = [(\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21})^T (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21})]^{1/2} - [\mathbf{X}_{21}^T \mathbf{X}_{21}]^{1/2} \quad (7.53)$$

Esta expresión tiene una mala condición numérica, por lo que en la práctica es mejor emplearla en la forma:

$$\bar{u}_1 = (L - L_0) \frac{L + L_0}{L + L_0} = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0} \quad (7.54)$$

$$\bar{u}_1 = \frac{(\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21})^T (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21}) - \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{X}_{21}}{L + L_0} = \frac{2}{L + L_0} \left( \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{U}_{21} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{21}^T \mathbf{U}_{21} \right)$$

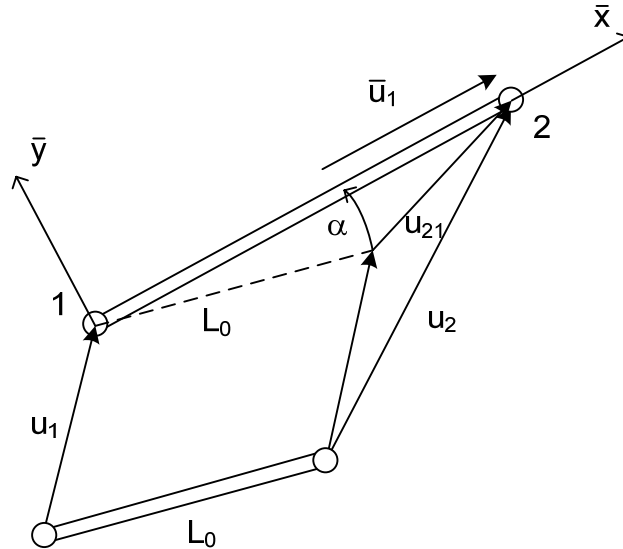


Figura 7.2 Elemento barra articulada plana. Formulación co-rotacional.

### 7.2.1 Deformación unitaria

En esta formulación emplearemos la deformación unitaria ingenieril cuyo valor, medido en el sistema co-rotacional, es:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\bar{u}_1}{L_0} \quad (7.55)$$

Su variación es:

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta\bar{u}_1}{L_0} \quad (7.56)$$

Para obtener la variación del alargamiento resulta complejo el empleo directo de su expresión, por lo que es más fácil emplear un método más geométrico, que consiste en imponer una variación a las deformaciones de los nudos y determinar cuánto varía el alargamiento a consecuencia de ella. La figura 7.3 muestra la configuración una vez aplicada una variación virtual cualquiera.



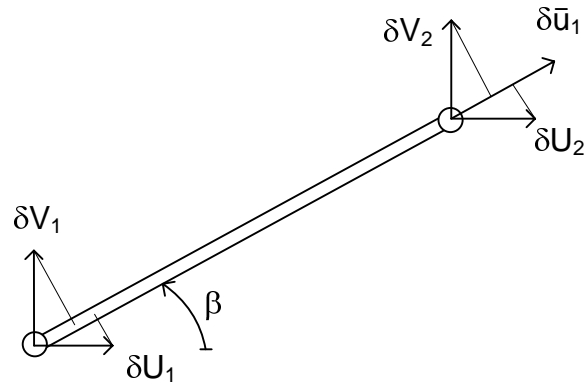


Figura 7.3 Variación virtual de las deformaciones en una barra articulada plana.

La variación del alargamiento de la barra a consecuencia de la variación de las deformaciones nodales es:

$$\delta \bar{u}_1 = \delta U_2 \cos \beta + \delta V_2 \sin \beta - \delta U_1 \cos \beta - \delta V_1 \sin \beta \quad (7.57)$$

donde  $\beta$  es el ángulo que forma la barra con respecto al eje x en su posición deformada. Esta expresión se puede poner:

$$\delta \bar{u}_1 = \begin{bmatrix} -\cos \beta & -\sin \beta & \cos \beta & \sin \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta V_1 \\ \delta U_2 \\ \delta V_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{U} \quad (7.58)$$

### 7.2.2 Vector de fuerzas interiores

El trabajo virtual de las fuerzas interiores está producido únicamente por la fuerza axial en la barra, que denominaremos  $N$  (supuesta positiva a tracción):

$$\delta W_I = \delta \bar{u}_1 N = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{r} N \quad (7.59)$$

La definición del vector de fuerzas interiores es:

$$\delta W_I = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \quad (7.60)$$

Por lo tanto el valor de  $\mathbf{Q}$  es:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{r} N = \begin{Bmatrix} -N \cos \beta \\ -N \sin \beta \\ N \cos \beta \\ N \sin \beta \end{Bmatrix} \quad (7.61)$$

que es la expresión obvia de las componentes cartesianas de la fuerza axial.

### 7.2.3 Matriz de rigidez tangente

La matriz tangente se puede obtener derivando la expresión de las fuerzas interiores:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{r} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{U}} + N \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} = \hat{\mathbf{K}}_D + \hat{\mathbf{K}}_\sigma \quad (7.62)$$

• El primer sumando de la matriz tangente es su componente material, debida a la variación de la tensión al incrementarse las deformaciones, y vale:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \mathbf{r} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{r} \frac{EA}{L_0} \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \mathbf{U}} \quad (7.63)$$

La derivada del alargamiento axial se obtiene fácilmente a través de la expresión de su variación:

$$\delta \bar{u}_1 = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{U} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{r}^T \quad (7.64)$$

Luego:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \mathbf{r} \frac{\partial N}{\partial \mathbf{U}} = \frac{EA}{L_0} \mathbf{r} \mathbf{r}^T \quad (7.65)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta & -\sin^2 \beta \\ -\cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & -\sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta \end{bmatrix}$$

Esta expresión coincide con la matriz de rigidez habitual de la barra biarticulada plana, pero evaluada en su posición deformada.

• Por su parte, la matriz de rigidez geométrica es:

$$\hat{\mathbf{K}}_\sigma = N \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} = N \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}} \quad (7.66)$$

La primera derivada es inmediata:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \begin{bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \end{bmatrix} = \mathbf{z} \quad (7.67)$$

La segunda derivada en (7.66) es la derivada del ángulo de orientación  $\beta$  respecto a las deformaciones de los nudos y se obtiene fácilmente estudiando la variación de dicho ángulo (figura 7.4):

$$\delta\beta = \frac{\delta\bar{v}_2}{L} = \frac{1}{L}(\delta V_2 \cos \beta - \delta U_2 \sin \beta - (\delta V_1 \cos \beta - \delta U_1 \sin \beta)) \quad (7.68)$$

$$\delta\beta = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{U}$$

Por lo tanto la derivada buscada es:

$$\delta\beta = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{U} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \quad (7.69)$$

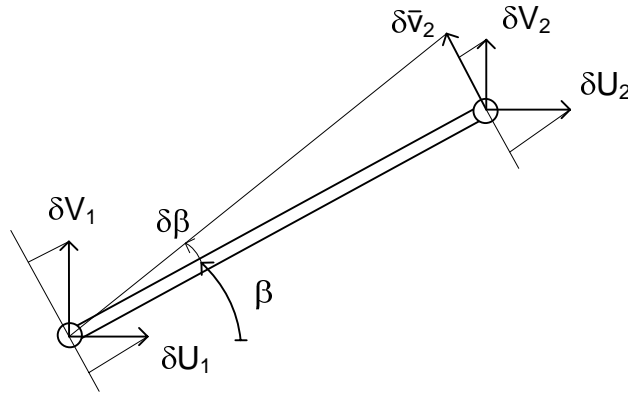


Figura 7.4 Variación de la orientación de una barra articulada plana.

Sustituyendo las derivadas anteriores, la matriz de rigidez geométrica del elemento en formulación co-rotacional es:

$$\hat{\mathbf{K}}_{\sigma} = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \quad (7.70)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{\sigma} = \frac{N}{L} \left[ \begin{array}{cc|cc} \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta & -\sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & -\cos^2 \beta \\ \hline -\sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta & \sin^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta \\ \sin \beta \cos \beta & -\cos^2 \beta & -\sin \beta \cos \beta & \cos^2 \beta \end{array} \right]$$

### 7.3. VIGA PLANA. FORMULACIÓN CO-ROTACIONAL

Consideramos ahora un elemento en el que puede existir momento flector en ambos extremos y que por lo tanto puede almacenar energía de flexión. La formulación de este elemento emplea un sistema de ejes  $\bar{x}, \bar{y}$  co-rotacional con él, de tal manera que el eje  $\bar{x}$  pasa siempre por la posición deformada de ambos nudos (figura 7.5).

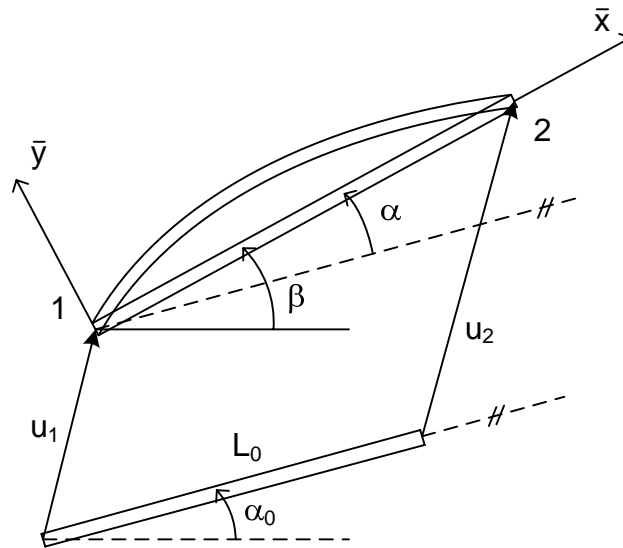


Figura 7.5 Viga plana. Formulación co-rotacional.

El movimiento total de la barra se puede descomponer en tres fases: en primer lugar se produce una traslación desde la posición inicial hasta hacer coincidir el nudo inicial con su posición deformada, la cual queda definida por la deformación del nudo inicial  $u_1$ . La segunda fase de la deformación es una rotación de valor  $\alpha$  hasta alcanzar la orientación deformada final del eje co-rotacional  $\bar{x}$ . Finalmente se produce la deformación de la barra, que en este caso consta de dos efectos: un alargamiento axial en la dirección del eje  $\bar{x}$  y una deformación por flexión, caracterizada por los giros de los dos extremos  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . Al haberse tomado los ejes co-rotacionales pasando por la posición deformada de los nudos, no hay que considerar la deformación lateral de la barra, pues ésta está tenida en cuenta en la rotación  $\alpha$ .

Los grados de libertad del elemento, medidos en el sistema de ejes general, son:

$$\mathbf{U} = \{U_1 \quad V_1 \quad \theta_1 \quad U_2 \quad V_2 \quad \theta_2\}^T \quad (7.71)$$

### 7.3.1 Deformación axial y esfuerzo axial

La deformación axial en el sistema co-rotacional  $\bar{u}_1$  se determina exactamente igual que para el elemento articulado:

$$\bar{u}_1 = (L - L_0) \frac{L + L_0}{L + L_0} = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0} \quad (7.72)$$

$$\bar{u}_1 = \frac{(\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21})^T (\mathbf{X}_{21} + \mathbf{U}_{21}) - \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{X}_{21}}{L + L_0} = \frac{2}{L + L_0} \left( \mathbf{X}_{21}^T \mathbf{U}_{21} + \frac{1}{2} \mathbf{U}_{21}^T \mathbf{U}_{21} \right)$$

La deformación unitaria ingenieril debida al alargamiento axial, medida en el sistema co-rotacional, vale:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\bar{u}_1}{L_0} \quad (7.73)$$

El valor del esfuerzo axial (supuesto positivo a tracción) producido por esta deformación, suponiendo un comportamiento elástico es:

$$N = A\sigma = AE\varepsilon = \frac{AE\bar{u}_1}{L_0} \quad (7.74)$$

### 7.3.2 Deformación y momentos de flexión

La deformación producida por la flexión de la viga queda definida por los dos giros en los extremos,  $\theta_1$  y  $\theta_2$ , medidos respecto de la *orientación inicial* de la barra (figura 7.6). Estos giros se suponen de pequeña magnitud. La definición empleada para el eje co-rotacional  $\bar{x}$  hace que no haya deformaciones laterales en los nudos, por lo que la energía de flexión está asociada únicamente a los giros de los nudos *relativos a dicho eje* co-rotacional  $\bar{\theta}_1$  y  $\bar{\theta}_2$ . Estos giros valen:

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \alpha \quad \bar{\theta}_2 = \theta_2 - \alpha \quad (7.75)$$

Empleando la teoría de Euler-Bernoulli de la flexión, los momentos flectores en ambos extremos de la barra se relacionan con los giros correspondientes mediante la ecuación de rigidez:

$$\begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L_0} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.76)$$

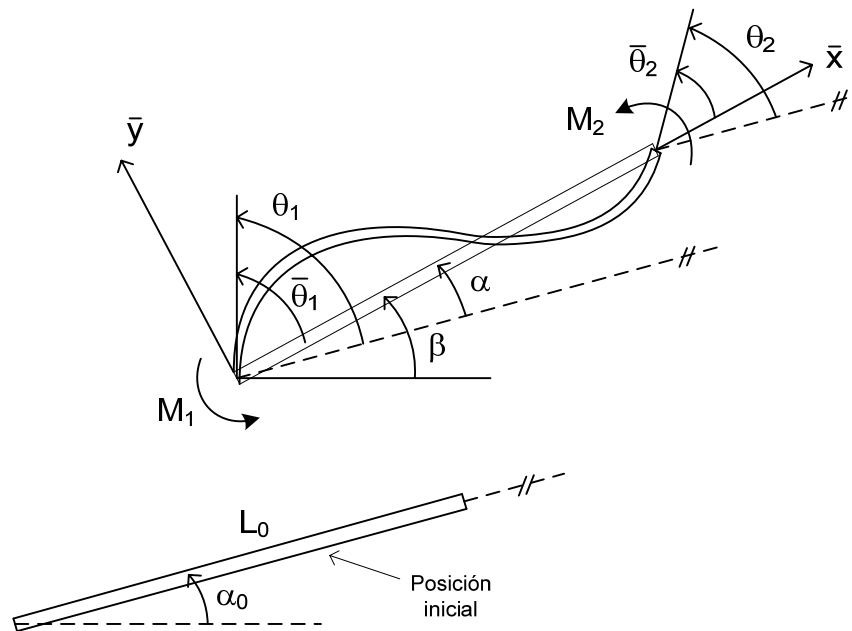


Figura 7.6 Viga plana. Deformaciones de flexión.

### 7.3.3 Deformaciones virtuales

- La variación del alargamiento axial es:

$$\delta\varepsilon = \frac{\delta\bar{u}_1}{L_0} \quad (7.77)$$

Efectuando el mismo desarrollo que para el elemento biarticulado, esta variación se puede poner en la forma siguiente, en la que  $\beta$  es el ángulo que forma la barra con respecto al eje x en su posición deformada final:

$$\delta\bar{u}_1 = \begin{bmatrix} -\cos\beta & -\sin\beta & 0 & \cos\beta & \sin\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta U_1 \\ \delta V_1 \\ \delta\theta_1 \\ \delta U_2 \\ \delta V_2 \\ \delta\theta_2 \end{Bmatrix} = \mathbf{r}^T \delta\mathbf{U} \quad (7.78)$$

- La variación del ángulo de orientación  $\beta$  al variar las deformaciones de los nudos se obtiene fácilmente por consideraciones geométricas, como se efectuó para el elemento biarticulado:

$$\delta\alpha = \delta\beta = \frac{\delta\bar{v}_2}{L} = \frac{1}{L} (\delta V_2 \cos\beta - \delta U_2 \sin\beta - (\delta V_1 \cos\beta - \delta U_1 \sin\beta)) \quad (7.79)$$

$$\delta\alpha = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \delta\mathbf{U}$$

Siendo ahora:

$$\mathbf{z} = \left\{ \sin\beta \quad -\cos\beta \quad 0 \quad -\sin\beta \quad \cos\beta \quad 0 \right\}^T \quad (7.80)$$

- La variación de los ángulos de rotación relativos en ambos extremos es:

$$\begin{Bmatrix} \delta\bar{\theta}_1 \\ \delta\bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\theta_1 \\ \delta\theta_2 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \delta\alpha \\ \delta\alpha \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \delta\mathbf{U} - \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \delta\mathbf{U} = \mathbf{A} \delta\mathbf{U} \quad (7.81)$$

Siendo:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{L} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \quad (7.82)$$

- Agrupando las tres deformaciones virtuales en un vector  $\delta\bar{\mathbf{p}}$  se puede definir la matriz  $\mathbf{B}$  del elemento:

$$\delta \bar{\mathbf{p}} = \begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_1 \\ \delta \bar{\theta}_1 \\ \delta \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \quad (7.83)$$

### 7.3.4 Trabajo virtual. Fuerzas interiores

El trabajo virtual de las fuerzas interiores está producido por la fuerza axial y los dos momentos en los extremos, actuando sobre sus correspondientes deformaciones virtuales:

$$\delta W_I = \delta \bar{u}_1 N + \delta \bar{\theta}_1 M_1 + \delta \bar{\theta}_2 M_2 \quad (7.84)$$

Las tres fuerzas interiores independientes se agrupan en un vector:

$$\bar{\mathbf{Q}} = \begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} \quad (7.85)$$

con lo que el trabajo virtual de dichas fuerzas interiores se puede poner como:

$$\delta W_I = \delta \bar{u}_1 N + \delta \bar{\theta}_1 M_1 + \delta \bar{\theta}_2 M_2 = \delta \bar{\mathbf{p}}^T \bar{\mathbf{Q}} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (7.86)$$

Esta expresión define el vector de fuerzas interiores del elemento  $\mathbf{Q}$ , que proporciona el trabajo virtual, y cuyo valor es:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{Q}} \quad (7.87)$$

### 7.3.5 Matriz de rigidez tangente

Se puede obtener derivando la expresión de las fuerzas interiores:

$$\hat{\mathbf{K}} = \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{B}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{U}} + \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{U}} \bar{\mathbf{Q}} = \hat{\mathbf{K}}_D + \hat{\mathbf{K}}_\sigma \quad (7.88)$$

• La relación entre los 3 esfuerzos internos y las deformaciones locales se puede poner en forma compacta mediante una matriz constante  $\bar{\mathbf{C}}$ :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M_1 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{E}{L_0} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 4I & 2I \\ 0 & 2I & 4I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \bar{\theta}_2 \end{Bmatrix} \quad (7.89)$$

$$\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{C}} \bar{\mathbf{p}}$$

Por lo tanto la derivada del vector de fuerzas interiores independientes es:

$$\frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{U}} = \bar{\mathbf{C}} \frac{\partial \bar{\mathbf{p}}}{\partial \mathbf{U}} = \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} \quad (7.90)$$

El segundo paso es evidente en base a la definición de la  $\delta \bar{\mathbf{p}}$ . En consecuencia, la componente material de la matriz tangente vale:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \mathbf{B}^T \frac{\partial \bar{\mathbf{Q}}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{C}} \mathbf{B} \quad (7.91)$$

Esta expresión coincide con la matriz de rigidez habitual de la viga plana, pero evaluada en su posición deformada.

- Por su parte, la matriz de rigidez geométrica es:

$$\hat{\mathbf{K}}_\sigma = \frac{\partial \mathbf{B}^T}{\partial \mathbf{U}} \bar{\mathbf{Q}} = \frac{\partial \mathbf{B}_1^T}{\partial \mathbf{U}} N + \frac{\partial \mathbf{B}_2^T}{\partial \mathbf{U}} M_1 + \frac{\partial \mathbf{B}_3^T}{\partial \mathbf{U}} M_2 \quad (7.92)$$

En esta ecuación  $\mathbf{B}_i$  es la fila  $i$ -sima de la matriz  $\mathbf{B}$ , y se requiere obtener sus derivadas respecto de los grados de libertad del elemento.

- Considerando que  $\mathbf{B}_1 = \mathbf{r}^T$ , la primera derivada es:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1^T}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}} \quad (7.93)$$

La derivada del vector  $\mathbf{r}$  es inmediata y corresponde al vector  $\mathbf{z}$  ya conocido:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \beta} = \begin{Bmatrix} \sin \beta \\ -\cos \beta \\ 0 \\ -\sin \beta \\ \cos \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = \mathbf{z} \quad (7.94)$$

La derivada del ángulo de orientación  $\beta$  respecto a las deformaciones de los nudos se puede obtener a partir de su variación, que ya ha sido calculada anteriormente:

$$\delta \beta = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{U} \quad (7.95)$$

Por lo tanto la derivada buscada es:

$$\delta \beta = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{U} = \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}} \delta \mathbf{U} \Rightarrow \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{L} \mathbf{z}^T \quad (7.96)$$

En consecuencia, el primer sumando de la matriz geométrica resulta ser:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_1^T}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \quad (7.97)$$



- La derivada de la segunda fila de  $\mathbf{B}$  requiere derivar la primera fila de la matriz  $\mathbf{A}$  transpuesta:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_2^T}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{A}_1^T}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left( -\frac{1}{L} \mathbf{z} \right) = -\frac{1}{L} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{U}} - \mathbf{z} \frac{\partial(1/L)}{\partial \mathbf{U}} \quad (7.98)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}_2^T}{\partial \mathbf{U}} = -\frac{1}{L} \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathbf{U}} + \mathbf{z} \frac{1}{L^2} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}}$$

Las derivadas necesarias son:

$$\frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \beta} = \begin{Bmatrix} \cos \beta \\ \sin \beta \\ 0 \\ -\cos \beta \\ -\sin \beta \\ 0 \end{Bmatrix} = -\mathbf{r} \quad (7.99)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \bar{u}_1}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{r}^T \quad (7.100)$$

Con lo que la derivada de la segunda fila queda:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_2^T}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{L^2} \mathbf{r} \mathbf{z}^T + \frac{1}{L^2} \mathbf{z} \mathbf{r}^T \quad (7.101)$$

- La derivada de la tercera fila es igual que la de la segunda:

$$\frac{\partial \mathbf{B}_3^T}{\partial \mathbf{U}} = \frac{1}{L^2} \mathbf{r} \mathbf{z}^T + \frac{1}{L^2} \mathbf{z} \mathbf{r}^T \quad (7.102)$$

- Agrupando los distintos valores se obtiene la expresión de la matriz de rigidez geométrica del elemento en esta formulación, cuya evaluación es muy sencilla:

$$\hat{\mathbf{K}}_\sigma = \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{(M_1 + M_2)}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (7.103)$$

# Flexión de placas

En este capítulo se estudia la flexión de placas inicialmente planas, sometidas a fuerzas tanto transversales como contenidas en el plano de la placa. Se supone que las fuerzas transversales producen una flexión de la placa con unos desplazamientos laterales de magnitud suficiente como para no ser despreciables, con lo que en el estado deformado la placa deja de estar contenida en su plano inicial. Estos desplazamientos laterales dan lugar a su vez a deformaciones unitarias en el plano de la placa, que se suman a las producidas por las fuerzas contenidas en dicho plano. En este estudio se supondrá que las deformaciones laterales no son excesivamente grandes, es decir que la placa deformada deja de estar contenida en su plano medio, pero la deformación lateral es de una magnitud moderada. Este tipo de deformación lateral moderada se suele denominar, empleando la terminología inglesa, deformación *shallow*. Este hecho se tendrá en cuenta al plantear la medida de la deformación unitaria. El planteamiento de grandes deformaciones se abordará con una formulación lagrangiana total. Se empleará la teoría de flexión de placas de Mindlin-Reissner, que permite considerar la deformación debida a la cortadura, y una implementación por elementos finitos siguiendo la formulación isoparamétrica.

## 8.1. CAMPO DE DEFORMACIONES

Consideremos una placa inicialmente plana, situada en el plano XY. El campo de deformaciones en el plano medio de la placa está compuesto por tres desplazamientos, dos de ellos  $u$ ,  $v$  contenidos en el plano de la placa y el otro perpendicular a ella  $w$ , y por dos rotaciones  $\theta_x$ ,  $\theta_y$  alrededor de los ejes X, Y. Empleando la teoría de Mindlin-Reissner, estas rotaciones no son las derivadas de la deformación transversal, y por lo tanto el campo de deformaciones tiene 5 componentes (figura 8.1):

$$\mathbf{u}^T = \{u \quad v \quad w \quad \theta_x \quad \theta_y\} \quad (8.1)$$

*Nota:* con objeto de simplificar la notación se emplea en este capítulo la nomenclatura clásica habitual para las coordenadas  $x \equiv X_1$ ,  $y \equiv X_2$  y para las deformaciones  $u \equiv u_1$   $v \equiv u_2$   $w \equiv u_3$ .

Las deformaciones en un punto P situado a una distancia  $z$  del plano medio son:

$$\begin{aligned} u_P &= u + z \theta_y \\ v_P &= v - z \theta_x \\ w_P &= w \end{aligned} \quad (8.2)$$

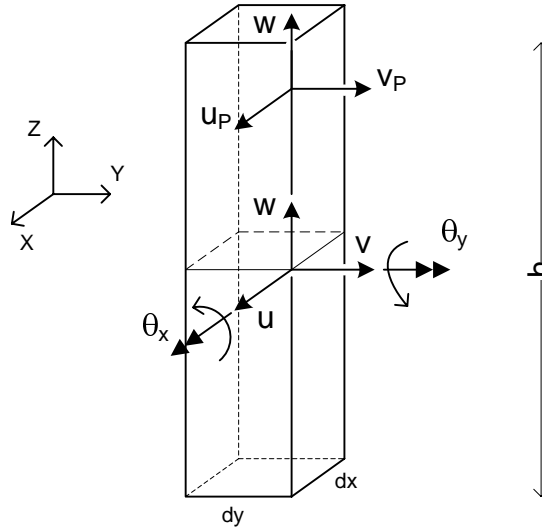


Figura 8.1 Campo de deformaciones en una placa.

## 8.2. DEFORMACIONES UNITARIAS

Para tener en cuenta que la deformación lateral  $w$  es moderada, se considera una versión degenerada del tensor de deformaciones unitarias de Green – Lagrange, despreciando en él los términos cuadráticos en las deformaciones contenidas en el plano de la placa, del tipo  $\left(\frac{\partial u_P}{\partial x}\right)^2$ . Esta simplificación se basa en que al ser la deformación lateral  $w$  moderada, las deformaciones producidas por ella en el plano de la placa son pequeñas, y sus cuadrados pueden despreciarse.

Se obtienen de esta manera las conocidas como deformaciones unitarias de Von Kármán, que son válidas para el análisis de placas con deformaciones laterales moderadas, y cuya expresión es:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_P}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_P}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.3)$$

En esta expresión no se han incluido las deformaciones unitarias de cortante, que se estudian más adelante.

Sustituyendo las deformaciones del punto P en función de las deformaciones del plano medio:

$$\bar{\mathbf{E}} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} + z \frac{\partial \theta_y}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v}{\partial y} - z \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + z \left( \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (8.4)$$

Agrupando los términos correspondientes a las diferentes deformaciones, las deformaciones unitarias se pueden poner en la forma:

$$\bar{\mathbf{E}} = \left\{ \begin{array}{l} E_{xx} \\ E_{yy} \\ E_{xy} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{array} \right\} + z \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{array} \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (8.5)$$

En esta expresión, el primer sumando corresponde a las deformaciones unitarias producidas por la deformación de la placa en su plano ( $u$ ,  $v$ ), suponiendo que dicha deformación es pequeña, por lo que sólo se incluye el término lineal, que coincide con la deformación unitaria en elasticidad plana lineal. El segundo sumando corresponde a las deformaciones unitarias producidas por la flexión lateral de la placa, que tiene una variación lineal en el espesor, y cuyo valor coincide con la expresión habitual de la deformación unitaria en la teoría de Mindlin-Reisner. El último sumando es no lineal y representa la deformación unitaria en el plano de la placa provocada por su deformación lateral  $w$ .

La expresión (8.5) puede ponerse en la forma:

$$\bar{\mathbf{E}} = \mathbf{A}_{C1} \bar{\mathbf{H}} + z \mathbf{A}_{C2} \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \bar{\mathbf{H}} \quad (8.6)$$

En esta expresión  $\bar{\mathbf{H}}$  es el vector gradiente de las deformaciones, que contiene las 10 derivadas del campo de deformaciones:

$$\bar{\mathbf{H}} = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial u}{\partial y} \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial w}{\partial x} \quad \frac{\partial w}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_x}{\partial y} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \quad \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \right\}^T \quad (8.7)$$

Las dos matrices  $\mathbf{A}_{C1}$  y  $\mathbf{A}_{C2}$  son constantes, de tamaño 3x10:

$$\mathbf{A}_{C1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.8)$$

$$\mathbf{A}_{C2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & 0 & | & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (8.9)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  es lineal en las derivadas de la deformación lateral:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{\partial w}{\partial x} & 0 & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} & | & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} & | & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.10)$$

### 8.2.1 Variación de la deformación unitaria

Aplicando una variación a la expresión (8.6) se obtiene:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{A}_{C1} \delta \bar{\mathbf{H}} + z \mathbf{A}_{C2} \delta \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \delta (\mathbf{A} \bar{\mathbf{H}}) \quad (8.11)$$

La estructura de la matriz  $\mathbf{A}$  es tal que el último sumando se puede desarrollar de la forma siguiente:

$$\frac{1}{2} \delta (\mathbf{A} \bar{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2} \delta \mathbf{A} \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{A} (\delta \mathbf{H}) \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}} = \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{A} \delta \bar{\mathbf{H}}$$

Por lo tanto:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = (\mathbf{A}_{C1} + z \mathbf{A}_{C2} + \mathbf{A}) \delta \bar{\mathbf{H}} \quad (8.12)$$

Las 10 derivadas de las deformaciones contenidas en  $\bar{\mathbf{H}}$  se pueden expresar mediante un operador de derivación  $\partial$ , de tamaño 10 x 5, actuando sobre los desplazamientos  $\mathbf{u}$ :

$$\bar{\mathbf{H}} = \partial \mathbf{u} \quad (8.13)$$

$$\partial = \begin{bmatrix} \partial_{xy} & & & & \\ & \partial_{xy} & & & \\ & & \partial_{xy} & & \\ & & & \partial_{xy} & \\ & & & & \partial_{xy} \end{bmatrix} \quad \partial_{xy} = \begin{bmatrix} \partial \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.14)$$

El campo de deformaciones se interpola a partir de las deformaciones de los nudos en la forma habitual, empleando para ello una matriz de funciones de interpolación  $\mathbf{N}$ , de tamaño  $5 \times 5n$  para un elemento de  $n$  nudos:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad (8.15)$$

El vector de grados de libertad de los nudos tiene 5 deformaciones para cada nudo:

$$\mathbf{U} = \{U_1 \quad V_1 \quad W_1 \quad \theta_{x1} \quad \theta_{y1} \quad \dots \quad \dots\}^T \quad (8.16)$$

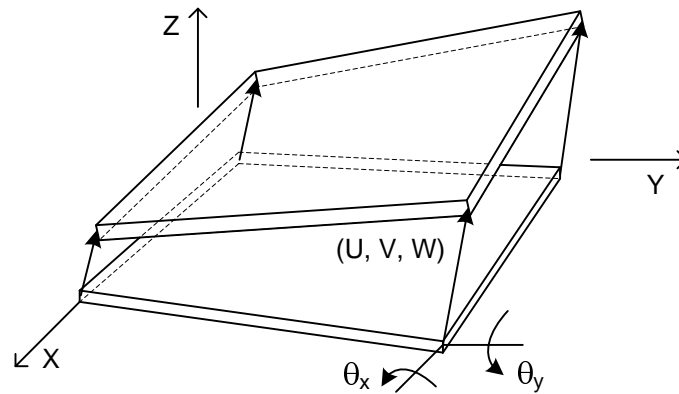


Figura 8.2. Deformada de una placa.

El gradiente de las deformaciones queda por lo tanto relacionado con los grados de libertad de los nudos en la forma:

$$\bar{\mathbf{H}} = \partial \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{U} \quad (8.17)$$

La matriz  $\mathbf{G}$  es de tamaño  $10 \times 5n$ , y está formada por  $n$  bloques, uno para cada nudo:

$$\mathbf{G} = [\mathbf{G}^1 \quad \dots \quad \mathbf{G}^k \quad \dots \quad \mathbf{G}^n] \quad (8.18)$$

La estructura de cada bloque es:

$$\mathbf{G}^k = \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{ccccc} \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{array} \right] \end{array} \quad (8.19)$$

Como  $\mathbf{G}$  no depende de las deformaciones se cumple que  $\delta \bar{\mathbf{H}} = \mathbf{G} \delta \mathbf{U}$ , y la variación de las deformaciones unitarias resulta ser:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = \left( \mathbf{A}_{C1} \mathbf{G} + z \mathbf{A}_{C2} \mathbf{G} + \mathbf{A} \mathbf{G} \right) \delta \mathbf{U} \quad (8.20)$$

De esta manera se introduce la matriz  $\mathbf{B}$ , compuesta por tres sumandos:

$$\delta \bar{\mathbf{E}} = \left( \mathbf{B}_M + z \mathbf{B}_F + \mathbf{B}_S \right) \delta \mathbf{U} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U} \quad (8.21)$$

- La matriz  $\mathbf{B}_M$  es constante y corresponde a las deformaciones en el plano de la placa. Está compuesta por tantos bloques como nudos tiene el elemento, cada uno de los cuales es de la forma:

$$\mathbf{B}_M^k = \mathbf{A}_{C1} \mathbf{G}^k = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc} \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \frac{\partial N_k}{\partial y} & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right] \quad (8.22)$$

- La matriz  $\mathbf{B}_F$  da lugar a un término de  $\mathbf{E}$  variable linealmente en el espesor de la placa.  $\mathbf{B}_F$  es constante y está asociada a los dos giros  $\theta$ , estando compuesta por tantos bloques como nudos tiene el elemento, cada uno de los cuales es:

$$\mathbf{B}_F^k = \mathbf{A}_{C2} \mathbf{G}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\partial N_k}{\partial x} & \frac{\partial N_k}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (8.23)$$

• La matriz  $\mathbf{B}_S$  es lineal en las derivadas de la deformación vertical  $w$ . Cada uno de sus bloques tiene la forma:

$$\mathbf{B}_S^k = \mathbf{A} \mathbf{G}^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial N_k}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.24)$$

### 8.3. DEFORMACIONES UNITARIAS DE CORTADURA

Las deformaciones unitarias de cortadura tienen la misma expresión que en régimen lineal, y corresponden a la diferencia entre el giro y la derivada de la deformación transversal:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial v_P}{\partial z} + \frac{\partial w_P}{\partial y} \\ \frac{\partial w_P}{\partial x} + \frac{\partial u_P}{\partial z} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \theta_y \end{Bmatrix} \quad (8.25)$$

Efectuando el mismo desarrollo que en régimen lineal estas deformaciones unitarias de cortadura se pueden expresar en función de las deformaciones de los nudos en la forma:

$$\boldsymbol{\gamma} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & +1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \partial_Q \mathbf{u} = \partial_Q \mathbf{N} \mathbf{U} = \mathbf{B}_Q \mathbf{U} \quad (8.26)$$

La matriz  $\mathbf{B}_Q$  está compuesta por bloques del tipo:



$$\mathbf{B}_Q^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & -N_k & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & N_k \end{bmatrix} \quad (8.27)$$

Dado que  $\mathbf{B}_Q$  no depende de las deformaciones, la variación de las deformaciones unitarias de cortadura es:

$$\delta\gamma = \mathbf{B}_Q \delta\mathbf{U} \quad (8.28)$$

#### 8.4. TENSIONES

El estado de tensiones en la placa se descompone, de la misma forma que se ha hecho con las deformaciones unitarias, en dos partes: por un lado las tensiones contenidas en el propio plano de la placa y por otro lado las tensiones cortantes, que son perpendiculares a ella (figura 8.3).

Las tensiones de Piola-Kirchhoff contenidas en el plano de la placa, en sus representaciones como tensor de orden 2 y como vector son:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} S_{xx} \\ S_{yy} \\ S_{xy} \end{Bmatrix} \quad (8.29)$$

Las tensiones de cortadura verticales son:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{Bmatrix} \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix} \quad (8.30)$$

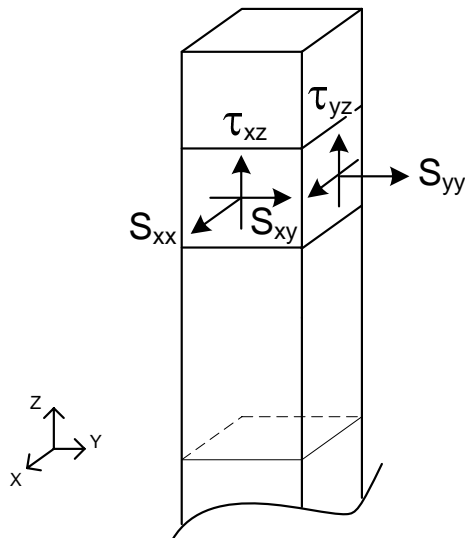


Figura 8.3 Tensiones en una placa.

### 8.5. ESFUERZOS INTERIORES

Las resultantes de las tensiones en todo el espesor de la placa, por unidad de anchura, constituyen los esfuerzos axiales  $n_{xx}$  y  $n_{yy}$  y el esfuerzo cortante  $n_{xy}$  contenido en el plano de la placa (figura 8.4):

$$n_{ij} = \int S_{ij} dz \quad i, j \in \{x, y\} \quad (8.31)$$

El momento estático de estas tensiones en todo el espesor de la placa, por unidad de anchura, son los momentos de flexión y torsión en la placa:

$$m_{ij} = \int z S_{ij} dz \quad i, j \in \{x, y\} \quad (8.32)$$

De la misma manera, las resultantes de las tensiones cortantes son los esfuerzos cortantes correspondientes:

$$q_{iz} = \int \tau_{iz} dz \quad i \in \{x, y\} \quad (8.33)$$

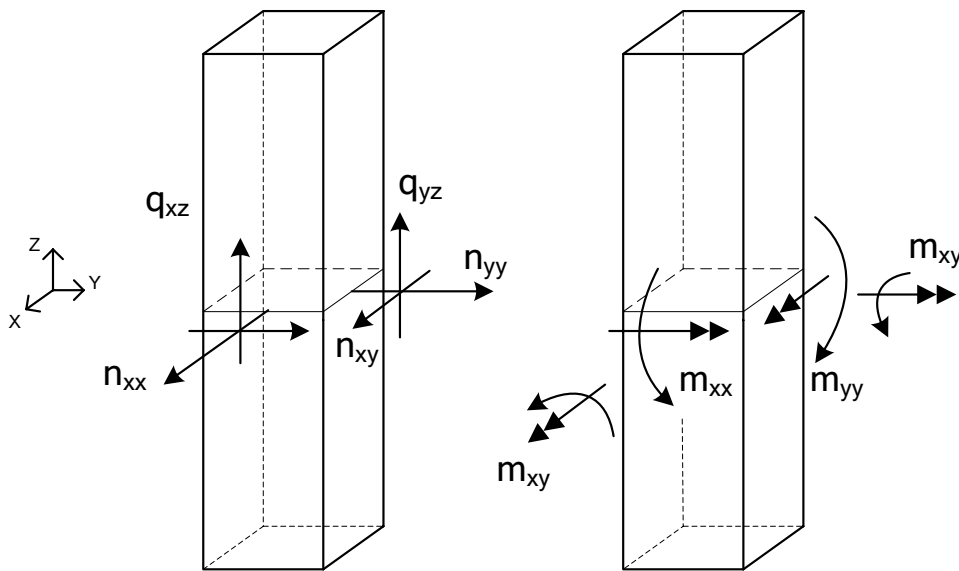


Figura 8.4 Esfuerzos interiores en una placa.

### 8.6. ECUACIÓN CONSTITUTIVA

Al igual que en el caso de la elasticidad plana, se supone que existe una relación de proporcionalidad entre los incrementos de las tensiones y los incrementos de las deformaciones unitarias. Para las tensiones y deformaciones contenidas en el plano de la placa dicha relación es:

$$\Delta \bar{\mathbf{S}} = \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{E}} \quad (8.34)$$

La matriz  $\mathbf{C}$  es la correspondiente a un material elástico en un estado plano de tensiones, en el plano XY:

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (8.35)$$

Las tensiones de cortadura verticales están asociadas a las deformaciones de cortadura correspondientes. Se acepta asimismo la proporcionalidad entre unas y otras, a través del módulo de elasticidad en cortadura  $G$ :

$$\tau = G \gamma \quad (8.36)$$

### 8.7. TRABAJO VIRTUAL INTERIOR Y VECTOR DE FUERZAS INTERIORES

Teniendo en cuenta los dos tipos de tensiones y deformaciones unitarias existentes, el trabajo virtual producido por ellas tiene dos sumandos, uno debido a las tensiones de Piola-Kirchhoff  $\bar{\mathbf{S}}$  en el plano de la placa y otro debido a las tensiones cortantes  $\tau$  perpendiculares a él:

$$\delta W_I = \int \delta \bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{S}} \, dv + \int \delta \gamma^T \tau \, dv \quad (8.37)$$

Sustituyendo en esta ecuación las variaciones de las deformaciones unitarias por sus valores en función de las deformaciones nodales ((8.21) y (8.28)) se obtiene:

$$\delta W_I = \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} \, dv + \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{B}_Q^T \tau \, dv \quad (8.38)$$

Por lo tanto el vector de fuerzas nodales equivalentes a las tensiones interiores en el elemento es:

$$\mathbf{Q} = \int \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{S}} \, dv + \int \mathbf{B}_Q^T \tau \, dv \quad (8.39)$$

### 8.8. LINEALIZACIÓN. MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

Para obtener la matriz de rigidez tangente se linealiza el trabajo virtual interior, aplicando un incremento  $\hat{\mathbf{u}}$  a las deformaciones de la placa. Este incremento de las deformaciones se aproxima como una interpolación de los incrementos de las deformaciones nodales  $\hat{\mathbf{U}}$ :

$$\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{N} \hat{\mathbf{U}} \quad (8.40)$$

El incremento del trabajo virtual interior al aplicarse el incremento de las deformaciones es:

$$\Delta(\delta W_I) = \int \delta \bar{\mathbf{E}}^T \Delta \bar{\mathbf{S}} \, dv + \int \delta \gamma^T \Delta \tau \, dv + \int \Delta(\delta \bar{\mathbf{E}})^T \bar{\mathbf{S}} \, dv \quad (8.41)$$

Los dos primeros sumandos corresponden a la componente material, debida al incremento de los esfuerzos, y el último a la componente geométrica, debida al incremento de las deformaciones unitarias. Nótese que no se ha considerado un incremento de las deformaciones unitarias de cortadura.

• La primera integral proporciona la parte debida a la flexión de la componente material del incremento del trabajo virtual. El incremento de las tensiones se sustituye en función del incremento de deformaciones unitarias según (8.34):

$$\Delta(W_I)_{mat}^{flex} \equiv \int \delta \bar{\mathbf{E}}^T \Delta \bar{\mathbf{S}} dv = \int \delta \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{E}} dv \quad (8.42)$$

El incremento de las deformaciones unitarias se relaciona con el incremento de las deformaciones nodales por medio de una expresión similar a la (8.20):

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \Delta \hat{\mathbf{U}} \quad (8.43)$$

De esta manera se identifica la parte material de la matriz de rigidez tangente:

$$\Delta(W_I)_{mat}^{flex} = \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dv \hat{\mathbf{U}} = \delta \mathbf{U}^T \hat{\mathbf{K}}_D \hat{\mathbf{U}} \quad (8.44)$$

El valor de esta matriz es:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{K}}_D &= \int \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dv = \int (\mathbf{B}_M + z \mathbf{B}_F + \mathbf{B}_S)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_M + z \mathbf{B}_F + \mathbf{B}_S) dv \\ \hat{\mathbf{K}}_D &= \int (\mathbf{B}_M + \mathbf{B}_S)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_M + \mathbf{B}_S) dv + \int z^2 \mathbf{B}_F^T \mathbf{C} \mathbf{B}_F dv + \\ &\quad \int z (\mathbf{B}_M + \mathbf{B}_S)^T \mathbf{C} \mathbf{B}_F dv + \int z \mathbf{B}_F^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_M + \mathbf{B}_S) dv \end{aligned} \quad (8.45)$$

Efectuando la integración en la coordenada  $z$ , las dos últimas integrales son nulas, pues  $z$  está medida desde el centro de gravedad. Los demás términos del integrando son independientes de  $z$ . Por lo tanto la matriz de rigidez tangente resulta ser:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \int h (\mathbf{B}_M + \mathbf{B}_S)^T \mathbf{C} (\mathbf{B}_M + \mathbf{B}_S) dA + \int \frac{h^3}{12} \mathbf{B}_F^T \mathbf{C} \mathbf{B}_F dA \quad (8.46)$$

• La segunda integral de (8.41) proporciona la parte debida a la cortadura de la componente material de la matriz de rigidez tangente. Sustituyendo el incremento de las tensiones cortantes según (8.36) y añadiendo el factor de corrección para la energía de cortante  $k$ , se puede poner en la forma:

$$\Delta(W_I)_{mat}^{cor} \equiv \int \delta \gamma^T \Delta \tau dv = \int \delta \gamma^T G \Delta \gamma dv \quad (8.47)$$

$$\Delta(W_I)_{mat}^{cor} = \delta \mathbf{U}^T \int k \mathbf{B}_Q^T G \mathbf{B}_Q dv \hat{\mathbf{U}} \quad (8.48)$$

Se identifica así la matriz de rigidez tangente asociada al esfuerzo cortante, que tiene la misma expresión que en el caso lineal:

$$\hat{\mathbf{K}}_Q = \int k \mathbf{B}_Q^T G \mathbf{B}_Q dv \quad (8.49)$$

• La última integral de (8.41) proporciona la matriz de rigidez geométrica. Para evaluarla se desarrolla su integrando. El incremento de la variación de la deformación unitaria sólo depende del incremento de la matriz  $\mathbf{A}$ , pues los restantes términos no dependen de las deformaciones (ver (8.12)):

$$\Delta(\delta\bar{\mathbf{E}}) = \Delta(\mathbf{A}) \delta\bar{\mathbf{H}} \quad (8.50)$$

Pero el incremento de  $\mathbf{A}$  sólo depende del incremento de la deformación lateral  $\hat{w}$ , y su valor se obtiene de (8.10):

$$\Delta(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} & \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.51)$$

El incremento en la variación de la deformación unitaria es por lo tanto:

$$\Delta(\delta\bar{\mathbf{E}}) = \Delta(\mathbf{A}) \delta\bar{\mathbf{H}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.52)$$

Con este valor, el integrando de la última integral de (8.41) resulta ser:

$$\Delta(\delta\bar{\mathbf{E}})^T \bar{\mathbf{S}} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial x} S_{xx} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial y} S_{yy} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \frac{\partial \delta w}{\partial x} S_{xy} + \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \frac{\partial \delta w}{\partial y} S_{xy} \quad (8.53)$$

Reordenando esta expresión, dicho integrando se puede poner en la forma útil siguiente:

$$\Delta(\delta\bar{\mathbf{E}})^T \bar{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta w}{\partial x} & \frac{\partial \delta w}{\partial y} \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (8.54)$$

Las derivadas del incremento de la flecha lateral  $\hat{w}$  se pueden poner, empleando la interpolación de deformaciones, en función de los incrementos de las deformaciones laterales  $W_k$  de los nudos:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \hat{w}}{\partial x} \\ \frac{\partial \hat{w}}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial x} \hat{W}_k \\ \sum_k \frac{\partial N_k}{\partial y} \hat{W}_k \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_W \hat{\mathbf{U}} \quad (8.55)$$

La matriz  $\mathbf{B}_W$  es de tamaño  $2 \times 5n$ , y está compuesta por  $n$  bloques, cada uno de los cuales es de la forma:

$$\mathbf{B}_W^k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_k}{\partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (8.56)$$

De forma análoga, para las derivadas de las variaciones de la flecha lateral  $w$ , se cumple que:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial \delta w}{\partial x} \\ \frac{\partial \delta w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_W \delta \mathbf{U} \quad (8.57)$$

Sustituyendo en (8.54), la componente geométrica del incremento del trabajo virtual interior se puede poner como:

$$\Delta(W_I)_{geo} = \int \Delta(\delta \bar{\mathbf{E}})^T \bar{\mathbf{S}} dv = \delta \mathbf{U}^T \int \mathbf{B}_W^T \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \mathbf{B}_W dv \hat{\mathbf{U}} \quad (8.58)$$

Esta expresión define la matriz de rigidez geométrica:

$$\hat{\mathbf{K}}_\sigma = \int \mathbf{B}_W^T \begin{bmatrix} S_{xx} & S_{xy} \\ S_{xy} & S_{yy} \end{bmatrix} \mathbf{B}_W dv \quad (8.59)$$

Dado que  $\mathbf{B}_W$  no depende de  $z$ , se puede efectuar la integración en  $z$ , con lo cual las tensiones  $S_{ij}$  se sustituyen por los esfuerzos en el plano de la placa  $n_{ij}$ :

$$\hat{\mathbf{K}}_\sigma = \int \mathbf{B}_W^T \begin{bmatrix} n_{xx} & n_{xy} \\ n_{xy} & n_{yy} \end{bmatrix} \mathbf{B}_W dA \quad (8.60)$$

Obsérvese que esta matriz de rigidez geométrica depende sólo de los esfuerzos en el plano de la placa, que son los que producen el efecto rigidizador, y no de los momentos de flexión y torsión.

• Finalmente, la matriz de rigidez tangente del elemento es la suma de las tres componentes anteriores:

$$\hat{\mathbf{K}} = \hat{\mathbf{K}}_D + \hat{\mathbf{K}}_Q + \hat{\mathbf{K}}_\sigma \quad (8.61)$$

# Cáscaras

## 9.1. INTRODUCCIÓN

Las cáscaras son estructuras laminares curvas, en las que el material está agrupado alrededor de una superficie directriz curva, de tal manera que el espesor en sentido normal a la superficie directriz es pequeño en comparación con las otras dimensiones transversales. Esta curvatura hace que los efectos de esfuerzo axial y de flexión estén acoplados a nivel local de cada elemento, a diferencia de una estructura plana en la que dichos efectos son independientes.

Las formulaciones empleadas para estudiar cáscaras curvas se engloban en dos grandes categorías: las basadas en el continuo, y las basadas en la teoría de cáscaras, también conocidas como basadas en las resultantes de las tensiones.

La formulación basada en el continuo considera un elemento sólido tridimensional y constriñe su comportamiento de tal manera que se corresponda con el de una cáscara de pequeño espesor. Para ello las deformaciones independientes de los nudos de las caras superior e inferior se sustituyen por desplazamientos y rotaciones del plano medio de la cáscara y se emplea una interpolación lineal en el espesor. El estado de tensión y deformación unitaria considerado es el general en el espacio, pero añadiendo la condición de tensión nula en la dirección normal a la cáscara. Por esta razón esta formulación se conoce también como de sólido degenerado.

A diferencia de la formulación anterior, la formulación basada en la teoría de cáscaras define la geometría de la superficie media de la cáscara empleando para ello dos coordenadas convectivas curvilíneas. En dirección transversal a esta superficie media se añade una tercera dimensión, pequeña, que constituye el espesor de la cáscara. El estado de esfuerzos en el material no se maneja mediante el tensor de tensiones tridimensional en un punto interior de la cáscara, sino que se emplean las fuerzas y los momentos resultantes producidos por dichas tensiones, de forma similar a la teoría de placas. Este hecho de considerar las resultantes de las tensiones hace que esta formulación se denomine habitualmente como formulación *stress resultant* en inglés.

De la misma forma, las deformaciones unitarias en un punto cualquiera del material se expresan en función de las deformaciones unitarias de extensión y curvatura medidas en la superficie media de la cáscara.

En este capítulo se desarrolla una formulación para el análisis de cáscaras curvas con grandes deformaciones, usando una formulación basada en las resultantes de las tensiones y un planteamiento lagrangiano total. La cáscara puede tener cualquier curvatura y la parametrización de las rotaciones se efectúa de forma exacta. La discretización del problema se efectúa mediante elementos finitos isoparamétricos de 4 nudos.

## 9.2. DEFINICIÓN GEOMÉTRICA

La configuración geométrica inicial de la cáscara se define en la forma (figura 9.1):

$$\mathbf{X}^P = \mathbf{X}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{D}(\xi^1, \xi^2) \quad (9.1)$$

siendo:

$\mathbf{X}^P$  las coordenadas cartesianas de un punto P cualquiera del interior de la cáscara en el estado inicial, respecto de una base ortogonal fija  $\mathbf{e}_i$ ,

$\mathbf{X}$  las coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie media de la cáscara,

$\mathbf{D}$  el vector director unitario en cada punto de la superficie media de la cáscara en la dirección del espesor, que no es necesariamente normal al plano tangente a la cáscara,

$\xi^1, \xi^2$  dos coordenadas curvilíneas convectivas que definen la superficie media, y

$\xi^3$  una coordenada en la dirección del vector director, cuyo valor es  $-h/2 < \xi^3 < h/2$ , siendo  $h$  el espesor de la cáscara.

Esta definición corresponde a lo que se conoce como una superficie de director simple de Cosserat.

De forma análoga, la geometría de la configuración deformada es:

$$\mathbf{x}^P = \mathbf{x}(\xi^1, \xi^2) + \xi^3 \mathbf{d}(\xi^1, \xi^2) \quad (9.2)$$

siendo ahora,  $\mathbf{x}^P$  las coordenadas cartesianas de un punto P cualquiera de la cáscara,  $\mathbf{x}$  las coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie media, y  $\mathbf{d}$  el vector director unitario en cada punto de la superficie media de la cáscara, en la dirección del espesor.



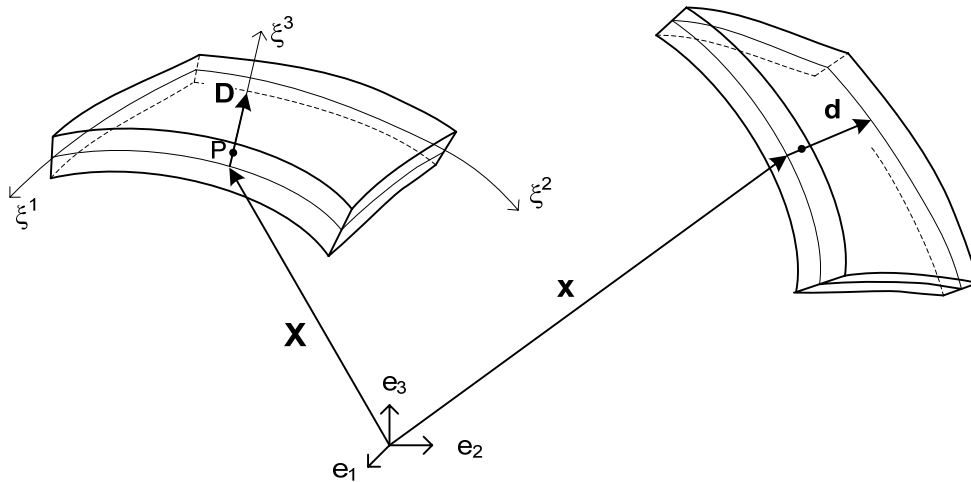


Figura 9.1 Configuraciones inicial y deformada de una cáscara.

### 9.2.1 Métrica del estado deformado

En un punto cualquiera P de la cáscara se pueden considerar los tres vectores tangentes a las coordenadas curvilíneas, definidos como:

$$\mathbf{g}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \xi^i} \equiv \mathbf{x}_{,i}^P \quad (9.3)$$

En lo sucesivo, se empleará la notación  $(\cdot)_{,i}$  para indicar la derivada parcial respecto de la coordenada  $\xi^i$ .

En general estos vectores no son ortogonales y pueden usarse como una base covariante local al punto considerado, suponiendo que son linealmente independientes, lo cual ocurre si la transformación entre las coordenadas  $\xi$  y  $\mathbf{x}$  es unívoca. Nótese que el tercer vector coincide con el vector director:  $\mathbf{g}_3 = \mathbf{x}_{,3}^P = \mathbf{d}$

El espacio tangente a la configuración geométrica de la cáscara en el punto P, que denominaremos  $\mathbf{x}_{\xi}^P$ , es la derivada de Frechet que corresponde a la agrupación por columnas de los tres vectores de la base covariante:

$$\mathbf{x}_{\xi}^P \equiv \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{e}^i \equiv \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{e}^i \quad \mathbf{x}_{\xi}^P = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \mathbf{g}_2 & \mathbf{g}_3 \end{bmatrix} \quad (9.4)$$

Esta matriz es la jacobiana de la transformación  $\xi/\mathbf{x}$ , y relaciona los diferenciales de ambos sistemas de coordenadas:

$$d\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\xi}^P d\xi \quad (9.5)$$

El cuadrado de la distancia entre dos puntos próximos es:

$$dl^2 = d\mathbf{x}^T d\mathbf{x} = d\xi^T (\mathbf{x}_{\xi}^P)^T \mathbf{x}_{\xi}^P d\xi \quad (9.6)$$

Por lo tanto el tensor métrico de la cáscara en el estado deformado  $\mathbf{g}$  es:

$$\mathbf{g} = (\mathbf{x}_\xi^P)^T \mathbf{x}_\xi^P \quad g_{ij} = \mathbf{x}_{,i}^P \cdot \mathbf{x}_{,j}^P \quad (9.7)$$

### 9.2.2 Métrica del estado inicial

De forma análoga, se pueden considerar los tres vectores tangentes a las coordenadas curvilíneas en el estado inicial, en un punto cualquiera P de la cáscara:

$$\mathbf{G}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \xi^i} \equiv \mathbf{X}_{,i}^P \quad (9.8)$$

Nótese que el tercer vector coincide con el vector director:  $\mathbf{G}_3 \equiv \mathbf{X}_{,3}^P = \mathbf{D}$

Estos tres vectores forman una base covariante, cuya matriz jacobiana  $\mathbf{X}_\xi^P$  es la agrupación de los mismos por columnas:

$$\mathbf{X}_\xi^P \equiv \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \xi^i} \otimes \mathbf{e}^i \equiv \mathbf{G}_i \otimes \mathbf{e}^i \quad \mathbf{X}_\xi^P = [\mathbf{G}_1 \quad \mathbf{G}_2 \quad \mathbf{G}_3] \quad (9.9)$$

El cuadrado de la distancia entre dos puntos próximos en el estado inicial es:

$$(dl^0)^2 = d\mathbf{X}^T d\mathbf{X} = d\xi^T (\mathbf{X}_\xi^P)^T \mathbf{X}_\xi^P d\xi \quad (9.10)$$

Por lo tanto el tensor métrico de la cáscara en el estado inicial es:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{X}_\xi^P)^T \mathbf{X}_\xi^P \quad G_{ij} = \mathbf{X}_{,i}^P \cdot \mathbf{X}_{,j}^P \quad (9.11)$$

Se pueden considerar asimismo los vectores  $\mathbf{G}^j$  de la base contravariante, o dual, definidos como:  $\mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}^j = \delta_i^j$ , siendo  $\delta_i^j$  la delta de Kronecker. Los vectores de esta base dual forman la matriz jacobiana:

$$\mathbf{X}^{\xi P} = [\mathbf{G}^1 \quad \mathbf{G}^2 \quad \mathbf{G}^3] \quad (9.12)$$

Por su definición se cumple que la relación entre ambas bases es:

$$\mathbf{X}_\xi^P = (\mathbf{X}^{\xi P})^{-T} \quad (9.13)$$

### 9.2.3 Sistema convectivo en el plano medio

Está formado por los tres vectores de la base covariante en la superficie media de la cáscara, en el estado deformado, es decir:  $\mathbf{a}_i = \mathbf{g}_i |_{\xi^3=0}$ . Los dos primeros de ellos definen el plano tangente a la cáscara:

$$\mathbf{a}_\alpha = \left. \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \xi^\alpha} \right|_{\xi^3=0} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi^\alpha} \equiv \mathbf{x}_{,\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \quad (9.14)$$

El tercero coincide con el vector director:  $\mathbf{a}_3 = \mathbf{g}_3 = \mathbf{d}$

Nota: los índices con letras griegas varían de 1 a 2.

- El tensor métrico de la superficie media es:

$$\mathbf{a} = a_{\alpha\beta} \mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}^\beta \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} \quad (9.15)$$

siendo  $\mathbf{a}^\alpha$  los vectores de la base dual definida por  $\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}^j = \delta_{ij}$

- El diferencial de área en la superficie media es:

$$dA = |\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}| d\xi^1 d\xi^2 \quad (9.16)$$

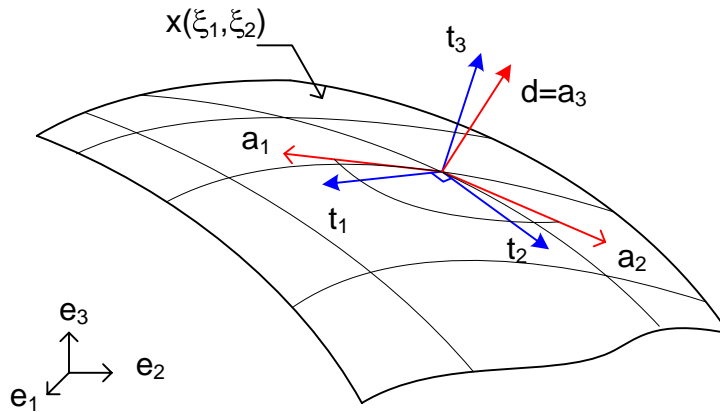


Figura 9.2 Sistemas convectivo (a) y cartesiano (t) en el plano medio.

### 9.3. PARAMETRIZACIÓN DE LAS ROTACIONES

El estudio de la deformación de la cáscara requiere estudiar la rotación finita del vector director de la misma. Con este fin se emplean transformaciones ortogonales, las cuales forman un grupo, conocido como  $SO(3) := \{\Lambda \mid \Lambda^{-1} = \Lambda^T, \det(\Lambda)=1\}$ . Cada transformación ortogonal tiene un vector propio  $\Psi$  tal que  $\Lambda \Psi = \Psi$ , de tal forma que  $\Lambda$  representa una rotación de valor finito alrededor de  $\Psi$ .

El espacio tangente a  $SO(3)$  en la identidad es el conjunto de tensores hemisimétricos de tamaño 3, definidos como  $so(3) := \{\tilde{W} \mid \tilde{W} = -\tilde{W}^T\}$ .

Cada tensor hemisimétrico  $\tilde{W}$  tiene un valor propio  $w$ , conocido como vector dual asociado, o vector axial, tal que  $\tilde{W}w = 0$ . Entre ambos existe el isomorfismo:  $\tilde{W}a = w \times a \quad \forall a$ . Geométricamente el tensor  $\tilde{W}$  o su vector axial, representan una rotación infinitesimal alrededor de  $w$ .

En el análisis de una cáscara con grandes deformaciones, es necesario asimismo superponer las rotaciones finitas del vector director de la cáscara  $d$  con rotaciones infinitesimales del mismo, como pequeñas variaciones o incrementos. A estos efectos se emplea la transformación exponencial, la cual transforma un elemento del espacio tangente a  $SO(3)$  (es decir una rotación infinitesimal definida por un tensor hemisimétrico  $\tilde{W}$ ) en un elemento  $\Lambda$  del grupo  $SO(3)$  de las transformaciones ortogonales, según la fórmula:

$$\Lambda = \exp[\tilde{\mathbf{W}}] := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \tilde{\mathbf{W}}^k \quad \Lambda \in \text{SO}(3), \tilde{\mathbf{W}} \in \text{so}(3) \quad (9.17)$$

Esta transformación tiene la siguiente forma explícita, conocida como fórmula de Rodrigues:

$$\Lambda = \exp[\tilde{\mathbf{W}}] = \cos(w) \mathbf{I} + \frac{\text{sen}(w)}{w} \mathbf{w} + \frac{1 - \cos(w)}{w^2} \mathbf{w} \otimes \mathbf{w} \quad (9.18)$$

En ella  $\mathbf{w}$  es el vector axial asociado a  $\tilde{\mathbf{W}}$  y  $w = |\mathbf{w}|$ . Esta fórmula corresponde a una rotación de valor  $w$  alrededor del eje definido por el vector  $\mathbf{w}$ .

Empleando las propiedades de  $\tilde{\mathbf{W}}$ , la expresión anterior puede ponerse también en la forma:

$$\Lambda = \exp[\tilde{\mathbf{W}}] = \mathbf{I} + \frac{\text{sen}(w)}{w} \tilde{\mathbf{W}} + \frac{1 - \cos(w)}{w^2} \tilde{\mathbf{W}}\tilde{\mathbf{W}} \quad (9.19)$$

### 9.3.1 Rotación del vector director

La condición de inextensibilidad de las fibras en la dirección normal a la cáscara implica que el vector director mantiene su módulo unitario constante en cualquier configuración deformada. Por lo tanto dicho vector director unitario se mantiene en una esfera de radio unidad, denominada habitualmente  $S^2$ :  $S^2 := \{\mathbf{d} \in \mathbb{R}^3 \mid |\mathbf{d}| = 1\}$

El espacio tangente a  $S^2$  en un punto cualquiera definido por  $\mathbf{d}$  es el espacio vectorial lineal formado por los vectores  $\hat{\mathbf{d}}$  ortogonales a  $\mathbf{d}$ :  $T_{\mathbf{d}}S^2 := \{\hat{\mathbf{d}} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{d} \cdot \hat{\mathbf{d}} = 0\}$ .

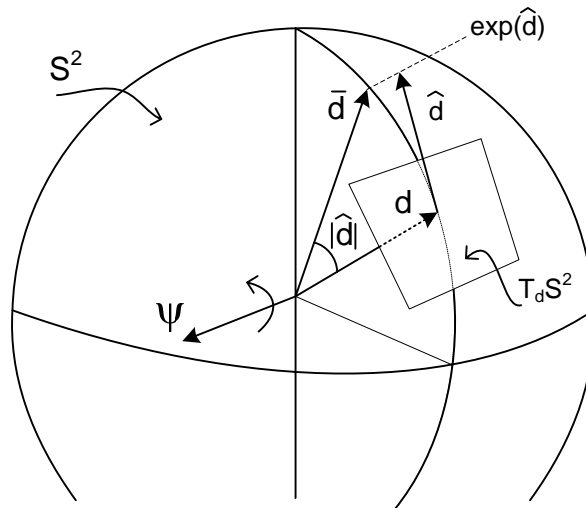


Figura 9.3 Rotación del vector director.

La transformación exponencial en un punto  $\mathbf{d}$  de  $S^2$  transforma un vector  $\hat{\mathbf{d}}$  perteneciente al espacio tangente a  $S^2$  en otro punto de la propia  $S^2$ . Esta transformación se efectúa a lo largo del círculo máximo que pasa por  $\mathbf{d}$  y es tangente a  $\hat{\mathbf{d}}$ , dando lugar a otro vector  $\bar{\mathbf{d}}$ , cuyo valor es:

$$\bar{\mathbf{d}} := \exp_a[\hat{\mathbf{d}}] = \cos(|\hat{\mathbf{d}}|) \mathbf{d} + \frac{\text{sen}(|\hat{\mathbf{d}}|)}{|\hat{\mathbf{d}}|} \hat{\mathbf{d}} \quad (9.20)$$

La deducción de esta expresión es sencilla si se considera el círculo máximo que corresponde al plano definido por  $\mathbf{d}, \hat{\mathbf{d}}$  (figura 9.3). El nuevo vector  $\bar{\mathbf{d}}$  se obtiene girando el vector  $\mathbf{d}$  original sobre dicho círculo máximo un ángulo igual al módulo de  $\hat{\mathbf{d}}$ . Las componentes del vector resultante  $\bar{\mathbf{d}}$  medidas sobre los vectores  $\mathbf{d}$  y  $\hat{\mathbf{d}}$  proporcionan la expresión anterior.

Conocidos el vector original  $\mathbf{d}$ , su incremento  $\hat{\mathbf{d}}$  y el  $\bar{\mathbf{d}}$  producido por la transformación exponencial, existe una única rotación  $\hat{\Lambda}$  que transforma el vector inicial  $\mathbf{d}$  en el  $\bar{\mathbf{d}}$ . Esta rotación se produce alrededor de un eje perpendicular a ambos vectores, definido por el vector:

$$\hat{\psi} = \mathbf{d} \times \hat{\mathbf{d}} \quad (9.21)$$

Por otra parte, al ser ambos vectores ortogonales se cumple  $\hat{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d} = 0$ . Multiplicando escalarmente la transformación exponencial (9.20) por  $\mathbf{d}$  y considerando la relación anterior se obtiene que  $\bar{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{d} = \cos(|\hat{\mathbf{d}}|)$ , con lo que el ángulo de la rotación vale  $|\hat{\mathbf{d}}|$ . Finalmente es fácil comprobar que  $|\hat{\psi}| = |\mathbf{d} \times \hat{\mathbf{d}}| = |\hat{\mathbf{d}}|$ .

De la expresión (9.21) anterior puede despejarse el valor del vector incremento, sin más que multiplicarla vectorialmente por  $\hat{\mathbf{d}}$  y aplicar la expresión del triple producto vectorial. Se obtiene, como es lógico, que el vector incremento corresponde a una rotación infinitesimal de  $\mathbf{d}$  alrededor de  $\hat{\psi}$ :

$$\hat{\mathbf{d}} = \hat{\psi} \times \mathbf{d} \quad (9.22)$$

Así pues la rotación para pasar de  $\mathbf{d}$  a  $\hat{\mathbf{d}}$  se produce alrededor de  $\hat{\psi}$  y su valor es el  $|\hat{\psi}|$ . Sustituyendo todos estos valores en la fórmula de Rodrigues se obtiene que la matriz de la rotación es:

$$\hat{\Lambda} = \cos(|\hat{\mathbf{d}}|) \mathbf{I} + \frac{\text{sen}(|\hat{\mathbf{d}}|)}{|\hat{\mathbf{d}}|} \tilde{\psi} + \frac{1 - \cos(|\hat{\mathbf{d}}|)}{|\hat{\mathbf{d}}|^2} \hat{\psi} \otimes \hat{\psi} \quad (9.23)$$

$$\bar{\mathbf{d}} = \hat{\Lambda} \mathbf{d} \quad (9.24)$$

siendo  $\tilde{\psi}$  el tensor hemisimétrico cuyo vector axial es  $\hat{\psi} = \mathbf{d} \times \hat{\mathbf{d}}$ .

Para desarrollos posteriores, es necesario disponer de la derivada del vector director resultante  $\bar{\mathbf{d}} = \hat{\Lambda} \mathbf{d}$  respecto de una de las coordenadas  $\xi^i$ . Derivando en la ecuación (9.20) se obtiene:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}}_{,\alpha} = & \cos(|\hat{\mathbf{d}}|) \mathbf{d}_{,\alpha} + \\ & \left\{ \frac{\text{sen}(|\hat{\mathbf{d}}|)}{|\hat{\mathbf{d}}|} (\mathbf{I} - \mathbf{d} \otimes \hat{\mathbf{d}}) + \frac{1}{|\hat{\mathbf{d}}|^2} \left( \cos(|\hat{\mathbf{d}}|) - \frac{\text{sen}(|\hat{\mathbf{d}}|)}{|\hat{\mathbf{d}}|} \right) \hat{\mathbf{d}} \otimes \hat{\mathbf{d}} \right\} \hat{\mathbf{d}}_{,\alpha} \end{aligned} \quad (9.25)$$

#### 9.4. DEFORMACIÓN UNITARIA

• El tensor gradiente de la deformación  $\mathbf{F}$  es tangente a la transformación que define la deformación de la cáscara:  $d\mathbf{x}^P = \mathbf{F} d\mathbf{X}^P$ . Sustituyendo los diferenciales en función de las matrices jacobianas:

$$\mathbf{x}_\xi^P d\xi = \mathbf{F} \mathbf{X}_\xi^P d\xi \quad (9.26)$$

Por lo tanto el valor del gradiente de la deformación es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x}_\xi^P \left( \mathbf{X}_\xi^P \right)^{-1} \quad (9.27)$$

Considerando ahora los vectores de la base dual su valor es:

$$\mathbf{F} = \mathbf{x}_\xi^P \left( \mathbf{X}^{\xi P} \right)^T \quad (9.28)$$

En función de los distintos vectores de las bases, se puede poner que el gradiente es:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{G}^i \quad (9.29)$$

• El tensor de deformaciones unitarias de Green-Lagrange vale:

$$\widehat{\mathbf{E}} = \frac{1}{2}(\mathbf{g} - \mathbf{G}) \quad \widehat{E}_{ij} = \frac{1}{2}(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j - \mathbf{G}_i \cdot \mathbf{G}_j) \quad (9.30)$$

Sustituyendo, se obtiene, para los 2 x 2 primeros términos:

$$\widehat{E}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[(\mathbf{x}_{,\alpha} + \xi^3 \mathbf{d}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{x}_{,\beta} + \xi^3 \mathbf{d}_{,\beta})] - \frac{1}{2}[(\mathbf{X}_{,\alpha} + \xi^3 \mathbf{D}_{,\alpha}) \cdot (\mathbf{X}_{,\beta} + \xi^3 \mathbf{D}_{,\beta})] \quad (9.31)$$

Desarrollando y reagrupando se obtiene:

$$\widehat{E}_{\alpha\beta} = \widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta} + \xi^3 \widehat{\kappa}_{\alpha\beta} + O((\xi^3)^2) \quad (9.32)$$

El último término es cuadrático en  $\xi^3$ , corresponde a curvaturas de segundo orden y se desprecia para cáscaras delgadas. En esta expresión se identifican las deformaciones unitarias de membrana (constantes) y las debidas a la flexión, que varían linealmente en el espesor:

$$\widehat{\varepsilon}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{x}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{X}_{,\beta}) \quad (9.33)$$

$$\widehat{\kappa}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d}_{,\beta} + \mathbf{x}_{,\beta} \cdot \mathbf{d}_{,\alpha} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D}_{,\beta} - \mathbf{X}_{,\beta} \cdot \mathbf{D}_{,\alpha})$$

Las deformaciones unitarias de cortadura valen:

$$\widehat{E}_{\alpha 3} = \frac{1}{2}[(\mathbf{x}_{,\alpha} + \xi^3 \mathbf{d}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{d} - (\mathbf{X}_{,\alpha} + \xi^3 \mathbf{D}_{,\alpha}) \cdot \mathbf{D}] \quad (9.34)$$

Despreciando los términos lineales en la coordenada  $\xi^3$ , se obtienen las deformaciones de cortadura:

$$\hat{\gamma}_\alpha = 2 \hat{E}_{\alpha 3} = \mathbf{x}_{,\alpha} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,\alpha} \cdot \mathbf{D} \quad (9.35)$$

### 9.5. FORMULACIÓN EN COORDENADAS CARTESIANAS

La formulación podría desarrollarse en coordenadas curvilíneas, pero sin embargo resulta más práctico, a efectos de introducción de las ecuaciones constitutivas y de los campos interpolados de tensiones, el empleo de un sistema de coordenadas cartesianas local en cada punto de la cáscara.

El vector unitario normal a la superficie de referencia de la cáscara es:

$$\mathbf{t}_3 = \frac{\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}}{|\mathbf{x}_{,1} \times \mathbf{x}_{,2}|} \quad (9.36)$$

Definimos una base cartesiana local al punto  $\{\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{t}_3\}$  mediante la transformación ortogonal siguiente, que transforma el vector  $\mathbf{e}_3$  de la base inercial en el vector normal  $\mathbf{t}_3$ , por medio de una rotación alrededor del eje perpendicular a  $\mathbf{e}_3$  y  $\mathbf{t}_3$ .

$$\Lambda_n = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}_3) \mathbf{I}_3 + [\widetilde{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_3}] + \frac{1}{1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{t}_3} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_3) \otimes (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{t}_3) \quad (9.37)$$

Es decir:

$$\Lambda_n \mathbf{e}_i = \mathbf{t}_i \quad (i = 1 - 3) \quad (9.38)$$

Con esta construcción, los vectores  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2, \mathbf{x}_{,1}, \mathbf{x}_{,2}$  están contenidos en el plano tangente a la cáscara en su superficie de referencia.

Denominamos  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  a las coordenadas cartesianas medidas en la dirección de los vectores  $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$  de la base local.

La matriz jacobiana de la transformación entre el sistema convectivo en la superficie media  $\mathbf{a}_i \equiv \mathbf{g}_i|_{\xi^3=0}$  y el sistema cartesiano local  $\mathbf{t}_i$ , está compuesta por los tres vectores de la base convectiva agrupados en columnas:

$$\mathbf{J}_n = [\mathbf{a}_1 \quad \mathbf{a}_2 \quad \mathbf{a}_3] = [\mathbf{x}_{,1} \quad \mathbf{x}_{,2} \quad \mathbf{d}] \quad (9.39)$$

Las componentes de estos vectores en el sistema cartesiano local son:

$$\mathbf{J}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{d} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{d} \cdot \mathbf{t}_2 \\ \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{t}_3 & \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{t}_3 & \mathbf{d} \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{d} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{d} \cdot \mathbf{t}_2 \\ 0 & 0 & \mathbf{d} \cdot \mathbf{t}_3 \end{bmatrix} \quad (9.40)$$

### 9.6. DEFORMACIONES UNITARIAS EN COORDENADAS CARTESIANAS

Su expresión es igual que en el sistema convectivo, aunque ahora las derivadas son con respecto a las coordenadas cartesianas locales. Estas derivadas respecto a las coordenadas locales se denotan con los subíndices  $a, b$ .

$$E_{ab} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}^P}{\partial \bar{x}_b} - \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_a} \cdot \frac{\partial \mathbf{X}^P}{\partial \bar{x}_b} \right) \quad (9.41)$$

Efectuando el mismo desarrollo y las mismas simplificaciones que en coordenadas convectivas, las expresiones obtenidas para las deformaciones unitarias son:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ab}^P &= \varepsilon_{ab} + \xi^3 \kappa_{ab} \quad a, b = 1, 2 \\ \varepsilon_{ab} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{x}_{,b} - \mathbf{X}_{,a} \cdot \mathbf{X}_{,b}) \\ \kappa_{ab} &= \frac{1}{2} (\mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{d}_{,b} + \mathbf{x}_{,b} \cdot \mathbf{d}_{,a} - \mathbf{X}_{,a} \cdot \mathbf{D}_{,b} - \mathbf{X}_{,b} \cdot \mathbf{D}_{,a}) \\ \gamma_a &= 2 E_{a3} = \mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{d} - \mathbf{X}_{,a} \cdot \mathbf{D} \end{aligned} \quad (9.42)$$

En lo sucesivo, las coordenadas cartesianas se indicarán con los subíndices  $a$  y  $b$ , por ejemplo en las expresiones anteriores:  $(\bullet)_{,a} \equiv \frac{\partial(\bullet)}{\partial \bar{x}_a}$ .

Estas deformaciones unitarias se agrupan en 3 vectores, que corresponden a las componentes de membrana, flexión y cortante respectivamente:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_M = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ 2\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\kappa} = \begin{Bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{Bmatrix} \quad \boldsymbol{\gamma} = \begin{Bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{Bmatrix} \quad (9.43)$$

Agrupando estos tres vectores se obtiene el vector de deformaciones unitarias de Green-Lagrange referidas al plano medio:

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_M \\ \boldsymbol{\kappa} \\ \boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} \quad (9.44)$$

### 9.7. INTERPOLACIÓN POR EL MEF

La interpolación de las coordenadas del plano medio de la cáscara sigue el procedimiento isoparamétrico, apoyándose en las coordenadas de los nudos del



elemento del elemento, situados en su plano medio. Estas coordenadas son, para el nudo  $I$ ,  $\mathbf{x}_I$  en el estado deformado y  $\mathbf{X}_I$  en el estado inicial.

$$\mathbf{X} = \sum_I N_I(\xi, \eta) \mathbf{X}_I \quad \mathbf{x} = \sum_I N_I(\xi, \eta) \mathbf{x}_I \quad (9.45)$$

La interpolación de los desplazamientos sigue el mismo método, en función de las deformaciones de los nudos  $\mathbf{U}_I$ :

$$\mathbf{u} = \sum_I N_I(\xi, \eta) \mathbf{U}_I \quad (9.46)$$

En particular, se consideran elementos de 4 nudos, en los que la interpolación corresponde a la ley bilineal clásica:

$$N_I(\xi, \eta) = \frac{1}{4} (1 + \xi_I \xi) (1 + \eta_I \eta) \quad (9.47)$$

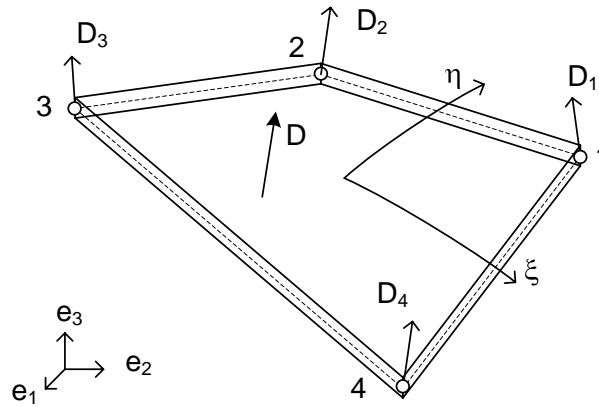


Figura 9. 4 Elemento finito cáscara de 4 nudos.

### 9.7.1 Jacobiana de la transformación

La matriz jacobiana de la transformación entre las coordenadas naturales del elemento  $\xi, \eta$  y las cartesianas es:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \mathbf{t}_1 & \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{x}_{,\xi} \cdot \mathbf{t}_2 & \mathbf{x}_{,\eta} \cdot \mathbf{t}_2 \end{bmatrix}^T \quad (9.48)$$

Por lo tanto, la relación entre las derivadas de las funciones de interpolación en ambos sistemas es:

$$\begin{Bmatrix} N_{I,1} \\ N_{I,2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} N_{I,\xi} \\ N_{I,\eta} \end{Bmatrix} \quad (9.49)$$

siendo  $N_{I,a} \equiv \frac{\partial N_I}{\partial \bar{x}_a}$ ,  $a = 1, 2$ .

### 9.7.2 Sistema cartesiano director en los nudos

Se trata de un sistema de ejes cuya base son tres vectores ortogonales unitarios: los dos primeros de ellos están situados en el plano tangente a la superficie media de la cáscara en cada nudo, y el tercero de ellos es el vector director en dicho nudo.

En el estado inicial, los vectores unitarios de este sistema son:  $\mathbf{D}_{1I}$ ,  $\mathbf{D}_{2I}$ , situados en el plano tangente y  $\mathbf{D}_I$  es el vector director (figura 9.5). Estos tres vectores de la base, agrupados por columnas, forman la matriz de rotación entre el sistema cartesiano de referencia y el sistema cartesiano director del nudo:

$$\Lambda_{DI}^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{1I} & \mathbf{D}_{2I} & \mathbf{D}_I \end{bmatrix} \quad (9.50)$$

Existen infinitas posibilidades de definir este sistema de ejes. Una solución sencilla, debida a Simó y Fox (1989) consiste en definir la matriz de rotación anterior mediante la transformación ortogonal siguiente, que requiere conocer el vector director  $\mathbf{D}_I$  y el vector  $\mathbf{e}_3$ , con tal de que  $\mathbf{e}_3 \neq \mathbf{D}_I$ :

$$\Lambda_{DI}^0 = (\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_I) \mathbf{I}_3 + \left[ \widetilde{\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}_I} \right] + \frac{1}{1 + \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{D}_I} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}_I) \otimes (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{D}_I) \quad (9.51)$$

Es decir que se cumple que:

$$\Lambda_{DI}^0 \mathbf{e}_a = \mathbf{D}_{aI} \quad \Lambda_{DI}^0 \mathbf{e}_3 = \mathbf{D}_I \quad (a = 1, 2 \quad I = 1, 4) \quad (9.52)$$

En una configuración deformada cualquiera, los vectores de la base del sistema cartesiano director en el nudo forman la matriz ortogonal siguiente:

$$\Lambda_{dI} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{1I} & \mathbf{d}_{2I} & \mathbf{d}_I \end{bmatrix} \quad (9.53)$$

Esta matriz no se obtiene por aplicación de la expresión (9.51), anterior sino por actualización de la matriz de rotación en el estado inicial  $\Lambda_{DI}^0$ , empleando para ello la matriz de rotación correspondiente al incremento en el vector director, como se describe más adelante.

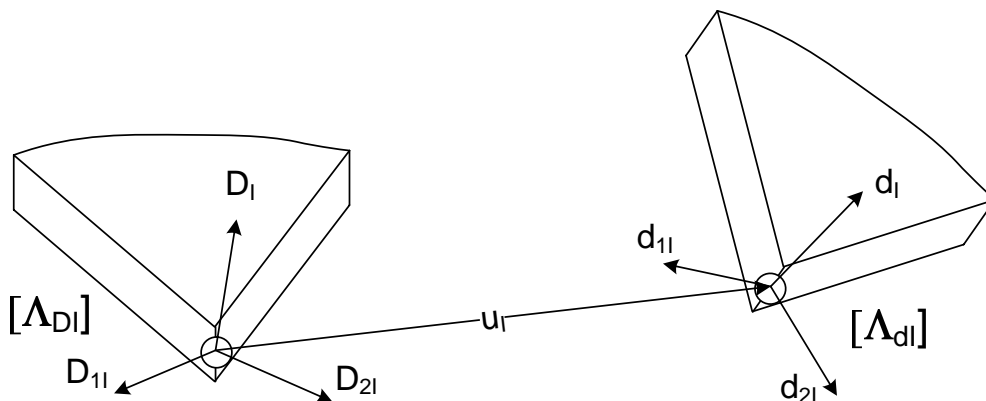


Figura 9.5 Sistema cartesiano director en un nudo.

### 9.7.3 Interpolación del vector director en el estado inicial

La interpolación del vector director en el estado inicial  $\mathbf{D}$  requiere un tratamiento un poco diferente. Sean  $\mathbf{D}_I$  los vectores directores en los nudos del elemento; consideramos la interpolación siguiente para el vector director dentro del elemento:

$$\mathbf{D} = \frac{\sum_I N_I \mathbf{D}_I}{\left| \sum_I N_I \mathbf{D}_I \right|} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{|\tilde{\mathbf{D}}|} = \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{\tilde{D}} \quad (9.54)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{D}} = \sum_I N_I \mathbf{D}_I$  el vector director promediado y  $\tilde{D}$  el módulo de  $\tilde{\mathbf{D}}$ .

Las deformaciones unitarias debidas a la flexión requieren el empleo de la derivada del vector director inicial respecto de las coordenadas cartesianas locales, cuya expresión es algo laboriosa de obtener y resulta ser:

$$\mathbf{D}_{,a} = \frac{1}{\tilde{D}} \left( \mathbf{I}_3 - \mathbf{D} \mathbf{D}^T \right) \sum_I N_{I,a} \mathbf{D}_I \quad (9.55)$$

### 9.7.4 Interpolación del incremento del vector director

La rotación del vector director y su actualización a partir de un incremento conocido del mismo ha sido presentada anteriormente (apartado 9.3.1). Dicha actualización es única y puede emplearse en los nudos del elemento; sin embargo la interpolación del incremento del vector director en el interior del elemento puede efectuarse de varias formas. De entre ellas, la más simple consiste simplemente en interpolar los incrementos de los vectores directores nodales:

$$\hat{\mathbf{d}} = \sum_I N_I \hat{\mathbf{d}}_I \quad (9.56)$$

Otra solución consiste en interpolar el vector de rotación incremental de cada nudo, que es  $\psi_I = \mathbf{d}_I \times \hat{\mathbf{d}}_I$ , en la forma:

$$\psi = \sum_I N_I \psi_I \quad (9.57)$$

Conociendo el valor interpolado de este vector, se pueden aplicar las expresiones ya presentadas para determinar la matriz de rotación incremental  $\hat{\mathbf{A}}$  y la nueva posición del vector  $\bar{\mathbf{d}}$ . En todo caso ambas interpolaciones producen resultados muy similares.

Empleando la primera de dichas interpolaciones, la derivada del incremento del vector director respecto de una de las coordenadas locales se puede expresar en la forma:

$$\hat{\mathbf{d}}_{,a} = \sum_I N_{I,a} \hat{\mathbf{d}}_I \quad (9.58)$$

### 9.7.5 Grados de libertad de giro

El cambio del vector director en el nudo I, que denominaremos  $\hat{\mathbf{d}}_I$  es un vector ortogonal a dicho vector director en el nudo  $\mathbf{d}_I$ , en cualquier configuración deformada, es decir que  $\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_I = 0$ .

Por lo tanto  $\hat{\mathbf{d}}_I$  se puede poner como una combinación lineal de los otros dos vectores de la base directora  $\mathbf{d}_{1I}, \mathbf{d}_{2I}$ , al ser estos ortogonales a  $\mathbf{d}_I$ , en la forma:

$$\hat{\mathbf{d}}_I = \mathbf{d}_{1I} \hat{\theta}_{1I} + \mathbf{d}_{2I} \hat{\theta}_{2I}. \quad (9.59)$$

siendo  $\hat{\theta}_{1I}, \hat{\theta}_{2I}$  las dos componentes de los dos vectores  $\mathbf{d}_{1I}$  y  $\mathbf{d}_{2I}$ , que dan lugar al cambio en la orientación del vector director (figura 9.6). Estas dos componentes se emplean como los grados de libertad de rotación incrementales del nudo I.

Agrupando los dos vectores en una matriz se puede poner en forma compacta:

$$\hat{\mathbf{d}}_I = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_{1I} & \mathbf{d}_{2I} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\theta}_{1I} \\ \hat{\theta}_{2I} \end{Bmatrix} = \mathbf{\Lambda}_{RI} \hat{\boldsymbol{\theta}}_I \quad (9.60)$$

Obsérvese que la matriz  $\mathbf{\Lambda}_{RI}$  es de dimensión 3x2 y está compuesta por las dos primeras columnas de la matriz de rotación  $\mathbf{\Lambda}_{dI}$  que define el sistema cartesiano en el nudo I. Por lo tanto se determinación es inmediata.

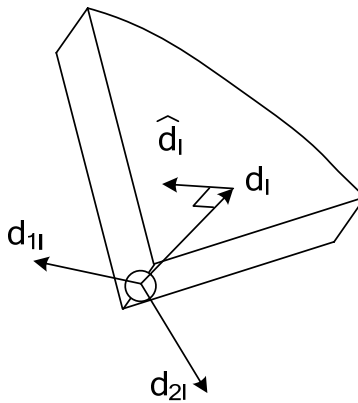


Figura 9.6 Incremento del vector director en el nudo.

## 9.8. VARIACIÓN DE LAS DEFORMACIONES UNITARIAS

### 9.8.1 Deformaciones unitarias de membrana

La variación de las deformaciones unitarias de membrana es:

$$\delta\varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} \left( \delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{x}_{,b} + \mathbf{x}_{,a} \cdot \delta\mathbf{x}_{,b} \right) \quad (9.61)$$

En su forma de vector:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_M = \begin{Bmatrix} \delta\varepsilon_{11} \\ \delta\varepsilon_{22} \\ 2\delta\varepsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{x}_{,1} \\ \delta\mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{x}_{,2} \\ \delta\mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{x}_{,2} + \mathbf{x}_{,1} \cdot \delta\mathbf{x}_{,2} \end{Bmatrix} \quad (9.62)$$

Empleando la interpolación isoparamétrica, las derivadas de las coordenadas  $\mathbf{x}$  se pueden expresar en función de las coordenadas de los nudos:

$$\mathbf{x}_{,a} = \sum N_{I,a} \mathbf{x}_I \quad a = 1,2 \quad (9.63)$$

La variación de esta derivada corresponde a la variación de las coordenadas de los nudos  $\mathbf{x}_I$ , que coincide con la variación de las deformaciones de los nudos  $\mathbf{U}_I$ :

$$\delta\mathbf{x}_{,a} = \sum N_{I,a} \delta\mathbf{x}_I = \sum N_{I,a} \delta\mathbf{U}_I \quad a = 1,2$$

Por lo tanto la expresión discretizada de estas tres deformaciones unitarias resulta ser:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_M = \sum_I \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{MI} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U}_I \\ \delta\boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix} \quad (9.64)$$

$$\mathbf{B}_{MI} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{,1}^T N_{I,1} \\ \mathbf{x}_{,2}^T N_{I,2} \\ \mathbf{x}_{,2}^T N_{I,1} + \mathbf{x}_{,1}^T N_{I,2} \end{bmatrix} \quad (9.65)$$

Agrupando las matrices  $\mathbf{B}_{MI}$  de todos los nudos se puede poner en forma compacta:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}_M = \mathbf{B}_M \delta\mathbf{U}^e \quad (9.66)$$

El vector  $\mathbf{U}^e$  contiene todos los grados de libertad del elemento, tres deformaciones y dos rotaciones para cada nudo:

$$\mathbf{U}^e = \left\{ \mathbf{U}_1 \quad \boldsymbol{\theta}_1 \quad \mathbf{U}_2 \quad \boldsymbol{\theta}_2 \quad \dots \quad \mathbf{U}_4 \quad \boldsymbol{\theta}_4 \right\}^T \quad (9.67)$$

### 9.8.2 Deformaciones unitarias de flexión

La variación de las deformaciones unitarias de curvatura por flexión es:

$$\delta\kappa_{ab} = \frac{1}{2} \left( \delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{d}_{,b} + \mathbf{x}_{,a} \cdot \delta\mathbf{d}_{,b} + \delta\mathbf{x}_{,b} \cdot \mathbf{d}_{,a} + \mathbf{x}_{,b} \cdot \delta\mathbf{d}_{,a} \right) \quad (9.68)$$

En su forma de vector:

$$\delta\kappa = \begin{Bmatrix} \delta\kappa_{11} \\ \delta\kappa_{22} \\ 2\delta\kappa_{12} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{d}_{,1} + \mathbf{x}_{,1} \cdot \delta\mathbf{d}_{,1} \\ \delta\mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{d}_{,2} + \mathbf{x}_{,2} \cdot \delta\mathbf{d}_{,2} \\ \delta\mathbf{x}_{,1} \cdot \mathbf{d}_{,2} + \mathbf{x}_{,1} \cdot \delta\mathbf{d}_{,2} + \delta\mathbf{x}_{,2} \cdot \mathbf{d}_{,1} + \mathbf{x}_{,2} \cdot \delta\mathbf{d}_{,1} \end{Bmatrix} \quad (9.69)$$

La variación de la derivada del vector director se interpola de la misma forma que la derivada de su incremento, al ser los incrementos y las variaciones equivalentes:

$$\delta\mathbf{d}_{,a} = \sum N_{I,a} \delta\mathbf{d}_I \quad a = 1,2 \quad (9.70)$$

La variación del vector director en cada nudo  $\delta\mathbf{d}_I$  es un vector ortogonal al propio vector director  $\mathbf{d}$ , y por lo tanto se representa en función de las variaciones de los dos grados de libertad de giro  $\theta$  existentes en el nudo

$$\delta\mathbf{d}_I = \mathbf{d}_{1I} \delta\theta_{1I} + \mathbf{d}_{2I} \delta\theta_{2I} \quad (9.71)$$

Para ello se emplea la misma matriz de rotación  $3 \times 2$ , que se empleó para los incrementos, cuyas dos columnas son los dos vectores  $\mathbf{d}_{1I}$  y  $\mathbf{d}_{2I}$  de la base cartesiana local al nudo.

$$\delta\mathbf{d}_I = \mathbf{\Lambda}_{RI} \delta\theta_I \quad (9.72)$$

Sustituyendo las distintas variaciones, se obtiene la expresión discretizada de las tres curvaturas  $\kappa$  de flexión:

$$\delta\kappa = \sum_I \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{FMI} & \mathbf{B}_{FFI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U}_I \\ \delta\theta_I \end{Bmatrix} \quad (9.73)$$

$$\mathbf{B}_{FMI} = \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{d}_{,1}^T \\ N_{I,2} \mathbf{d}_{,2}^T \\ N_{I,1} \mathbf{d}_{,2}^T + N_{I,2} \mathbf{d}_{,1}^T \end{bmatrix} \quad (9.74)$$

$$\mathbf{B}_{FFI} = \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{x}_{,1}^T \mathbf{\Lambda}_{RI} \\ N_{I,2} \mathbf{x}_{,2}^T \mathbf{\Lambda}_{RI} \\ \left( N_{I,2} \mathbf{x}_{,1}^T + N_{I,1} \mathbf{x}_{,2}^T \right) \mathbf{\Lambda}_{RI} \end{bmatrix} \quad (9.75)$$

Obsérvese que esta última matriz se puede poner en la forma:  $\mathbf{B}_{FFI} = \mathbf{B}_{MI} \mathbf{\Lambda}_{RI}$

Agrupando las matrices  $\mathbf{B}_{FMI}$  y  $\mathbf{B}_{FFI}$  de todos los nudos, la variación de las curvaturas se puede poner en forma compacta:

$$\delta\kappa = \mathbf{B}_F \delta\delta^e \quad (9.76)$$

### 9.8.3 Deformaciones unitarias de cortadura. Formulación en desplazamiento

La variación de las deformaciones unitarias de cortante es:

$$\delta\gamma_a = \delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,a} \cdot \delta\mathbf{d} \quad (9.77)$$

La variación del vector director puede interpolarse a partir de sus valores nodales, y éstos en función de las dos rotaciones nodales:

$$\delta\mathbf{d} = \sum N_I \delta\mathbf{d}_I = \sum N_I \mathbf{\Lambda}_{RI} \delta\boldsymbol{\theta}_I \quad (9.78)$$

Sustituyendo se obtiene:

$$\delta\gamma_a = \sum N_{I,a} \delta\mathbf{U}_I \cdot \mathbf{d} + \mathbf{x}_{,a} \cdot \sum N_I \mathbf{\Lambda}_{RI} \delta\boldsymbol{\theta}_I \quad (9.79)$$

Reordenando y agrupando en un vector, las dos deformaciones de cortadura se pueden expresar en función de las deformaciones nodales en la forma:

$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \sum_I \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{CMI} & \mathbf{B}_{CFI} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U}_I \\ \delta\boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix} \quad (9.80)$$

$$\mathbf{B}_{CMI} = \begin{bmatrix} N_{I,1} \mathbf{d}^T \\ N_{I,2} \mathbf{d}^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_{CFI} = \begin{bmatrix} N_I \mathbf{x}_{,1}^T & \mathbf{\Lambda}_{RI} \\ N_I \mathbf{x}_{,2}^T & \mathbf{\Lambda}_{RI} \end{bmatrix} \quad (9.81)$$

Agrupando todas las matrices se puede poner en forma compacta:

$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{B}_C \delta\mathbf{U}^e \quad (9.82)$$

El empleo de esta representación de las tensiones cortantes de lugar al fenómeno del bloqueo por cortante ya conocido en las placas. Por esta razón se emplean campos impuestos de deformación de cortante, como se explica a continuación.

### 9.8.4 Campo impuesto de deformaciones unitarias de cortadura

Con objeto de evitar el bloqueo por cortante, y siguiendo el mismo método que en el caso lineal, se emplea un campo impuesto de deformación unitaria cortante, con variación lineal en las coordenadas naturales del elemento.

El campo de  $\gamma_\xi$  es variable en la dirección  $\eta$  y se ajusta con los valores de dicha tensión en los puntos A ( $\eta=-1$ ) y C ( $\eta=1$ ). El campo  $\gamma_\eta$  es variable en la dirección  $\xi$  y se ajusta con los valores en los puntos B y D.

$$\gamma_\xi = \frac{1}{2}(1-\eta)\gamma_\xi^A + \frac{1}{2}(1+\eta)\gamma_\xi^C \quad (9.83)$$

$$\gamma_\eta = \frac{1}{2}(1-\xi)\gamma_\eta^D + \frac{1}{2}(1+\xi)\gamma_\eta^B$$

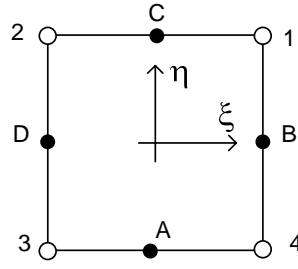


Figura 9.7 Puntos para la definición del campo de cortadura.

Los valores de las deformaciones de cortante en los puntos de ajuste son:

$$\begin{aligned}\gamma_{\xi}^A &= \mathbf{x}_{,\xi}^A \cdot \mathbf{d}^A - \mathbf{X}_{,\xi}^A \cdot \mathbf{D}^A & \gamma_{\xi}^C &= \mathbf{x}_{,\xi}^C \cdot \mathbf{d}^C - \mathbf{X}_{,\xi}^C \cdot \mathbf{D}^C \\ \gamma_{\eta}^B &= \mathbf{x}_{,\eta}^B \cdot \mathbf{d}^B - \mathbf{X}_{,\eta}^B \cdot \mathbf{D}^B & \gamma_{\eta}^D &= \mathbf{x}_{,\eta}^D \cdot \mathbf{d}^D - \mathbf{X}_{,\eta}^D \cdot \mathbf{D}^D\end{aligned}\quad (9.84)$$

Las derivadas de las coordenadas en los puntos del ajuste tienen expresiones inmediatas, en base a la hipótesis de interpolación bilineal:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_{,\xi}^A &= (\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3)/2 & \mathbf{x}_{,\xi}^C &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)/2 \\ \mathbf{x}_{,\eta}^B &= (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4)/2 & \mathbf{x}_{,\eta}^D &= (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)/2\end{aligned}\quad (9.85)$$

El vector director en los puntos del ajuste tiene asimismo expresiones inmediatas aproximadas en función de sus valores en los nudos:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}^A &= (\mathbf{d}_3 + \mathbf{d}_4)/2 & \mathbf{d}^B &= (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_4)/2 \\ \mathbf{d}^C &= (\mathbf{d}_1 + \mathbf{d}_2)/2 & \mathbf{d}^D &= (\mathbf{d}_2 + \mathbf{d}_3)/2\end{aligned}\quad (9.86)$$

La variación del campo de deformaciones cortantes impuesto es:

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{\xi} &= \frac{1}{2}(1-\eta)\delta\gamma_{\xi}^A + \frac{1}{2}(1+\eta)\delta\gamma_{\xi}^C \\ \delta\gamma_{\eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi)\delta\gamma_{\eta}^D + \frac{1}{2}(1+\xi)\delta\gamma_{\eta}^B\end{aligned}\quad (9.87)$$

Desarrollando las variaciones de las deformaciones en los nudos:

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{\xi} &= \frac{1}{2}(1-\eta)\left(\delta\mathbf{x}_{,\xi}^A \cdot \mathbf{d}^A + \mathbf{x}_{,\xi}^A \cdot \delta\mathbf{d}^A\right) + \frac{1}{2}(1+\eta)\left(\delta\mathbf{x}_{,\xi}^C \cdot \mathbf{d}^C + \mathbf{x}_{,\xi}^C \cdot \delta\mathbf{d}^C\right) \\ \delta\gamma_{\eta} &= \frac{1}{2}(1-\xi)\left(\delta\mathbf{x}_{,\eta}^D \cdot \mathbf{d}^D + \mathbf{x}_{,\eta}^D \cdot \delta\mathbf{d}^D\right) + \frac{1}{2}(1+\xi)\left(\delta\mathbf{x}_{,\eta}^B \cdot \mathbf{d}^B + \mathbf{x}_{,\eta}^B \cdot \delta\mathbf{d}^B\right)\end{aligned}\quad (9.88)$$

Sustituyendo las distintas magnitudes se obtiene:

$$\begin{aligned}\delta\gamma_{\xi} &= \frac{1}{4}(1-\eta)\left((\delta\mathbf{x}_4 - \delta\mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{d}^A + \mathbf{x}_{,\xi}^A \cdot (\delta\mathbf{d}_3 + \delta\mathbf{d}_4)\right) \\ &+ \frac{1}{4}(1+\eta)\left((\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{d}^C + \mathbf{x}_{,\xi}^C \cdot (\delta\mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{d}_2)\right)\end{aligned}\quad (9.89)$$



$$\begin{aligned}\delta\gamma_\eta &= \frac{1}{4}(1-\xi)\left((\delta\mathbf{x}_2 - \delta\mathbf{x}_3) \cdot \mathbf{d}^D + \mathbf{x}_{,\eta}^D \cdot (\delta\mathbf{d}_2 + \delta\mathbf{d}_3)\right) \\ &+ \frac{1}{4}(1+\xi)\left((\delta\mathbf{x}_1 - \delta\mathbf{x}_4) \cdot \mathbf{d}^B + \mathbf{x}_{,\eta}^B \cdot (\delta\mathbf{d}_1 + \delta\mathbf{d}_4)\right)\end{aligned}$$

Considerando que:  $\delta\mathbf{x}_I = \delta\mathbf{U}_I$  y que  $\delta\mathbf{d}_I = \mathbf{\Lambda}_{RI} \delta\boldsymbol{\theta}_I$ , y sustituyendo todas las expresiones anteriores en el campo de deformaciones cortantes impuesto, se puede expresar éste en función de las deformaciones nodales, lo cual define la matriz  $\mathbf{B}_{LC}$ :

$$\delta\boldsymbol{\gamma}_L = \sum_I \mathbf{B}_{LCI} \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{u}_I \\ \delta\boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix} = \mathbf{B}_{LC} \delta\mathbf{U}^e \quad (9.90)$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{LC} &= \frac{1}{4} \begin{bmatrix} (1+\eta)\mathbf{d}^{C^T} & (1+\eta)\mathbf{x}_{,\xi}^{C^T} \mathbf{\Lambda}_{R1} & -(1+\eta)\mathbf{d}^{C^T} & (1+\eta)\mathbf{x}_{,\xi}^{C^T} \mathbf{\Lambda}_{R2} & \cdots \\ (1+\xi)\mathbf{d}^{B^T} & (1+\xi)\mathbf{x}_{,\eta}^{B^T} \mathbf{\Lambda}_{R1} & (1-\xi)\mathbf{d}^{D^T} & (1-\xi)\mathbf{x}_{,\eta}^{D^T} \mathbf{\Lambda}_{R2} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -(1-\eta)\mathbf{d}^{A^T} & (1-\eta)\mathbf{x}_{,\xi}^{A^T} \mathbf{\Lambda}_{R3} & (1-\eta)\mathbf{d}^{A^T} & (1-\eta)\mathbf{x}_{,\xi}^{A^T} \mathbf{\Lambda}_{R4} \\ \cdots & \cdots & -(1-\xi)\mathbf{d}^{D^T} & (1-\xi)\mathbf{x}_{,\eta}^{D^T} \mathbf{\Lambda}_{R3} & -(1+\xi)\mathbf{d}^{B^T} & (1+\xi)\mathbf{x}_{,\eta}^{B^T} \mathbf{\Lambda}_{R4} \end{bmatrix}\end{aligned} \quad (9.91)$$

Finalmente, estas deformaciones de cortadura se expresan en el sistema general mediante la matriz jacobiana inversa, obteniéndose la matriz sustitutiva para las deformaciones cortantes:

$$\delta\boldsymbol{\gamma} = \mathbf{J}^{-1} \delta\boldsymbol{\gamma}_L = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{B}_{LC} \delta\boldsymbol{\delta}^e = \bar{\mathbf{B}}_C \delta\boldsymbol{\delta}^e \quad (9.92)$$

### 9.8.5 Expresión final

Agrupando las expresiones de las variaciones de los tres tipos de deformaciones unitarias se obtiene la variación del tensor de Green-Lagrange.

$$\delta\bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} \delta\boldsymbol{\varepsilon}_M \\ \delta\boldsymbol{\kappa} \\ \delta\boldsymbol{\gamma} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_M \\ \mathbf{B}_F \\ \bar{\mathbf{B}}_C \end{Bmatrix} \delta\mathbf{U}^e = \mathbf{B} \delta\mathbf{U}^e \quad (9.93)$$

En lugar de la matriz de cortante original  $\mathbf{B}_C$  se puede utilizar la sustitutiva  $\bar{\mathbf{B}}_C$  lo cual equivale a emplear directamente la formulación en desplazamiento en lugar de la de campo de cortante impuesto.

## 9.9. ESFUERZOS INTERIORES

Los esfuerzos interiores en la cáscara son las integrales al espesor de las tensiones de Piola-Kirchhoff. Dichos esfuerzos interiores son conjugados energéticamente de las deformaciones unitarias de Green-Lagrange.

Los esfuerzos interiores se pueden separar en tres tipos (figura 10.22): fuerzas efectivas contenidas en el plano tangente a la superficie media  $\mathbf{n}_M$  (habitualmente conocidas como fuerzas de membrana), momentos de flexión y torsión englobados en el vector  $\mathbf{m}_F$  y esfuerzos cortantes en dirección normal a la superficie media  $\mathbf{q}_C$ :

$$\mathbf{n}_M = \begin{Bmatrix} n_{11} \\ n_{22} \\ n_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{m}_F = \begin{Bmatrix} m_{11} \\ m_{22} \\ m_{12} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{q}_C = \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} \quad (9.94)$$

Todos estos esfuerzos se agrupan en un único vector:

$$\bar{\mathbf{m}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{n}_M \\ \mathbf{m}_F \\ \mathbf{q}_C \end{Bmatrix} \quad (9.95)$$

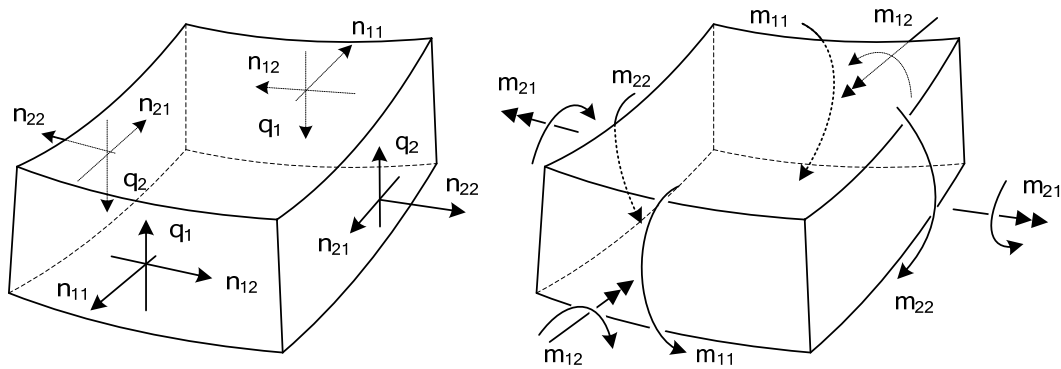


Figura 9.8 Esfuerzos interiores en una cáscara.

Suponiendo un material elástico, el incremento de los esfuerzos interiores se relaciona con el incremento de las deformaciones unitarias por medio de las ecuaciones constitutivas de proporcionalidad, las cuales se pueden expresar en la forma siguiente:

$$\Delta \mathbf{n}_M = \mathbf{C}_M \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_M \quad \Delta \mathbf{m}_F = \mathbf{C}_F \Delta \boldsymbol{\kappa} \quad \Delta \mathbf{q}_C = \mathbf{C}_C \Delta \boldsymbol{\gamma} \quad (9.96)$$

siendo los matrices constantes:

$$\mathbf{C}_M = \frac{Eh}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{C}_F = \frac{h^2}{12} \mathbf{C}_M \quad \mathbf{C}_C = kGh \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9.97)$$

$k$  es el factor de corrección por cortante y las restantes propiedades del material ya han sido definidas. Agrupando las expresiones anteriores se puede poner en forma compacta  $\Delta \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{E}}$ , siendo  $\mathbf{C}$  el tensor de elasticidad, definido por agrupación diagonal de las matrices anteriores:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_M & & \\ & \mathbf{C}_F & \\ & & \mathbf{C}_C \end{bmatrix} \quad (9.98)$$

### 9.10. TRABAJO VIRTUAL. FUERZAS EQUIVALENTES A LOS ESFUERZOS INTERIORES

El trabajo virtual interior se puede expresar en función de la variación del tensor de Green-Lagrange  $\delta\bar{\mathbf{E}}$  y del vector de esfuerzos interiores  $\bar{\mathbf{m}}$  (que son las resultantes de las tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ ) en la forma:

$$\delta W_I = \int_{A^0} \delta\bar{\mathbf{E}}^T \bar{\mathbf{m}} dA^0 \quad (9.99)$$

siendo  $A^0$  el área inicial de la superficie media de la cáscara. Sustituyendo la variación del tensor de Green-Lagrange por medio de la matriz  $\mathbf{B}$  (ecuación (9.93)) se obtiene:

$$\delta W_I = \delta\mathbf{U}^{eT} \int_{A^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{m}} dA^0 \quad (9.100)$$

Esta expresión define el vector de fuerzas nodales equivalentes a los esfuerzos interiores en la cáscara:

$$\mathbf{Q} \equiv \int_{A^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{m}} dA^0 \quad (9.101)$$

$$\mathbf{Q} \equiv \int_{A^0} \mathbf{B}^T \bar{\mathbf{m}} dA^0 = \int_{A^0} \left( \mathbf{B}_M^T \mathbf{n}_M + \mathbf{B}_F^T \mathbf{m}_F + \bar{\mathbf{B}}_C^T \mathbf{q}_C \right) dA^0 \quad (9.102)$$

### 9.11. ECUACIONES INCREMENTALES DE EQUILIBRIO

La linealización del trabajo virtual interior con respecto a un incremento de las deformaciones  $\hat{\mathbf{u}}$  produce los dos términos habituales del incremento de dicho trabajo virtual:

$$\Delta(\delta W_I) = \int_{A^0} \delta\bar{\mathbf{E}}^T \Delta\bar{\mathbf{m}} dA^0 + \int_{A^0} \Delta(\delta\bar{\mathbf{E}})^T \bar{\mathbf{m}} dA^0 \quad (9.103)$$

El primer término corresponde al incremento de los esfuerzos manteniendo fijas las deformaciones unitarias y da lugar a la componente material de la matriz de rigidez tangente. El segundo corresponde al incremento de las deformaciones unitarias virtuales manteniendo los esfuerzos fijos y da lugar a la componente geométrica de la rigidez tangente.

### 9.11.1 Componente material de la matriz tangente

Se sustituye en el primer sumando de (9.103) la relación entre el incremento de los esfuerzos  $\Delta \bar{\mathbf{m}}$  y el incremento de las deformaciones unitarias  $\Delta \bar{\mathbf{E}}$   $\Delta \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{E}}$ :

$$\Delta(\delta W_I)_{mat} \equiv \int_{A^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \Delta \bar{\mathbf{m}} dA^0 = \int_{A^0} \delta \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{C} \Delta \bar{\mathbf{E}} dA^0 \quad (9.104)$$

La variación en la deformación unitaria de Green-Lagrange viene dada por (9.93),  $\delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \delta \mathbf{U}^e$ . El incremento de dicha deformación tiene una expresión similar, dada la similitud entre variaciones e incrementos, es decir:

$$\Delta \bar{\mathbf{E}} = \mathbf{B} \hat{\mathbf{U}}^e \quad (9.105)$$

siendo  $\hat{\mathbf{U}}^e$  los incrementos en los grados de libertad del elemento. Sustituyendo ambas se obtiene la expresión habitual de la componente material del operador tangente, en la que se identifica la matriz de rigidez tangente:

$$\Delta(\delta W_I)_{mat} = \delta \mathbf{U}^e \int_{A^0} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA^0 \hat{\mathbf{U}}^e = \delta \mathbf{U}^e \hat{\mathbf{K}}_D \hat{\mathbf{U}}^e \quad (9.106)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \int_{A^0} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dA^0 \quad (9.107)$$

Dada la estructura de  $\mathbf{B}$  y de  $\mathbf{C}$ , esta matriz se puede desarrollar en función de los distintos tipos de deformaciones unitarias existentes:

$$\hat{\mathbf{K}}_D = \int_{A^0} \mathbf{B}_M^T \mathbf{C}_M \mathbf{B}_M dA^0 + \int_{A^0} \mathbf{B}_F^T \mathbf{C}_F \mathbf{B}_F dA^0 + \int_{A^0} \bar{\mathbf{B}}_C^T \mathbf{C}_C \bar{\mathbf{B}}_C dA^0 \quad (9.108)$$

### 9.11.2 Componente geométrica de la matriz tangente

La componente geométrica del operador tangente corresponde al incremento de la variación de las deformaciones unitarias:

$$\Delta(\delta W_I)_{geom} \equiv \int_{A^0} \Delta(\delta \bar{\mathbf{E}})^T \bar{\mathbf{m}} dA^0 \quad (9.109)$$

Desarrollando los valores del integrando:

$$\Delta(\delta W_I)_{geom} \equiv \int_{A^0} \sum_{a,b=1,2} \left( n_{ab} \Delta(\delta \varepsilon_{ab}) + m_{ab} \Delta(\delta \kappa_{ab}) + Q_a \Delta(\delta \gamma_a) \right) dA^0 \quad (9.110)$$

Así pues el incremento del trabajo virtual tiene tres sumandos, uno para cada tipo de deformación unitaria y esfuerzo.

- Contribución de las deformaciones unitarias de membrana. La variación de estas deformaciones unitarias es:

$$\delta \varepsilon_{ab} = \frac{1}{2} (\delta \mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{x}_{,b} + \mathbf{x}_{,a} \cdot \delta \mathbf{x}_{,b}) \quad (9.111)$$

Su incremento al incrementarse las deformaciones es

$$\Delta(\delta\varepsilon_{ab}) = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \Delta\mathbf{x}_{,b} + \Delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \delta\mathbf{x}_{,b}) \quad (9.112)$$

Introduciendo las leyes de interpolación:

$$\delta\mathbf{x}_{,a} = \sum N_{I,a} \delta\mathbf{U}_I \quad \Delta\mathbf{x}_{,a} = \sum N_{I,a} \hat{\mathbf{U}}_I \quad (9.113)$$

se obtiene el siguiente valor del incremento de la variación de la deformación unitaria:

$$\Delta(\delta\varepsilon_{ab}) = \frac{1}{2} \sum_{I,J} (N_{I,a} N_{J,b} + N_{I,b} N_{J,a}) \delta\mathbf{U}_I \cdot \hat{\mathbf{U}}_J \quad (9.114)$$

Con este valor, el primer sumando del integrando del incremento del trabajo virtual interior (9.110) se puede poner en la forma:

$$\sum_{a,b} n_{ab} \Delta(\delta\varepsilon_{ab}) = \sum_{I,J} \delta\mathbf{U}_I^T \begin{bmatrix} s_{IJ}^M & 0 & 0 \\ 0 & s_{IJ}^M & 0 \\ 0 & 0 & s_{IJ}^M \end{bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_J \quad (9.115)$$

siendo la constante  $s_{IJ}^M = \sum_{a,b=1,2} \frac{n_{ab}}{2} (N_{I,a} N_{J,b} + N_{I,b} N_{J,a})$

$$s_{IJ}^M = n_{11} N_{I,1} N_{J,1} + n_{22} N_{I,2} N_{J,2} + n_{12} (N_{I,1} N_{J,2} + N_{I,2} N_{J,1}) \quad (9.116)$$

Por lo tanto la componente debida a los esfuerzos de membrana de la componente geométrica del operador tangente es:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo}^M = \sum_{I,J} \delta\mathbf{U}_I^T \left( \int_{A^0} s_{IJ}^M \mathbf{I}_3 dA^0 \right) \hat{\mathbf{U}}_J \quad (9.117)$$

Esta expresión proporciona la componente debida a los esfuerzos de membrana de la matriz de rigidez geométrica, que como se observa sólo afecta a las deformaciones de los nudos, y no a sus rotaciones. Puede ponerse en la forma estándar:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo}^F = \sum_I \sum_J \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U}_I \\ \delta\boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix}^T \mathbf{K}_{\sigma IJ}^M \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_J \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_J \end{Bmatrix} \quad (9.118)$$

$$\mathbf{K}_{\sigma IJ}^M = \int_{A^0} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{3 \times 3} & \mathbf{0}_{3 \times 2} \\ \mathbf{0}_{2 \times 3} & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} s_{IJ}^M dA^0 \quad (9.119)$$

• Contribución de las deformaciones unitarias de flexión. La variación de estas deformaciones unitarias es:

$$\delta\kappa_{ab} = \frac{1}{2}(\delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{d}_{,b} + \mathbf{x}_{,a} \cdot \delta\mathbf{d}_{,b} + \delta\mathbf{x}_{,b} \cdot \mathbf{d}_{,a} + \mathbf{x}_{,b} \cdot \delta\mathbf{d}_{,a}) \quad (9.120)$$

Su incremento al aplicarse un incremento en la configuración deformada de la cáscara es:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta\kappa_{ab}) = & \frac{1}{2} \left( \delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{,b} + \Delta\mathbf{x}_{,a} \cdot \delta\mathbf{d}_{,b} + \delta\mathbf{x}_{,b} \cdot \hat{\mathbf{d}}_{,a} + \Delta\mathbf{x}_{,b} \cdot \delta\mathbf{d}_{,a} \right) \\ & + \frac{1}{2} \left( \mathbf{x}_{,a} \cdot \Delta(\delta\mathbf{d}_{,b}) + \mathbf{x}_{,b} \cdot \Delta(\delta\mathbf{d}_{,a}) \right) \end{aligned} \quad (9.121)$$

Las siguientes magnitudes que intervienen en esta expresión se obtienen de manera inmediata:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{x}_{,a} &= \sum N_{I,a} \delta\mathbf{U}_I \\ \Delta\mathbf{x}_{,a} &= \sum N_{I,a} \hat{\mathbf{U}}_I \\ \delta\mathbf{d}_{,a} &= \sum N_{I,a} \delta\mathbf{d}_I = \sum N_{I,a} \mathbf{\Lambda}_{RI} \boldsymbol{\theta}_I \\ \hat{\mathbf{d}}_{,a} &= \sum N_{I,a} \hat{\mathbf{d}}_I = \sum N_{I,a} \mathbf{\Lambda}_{RI} \hat{\boldsymbol{\theta}}_I \end{aligned} \quad (9.122)$$

El incremento de la variación del vector director requiere un desarrollo más elaborado. En primer lugar se aplica la interpolación a la derivada de la variación de  $\mathbf{d}$ :

$$\Delta(\delta\mathbf{d}_{,a}) = \sum N_{I,a} \Delta(\delta\mathbf{d}_I) \quad (9.123)$$

Se ha demostrado que aplicar un incremento  $\hat{\mathbf{d}}_I$  a un vector director  $\mathbf{d}_I$  corresponde a una rotación infinitesimal alrededor de un vector  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_I = \mathbf{d}_I \times \hat{\mathbf{d}}_I$ . Por lo tanto, al aplicar un incremento  $\hat{\mathbf{d}}_I$ , el vector variación  $\delta\mathbf{d}_I$  sufrirá un incremento de valor dado por dicha rotación:

$$\Delta(\delta\mathbf{d}_I) = \hat{\boldsymbol{\psi}}_I \times \delta\mathbf{d}_I \quad (9.124)$$

Sustituyendo el valor de  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_I$

$$\Delta(\delta\mathbf{d}_I) = (\mathbf{d}_I \times \hat{\mathbf{d}}_I) \times \delta\mathbf{d}_I \quad (9.125)$$

Aplicando la expresión del triple producto vectorial, puede ponerse en la forma:

$$\Delta(\delta\mathbf{d}_I) = -(\delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_I) \mathbf{d}_I \quad (9.126)$$

Por lo tanto el término buscado es:

$$\Delta(\delta\mathbf{d}_{,a}) = -\sum N_{I,a} (\delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_I) \mathbf{d}_I \quad (9.127)$$

Sustituyendo en la expresión (9.121) de la variación de la deformación unitaria de curvatura se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta\kappa_{ab}) &= \frac{1}{2} \sum_{I,J} \left( N_{I,a} N_{J,b} \delta\mathbf{U}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_J + N_{I,b} N_{J,a} \delta\mathbf{U}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_J \right) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{I,J} \left( N_{J,a} N_{I,b} \delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{U}}_J + N_{J,b} N_{I,a} \delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{U}}_J \right) \\
&- \frac{1}{2} \mathbf{x}_{,a} \cdot \left( \sum_I N_{I,b} (\delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_I) \mathbf{d}_I \right) - \frac{1}{2} \mathbf{x}_{,b} \cdot \left( \sum_I N_{I,a} (\delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_I) \mathbf{d}_I \right)
\end{aligned} \tag{9.128}$$

Reagrupando:

$$\begin{aligned}
\Delta(\delta\kappa_{ab}) &= \frac{1}{2} \sum_{I,J} \left( N_{I,a} N_{J,b} + N_{I,b} N_{J,a} \right) (\delta\mathbf{U}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_J) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{I,J} \left( N_{J,a} N_{I,b} + N_{J,b} N_{I,a} \right) (\delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{U}}_J) \\
&- \frac{1}{2} \sum_I \left( N_{I,b} \mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{d}_I + N_{I,a} \mathbf{x}_{,b} \cdot \mathbf{d}_I \right) (\delta\mathbf{d}_I \cdot \hat{\mathbf{d}}_I)
\end{aligned} \tag{9.129}$$

Con este valor, el segundo sumando del integrando del incremento del trabajo virtual (9.110) se puede poner en la forma:

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b} m_{ab} \Delta(\delta\kappa_{ab}) &= \sum_{I,J} (\delta\mathbf{U}_I^T \mathbf{I}_3 \hat{\mathbf{d}}_J) s_{FM}^{IJ} \\
&+ \sum_{I,J} (\delta\mathbf{d}_I^T \mathbf{I}_3 \hat{\mathbf{U}}_J) s_{FM}^{IJ} + \sum_I (\delta\mathbf{d}_I^T \mathbf{I}_3 \hat{\mathbf{d}}_I) s_{FF}^I
\end{aligned} \tag{9.130}$$

siendo las constantes:

$$\begin{aligned}
s_{FM}^{IJ} &= \frac{1}{2} \sum_{a,b} m_{ab} \left( N_{I,a} N_{J,b} + N_{I,b} N_{J,a} \right) \\
s_{FM}^{IJ} &= m_{11} N_{I,1} N_{J,1} + m_{22} N_{I,2} N_{J,2} + m_{12} \left( N_{I,1} N_{J,2} + N_{I,2} N_{J,1} \right) \\
s_{FF}^I &= -\frac{1}{2} \sum_{a,b} m_{ab} \left( N_{I,b} \mathbf{x}_{,a} \cdot \mathbf{d}_I + N_{I,a} \mathbf{x}_{,b} \cdot \mathbf{d}_I \right)
\end{aligned} \tag{9.131}$$

Los incrementos y variaciones de los vectores directores nodales se sustituyen en función de las dos rotaciones nodales por medio de la matriz de rotación 3x2:  $\hat{\mathbf{d}}_I = \mathbf{\Lambda}_{RI} \hat{\boldsymbol{\theta}}_I$ . Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{a,b} m_{ab} \Delta(\delta\kappa_{ab}) &= \sum_{I,J} (\delta\mathbf{U}_I^T \mathbf{I}_3 \mathbf{\Lambda}_{RJ} \hat{\boldsymbol{\theta}}_J) s_{FM}^{IJ} \\
&+ \sum_{I,J} (\delta\boldsymbol{\theta}_I^T \mathbf{\Lambda}_{RI}^T \mathbf{I}_3 \hat{\mathbf{U}}_J) s_{FM}^{IJ} + \sum_I (\delta\boldsymbol{\theta}_I^T \mathbf{\Lambda}_{RI}^T \mathbf{I}_3 \mathbf{\Lambda}_{RI} \hat{\boldsymbol{\theta}}_I) s_{FF}^I
\end{aligned} \tag{9.132}$$

Obsérvese que en el último sumatorio, el producto  $\mathbf{\Lambda}_{RI}^T \mathbf{I}_3 \mathbf{\Lambda}_{RI} = \mathbf{I}_2$  ya que las columnas de las matrices  $\mathbf{\Lambda}_{RI}$  son ortogonales entre si. Además, este último sumatorio

se puede transformar en uno doble en los índices  $I, J$ , introduciendo para ello la delta de Kronecker.

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} m_{ab} \Delta(\delta\kappa_{ab}) &= \sum_{I,J} (\delta\mathbf{U}_I^T \mathbf{I}_3 \mathbf{\Lambda}_{RJ} \hat{\boldsymbol{\theta}}_J) s_{FM}^{IJ} \\ &+ \sum_{I,J} (\delta\boldsymbol{\theta}_I^T \mathbf{\Lambda}_{RI}^T \mathbf{I}_3 \hat{\mathbf{U}}_J) s_{FM}^{JI} + \sum_{I,J} \delta_{IJ}^{kron} (\delta\hat{\boldsymbol{\theta}}_I^T \mathbf{I}_2 \hat{\boldsymbol{\theta}}_J) s_{FF}^I \end{aligned} \quad (9.133)$$

Esta expresión puede ponerse en forma matricial introduciendo la matriz  $\mathbf{K}_{0\sigma IJ}^F$ :

$$\begin{aligned} \sum_{a,b} m_{ab} \Delta(\delta\kappa_{ab}) &= \sum_I \sum_J \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U}_I \\ \delta\boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & s_{FM}^{IJ} \mathbf{I}_3 \mathbf{\Lambda}_{RJ} \\ s_{FM}^{IJ} \mathbf{\Lambda}_{RI}^T \mathbf{I}_3 & \delta_{IJ}^{kron} s_{FF}^I \mathbf{I}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_J \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_J \end{Bmatrix} \\ \sum_{a,b} m_{ab} \Delta(\delta\kappa_{ab}) &= \sum_I \sum_J \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U}_I \\ \delta\boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix}^T \mathbf{K}_{0\sigma IJ}^F \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_J \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_J \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (9.134)$$

Por lo tanto la componente debida a los esfuerzos de flexión del operador tangente geométrico es:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo}^F \equiv \int_{A^0} \sum_{a,b=1,2} m_{ab} \Delta(\delta\kappa_{ab}) dA^0 \quad (9.135)$$

$$\Delta(\delta W_I)_{geo}^F = \sum_I \sum_J \begin{Bmatrix} \delta\mathbf{U}_I \\ \delta\boldsymbol{\theta}_I \end{Bmatrix}^T \int_{A^0} \mathbf{K}_{0\sigma IJ}^F dA^0 \begin{Bmatrix} \hat{\mathbf{U}}_J \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_J \end{Bmatrix} \quad (9.136)$$

Esta expresión proporciona la componente debida a los esfuerzos de flexión de la matriz de rigidez geométrica.

- Contribución de las deformaciones unitarias de cortante. Su expresión es:

$$\begin{aligned} \Delta(W_I)_{geo}^C &= \int_{A^0} \sum_{a=1,2} q_a \Delta(\delta\gamma_a) dA^0 = \int_{A^0} \mathbf{q}_C^T \Delta(\delta\boldsymbol{\gamma}) dA^0 \\ &= \int_{A^0} \mathbf{q}_C^T \mathbf{J}^{-1} \Delta(\delta\boldsymbol{\gamma}_L) dA^0 \end{aligned} \quad (9.137)$$

Se define el vector de esfuerzos cortantes en el sistema natural del elemento:

$$\mathbf{q}_{CL} = \begin{Bmatrix} q_\xi \\ q_\eta \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-T} \mathbf{q}_C \quad (9.138)$$

Con lo que se puede poner:

$$\Delta(W_I)_{geo}^C = \int_{A^0} \sum_{a=1,2} q_a \Delta(\delta\gamma_a) dA^0 = \int_{A^0} \mathbf{q}_{CL}^T \Delta(\delta\boldsymbol{\gamma}) dA^0 \quad (9.139)$$

El incremento de la variación de las tensiones cortantes se calcula a partir del campo de deformaciones impuesto. En particular se incrementa directamente la expresión de



su variación (9.89). Todas las expresiones necesarias para efectuar dicho incremento ya han sido obtenidas previamente en apartados anteriores, como por ejemplo:  $\Delta \mathbf{x}_{,\xi}^L = (\hat{\mathbf{U}}_M - \hat{\mathbf{U}}_N)/2$  y  $\hat{\mathbf{d}}^L = (\hat{\mathbf{d}}_M + \hat{\mathbf{d}}_N)/2$ , donde los índices corresponden al conjunto:  $(L, M, N) = \{(A, 4, 3), (B, 1, 4), (C, 1, 2), (D, 2, 3)\}$ . Debe emplearse asimismo la ecuación (9.126). Efectuando las sustituciones y reordenando se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta \delta \gamma_\xi &= \frac{1}{8}(1-\eta) \left[ (\delta \mathbf{U}_4 - \delta \mathbf{U}_3) \cdot (\hat{\mathbf{d}}_4 + \hat{\mathbf{d}}_3) + (\hat{\mathbf{U}}_4 - \hat{\mathbf{U}}_3) \cdot (\delta \mathbf{d}_4 + \delta \mathbf{d}_3) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4}(1-\eta) \mathbf{x}_{,\xi}^A \left[ (\delta \mathbf{d}_4 \cdot \hat{\mathbf{d}}_4) \mathbf{d}_4 + (\delta \mathbf{d}_3 \cdot \hat{\mathbf{d}}_3) \mathbf{d}_3 \right] \\ &\quad + \frac{1}{8}(1+\eta) \left[ (\delta \mathbf{U}_1 - \delta \mathbf{U}_2) \cdot (\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_2) + (\hat{\mathbf{U}}_1 - \hat{\mathbf{U}}_2) \cdot (\delta \mathbf{d}_1 + \delta \mathbf{d}_2) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4}(1+\eta) \mathbf{x}_{,\xi}^C \left[ (\delta \mathbf{d}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_1) \mathbf{d}_1 + (\delta \mathbf{d}_2 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2) \mathbf{d}_2 \right] \\ \Delta \delta \gamma_\eta &= \frac{1}{8}(1-\xi) \left[ (\delta \mathbf{U}_2 - \delta \mathbf{U}_3) \cdot (\hat{\mathbf{d}}_2 + \hat{\mathbf{d}}_3) + (\hat{\mathbf{U}}_2 - \hat{\mathbf{U}}_3) \cdot (\delta \mathbf{d}_2 + \delta \mathbf{d}_3) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4}(1-\xi) \mathbf{x}_{,\eta}^D \left[ (\delta \mathbf{d}_2 \cdot \hat{\mathbf{d}}_2) \mathbf{d}_2 + (\delta \mathbf{d}_3 \cdot \hat{\mathbf{d}}_3) \mathbf{d}_3 \right] \\ &\quad + \frac{1}{8}(1+\xi) \left[ (\delta \mathbf{U}_1 - \delta \mathbf{U}_4) \cdot (\hat{\mathbf{d}}_1 + \hat{\mathbf{d}}_4) + (\hat{\mathbf{U}}_1 - \hat{\mathbf{U}}_4) \cdot (\delta \mathbf{d}_1 + \delta \mathbf{d}_4) \right] \\ &\quad - \frac{1}{4}(1+\xi) \mathbf{x}_{,\eta}^B \left[ (\delta \mathbf{d}_1 \cdot \hat{\mathbf{d}}_1) \mathbf{d}_1 + (\delta \mathbf{d}_4 \cdot \hat{\mathbf{d}}_4) \mathbf{d}_4 \right] \end{aligned} \quad (9.140)$$

Sustituyendo en el incremento del trabajo virtual y ordenando los distintos términos, se pone de manifiesto la componente debida al cortante de la matriz de rigidez tangente geométrica:

$$\Delta(\delta W_I)_{geo}^C = \sum_{I=1,4} \sum_{J=1,4} \left\{ \begin{array}{c} \delta \mathbf{U}_I \\ \delta \boldsymbol{\theta}_I \end{array} \right\}^T \int_{A^0} \mathbf{K}_{0\sigma IJ}^C dA^0 \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{U}}_J \\ \hat{\boldsymbol{\theta}}_J \end{array} \right\} \quad (9.141)$$

Los distintos términos del integrando de la matriz de rigidez geométrica debida al cortante  $\mathbf{K}_{0\sigma IJ}^C$  son:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{0\sigma 11}^C &= \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0}_{3 \times 3} & (q_\xi(1+\eta) + q_\eta(1+\xi)) \boldsymbol{\Lambda}_{R1} \\ (q_\xi(1+\eta) + q_\eta(1+\xi)) \boldsymbol{\Lambda}_{R1}^T & (-2q_\xi(1+\eta) \mathbf{x}_{,\xi}^C \cdot \mathbf{d}_1 - 2q_\eta(1+\xi) \mathbf{x}_{,\eta}^B \cdot \mathbf{d}_1) \mathbf{I}_2 \end{array} \right] \\ \mathbf{K}_{0\sigma 22}^C &= \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0}_{3 \times 3} & (-q_\xi(1+\eta) + q_\eta(1-\xi)) \boldsymbol{\Lambda}_{R2} \\ (-q_\xi(1+\eta) + q_\eta(1-\xi)) \boldsymbol{\Lambda}_{R2}^T & (-2q_\xi(1+\eta) \mathbf{x}_{,\xi}^C \cdot \mathbf{d}_2 - 2q_\eta(1-\xi) \mathbf{x}_{,\eta}^D \cdot \mathbf{d}_2) \mathbf{I}_2 \end{array} \right] \\ \mathbf{K}_{0\sigma 33}^C &= \frac{1}{8} \left[ \begin{array}{cc} \mathbf{0}_{3 \times 3} & (-q_\xi(1-\eta) - q_\eta(1-\xi)) \boldsymbol{\Lambda}_{R3} \\ (-q_\xi(1-\eta) - q_\eta(1-\xi)) \boldsymbol{\Lambda}_{R3}^T & (-2q_\xi(1-\eta) \mathbf{x}_{,\xi}^A \cdot \mathbf{d}_3 - 2q_\eta(1-\xi) \mathbf{x}_{,\eta}^D \cdot \mathbf{d}_3) \mathbf{I}_2 \end{array} \right] \end{aligned} \quad (9.142)$$

$$\mathbf{K}_{0\sigma 44}^C = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & (q_\xi(1-\eta) - q_\eta(1+\xi)) \mathbf{\Lambda}_{R4} \\ (q_\xi(1-\eta) - q_\eta(1+\xi)) \mathbf{\Lambda}_{R4}^T & (-2q_\xi(1-\eta) \mathbf{x}_\xi^C \cdot \mathbf{d}_4 - 2q_\eta(1+\xi) \mathbf{x}_\eta^B \cdot \mathbf{d}_4) \mathbf{I}_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{0\sigma 12}^C = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & q_\xi(1+\eta) \mathbf{\Lambda}_{R2} \\ -q_\xi(1+\eta) \mathbf{\Lambda}_{R1}^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{0\sigma 14}^C = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & q_\eta(1+\xi) \mathbf{\Lambda}_{R4} \\ -q_\eta(1+\xi) \mathbf{\Lambda}_{R1}^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{0\sigma 23}^C = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & q_\eta(1-\xi) \mathbf{\Lambda}_{R3} \\ -q_\eta(1-\xi) \mathbf{\Lambda}_{R2}^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix} \quad \mathbf{K}_{0\sigma 34}^C = \frac{1}{8} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} & -q_\xi(1-\eta) \mathbf{\Lambda}_{R4} \\ q_\xi(1-\eta) \mathbf{\Lambda}_{R3}^T & \mathbf{0}_{2 \times 2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K}_{0\sigma 13}^C = \mathbf{0}_{5 \times 5} \quad \mathbf{K}_{0\sigma 24}^C = \mathbf{0}_{5 \times 5}$$

## 9.12. ACTUALIZACIÓN DE LA GEOMETRÍA

En un proceso incremental de análisis es necesario actualizar la configuración geométrica de la cáscara después de cada incremento de deformación. Consideremos la configuración  $k$ , definida por unos valores nodales  $\mathbf{x}_I^k$ ,  $\mathbf{d}_I^k$ , y supongamos que en la iteración  $k$ -sima se producen unos incrementos de la deformación de valor  $\hat{\mathbf{U}}_I^k$ ,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_I^k$ .

La actualización de las coordenadas es inmediata pues estas corresponden a un espacio lineal:  $\mathbf{x}_I^{k+1} = \mathbf{x}_I^k + \hat{\mathbf{U}}_I^k$

Sin embargo la actualización de los vectores directores nodales debe ser consistente y por lo tanto debe mantenerlos en la esfera unidad, con lo que no es válido el sumar directamente el incremento al vector director en la iteración anterior, pues estos vectores no forman un espacio lineal. A continuación se muestra un proceso de actualización (Simó *et al*, 1990) que mantiene dicha consistencia (figura 9.9).

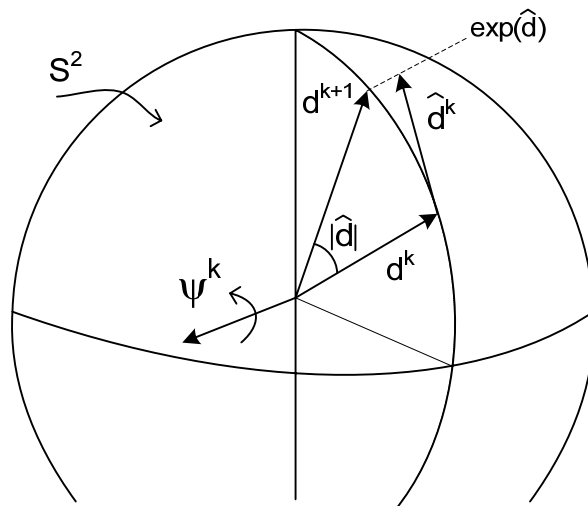


Figura 9.9 Actualización del vector director.

Partiendo del incremento de las 2 rotaciones nodales  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_I^k$ , se determina el incremento del vector director, empleando para ello la matriz de rotación del nudo en la iteración anterior, definida en (9.60):

$$\hat{\mathbf{d}}_I^k = \boldsymbol{\Lambda}_{RI}^k \hat{\boldsymbol{\theta}}_I^k \quad (9.143)$$

El vector director del nudo se actualiza empleando la transformación exponencial, como se ha explicado en el apartado 9.3.1:

$$\mathbf{d}_I^{k+1} := \exp_a[\hat{\mathbf{d}}_I^k] = \cos(|\hat{\mathbf{d}}_I^k|) \mathbf{d}_I^k + \frac{\text{sen}(|\hat{\mathbf{d}}_I^k|)}{|\hat{\mathbf{d}}_I^k|} \hat{\mathbf{d}}_I^k \quad (9.144)$$

La rotación del vector  $\mathbf{d}_I^k$  al  $\mathbf{d}_I^{k+1}$  se produce alrededor de un vector:

$$\boldsymbol{\psi}_I^k = \mathbf{d}_I^k \times \hat{\mathbf{d}}_I^k \quad (9.145)$$

Por lo tanto la matriz que define dicha rotación incremental es:

$$\hat{\boldsymbol{\Lambda}}_I^k = \cos(|\hat{\mathbf{d}}_I^k|) \mathbf{I} + \frac{\text{sen}(|\hat{\mathbf{d}}_I^k|)}{|\hat{\mathbf{d}}_I^k|} \tilde{\boldsymbol{\psi}}_I^k + \frac{1 - \cos(|\hat{\mathbf{d}}_I^k|)}{|\hat{\mathbf{d}}_I^k|^2} \boldsymbol{\psi}_I^k \otimes \boldsymbol{\psi}_I^k \quad (9.146)$$

siendo  $\tilde{\boldsymbol{\psi}}_I^k$  el tensor hemisimétrico cuyo vector axial es  $\boldsymbol{\psi}_I^k$ .

Finalmente, la matriz de rotación del nudo  $I$ , que define su sistema director local, se actualiza en la forma habitual:

$$\boldsymbol{\Lambda}_I^{k+1} = \hat{\boldsymbol{\Lambda}}_I^k \boldsymbol{\Lambda}_I^k \quad (9.147)$$

# Resolución de las ecuaciones incrementales

## 10.1. INTRODUCCIÓN

En todos los tipos de estructuras estudiados en capítulos anteriores, se ha obtenido siempre la ecuación incremental de equilibrio de un elemento estructural, linealizada en un instante cualquiera  $t$  del proceso de carga, en la forma:

$$\hat{\mathbf{K}}^e \hat{\mathbf{U}}^e = \mathbf{P}^{e(t+\Delta t)} - \mathbf{Q}^e \quad (10.1)$$

siendo  $\hat{\mathbf{K}}^e$  la matriz de rigidez tangente del elemento,  $\mathbf{P}^e$  el vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores en el instante  $t + \Delta t$  y  $\mathbf{Q}^e$  el vector de fuerzas interiores en el instante  $t$ . En la expresión anterior se ha añadido el superíndice  $e$  para indicar que se trata de las magnitudes propias de un elemento cualquiera de la malla.

Ensamblando los términos correspondiente a los distintos elementos finitos se obtiene la ecuación incremental de equilibrio de toda la estructura, que tiene la misma forma que la anterior:

$$\hat{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{U}} = \mathbf{P}^{t+\Delta t} - \mathbf{Q} \quad (10.2)$$

El término independiente contiene las fuerzas nodales equivalentes a todas las fuerzas exteriores aplicadas  $\mathbf{P}$  en el instante  $t + \Delta t$  y las fuerzas interiores  $\mathbf{Q}$  en todos los elementos de la estructura en el instante  $t$ . El vector  $\hat{\mathbf{U}}$  contiene el incremento de deformación entre  $t$  y  $t + \Delta t$  en todos los nudos de la estructura y  $\hat{\mathbf{K}}$  es la matriz de rigidez tangente de la estructura en el instante  $t$ . Esta expresión es válida para todos los planteamientos (total, actualizado y co-rotacional), y sólo cambian en ella los valores concretos de la matriz tangente y del vector de fuerzas interiores.

La resolución de la ecuación anterior para la carga total aplicada, en un sólo paso entre el instante inicial  $t = 0$  y el instante final  $t_F = \Delta t$  no es posible en general. La obtención de la respuesta de un sistema no lineal se efectúa en la práctica empleando un proceso incremental, en el que las cargas se van aplicando de forma paso a paso, por incrementos, y en cada uno de dichos incrementos se busca el estado de equilibrio.

De esta manera se obtiene toda la respuesta de la estructura ante un sistema de cargas creciente.

Cada paso de la secuencia de cargas se identifica mediante un subíndice  $n=0,1,2..$ , de tal manera que al final del paso de carga  $n$  se obtienen las deformaciones en el instante  $n+1$ :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta\mathbf{U}_n \quad (10.3)$$

siendo  $\Delta\mathbf{U}_n$  el incremento de la deformación que se produce en el paso de carga  $n$ .

Las cargas exteriores totales aplicadas en el paso  $n$  se denominarán  $\mathbf{P}_n$  y puede considerarse que el incremento de carga aplicado en cada caso es constante o variable. En el primer caso, la carga total en un paso cualquiera será:

$$\mathbf{P}_n = n \mathbf{P}_P \quad (10.4)$$

siendo  $\mathbf{P}_P$  la carga aplicada en cada paso. Si se desea aplicar una cantidad variable de carga en cada paso, ésta se representa en la forma:

$$\mathbf{P}_n = \lambda_n \bar{\mathbf{P}} \quad (10.5)$$

En este caso  $\lambda_n$  es un parámetro sin dimensiones que define el valor real de las fuerzas aplicadas en el paso  $n$ , y  $\bar{\mathbf{P}}$  es un vector de fuerzas de referencia, que define los valores relativos entre las distintas componentes de la fuerza.

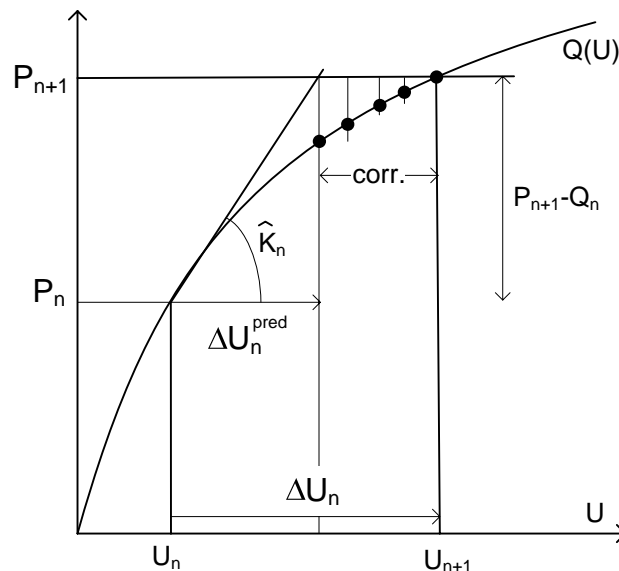


Figura 10.1 Método incremental. Fase de predicción y corrección.

Todos los métodos de resolución combinan el proceso incremental de aplicación de cargas con un proceso iterativo dentro de cada paso de carga, que se encarga de buscar el equilibrio al final de dicho paso de carga. El proceso iterativo consta de un primer paso de predicción del incremento de deformaciones producido por el incremento de

carga aplicado, al final del cual lógicamente no habrá equilibrio (figura 10.1). Esta predicción va seguida de un proceso de corrección de las deformaciones, hasta satisfacer el equilibrio en la nueva posición.

En función de cómo se haga la fase de corrección se plantean diversos métodos, que se describen a continuación.

## 10.2. MÉTODO INCREMENTAL PURO

En este método se efectúa la fase de predicción de las deformaciones en el incremento de carga, pero no se efectúa ningún proceso de corrección del error cometido (figura 10.2). El incremento de deformación  $\Delta U_n$  producido en un incremento de carga se calcula apoyándose en la ecuación incremental al comienzo de dicho paso de carga, es decir para  $t_n \equiv t$  y  $t_{n+1} \equiv t + \Delta t$ :

$$\hat{\mathbf{K}}_n \Delta \mathbf{U}_n = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_n \quad (10.6)$$

El incremento de deformación así obtenido tiene un error, que se va acumulando a medida que se aplican nuevos incrementos de carga. Se trata por lo tanto de un método no exacto, pues no se satisface el equilibrio en los distintos puntos obtenidos.

Este método puede mejorarse fácilmente a base de calcular el residuo no equilibrado en cada iteración y añadirlo a las fuerzas a aplicar al siguiente incremento, lo cual permite estimar el error producido. En todo caso, al ser el error acumulativo, este método sólo puede emplearse con incrementos de carga muy pequeños, y en general es más ventajoso emplear los métodos que se explican a continuación, los cuales permiten garantizar el equilibrio.

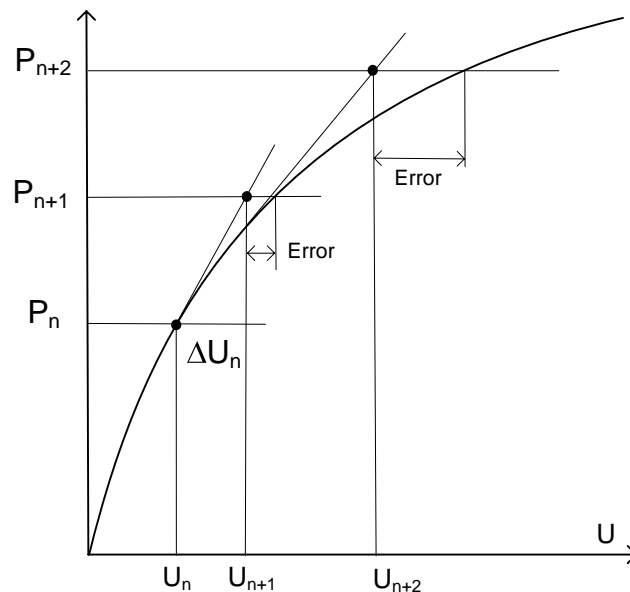


Figura 10.2 Método incremental puro.

### 10.3. MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

En este método se emplea un proceso iterativo completo de predicción – corrección hasta alcanzar el equilibrio en el instante  $n+1$ , apoyándose en la solución conocida en el instante anterior  $n$  (figura 10.3). Las deformaciones en el instante  $n+1$  se calculan por aproximaciones sucesivas, mediante una secuencia de iteraciones ( $k=1,2,\dots$ ).

Para una iteración  $k$  cualquiera, las ecuaciones de equilibrio se pueden poner en forma de residuo:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^k = 0 \quad (10.7)$$

Desarrollando este residuo en serie alrededor del punto de iteración anterior ( $k-1$ ) se obtiene:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx \mathbf{R}_{n+1}^{k-1} + \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}} \right) \hat{\mathbf{U}}^k = 0 \quad (10.8)$$

En esta expresión  $\hat{\mathbf{U}}^k$  es el incremento de deformación producido en la iteración  $k$ :

$$\hat{\mathbf{U}}^k = \mathbf{U}_{n+1}^k - \mathbf{U}_{n+1}^{k-1} \quad (10.9)$$

y  $\mathbf{U}_{n+1}^k$  es la estimación de las deformaciones en el instante  $n+1$ , al final de la iteración  $k$ .

Si las fuerzas exteriores  $\mathbf{P}$  no dependen de la deformación, la derivada del residuo sólo corresponde a la derivada de las fuerzas internas  $\mathbf{Q}_{n+1}^{k-1}$ :

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx \mathbf{R}_{n+1}^{k-1} - \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}} \right) \hat{\mathbf{U}}^k = 0 \quad (10.10)$$

La derivada de las fuerzas internas respecto de las deformaciones proporciona la matriz de rigidez tangente  $\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1}$ :

$$\frac{\partial \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}} = \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \quad (10.11)$$

Por lo tanto la ecuación a resolver en la iteración  $k$  es:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1} - \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^k = 0 \quad (10.12)$$

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^k = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1} \quad (10.13)$$

En esta ecuación la matriz tangente  $\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1}$  y el vector de fuerzas interiores  $\mathbf{Q}_{n+1}^{k-1}$  están evaluados para la última estimación conocida ( $k-1$ ) de las deformaciones en el instante  $n+1$  que son las de la iteración anterior  $\mathbf{U}_{n+1}^{k-1}$ . Nótese que ambas magnitudes se evalúan para los últimos valores actualizados de las deformaciones calculados a medida que progresa la iteración (al final de la iteración anterior), no para los valores al inicio de la misma.





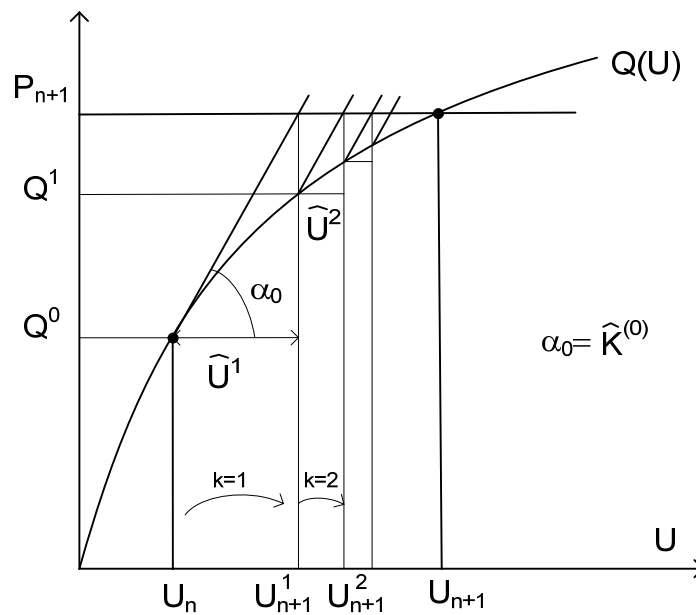


Figura 10. 4 Método de Newton-Raphson modificado.

### 10.5. MÉTODOS RESTRINGIDOS

La combinación del proceso incremental de carga y de la iteración de Newton es muy eficiente para obtener la respuesta de sistemas no lineales cuando ésta es creciente, es decir que se puede aumentar la carga aplicada y se obtiene un aumento de deformación. Sin embargo en muchísimas aplicaciones, incluso simples, el sistema no tiene ese tipo de respuesta monótona, sino que existen puntos límites en los que la respuesta pasa de ser creciente a decreciente o viceversa. La estructura puede mostrar fenómenos de *snap-through*, que es un salto brusco de la deformación al aumentar ligeramente la fuerza, o de *snap-back*, que es una inversión del signo de la relación fuerza-deformación, con descarga de la estructura. En estos casos no es posible aplicar la estrategia simple de aumentar de forma continua la carga, pues la iteración de Newton falla en las proximidades de los puntos límite, ya que en éstos la matriz de rigidez tangente no es definida positiva. La determinación de la curva fuerza-deformación completa en estos casos requiere el empleo de técnicas que permitan identificar la presencia de un punto límite y pasarlo eficazmente.

Se han desarrollado muchos algoritmos que permiten pasar puntos límites, basados en dos ideas: el control de fuerza y el control de desplazamiento. Los algoritmos de control de fuerza corresponden a lo ya explicado anteriormente, a base de aumentar la fuerza exterior paulatinamente. En una estructura cuya respuesta sea como la de la figura 10.5 estos métodos fallan en las proximidades del punto A, ya que este punto corresponde a un punto límite de fuerza. A partir del punto A puede emplearse un método de control de desplazamiento, pero al llegar al punto B este método fallará también, por ser B un punto límite de deformación. Los principales problemas que

plantean los algoritmos de control de desplazamiento son la elección del desplazamiento usado para controlar el proceso, y su dificultad para tratar fenómenos de *snap-back*.

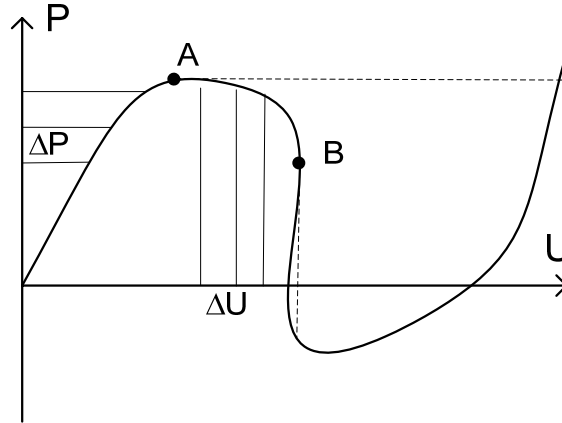


Figura 10.5 Control de fuerza y de desplazamiento.

Para resolver estos problemas se han desarrollado los denominados métodos restringidos. La idea fundamental en que se apoyan es modificar el nivel de carga aplicada en cada paso del proceso incremental de carga en vez de mantenerlo constante, haciéndolo incluso negativo si es necesario. Para poder modificar el nivel de carga aplicada, se considera dicho nivel de carga como una variable más del problema, que está definido por un parámetro de carga  $\lambda$ . El valor de esta variable, es decir el nivel de carga a aplicar, se determina añadiendo una ecuación de restricción que obligue al método iterativo a moverse hacia la posición de equilibrio, dentro de la curva de respuesta del sistema, aunque ésta muestre cambios de dirección.

Existen varios métodos restringidos, que se diferencian en la ecuación de restricción que añaden al sistema. En todos ellos la variable que define el nivel de carga se actualiza en cada iteración del proceso en la forma:

$$\lambda_n^k = \lambda_n^{k-1} + \hat{\lambda}^k \quad (10.16)$$

siendo  $\lambda_n^k$  el valor del parámetro de carga en la iteración  $k$  del paso de carga  $n$  y  $\hat{\lambda}^k$  su incremento en dicha iteración  $k$ .

La ecuación de restricción  $\phi$  añadida al sistema relaciona el incremento de desplazamiento que es posible alcanzar en cada iteración  $\Delta U_n^k$  con alguna distancia máxima medida sobre la curva de respuesta de la estructura  $\Delta s$ , la cual se introduce como dato en el método, es decir:

$$\phi(\Delta U_n^k, \Delta s) = 0 \quad (10.17)$$

Así pues, en los métodos restringidos se limita el máximo incremento a efectuar por medio de la magnitud  $\Delta s$ , y de la ecuación de restricción se determina el valor de  $\lambda$ , es decir la carga a aplicar realmente.

### 10.5.1 Método del plano normal

En este método la iteración para obtener el nuevo equilibrio en el instante  $n+1$  (es decir la fase de corrección) se efectúa sobre la perpendicular a la tangente al último equilibrio alcanzado  $n$ , es decir que los nuevos incrementos de deformación se buscan en la intersección con dicha perpendicular a la tangente (figura 10.6).

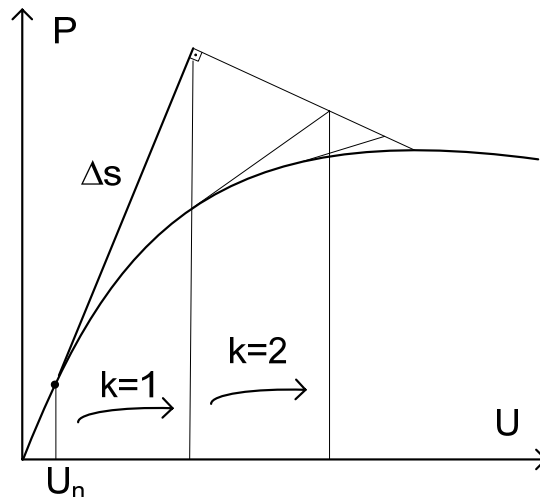


Figura 10. 6 Método del plano normal.

### 10.5.2 Método del plano normal actualizado

Este método es una variante del anterior, y en él la iteración para obtener el nuevo equilibrio se efectúa sobre la perpendicular a la tangente en la última iteración efectuada  $k-1$ , con lo que se consigue localizar mejor los puntos límites (figura 10.7).

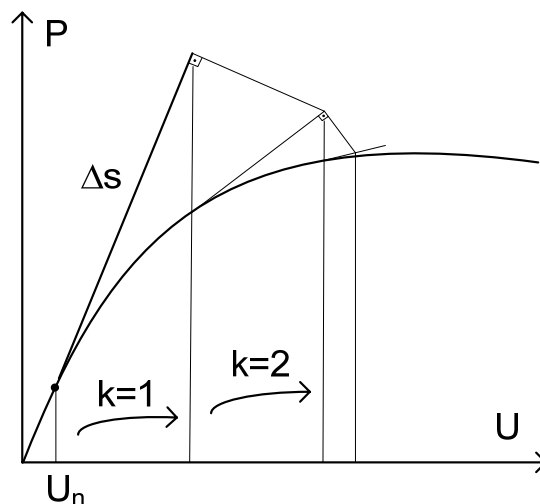


Figura 10.7 Método del plano normal actualizado.

### 10.6. MÉTODO DE LA LONGITUD DEL ARCO

Entre los métodos restringidos, el conocido como método de la longitud del arco es uno de los más usados en la práctica, por su robustez. Este método fue propuesto inicialmente por Riks y Wempner y posteriormente modificado por Crisfield (1981). Consiste en utilizar un círculo de radio  $\Delta s$  con centro en el último estado de equilibrio obtenido, y buscar los nuevos incrementos de deformación (es decir el valor del parámetro de carga  $\lambda$ ) en la intersección de dicho círculo con la curva de respuesta de la estructura (figura 10.8). Además, el valor del incremento  $\Delta s$  se adapta en cada paso de carga, en función de la convergencia en el paso anterior.

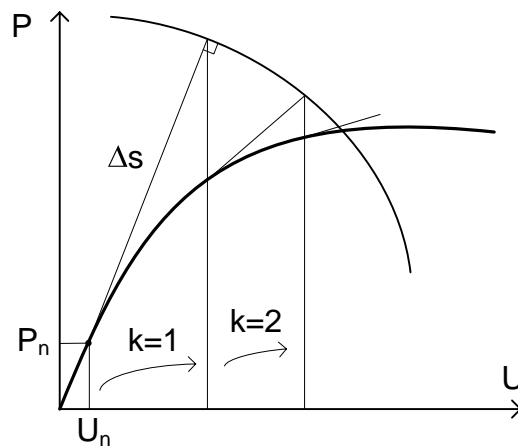


Figura 10.8 Método de la longitud del arco.

La utilización de este método de la longitud del arco, combinada con un proceso incremental de la carga, permite obtener toda la curva fuerza–deformación de la estructura, incluso pasando por puntos límites de rigidez nula, en lo que habitualmente se conoce como técnica de seguimiento del camino (*path*) de deformación de la estructura. A continuación se desarrolla el planteamiento presentado por Crisfield en 1991.

La ecuación de equilibrio en un instante cualquiera  $n+1$  del proceso de carga puede ponerse en forma de residuo  $\mathbf{R}_{n+1}$ , como:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1} = 0 \quad (10.18)$$

siendo  $\mathbf{P}_{n+1}$  las fuerzas exteriores aplicadas y  $\mathbf{Q}_{n+1}$  las fuerzas interiores producidas por las tensiones en los elementos, que son funciones no lineales de las deformaciones  $\mathbf{U}_{n+1}$ .

Las fuerzas exteriores, suponiendo que son independientes de la deformación, pueden expresarse en la forma:

$$\mathbf{P}_{n+1} = \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{P}} \quad (10.19)$$

$\lambda$  es un parámetro sin dimensiones que define el valor real actual de la fuerza, y  $\bar{\mathbf{P}}$  es un vector de fuerzas de referencia, que define los valores relativos entre las distintas componentes de la fuerza. El residuo queda:

$$\mathbf{R}_{n+1} = \lambda_{n+1} \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}_{n+1} = 0 \quad (10.20)$$

Esta ecuación se debe satisfacer en cualquier instante, y al ser no lineal, se resuelve por iteraciones sucesivas. Sea  $k$  una iteración cualquiera ( $k=1,2,\dots$ ) en la búsqueda del equilibrio para el estado de carga  $n+1$ ; la ecuación de equilibrio es:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k = \lambda_{n+1}^k \bar{\mathbf{P}} - \mathbf{Q}_{n+1}^k(\mathbf{U}_{n+1}^k) = 0 \quad (10.21)$$

$\lambda_{n+1}^k$  es el valor de  $\lambda$  en la iteración  $k$  del caso de carga  $n+1$  y  $\mathbf{U}_{n+1}^k$  son las deformaciones totales tras la iteración  $k$  del caso de carga  $n+1$ , que son desconocidas.

• Considerando que el residuo es una función de dos variables, las deformaciones  $\mathbf{U}$  y el parámetro  $\lambda$ , se puede desarrollar en serie de Taylor alrededor de su valor en la iteración anterior:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx \mathbf{R}_{n+1}^{k-1} + \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \lambda} \right) \hat{\lambda}^k + \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}} \right) \hat{\mathbf{U}}^k = 0 \quad (10.22)$$

siendo  $\hat{\lambda}^k$  el incremento de la variable  $\lambda$  y  $\hat{\mathbf{U}}^k$  el incremento de las deformaciones al efectuarse la iteración  $k$ . Las derivadas necesarias son:

$$\left( \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \lambda} \right) = \bar{\mathbf{P}} \quad (10.23)$$

$$\left( \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}} \right) = - \left( \frac{\partial \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}} \right) = -\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \quad (10.24)$$

Luego la ecuación a resolver en cada iteración es:

$$\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^k = \mathbf{R}_{n+1}^{k-1} + \bar{\mathbf{P}} \hat{\lambda}^k \quad (10.25)$$

Despejando el incremento de deformación se obtiene:

$$\hat{\mathbf{U}}^k = \left( \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \right)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^{k-1} + \left( \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{P}} \hat{\lambda}^k = \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \hat{\lambda}^k \quad (10.26)$$

El primer sumando del incremento de deformación se puede calcular fácilmente y representa la deformación producida por la parte del residuo no equilibrado en la iteración anterior:

$$\bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k = \left( \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \right)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^{k-1} \quad (10.27)$$

El segundo sumando no puede evaluarse hasta no conocer el valor de  $\lambda$  pero su coeficiente puede evaluarse con sencillez, y representa la deformación producida por las fuerzas básicas:

$$\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k = \left( \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \right)^{-1} \bar{\mathbf{P}} \quad (10.28)$$

Obsérvese que si se emplea el método de Newton modificado, no es necesario recalcular este término a cada paso de la iteración, sino que puede mantenerse el del primer paso.

- Suponiendo por el momento conocido el valor del incremento  $\hat{\lambda}$ , y por lo tanto el valor del incremento de deformación  $\hat{\mathbf{U}}^k$  en esta iteración, se procede a actualizar los valores de las incógnitas. Para las deformaciones la actualización es:

$$\Delta \mathbf{U}_n^k = \Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \hat{\mathbf{U}}^k \quad (10.29)$$

donde  $\Delta \mathbf{U}_n^{k-1}$  es el incremento de deformación acumulado a lo largo de las  $(k-1)$  iteraciones anteriores. De forma similar  $\Delta \mathbf{U}_n^k$  es el incremento de deformación acumulado tras efectuarse la iteración  $k$ .

De manera análoga se actualiza el parámetro  $\lambda$ :

$$\lambda_{n+1}^k = \lambda_{n+1}^{k-1} + \hat{\lambda}^k \quad (10.30)$$

- El cálculo de  $\hat{\lambda}^k$  se efectúa introduciendo una ecuación que imponga la condición de distancia máxima recorrida en este paso de carga, limitando el incremento de deformación acumulado en todas las iteraciones efectuadas en este caso de carga. Si se denomina  $\Delta s$  a la distancia máxima a recorrer, la condición es:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta \mathbf{U}_n^k)^T (\Delta \mathbf{U}_n^k) \quad (10.31)$$

Sustituyendo los incrementos por sus valores y operando:

$$(\Delta s)^2 = (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \hat{\mathbf{U}}^k)^T (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \hat{\mathbf{U}}^k) \quad (10.32)$$

$$(\Delta s)^2 = (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \hat{\lambda}^k)^T (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \hat{\lambda}^k)$$

Esta ecuación es una ecuación de segundo grado en  $\hat{\lambda}^k$  que se puede poner como:

$$a_1 (\hat{\lambda}^k)^2 + a_2 \hat{\lambda}^k + a_3 = 0 \quad (10.33)$$

$$a_1 = (\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k)^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k$$

$$a_2 = 2 (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k)^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \quad (10.34)$$

$$a_3 = (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k)^T (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k) - (\Delta s)^2$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen dos raíces  $\hat{\lambda}_{(1)}^k$  y  $\hat{\lambda}_{(2)}^k$ . De entre ellas se elige aquella que producirá un incremento de deformación acumulado más próximo al incremento de deformación acumulado en la iteración anterior. Para ello, en primer lugar se determina cuál sería el incremento de deformación producido por cada una de las dos soluciones:

$$\Delta \mathbf{U}_{n(1)}^k = \Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \hat{\lambda}_{(1)}^k \quad (10.35)$$

$$\Delta \mathbf{U}_{n(2)}^k = \Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \hat{\lambda}_{(2)}^k$$

A continuación se calcula la proyección de dichos incrementos de deformación sobre el incremento de la iteración anterior, que será un escalar, y que de alguna manera estima la desviación angular entre ambos vectores:

$$(\Delta s)^2 \cos \varphi_1 = (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1})^T \Delta \mathbf{U}_{n(1)}^k = (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1})^T \left( \Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \hat{\lambda}_{(1)}^k \right) \quad (10.36)$$

$$(\Delta s)^2 \cos \varphi_2 = (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1})^T \Delta \mathbf{U}_{n(2)}^k = (\Delta \mathbf{U}_n^{k-1})^T \left( \Delta \mathbf{U}_n^{k-1} + \bar{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^k \hat{\lambda}_{(2)}^k \right)$$

De entre las dos, se elige la solución que produzca el menor ángulo, es decir el mayor valor del coseno de  $\varphi$ .

$$\hat{\lambda}^k \equiv \hat{\lambda}_{(i)}^k \quad \left| \quad \cos \varphi_i > \cos \varphi_j, \quad j \neq i \right. \quad (10.37)$$

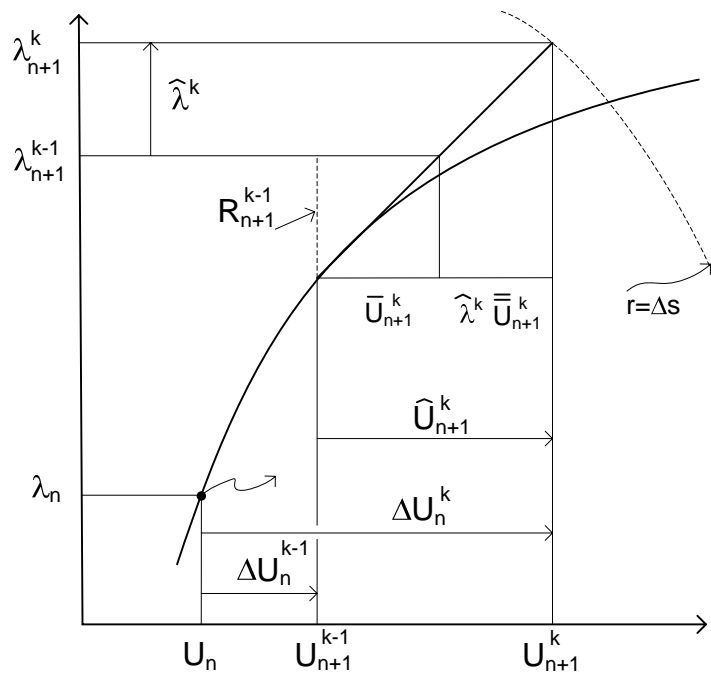


Figura 10.9. Iteración en el método de la longitud del arco.

### 10.6.1 Comienzo de la iteración en el primer paso de carga

Una pequeña dificultad del método está en la definición del valor de  $\Delta s$ , que no resulta fácil pues depende del problema estudiado. En su lugar es más sencillo definir un valor de  $\lambda$  al comienzo de la iteración, y en base a él determinar el  $\Delta s$ .

En la primera iteración del primer paso de carga ( $n=0, k=1$ ) se toma  $\lambda_1^0 = 0$  como punto de partida y se define como dato el valor de la carga aplicada en esta primera

iteración, definiendo para ello el valor de  $\lambda_1^1 = \hat{\lambda}^1$ . Muchas veces se supone  $\lambda_1^1 = 1$ , con lo cual en esta primera iteración se aplica toda la carga básica.

La ecuación de equilibrio incremental en esta primera iteración del primer paso, suponiendo que las deformaciones iniciales  $\mathbf{U}_0$  son nulas y por lo tanto las fuerzas interiores también son nulas, es:

$$\hat{\mathbf{K}}_1^0 \hat{\mathbf{U}}^1 = \bar{\mathbf{P}} \lambda_1^1 \quad (10.38)$$

Al ser conocido  $\lambda_1^1$  se obtienen los incrementos de desplazamiento iniciales:

$$\hat{\mathbf{U}}^1 = (\hat{\mathbf{K}}_1^0)^{-1} \bar{\mathbf{P}} \lambda_1^1 = \bar{\bar{\mathbf{U}}}_1^1 \lambda_1^1 \quad (10.39)$$

La condición de longitud de arco máximo es:

$$(\Delta s)^2 = (\hat{\mathbf{U}}^1)^T \hat{\mathbf{U}}^1 = (\bar{\bar{\mathbf{U}}}_1^1)^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_1^1 (\lambda_1^1)^2 \quad (10.40)$$

De esta expresión se puede obtener el  $\Delta s$  a emplear en este paso de carga, a partir del valor de  $\lambda_1^1$  supuesto:

$$\Delta s = \left[ (\bar{\bar{\mathbf{U}}}_1^1)^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_1^1 \right]^{1/2} \lambda_1^1 \quad (10.41)$$

### 10.6.2 Comienzo de la iteración en los restantes pasos de carga

En todos los casos de carga salvo en el primero ( $n \geq 1$ ), el comienzo de la iteración se apoya en el valor de  $\Delta s$  ya conocido de los pasos de carga anteriores. En todo caso, es habitual emplear una técnica para adaptar este valor de  $\Delta s$  a la situación de la estructura. Sencillamente se amplía y reduce el valor de  $\Delta s$  en función del número de iteraciones que haya sido necesario efectuar en el paso de carga anterior, en comparación con un número de iteraciones deseado, según la expresión:

$$\Delta s_n = \Delta s_{n-1} \left( \frac{\vartheta_{des}}{\vartheta_{n-1}} \right)^\gamma \quad n \geq 1 \quad (10.42)$$

Donde  $\vartheta_{n-1}$  es el número de iteraciones en el paso de carga anterior,  $\vartheta_{des}$  el número de iteraciones deseado (normalmente 3 a 5) y  $\gamma$  un coeficiente que oscila entre 0.5 y 1.

Al tratarse de la primera iteración ( $k=1$ ), el estado anterior es de equilibrio, y por lo tanto el residuo anterior es nulo.  $\mathbf{R}_n = \mathbf{R}_{n+1}^0 = \mathbf{0}$ . Esto simplifica las ecuaciones del proceso, de tal forma que sólo existe uno de los dos términos del incremento pues se cumple que

$$\bar{\mathbf{U}}_{n+1}^1 = (\hat{\mathbf{K}}_{n+1}^0)^{-1} \mathbf{R}_{n+1}^0 = \mathbf{0} \quad (10.43)$$

El incremento acumulado también es nulo en esta primera iteración  $\Delta \mathbf{U}_n^0 = \mathbf{0}$

Con estos valores, los coeficientes de la ecuación que proporciona  $\lambda$  son:



$$a_1 = (\bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^1)^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_{n+1}^1 \quad a_2 = 0 \quad a_3 = -(\Delta s_n)^2 \quad (10.44)$$

De donde se obtiene:

$$\lambda_{n+1}^1 = \frac{\Delta s_n}{\pm \left[ (\bar{\bar{\mathbf{U}}}_1^1)^T \bar{\bar{\mathbf{U}}}_1^1 \right]^{1/2}} \quad (10.45)$$

De los dos signos posibles, se toma el positivo si la matriz tangente es definida positiva, y el negativo si dicha matriz tiene un pivot negativo, lo que indica que se ha pasado por un punto límite y se está en una zona descendente en la respuesta de la estructura.

En el caso de estructuras cuya respuesta tiene varios puntos límites de fuerza o de deformación, la matriz de rigidez tangente puede tener múltiples pivots negativos. Un método que se suele emplear en estos casos, y que ha demostrado ser eficaz en los ejemplos presentados más adelante, consiste en emplear el signo + si el número de pivots es 0 o par, y el signo – si el número de pivots es impar. En todo caso este método tan simple no es adecuado para tratar casos de bifurcación del equilibrio, los cuales requieren técnicas especiales.

### 10.7. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Para terminar la iteración de búsqueda del equilibrio es necesario emplear un criterio adecuado, que indique que se ha llegado a la convergencia de la solución. En la práctica pueden emplearse varios de ellos, que se basan en comparar la norma de alguna magnitud con algún valor de referencia considerado despreciable.

- El método más simple consiste en imponer que la norma del incremento de desplazamiento producido en una iteración sea muy inferior a la norma de la deformación total al final del caso de carga. Es decir:

$$\|\hat{\mathbf{U}}^k\|_2 \leq \varepsilon_D \|\mathbf{U}_{n+1}\|_2 \quad (10.46)$$

donde  $\varepsilon_D$  es la tolerancia. Como la deformación al final del paso de carga no es conocida, se aproxima por el último valor de ella que se haya calculado:

$$\|\hat{\mathbf{U}}^k\|_2 \leq \varepsilon_D \|\mathbf{U}_{n+1}^k\|_2 \quad (10.47)$$

En algunos casos la solución obtenida con este método puede estar lejos de la convergencia, como ocurre cuando la deformación cambia muy poco en cada paso de carga, pero continúa cambiando durante muchos pasos.

- El cumplimiento del criterio anterior garantiza en todo caso que las deformaciones cambian poco, pero no garantiza el equilibrio de fuerzas. Por eso resulta interesante introducir un criterio basado en la fuerza no equilibrada durante la iteración. Por

ejemplo se puede imponer que la norma del residuo al final de la iteración sea despreciable frente al residuo con el que se comenzó la iteración:

$$\|\mathbf{R}_{n+1}^k\|_2 \leq \varepsilon_R \|\mathbf{R}_{n+1}^0\|_2 \quad (10.48)$$

$$\|\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^k\|_2 \leq \varepsilon_R \|\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_n\|_2$$

El principal problema de este método es que no considera la contribución de la deformación al criterio de terminación, como ocurre en el caso de materiales con un módulo de endurecimiento por deformación muy bajo en los que las fuerzas cambien muy poco, pero las deformaciones sigan aumentando en cada paso de carga.

- Para evitar los problemas de los métodos anteriores, se puede usar un criterio en el que se evalúa el incremento de energía interna en cada iteración (es decir el trabajo hecho el incremento de deformación y por las fuerzas no equilibradas), y se compara con el incremento de energía interna inicial en el paso de carga:

$$\left(\hat{\mathbf{U}}^k\right)^T \left(\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^k\right) \leq \varepsilon_E \left(\hat{\mathbf{U}}^1\right)^T \left(\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_n\right) \quad (10.49)$$

# Dinámica

En este capítulo se estudia el caso de que las cargas aplicadas sean variables con el tiempo, dando lugar a una respuesta dinámica en la que las deformaciones no lineales del sólido varían con el tiempo, con lo que aparecen un campo de velocidades  $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{u}}$  y uno de aceleraciones  $\ddot{\mathbf{u}}$  que da lugar a las correspondientes fuerzas de inercia. El parámetro  $t$ , juega por lo tanto ahora el papel real de tiempo, en lugar de un simple parámetro al que se refieren las cargas como ocurría en estática.

Se presentan en primer lugar las ecuaciones de equilibrio dinámico, las cuales se desarrollan a continuación siguiendo la formulación lagrangiana. Finalmente se presentan métodos para la integración numérica de las ecuaciones diferenciales obtenidas.

## 11.1. ECUACIONES DE EQUILIBRIO EN DINÁMICA

Se considera un trozo cualquiera de sólido, de volumen  $v$  y área lateral  $s$ , en el estado deformado en el instante  $t$ . Sean  $\mathbf{q}_v$  las fuerzas de volumen aplicadas sobre él y  $\mathbf{q}_s$  las fuerzas en su superficie circundante. Al ser el trozo de sólido arbitrario, parte de las fuerzas de superficie serán fuerzas conocidas aplicadas desde el exterior y otras serán fuerzas interiores desconocidas. Las fuerzas de inercia son fuerzas distribuidas sobre el volumen, y su valor es  $-\rho \dot{\mathbf{v}}$ , siendo  $\rho$  la densidad del material.

El equilibrio dinámico de todas las fuerzas implica que:

$$\int_v \mathbf{q}_v dv + \int_s \mathbf{q}_s ds - \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} dv = 0 \quad (11.1)$$

Las fuerzas aplicadas sobre la superficie  $\mathbf{q}_s$  se pueden sustituir por las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  en la superficie empleando la fórmula de Cauchy  $\mathbf{q}_s = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n}$ , siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal saliente a la superficie circundante del sólido:

$$\int_v \mathbf{q}_v dv + \int_s \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} ds = \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} dv \quad (11.2)$$

La segunda integral se puede transformar en una integral de volumen empleando el teorema de integración aplicado al tensor simétrico  $\sigma$ :

$$\int_v \mathbf{q}_v dv + \int_v \operatorname{div}(\sigma) dv = \int_v \rho \dot{\mathbf{v}} dv \quad (11.3)$$

Como el trozo de sólido es arbitrario, el integrando tiene que ser nulo siempre:

$$\operatorname{div}(\sigma) + \mathbf{q}_v = \rho \dot{\mathbf{v}} \quad (11.4)$$

Esta es la ecuación de equilibrio dinámico del sólido, en su forma más compacta, puesta en función de las tensiones de Cauchy.

La aplicación de la ecuación de momentos sigue los mismos pasos que en el caso estático, y de ella vuelve a deducirse que el tensor de tensiones de Cauchy  $\sigma$  es simétrico.

## 11.2. PRINCIPIO DEL TRABAJO VIRTUAL EN DINÁMICA

Sea un cuerpo en equilibrio en una configuración cualquiera  $t$ , en el que existe un campo de deformaciones  $\mathbf{u}$ . Si se aplica una variación virtual  $\delta\mathbf{u}$  a dicho campo de deformaciones, el trabajo virtual de las fuerzas exteriores aplicadas es:

$$\delta W_E = \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_s ds \quad (11.5)$$

Las fuerzas de superficie se pueden sustituir por las tensiones  $\sigma$  en la superficie, empleando la fórmula de Cauchy

$$\delta W_E = \int_s \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v ds + \int_s \delta\mathbf{u} \cdot (\sigma \mathbf{n}) ds = \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s (\delta\mathbf{u} \sigma) \cdot \mathbf{n} ds \quad (11.6)$$

La integral a la superficie se puede transformar en integral al volumen empleando el teorema de la divergencia:

$$\delta W_E = \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_v \operatorname{div}(\delta\mathbf{u} \sigma) dv \quad (11.7)$$

El integrando de la segunda integral se puede desarrollar utilizando la propiedad de la divergencia indicada en el anejo 13.2, con lo que se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta W_E &= \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_v \delta\mathbf{u} \cdot \operatorname{div}(\sigma) dv + \int_v \sigma : \nabla(\delta\mathbf{u}) dv \\ \delta W_E &= \int_v \delta\mathbf{u} \cdot [\mathbf{q}_v + \operatorname{div}(\sigma)] dv + \int_v \sigma : \nabla(\delta\mathbf{u}) dv \end{aligned} \quad (11.8)$$

El término entre corchetes de la primera integral es igual a las fuerzas de inercia  $\rho \dot{\mathbf{v}}$  como se puede comprobar en la ecuación de equilibrio del sólido (11.4). Por otra parte,

en la segunda integral, el gradiente de la variación de deformación es igual a la variación del gradiente, con lo que queda:

$$\delta W_E = \int_v \rho \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}} dv + \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta(\nabla \mathbf{u}) dv \quad (11.9)$$

La primera integral corresponde al trabajo virtual de las fuerzas de inercia, cambiado de signo:

$$\delta W_{IN} \equiv - \int_v \rho \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}} dv \quad (11.10)$$

La segunda integral corresponde al trabajo virtual de las fuerzas interiores. Efectuando el mismo desarrollo que en el caso estático (apartado 4.3), dicha integral se puede poner como:

$$\delta W_I \equiv \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta(\nabla \mathbf{u}) dv = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (11.11)$$

Sustituyendo (11.10) y (11.11) en (11.9), el principio del trabajo virtual en dinámica se puede poner en forma compacta como:

$$\delta W_E + \delta W_{IN} = \delta W_I \quad (11.12)$$

Por lo tanto, la condición necesaria para que exista equilibrio es que el trabajo virtual de las fuerzas exteriores  $\delta W_E$  más el trabajo de las fuerzas de inercia  $\delta W_{IN}$  sea igual al trabajo virtual de las fuerzas interiores  $\delta W_I$ , para cualquier variación virtual de las deformaciones  $\delta \mathbf{u}$  compatible con las condiciones de ligadura. Puede demostrarse que se trata de una condición suficiente. Se trata del mismo principio que en el caso estático, añadiendo a las fuerzas exteriores las fuerzas de inercia debidas al movimiento.

Recuperando el valor detallado del trabajo virtual de las fuerzas exteriores (11.5), se obtiene la expresión general:

$$\int_v \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_s ds - \int_v \rho \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}} dv = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv \quad (11.13)$$

• El trabajo virtual de las fuerzas de inercia en el instante  $t$  se puede referir al estado inicial considerando la conservación de la masa:  $\rho dv = \rho^0 dv^0$ . Con ello queda:

$$\delta W_{IN} = - \int_{v^0} \rho^0 \delta \mathbf{u} \cdot \ddot{\mathbf{u}} dv^0 \quad (11.14)$$

• El trabajo virtual de las fuerzas interiores puede ponerse en función de las magnitudes en el estado inicial (deformaciones de Green-Lagrange  $\mathbf{E}$  y tensiones de Piola-Kirchhoff  $\mathbf{S}$ ), siguiendo el desarrollo ya efectuado en el caso estático:

$$\delta W_I = \int_v \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dv = \int_{v^0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dv^0 \quad (11.15)$$

Por lo tanto una expresión más práctica del principio del trabajo virtual en dinámica es:

$$\int_v \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_v dv + \int_s \delta \mathbf{u} \cdot \mathbf{q}_s ds - \int_{v^0} \rho^0 \delta \mathbf{u} \cdot \dot{\mathbf{v}} dv^0 = \int_{v^0} \mathbf{S} : \delta \mathbf{E} dv^0 \quad (11.16)$$

### 11.3. FORMULACIÓN LAGRANGIANA TOTAL

Considerando un elemento finito, la hipótesis de discretización permite establecer las relaciones entre los campos de deformaciones  $\mathbf{u}$  y aceleraciones  $\dot{\mathbf{v}}$  dentro del elemento y los valores nodales de dichas deformaciones  $\mathbf{U}$  y aceleraciones  $\ddot{\mathbf{U}}$ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{U} \quad \dot{\mathbf{v}} = \mathbf{N} \ddot{\mathbf{U}} \quad (11.17)$$

Además, al no depender  $\mathbf{N}$  de las deformaciones, se cumple que:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{N} \delta \mathbf{U} \quad (11.18)$$

Por lo tanto el trabajo virtual de las fuerzas de inercia vale:

$$\delta W_{IN} = - \int_{v^0} \rho^0 \delta \mathbf{u}^T \ddot{\mathbf{u}} dv^0 = - \delta \mathbf{U}^T \int_{v^0} \rho^0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv^0 \ddot{\mathbf{U}} \quad (11.19)$$

En esta expresión se define la matriz de masas del elemento, que es constante y se evalúa en el estado inicial:

$$\mathbf{M} = \int_{v^0} \rho^0 \mathbf{N}^T \mathbf{N} dv^0 \quad (11.20)$$

Es decir:

$$\delta W_{IN} = - \delta \mathbf{U}^T \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} \quad (11.21)$$

El trabajo virtual interior se expresa en función del vector de fuerzas nodales equivalentes a los esfuerzos interiores en el elemento  $\mathbf{Q}$ :

$$\delta W_I = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{Q} \quad (11.22)$$

El trabajo virtual de las fuerzas exteriores se define en función del vector de fuerzas nodales equivalentes a las fuerzas exteriores  $\mathbf{P}$ :

$$\delta W_E = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{P} \quad (11.23)$$

Sustituyendo en la expresión del principio del trabajo virtual (11.12) y considerando que la variación de las deformaciones nodales es arbitraria se obtiene la ecuación de equilibrio del elemento:

$$\mathbf{P} - \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} = \mathbf{Q} \quad (11.24)$$

Finalmente, las ecuaciones diferenciales de equilibrio de la estructura completa se obtienen por ensamblado de las ecuaciones de los distintos elementos finitos. Para un instante de tiempo cualquiera  $t$ , son de la misma forma que las de un elemento (11.24), pero corresponden a toda la estructura.

Para mayor generalidad, se considera además la posibilidad de que sobre el sistema existan también efectos de amortiguamiento. Su contribución a las ecuaciones de equilibrio se representa mediante las fuerzas correspondientes, cuyo valor es  $\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}$ , siendo  $\mathbf{C}$  la matriz de amortiguamiento, que supondremos constante (el símbolo  $\mathbf{C}$  se ha usado anteriormente con profusión, pero su empleo aquí no dará lugar a confusión). Por lo tanto la ecuación final de equilibrio de la estructura es:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{Q} = \mathbf{P} \quad (11.25)$$

#### 11.4. MÉTODO DE INTEGRACIÓN EXPLÍCITO BASADO EN DIFERENCIAS CENTRALES

Para la integración numérica de las ecuaciones de equilibrio, uno de los métodos más habituales es el método de las diferencias centrales. La idea es considerar conocida la solución de equilibrio en un instante cualquiera  $t_n$ , y a partir de ella, calcular las deformaciones en el instante  $t_n + h$ , aproximando la aceleración y velocidad en  $t_n$  mediante un operador de diferencias centrales, en la forma:

$$\ddot{\mathbf{U}}_n = \frac{1}{h^2} (\mathbf{U}_{n-1} - 2\mathbf{U}_n + \mathbf{U}_{n+1}) \quad (11.26)$$

$$\dot{\mathbf{U}}_n = \frac{1}{2h} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_{n-1}) \quad (11.27)$$

En estas expresiones, y en el desarrollo que sigue, se emplea la notación:

$$\mathbf{U}_n \equiv \mathbf{U}^t \quad \mathbf{U}_{n+1} \equiv \mathbf{U}^{t+h} \quad \mathbf{U}_{n-1} \equiv \mathbf{U}^{t-h} \quad (11.28)$$

El mismo criterio de notación se aplica a las restantes magnitudes. Sustituyendo (11.26) y (11.27) en la ecuación de equilibrio en  $t_n$  y reordenando se obtiene:

$$\left( \frac{1}{h^2} \mathbf{M} + \frac{1}{2h} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{P}_n - \mathbf{Q}_n + \frac{2}{h^2} \mathbf{M} \mathbf{U}_n - \left( \frac{1}{h^2} \mathbf{M} - \frac{1}{2h} \mathbf{C} \right) \mathbf{U}_{n-1} \quad (11.29)$$

De esta ecuación se obtiene la deformación en  $t_n + h$ . A continuación la velocidad y aceleración se obtienen de (11.27) y (11.26). Este método es un caso particular de la familia de métodos de Newmark, como se verá más adelante.

Nótese que la respuesta en  $t_n + h$ , se obtiene apoyándose en el equilibrio en  $t$ , por lo que el método tiene un carácter explícito. Esta naturaleza se pone de manifiesto si de las dos ecuaciones (11.26) y (11.27) se despeja la deformación en  $n+1$ , obteniéndose:

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h\dot{\mathbf{U}}_n + \frac{h^2}{2}\ddot{\mathbf{U}}_n \quad (11.30)$$

Esta ecuación indica que la deformación en el instante  $n+1$  se puede determinar directamente a partir del estado en  $n$ , sin necesidad de aplicar ninguna ecuación de equilibrio, por lo que el método es explícito. De hecho puede plantearse el método empleando la ecuación (11.30) en lugar de la (11.29) para calcular la deformación en el paso siguiente, aunque si esto se hace así, es necesario a continuación utilizar la ecuación de equilibrio en  $n+1$  para hallar la aceleración en el nuevo estado.

El método no requiere ninguna iteración para alcanzar el equilibrio, ni es necesario emplear la matriz de rigidez tangente, sino únicamente el vector de fuerzas interiores. El proceso de integración es una secuencia de pasos iguales en el tiempo, aplicando de forma repetitiva las ecuaciones anteriores. En el caso de que  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  sean diagonales, lo cual suele ser habitual en formulaciones de masas consistentes, ni siquiera es necesario resolver ningún sistema de ecuaciones. Desde el punto de vista de la implementación, no es necesario ensamblar la matriz de rigidez, y si las matrices de  $\mathbf{M}$  y  $\mathbf{C}$  son diagonales, los requerimientos de almacenamiento de datos son muy pequeños, pues casi todas las operaciones se pueden efectuar a nivel de elemento. Tiene pues innumerables ventajas que explican su amplia utilización.

### 11.5. ESTABILIDAD DEL MÉTODO DE DIFERENCIAS CENTRALES

El principal inconveniente del método explícito de diferencias centrales es que es condicionalmente estable, es decir que se debe emplear un tamaño de paso inferior a un paso crítico para que el método sea estable. Dicho paso crítico vale:

$$h_{CR} = \frac{2}{\omega_{\max}} = \frac{T_{\min}}{\pi} \quad (11.31)$$

siendo  $\omega_{\max}$  la máxima frecuencia propia existente en la malla de elementos finitos, que se corresponde con el menor periodo de oscilación  $T_{\min}$ . Además esta condición debe satisfacerse en todos los instantes de tiempo durante la simulación. Si la condición de estabilidad no se cumple durante unos pocos de pasos del proceso total, no se observa un fenómeno de inestabilidad obvio en la solución total, pero en dichos pasos se acumula un gran error en la solución, que distorsiona la solución total obtenida. En este aspecto el comportamiento es diferente al análisis estático, en el que la respuesta muestra claramente un crecimiento incontrolado si no se satisface el criterio de estabilidad.

A la vista del paso crítico para garantizar la estabilidad de los métodos, resulta del máximo interés determinar el valor de la frecuencia máxima presente en la malla de elementos. Esto implicar resolver un problema de valores y vectores propios de tamaño igual al número de grados de libertad del sistema, lo cual resulta prohibitivo en



las aplicaciones reales. Por esta razón se trata de obtener estimaciones o límites superiores de dicha frecuencia máxima que sean fáciles de calcular.

Sean  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$  las matrices de rigidez y masas del sistema estructural estudiado y  $\omega_i$  las frecuencias propias de dicho sistema, cuyo cálculo tiene un costo prohibitivo, y sea  $\omega_{\max}$  la mayor de todas estas frecuencias. Se cumple que:

$$\mathbf{K} \phi_i = \omega_i^2 \mathbf{M} \phi_i \quad (11.32)$$

$$\omega_{\max}^2 = \max_i (\omega_i^2)$$

Sean  $\mathbf{K}^e$  y  $\mathbf{M}^e$  las matrices de masas y rigidez individuales de los distintos elementos de la malla, cuyo ensamblaje da lugar a las  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$  anteriores, y sean  $\omega_i^e$  las frecuencias propias del elemento  $e$ , que son solución del problema de autovalores individual de dicho elemento:

$$\mathbf{K}^e \phi_i^e = (\omega_i^e)^2 \mathbf{M}^e \phi_i^e \quad (11.33)$$

La mayor de todas estas frecuencias de los distintos elementos desacoplados es:

$$(\omega_{\max}^E)^2 = \max_{e,i} (\omega_i^e)^2 \quad (11.34)$$

Por aplicación del cociente de Rayleigh se puede demostrar que se cumple siempre que:

$$\omega_{\max}^2 \leq (\omega_{\max}^E)^2 \quad (11.35)$$

Es decir que la máxima frecuencia individual que presentan los distintos elementos finitos desacoplados unos de otros es mayor que la máxima frecuencia del sistema ensamblado. Esto proporciona un límite superior de la frecuencia máxima del sistema  $\omega_{\max}$  que es muy fácil de evaluar, y para la cual existen de hecho soluciones analíticas.

### 11.5.1 Paso de integración crítico en problemas unidimensionales

Consideremos un modelo muy simple, formado por un sólo elemento biarticulado de dos nudos. Teniendo en cuenta sólo la deformación axial, pero no la deformación lateral, el sistema tiene dos grados de libertad, en dirección axial (figura 11.1).

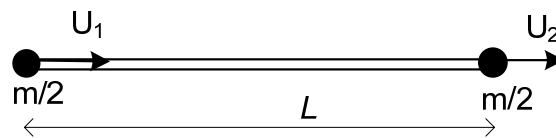


Figura 11.1 Elemento unidimensional.

Empleando una formulación lagrangiana total, el problema de autovalores que proporciona las frecuencias propias de un elemento finito de este tipo es:

$$(\hat{\mathbf{K}}_D + \hat{\mathbf{K}}_\sigma) \phi = \omega^2 \mathbf{M} \phi \quad (11.36)$$

Como se han considerado sólo los términos correspondientes a la deformación axial, y empleando la matriz de masas diagonal, la ecuación anterior es:

$$\frac{A_0}{L_0} \left( E \left( \frac{L}{L_0} \right)^2 + S \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1X} \\ \phi_{2X} \end{Bmatrix} = \omega^2 \frac{\rho_0 A_0 L_0}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_{1X} \\ \phi_{2X} \end{Bmatrix} \quad (11.37)$$

Esta ecuación tiene dos soluciones, la primera es  $\omega=0$ , que no interesa. La segunda corresponde a la frecuencia máxima del elemento y su valor resulta ser:

$$\omega_{\max} = \frac{2c_0}{L_0} \quad (11.38)$$

siendo  $c_0$  la velocidad de propagación de las ondas elásticas en el material:

$$c_0 = \left( \frac{E(L/L_0)^2 + S}{\rho_0} \right)^{1/2} \quad (11.39)$$

En principio esta velocidad depende del nivel de tensión  $S$  y de la longitud deformada, pero habitualmente se simplifica, despreciando por una parte la variación de la longitud  $L \approx L_0$  y por otra la tensión frente al módulo de elasticidad ( $S \ll E$ ):

$$c_0 = \left( \frac{E(L/L_0)^2 + S}{\rho_0} \right)^{1/2} \approx \sqrt{\frac{E}{\rho_0}} \quad (11.40)$$

Por lo tanto el paso crítico para un modelo unidimensional con este tipo de elemento es:

$$h_{CR} = \frac{2}{\omega_{\max}} = \frac{L_0}{c_0} \quad (11.41)$$

Esta expresión se suele denominar condición de Courant, quien la formuló para modelos de diferencias finitas. Esta condición lo que especifica es que el paso de integración debe ser como mínimo aquel tiempo que permita la propagación de una onda elástica de velocidad  $c_0$  dentro del elemento de longitud  $L_0$ .

### 11.5.2 Pasos críticos de integración para diversos elementos finitos

Se puede efectuar un análisis similar al efectuado para el elemento unidimensional, para otros tipos de elementos finitos sencillos en los que se conozca la expresión analítica de sus matrices de rigidez y masas. En cada caso se obtiene el valor de la frecuencia máxima del elemento, que condiciona el paso crítico del método de las diferencias centrales. La tabla 11.1 muestra los valores más habituales.

Elemento	Matriz M	$\omega_{\max}^e$	$h_{CR}$
Unidimensional de 2 nudos	Diagonal	$\frac{2c}{L}$	$\frac{L}{c}$
Unidimensional de 2 nudos	Consistente	$\frac{2\sqrt{3}c}{L}$	$\frac{L}{\sqrt{3}c}$
Unidimensional de 3 nudos	Diagonal	$\frac{2\sqrt{6}c}{L}$	$\frac{L}{\sqrt{6}c}$
Viga plana de 2 nudos <sup>(1)</sup>	Diagonal		$\sqrt{\frac{A}{48I}} \frac{L^2}{c}$
Cuadrado plano. Tensión plana.	Diagonal		$\frac{L}{c} \sqrt{1-\nu}$

(1) Corresponde sólo al efecto de flexión. Se debe comprobar además el valor correspondiente a la deformación axial, como en un elemento de 2 nudos.

Tabla 11.1 Pasos críticos de integración.

### 11.6. MÉTODOS IMPLÍCITOS DE INTEGRACIÓN DE PASO SIMPLE

Existen diversos métodos para la integración numérica de ecuaciones diferenciales de segundo orden que pueden emplearse para la resolución de problemas no lineales. De entre ellos, la familia de los métodos de Newmark o el método de Wilson son unos de los más populares. En ellos se plantea el equilibrio en el instante  $t_n+h$ , lo cual implica en general la necesidad de realizar un proceso iterativo para hallar la solución.

La familia de Newmark se caracteriza por calcular los desplazamientos y velocidades en el instante  $t_n+h$  apoyándose en el estado conocido anterior, mediante un desarrollo en serie de los mismos hasta términos de orden 2, en la forma:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + \int_0^h \ddot{\mathbf{U}}(\tau) d\tau \quad (11.42)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h \dot{\mathbf{U}}_n + \int_0^h \ddot{\mathbf{U}}(\tau)(h-\tau) d\tau \quad (11.43)$$

Las integrales se evalúan mediante una regla de cuadratura, con lo que las aproximaciones de posición y velocidad son:

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1} = \dot{\mathbf{U}}_n + (1-\gamma)h \ddot{\mathbf{U}}_n + \gamma h \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \quad (11.44)$$

$$\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + h \dot{\mathbf{U}}_n + \frac{h^2}{2} \left[ (1-2\beta) \ddot{\mathbf{U}}_n + 2\beta \ddot{\mathbf{U}}_{n+1} \right] \quad (11.45)$$

En función de los valores adoptados para los parámetros  $\beta$  y  $\gamma$ , se obtienen diferentes métodos. Así,  $\beta=1/4$  y  $\gamma=1/2$  corresponde a una aceleración media constante en el intervalo y es el método originalmente propuesto por Newmark, que es incondicionalmente estable. Si se emplea  $\beta=1/6$  y  $\gamma=1/2$  se obtiene un método con interpolación lineal de las aceleraciones, que es condicionalmente estable. Si se emplea  $\beta=0$  y  $\gamma=1/2$  se obtiene el método explícito de las diferencias centrales.

Despejando la aceleración de (11.45) se obtiene su valor en función de las deformaciones:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1} = \frac{1}{\beta h^2} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \frac{1}{\beta h} \dot{\mathbf{U}}_n - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (11.46)$$

Sustituyendo este valor en (11.44) se obtiene la velocidad en función de las deformaciones:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \dot{\mathbf{U}}_n + (1 - \gamma) h \ddot{\mathbf{U}}_n + \frac{\gamma}{\beta h} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \frac{\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{U}}_n - \gamma h \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \\ \dot{\mathbf{U}}_{n+1} &= \frac{\gamma}{\beta h} (\mathbf{U}_{n+1} - \mathbf{U}_n) - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{U}}_n - h \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \end{aligned} \quad (11.47)$$

Las ecuaciones (11.46) y (11.47) deben combinarse con la ecuación de equilibrio dinámico del sistema, que es no lineal, por lo que debe emplearse un proceso iterativo para obtener la respuesta en el instante  $n+1$ , apoyándose en la solución conocida en el instante anterior  $n$ . Sea  $k=1,2,..$  la secuencia de iteraciones; en una cualquiera de ellas las ecuaciones de equilibrio se pueden poner en forma de residuo:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \equiv \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k + \mathbf{Q}_{n+1}^k - \mathbf{P}_{n+1} = 0 \quad (11.48)$$

• Desarrollando este residuo en serie alrededor del punto de iteración anterior ( $k-1$ ) se obtiene:

$$\mathbf{R}_{n+1}^k \approx \mathbf{R}_{n+1}^{k-1} + \left( \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} \right) (\mathbf{U}_{n+1}^k - \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}) = 0 \quad (11.49)$$

La derivada del residuo respecto de las deformaciones define la matriz de rigidez efectiva del sistema:

$$\frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} = \tilde{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \quad (11.50)$$

Por lo tanto la ecuación a resolver en cada iteración es:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^k = -\mathbf{R}_{n+1}^{k-1} \quad (11.51)$$

En esta expresión  $\hat{\mathbf{U}}^k$  es el incremento de deformación producido en la iteración  $k$ :

$$\hat{\mathbf{U}}^k = \mathbf{U}_{n+1}^k - \mathbf{U}_{n+1}^{k-1} \quad (11.52)$$

y  $\mathbf{U}_{n+1}^k$  es la estimación de las deformaciones en el instante  $n+1$ , tras efectuar la iteración  $k$ .

• El valor de la matriz de rigidez efectiva se obtiene derivando (11.48) (particularizada para  $k-1$  en vez de  $k$ ) y es:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} = \frac{\partial \mathbf{R}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} + \frac{\partial \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} \quad (11.53)$$

Se ha supuesto que las fuerzas exteriores  $\mathbf{P}$  no dependen de las deformaciones. El último sumando introduce la matriz de rigidez tangente:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} = \mathbf{M} \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} + \mathbf{C} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} + \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \quad (11.54)$$

Las derivadas de las deformaciones que aparecen en esta expresión se pueden obtener derivando las aproximaciones del método de integración. Así, derivando (11.46) respecto de las deformaciones  $\mathbf{U}_{n+1}$  se obtiene:

$$\frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} = \frac{1}{\beta h^2} \left[ \frac{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} - \frac{\partial \mathbf{U}_n}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} \right] - \frac{1}{\beta h} \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_n}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}_n}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{I} \quad (11.55)$$

Derivando (11.47) se obtiene:

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} = \frac{\gamma}{\beta h} \frac{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} - \frac{\gamma}{\beta h} \frac{\partial \mathbf{U}_n}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_n}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} - h \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \frac{\partial \ddot{\mathbf{U}}_n}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} \quad (11.56)$$

$$\frac{\partial \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1}}{\partial \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}} = \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{I}$$

Por lo tanto el valor final de la matriz de rigidez efectiva es:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} = \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C} + \hat{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \quad (11.57)$$

• El término independiente de la ecuación (11.51) es el residuo al final de la iteración, cambiado de signo:

$$\mathbf{R}_{n+1}^{k-1} = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1} + \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{P}_{n+1} \quad (11.58)$$

La expresión de la aceleración en la iteración  $k-1$  está dada por (11.46):

$$\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1} = \frac{1}{\beta h^2} (\mathbf{U}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{U}_n) - \frac{1}{\beta h} \dot{\mathbf{U}}_n - \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (11.59)$$

El valor de la velocidad en la iteración  $k-1$  viene dado por (11.47):

$$\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{k-1} = \frac{\gamma}{\beta h} (\mathbf{U}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{U}_n) - \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \dot{\mathbf{U}}_n - h \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{U}}_n \quad (11.60)$$

Sustituyendo los valores de la aceleración (11.59) y la velocidad (11.60) en la expresión del residuo (11.58), y éste a continuación en la ecuación de la iteración (11.51) se obtiene:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^k = & \mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^{k-1} - \frac{1}{\beta h^2} \mathbf{M} (\mathbf{U}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{U}_n) + \frac{1}{\beta h} \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_n + \left( \frac{1}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}_n \\ & - \frac{\gamma}{\beta h} \mathbf{C} (\mathbf{U}_{n+1}^{k-1} - \mathbf{U}_n) + \left( \frac{\gamma}{\beta} - 1 \right) \mathbf{C} \dot{\mathbf{U}}_n + h \left( \frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) \mathbf{C} \ddot{\mathbf{U}}_n \end{aligned} \quad (11.61)$$

Todos los sumandos del término independiente son conocidos, bien del último paso de integración  $n$  o de la iteración anterior, por lo que este sistema de ecuaciones lineales puede resolverse y proporciona el valor del incremento de deformación a aplicar en la iteración  $k$ .

La ecuación (11.61) se puede poner en forma compacta, agrupando todos los sumandos del término independiente en un vector de fuerzas efectivas, que depende del estado anterior y de la última estimación de las deformaciones en el estado actual:

$$\tilde{\mathbf{K}}_{n+1}^{k-1} \hat{\mathbf{U}}^k = \tilde{\mathbf{P}}_{n+1}^{k-1} (\mathbf{U}_n, \dot{\mathbf{U}}_n, \ddot{\mathbf{U}}_n, \mathbf{U}_{n+1}^{k-1}) \quad (11.62)$$

Este sistema de ecuaciones lineales se emplea en un proceso iterativo  $k=1,2,\dots$  hasta alcanzar la convergencia.

Como punto de partida del proceso iterativo, para  $k=1$ , se emplea:

$$\mathbf{U}_{n+1}^0 = \mathbf{U}_n \quad (11.63)$$

Se observa que la ecuación (11.62) a resolver para efectuar la integración de las ecuaciones diferenciales de equilibrio dinámico es del mismo tipo que la ecuación obtenida en el análisis estático, excepto por los valores de la matriz y del vector de fuerzas efectivas, que ahora llevan embebida la fórmula de integración e incluyen términos debidos a la inercia y al amortiguamiento. Por lo tanto todos los métodos y estrategias de iteración empleados en el análisis estático para este tipo de sistemas de ecuaciones (seguimiento del *path*, etc.) son aplicables en el caso dinámico.

## 11.7. CRITERIOS DE CONVERGENCIA

Para finalizar la iteración de búsqueda del equilibrio se pueden emplear los mismos tipos de criterios de convergencia empleados en el caso estático.

- En el caso de emplear un criterio basado en el residuo, deben considerarse en él los términos correspondientes a las fuerzas de inercia y amortiguamiento. Es decir que el

criterio para comprobar la convergencia de la iteración  $k$ , en el paso de carga  $n+1$ , se expresará en general en la forma:

$$\|\mathbf{R}_{n+1}^k\|_2 \leq \varepsilon_R \|\mathbf{R}_{n+1}^0\|_2 \quad (11.64)$$

donde  $\varepsilon_R$  es la tolerancia en la norma del residuo de la iteración  $k$ , respecto de su valor inicial. Incluyendo las fuerzas de inercia y amortiguamiento en el valor de ambos residuos, el criterio de convergencia será:

$$\|\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^k - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^k - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k\|_2 \leq \varepsilon_R \|\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_n - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n\|_2$$

• De la misma forma, en el caso de emplear un criterio basado en el incremento de energía interna en cada iteración, se deben añadir los términos correspondientes a las fuerzas mencionadas. Por lo tanto, el criterio será de la forma:

$$\begin{aligned} & (\hat{\mathbf{U}}^k)^T (\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_{n+1}^k - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{n+1}^k - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{n+1}^k) \\ & \leq \varepsilon_E (\hat{\mathbf{U}}^1)^T (\mathbf{P}_{n+1} - \mathbf{Q}_n - \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_n - \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_n) \end{aligned} \quad (11.65)$$

siendo  $\varepsilon_E$  la tolerancia en el incremento de energía interna.

## Ejemplos

### 12.1. BARRA APOYADA - DESLIZANTE

Un ejemplo clásico en el estudio de estructuras con grandes deformaciones consiste en una barra articulada en un extremo y deslizante en el otro (figura 12.1). En su configuración inicial la barra tiene longitud  $L_0$ , y las coordenadas de sus nudos son:

$$\mathbf{X}^e = \{0 \quad 0 \quad X_2 \quad Y_2\}^T$$

El ejemplo se resuelve empleando la formulación lagrangiana total. El estado deformado queda definido por un solo grado de libertad  $V$ , que corresponde a la deformación en la dirección de la coordenada  $Y_2$ . Por lo tanto los vectores de grados de libertad y de coordenadas en el estado deformado son:

$$\mathbf{U} = \{0 \quad 0 \quad 0 \quad V\}^T$$

$$\mathbf{x}^e = \{0 \quad 0 \quad X_2 \quad (Y_2 + V)\}^T$$

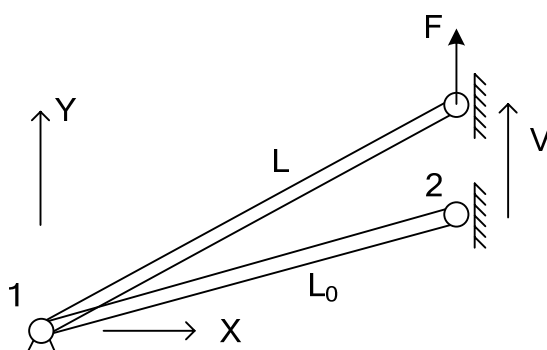


Figura 12.1 Barra apoyada - deslizante.



El vector de fuerzas interiores de la barra es (apartado 7.1.3):

$$\mathbf{Q} = \frac{S A_0}{L_0} \begin{bmatrix} -X_2 \\ -Y_2 - V \\ X_2 \\ Y_2 + V \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la fuerza exterior que hay que aplicar es:

$$F = Q_{2Y} = \frac{S A_0}{L_0} (Y_2 + V)$$

La deformación unitaria de Green Lagrange vale (ver capítulo 7):

$$E_{11} = \mathbf{B}_L \mathbf{U} + \frac{1}{2L_0^2} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U} = \frac{1}{L_0^2} \begin{bmatrix} -X_2 & -Y_2 & X_2 & Y_2 \end{bmatrix} \mathbf{U} + \frac{1}{2L_0^2} \mathbf{U}^T \mathbf{A} \mathbf{U}$$

$$E_{11} = \frac{1}{L_0^2} Y_2 V + \frac{1}{2L_0^2} V^2$$

**Nota.** La deformación unitaria ingenieril para este caso es:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{\left(L_0^2 + 2Y_2 V + V^2\right)^{1/2} - L_0}{L_0}$$

Se trata de una expresión mucho más complicada que la de Green-Lagrange al incluir la raíz cuadrada. Sin embargo, desarrollando en serie para  $V$  se obtiene:

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} \approx \frac{Y_2 V}{L_0^2} + \frac{1}{2} \frac{V^2}{L_0^2} - \frac{1}{2} \frac{Y_2^2 V^2}{L_0^4} + O(V^3)$$

Despreciando el último término (lo cual es válido para el caso  $V \ll L_0$ ) se obtiene la deformación de Green-Lagrange.

Suponiendo un comportamiento lineal del material, la tensión de Piola-Kirchhoff  $S$  es proporcional a la deformación unitaria de Green, a través del módulo de elasticidad del material  $E$ :

$$S = E E_{11} = \frac{E}{L_0^2} \left( Y_2 V + \frac{1}{2} V^2 \right)$$

La relación entre la fuerza exterior y la deformación  $V$  es por lo tanto:

$$F = \frac{EA_0}{L_0^3} \left( Y_2 V + \frac{1}{2} V^2 \right) (Y_2 + V)$$

Empleando la relación  $V/Y_2$  entre la deformación vertical y la coordenada inicial, el valor de la fuerza se puede expresar según la ley cúbica:

$$F = EA_0 \left( \frac{Y_2}{L_0} \right)^3 \left( \frac{V}{Y_2} + \frac{3}{2} \left( \frac{V}{Y_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{V}{Y_2} \right)^3 \right)$$

La figura 12.2 muestra esta relación entre  $F$  y  $V/Y_2$ , adecuadamente normalizada. Se observa que para valores positivos de la deformación  $V$ , la fuerza  $F$  es siempre positiva y creciente según la ley cúbica anterior. Sin embargo, para valores negativos de  $V$  la curva muestra dos puntos donde la fuerza es nula: el primero para  $V/Y_2 = -1$  corresponde a la posición horizontal de la barra y el segundo para  $V/Y_2 = -2$  corresponde a la posición simétrica de la inicial.

Además, los puntos A y B corresponden a puntos de rigidez nula, y en el tramo AC existen dos posibles deformaciones para un mismo valor de la carga exterior. Si la estructura se carga incrementando de forma monótona la fuerza exterior, al llegar al punto A se producirá probablemente un salto brusco a la posición C, fenómeno conocido como *snap-through*. En un modelo numérico este fenómeno se traducirá en problemas de convergencia al llegar al punto A, que para ser evitados requieren el empleo de técnicas especiales en la manera de aplicar las cargas, como la técnica de seguimiento del path ya explicada.

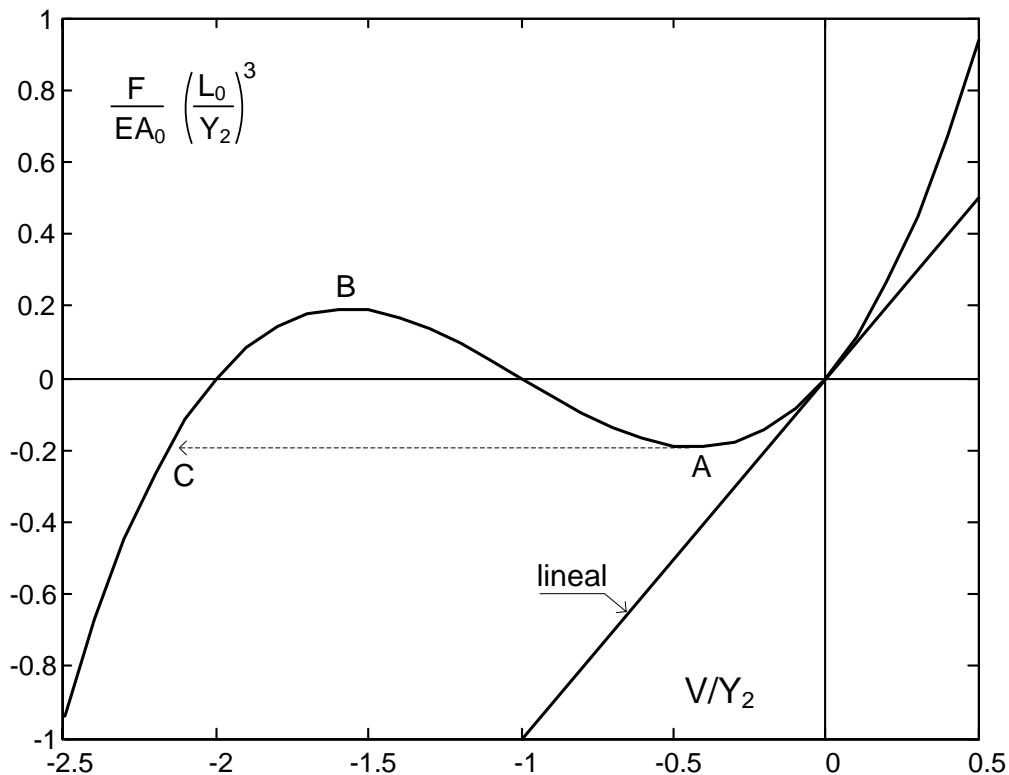


Figura 12.2 Respuesta de una barra apoyada – deslizante.

El análisis lineal de esta estructura, suponiendo que el estado deformado coincide con el inicial, arroja el siguiente resultado para la relación fuerza – deformación:

$$F^{lin} = EA_0 \left( \frac{Y_2}{L_0} \right)^3 \left( \frac{V^{lin}}{Y_2} \right)$$

Se observa que esta respuesta lineal corresponde al primer término de la solución no lineal. El modelo no lineal muestra que la estructura es más rígida a tracción que en el modelo lineal, pero es más flexible a compresión, además de presentar el fenómeno de la inestabilidad.

El archivo modelo1.m contiene el modelo numérico de esta estructura para su simulación mediante el procedimiento nolin.

## 12.2. BARRA DESLIZANTE APOYADA ELÁSTICAMENTE

En este caso se estudia la misma barra que en el ejemplo anterior, pero apoyada en un muelle lineal, de constante  $K_M$  (figura 12.3).

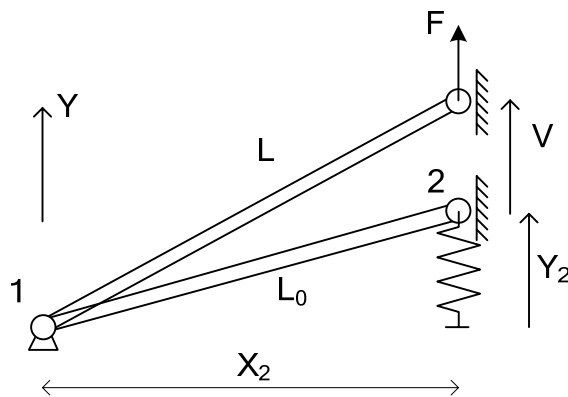


Figura 12.3 Barra apoyada elásticamente.

El desarrollo es el mismo, salvo que a la fuerza exterior se le debe sumar la fuerza necesaria para deformar el muelle:

$$F = EA_0 \left( \frac{Y_2}{L_0} \right)^3 \left( \frac{V}{Y_2} + \frac{3}{2} \left( \frac{V}{Y_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{V}{Y_2} \right)^3 \right) + K_M V$$

La rigidez del muelle se puede representar en forma relativa a la rigidez de la barra introduciendo la constante  $\bar{K}$ :

$$K_M = \bar{K} \frac{EA_0(Y_2)^2}{(L_0)^3}$$

Con ello la respuesta del sistema es:

$$\frac{F}{EA_0} \left( \frac{L_0}{Y_2} \right)^3 = \left( \frac{V}{Y_2} + \frac{3}{2} \left( \frac{V}{Y_2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{V}{Y_2} \right)^3 \right) + \bar{K} \frac{V}{Y_2}$$

La figura 12.4 muestra la respuesta, en función de la rigidez del muelle. Se observa que se mantiene la posibilidad del *snap-through*, aunque ahora la respuesta es mucho más suave a consecuencia de la presencia del muelle, de tal forma que a medida que se aumenta su rigidez, disminuye la zona descendente de la curva de respuesta.

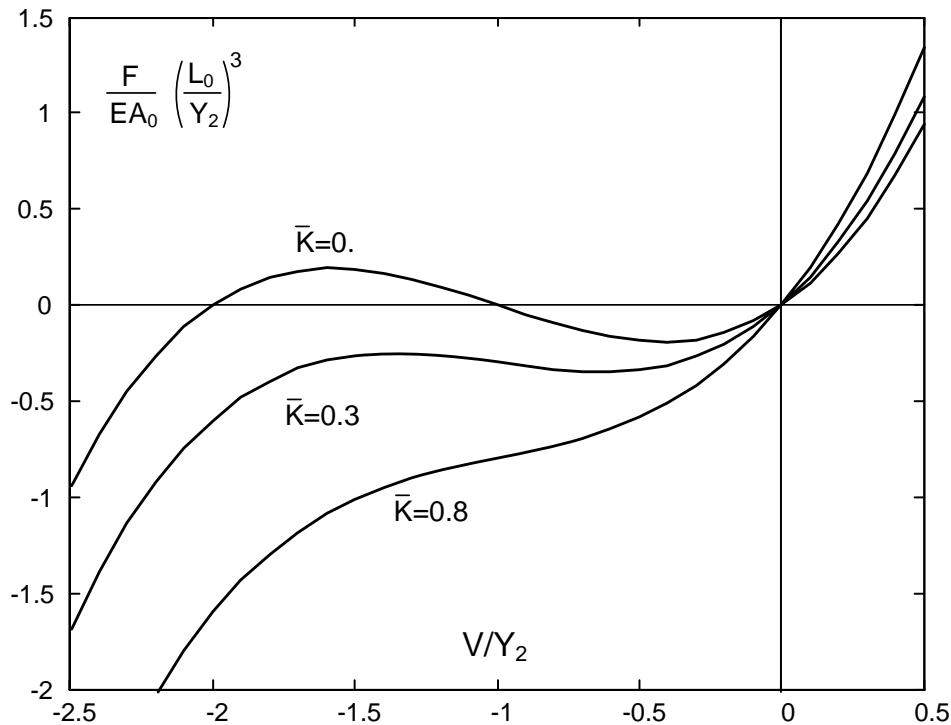


Figura 12.4 Respuesta de una barra apoyada elásticamente.

### 12.3. VOLADIZO MUY FLEXIBLE

En este ejemplo se estudia una viga en voladizo vertical muy flexible, de longitud total 500 cm, con sección cuadrada de 2x2 cm. El material tiene módulo de elasticidad 800.000 kg/cm<sup>2</sup>. La viga se modeliza con 15 elementos viga a flexión de dos nudos, en formulación co-rotacional.

La viga está sometida a dos fuerzas puntuales en su extremo, de módulo y dirección constante: una fuerza horizontal  $F_x=+20$  kg y otra vertical  $F_y=-50$  kg. Con objeto de obtener toda la curva de respuesta fuerza/deformación, la carga total se aplica mediante 50 incrementos de carga iguales.

El comportamiento de esta estructura se ha simulado mediante el procedimiento nolin, utilizando un método de Newton puro, con incrementos fijos de la carga, sin la técnica del seguimiento de path y no se han encontrado problemas de convergencia. El modelo numérico está definido en el archivo model05.m.

La figura 12.5 muestra el proceso de deformación de la estructura.

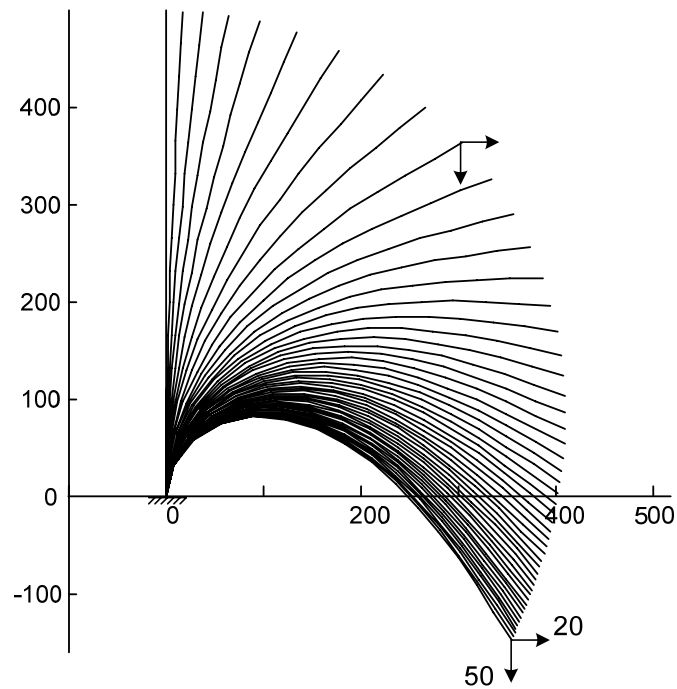


Figura 12.5 proceso de deformación de un voladizo vertical muy flexible.

La figura 12.6 muestra la relación fuerza / desplazamiento para el punto extremo de la viga, en las direcciones X e Y. Las deformaciones finales de este punto con relación a su posición inicial son  $U_X = 356$  cm y  $U_Y = -643$  cm. Nótese que la curva fuerza/deformación es siempre creciente en la fuerza, hasta los valores máximos aplicados de 20 kg y 50 kg, por lo que la aplicación de incrementos fijos de carga, sin seguimiento del path permite obtener dicha curva completa.

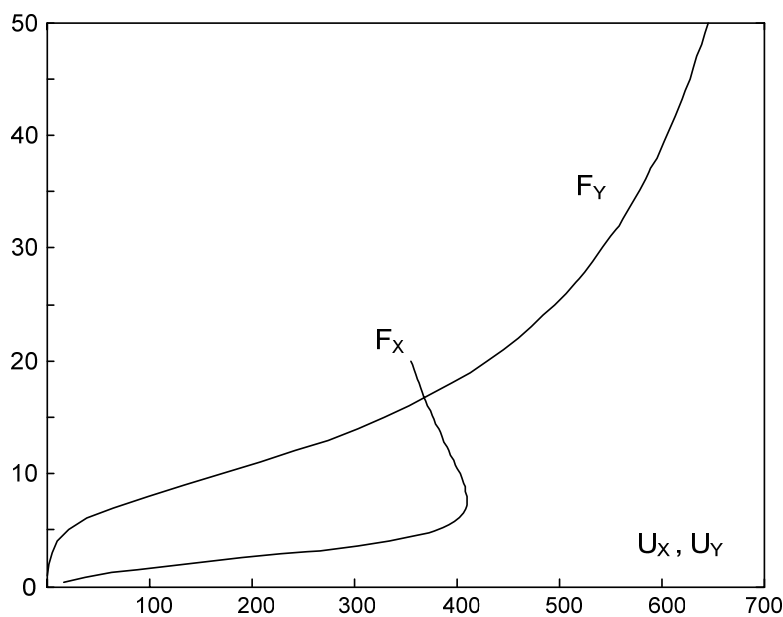


Figura 12.6 Curvas fuerza – deformación de un voladizo flexible.

### 12.4. CELOSÍA EN L

Este ejemplo corresponde a una celosía muy simple, estudiada por varios autores. Tiene forma de L, con 6 barras horizontales una a continuación de la otra, seguidas por una barra inclinada, y finalmente una barra vertical (figura 12.7). En total hay 8 barras y 9 nudos. Todas las barras son de las mismas propiedades, con  $EA = 3 \cdot 10^6 \text{ N}$ .

Con esta disposición, la estructura se puede considerar como formada por una barra, la barra inclinada 7-8, que está apoyada en dos muelles, uno vertical debido a la flexibilidad de la barra 8-9 y otro horizontal mucho más flexible, formado por las 6 barras horizontales situadas entre 1 y 7.

En el nudo 1 se aplica una fuerza horizontal de compresión, y el nudo 9 está fijo. La carga de referencia aplicada en cada paso de carga es de 40.000 N.

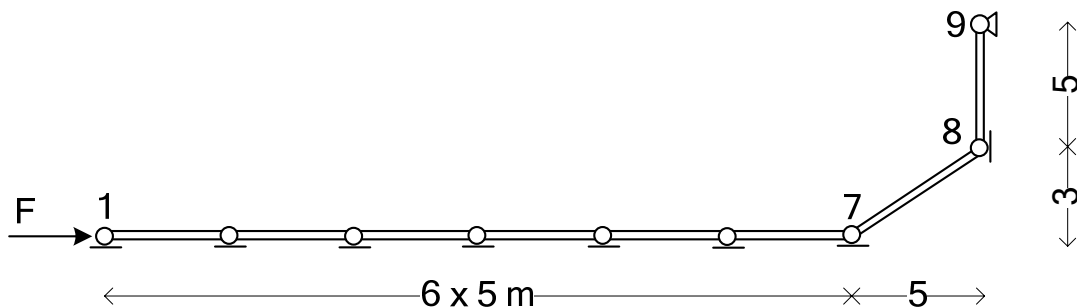


Figura 12.7 Celosía flexible en forma de L.

El comportamiento estático de la estructura se ha simulado mediante el procedimiento nolin. El archivo modelo6.m contiene el modelo numérico correspondiente.

Se han aplicado un total de 28 pasos de carga a fin de obtener toda la curva de respuesta de la estructura. Para ello se ha empleado el método del seguimiento del path, con un valor inicial del parámetro de carga  $\lambda_1^1 = 1$ , número de iteraciones deseado  $\vartheta_{des} = 5$  y exponente  $\gamma = 0.5$ . En cada iteración se ha limitado el incremento de  $\lambda$  a 0.5.

La figura 12.8 muestra la relación entre la fuerza horizontal aplicada y la deformación horizontal del nudo 1, en la que puede verse que aparece un fenómeno de snap-back. Nótese cómo el método de la longitud de arco aplica incrementos de carga pequeños en las zonas de fuerte cambio en la rigidez de la estructura y mayores incrementos de carga en las zonas de rigidez constante.

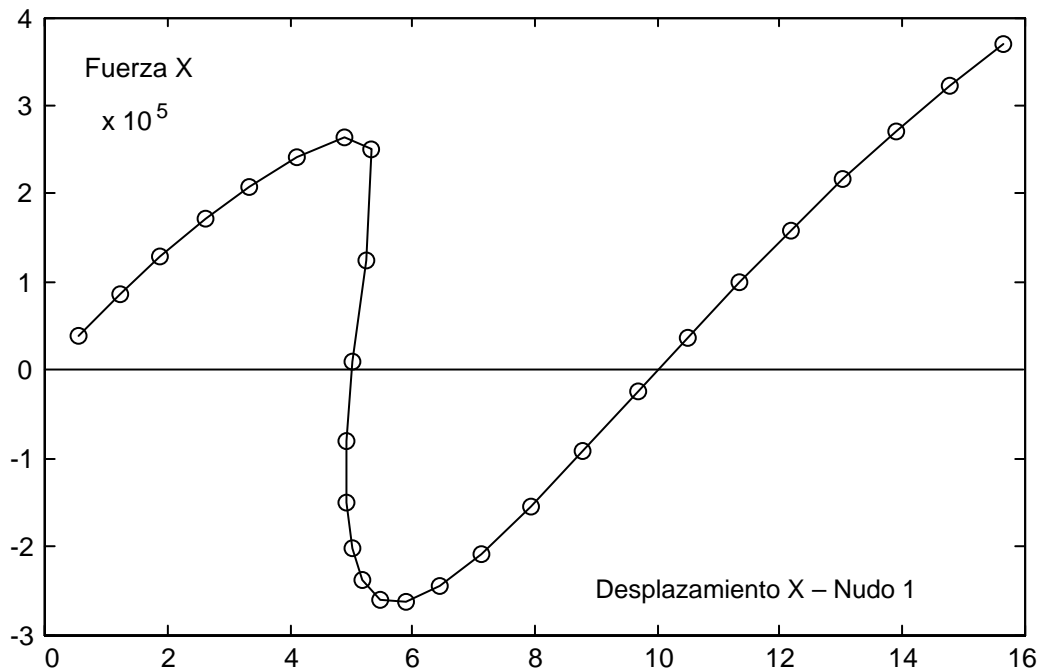


Figura 12.8 Respuesta con snap-back de una celosía flexible.

## 12.5. PÓRTICO BIARTICULADO

Este ejemplo corresponde a un pórtico en forma de L, de 120 cm de lado, articulado en sus dos extremos. El material tiene  $E=720.000 \text{ N/cm}^2$  y las barras tienen:  $A = 6 \text{ cm}^2$ ,  $I=2 \text{ cm}^4$ .

La estructura está sometida a una carga puntual vertical situada sobre la viga horizontal, a 24 cm del vértice (figura 12.9). Esta carga se aumenta progresivamente con objeto de obtener toda la curva de respuesta fuerza/deformación de la estructura en su punto de aplicación. El valor de la fuerza de referencia aplicado en cada paso de carga es de 100 N, por lo tanto la variación de la carga corresponde a la ley  $P=100 \lambda$ .

### 12.5.1 Modelo con elementos viga

En un primer modelo, tanto el poste como la viga se han modelizado con 10 elementos viga plana iguales, de 12 cm de longitud cada uno, dando un total de 20 vigas y 21 nudos. El análisis se ha efectuado mediante el procedimiento nolin (archivo frame.m).

La aplicación de la carga se ha efectuado empleando el método del seguimiento del path, con un valor inicial  $\lambda_1^1 = 1$ , número de iteraciones deseado  $\vartheta_{des} = 5$  y exponente  $\gamma = 0.5$ . En cada iteración se ha limitado el incremento de  $\lambda$  a 2.

La figura 12.10 muestra la evolución de la estructura en los primeros incrementos de carga, obtenida directamente del procedimiento nolin.

La figura 12.11 muestra la relación entre la fuerza total aplicada  $P$  y la deformación vertical del nudo sobre el que se aplica la fuerza (nudo 13), en la que puede verse una respuesta muy no lineal y un claro fenómeno de snap-back.

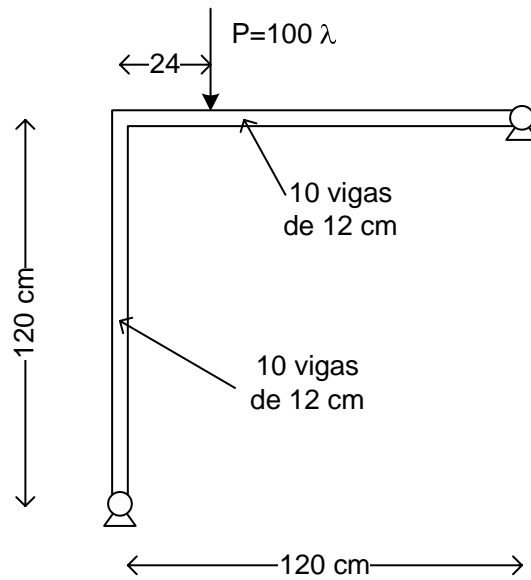


Figura 12.9 Pórtico biarticulado. Modelo de vigas.

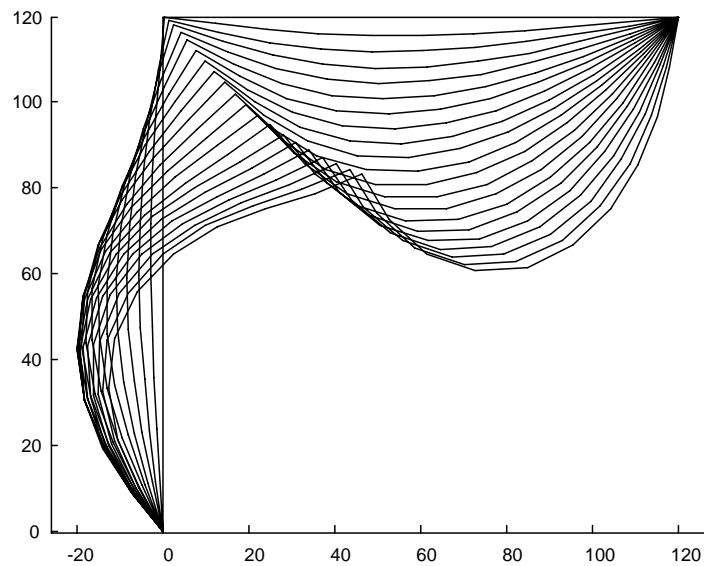


Figura 12.10 Deformación de un pórtico biarticulado flexible.



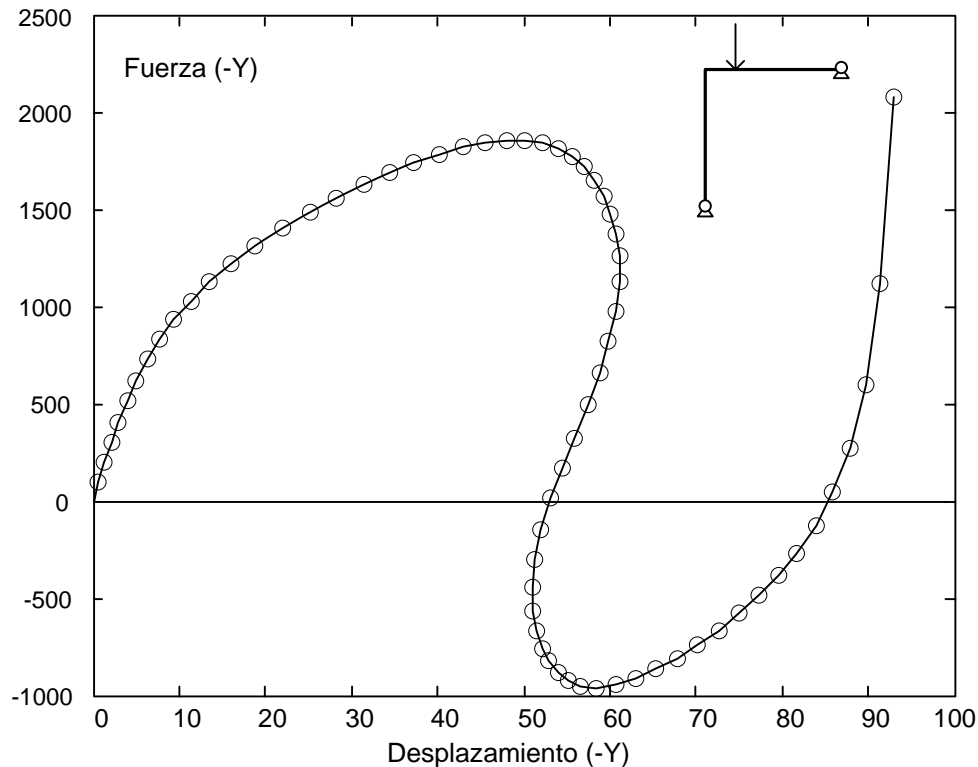


Figura 12.11 Respuesta de un pórtico biarticulado flexible. Modelo de vigas.

### 12.5.2 Modelo con elementos planos de 4 nudos

En este caso, tanto el poste como la viga se han modelizado con elementos finitos planos de 4 nudos. Con objeto de obtener las mismas propiedades resistentes que las vigas del pórtico, se ha supuesto un dominio plano de canto 2 cm y espesor 3 cm.

Se han empleado 10 elementos iguales para el poste y otros tantos para la viga, de 11.9 cm de longitud cada uno. En la unión entre ambos se ha empleado otro elemento plano de dimensiones 2 x 2 cm (figura 12.12). De esta manera la línea media de los elementos corresponde a las dimensiones entre ejes del pórtico. En total hay 21 elementos y 44 nudos.

El análisis de la estructura se ha efectuado mediante el procedimiento `nolin2d`, empleando las formulaciones lagrangiana total y actualizada (archivo `frame2d.m`). Para los elementos finitos se ha empleado la formulación mixta con interpolación de tensiones (apartado 5.7).

La aplicación de la carga se ha efectuado empleando el método del seguimiento del path, con un valor inicial  $\lambda_1^1 = 1$ . Para la formulación lagrangiana total se ha empleado un número de iteraciones deseado  $\vartheta_{des} = 5$  y exponente  $\gamma = 0.5$ . Sin embargo para la formulación actualizada ha resultado mas eficiente emplear un valor del exponente  $\gamma = 1$ . En cada iteración se ha limitado el incremento de  $\lambda$  a 2. Los resultados obtenidos empleando las formulaciones lagrangiana total y actualizada son prácticamente iguales.

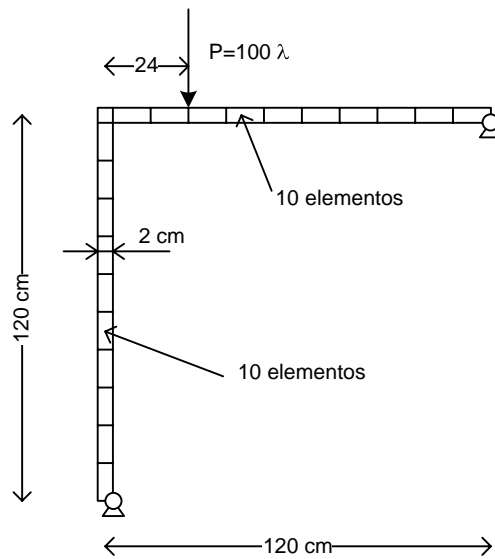


Figura 12.12 Pórtico biarticulado. Modelo con elementos planos de 4 nudos.

La figura 12.13 muestra la relación entre la fuerza total aplicada  $P$  y la deformación vertical del nudo sobre el que se aplica la fuerza. En ella puede verse una respuesta muy similar a la obtenida con el modelo de vigas, con el fenómeno de snap-back, aunque con ciertas diferencias numéricas lógicas, dada la diferencia entre las modelizaciones.

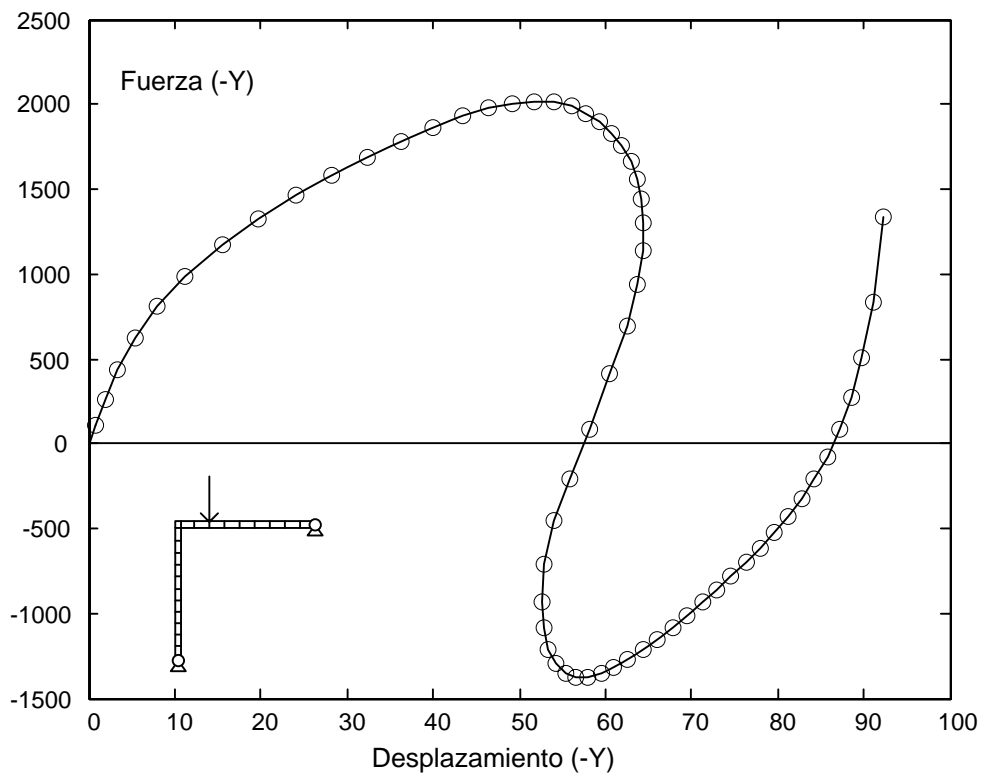


Figura 12.13 Respuesta de un pórtico biarticulado flexible. Modelo de elementos planos.

### 12.6. BARRA APOYADA – DESLIZANTE. DINÁMICA

Se trata de la misma barra estudiada en el apartado 12.1, pero ahora se estudia su respuesta dinámica. La figura 12.14 muestra la configuración geométrica particular estudiada, en su estado inicial.

Las propiedades de la barra son:  $A_0: 2 \text{ cm}^2$   $E: 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$   $\rho=7860 \text{ kg/m}^3$

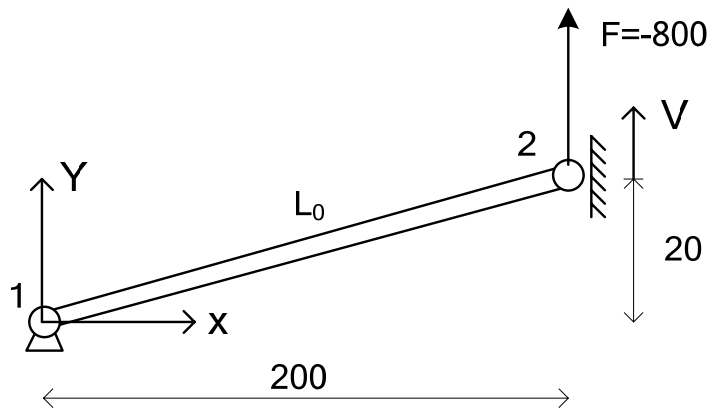


Figura 12.14 Barra apoyada - deslizante.

La matriz de masas se ha supuesto diagonal y el amortiguamiento se ha supuesto proporcional a la matriz de masas, con un factor de proporcionalidad de valor 5, es decir  $C = 5 M$ .

La carga exterior es una fuerza vertical de valor  $F_y = -800 \text{ kg}$ , aplicada en forma de escalón en  $t=0$ . El modelo numérico se encuentra en el archivo modelo1D.m.

Se ha efectuado una simulación dinámica mediante el procedimiento dynex, empleando un integrador explícito basado en diferencias centrales, con un paso de integración de valor  $h=4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$ , que corresponde al paso mínimo para garantizar la estabilidad:

$$h_{cr} \geq \frac{L}{c} = \frac{L}{\sqrt{(E/\rho)}} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ s}$$

La figura 12.15 muestra la deformación vertical del punto de aplicación de la carga en función del tiempo. Al ser la carga aplicada superior al valor que provoca el snap-through, se observa un salto brusco en el primer ciclo de la respuesta (de 0 a -53 cm), seguido de una oscilación amortiguada, hasta alcanzar el equilibrio final con una deformación de 43.32 cm, la cual coincide con el valor hallado estáticamente.

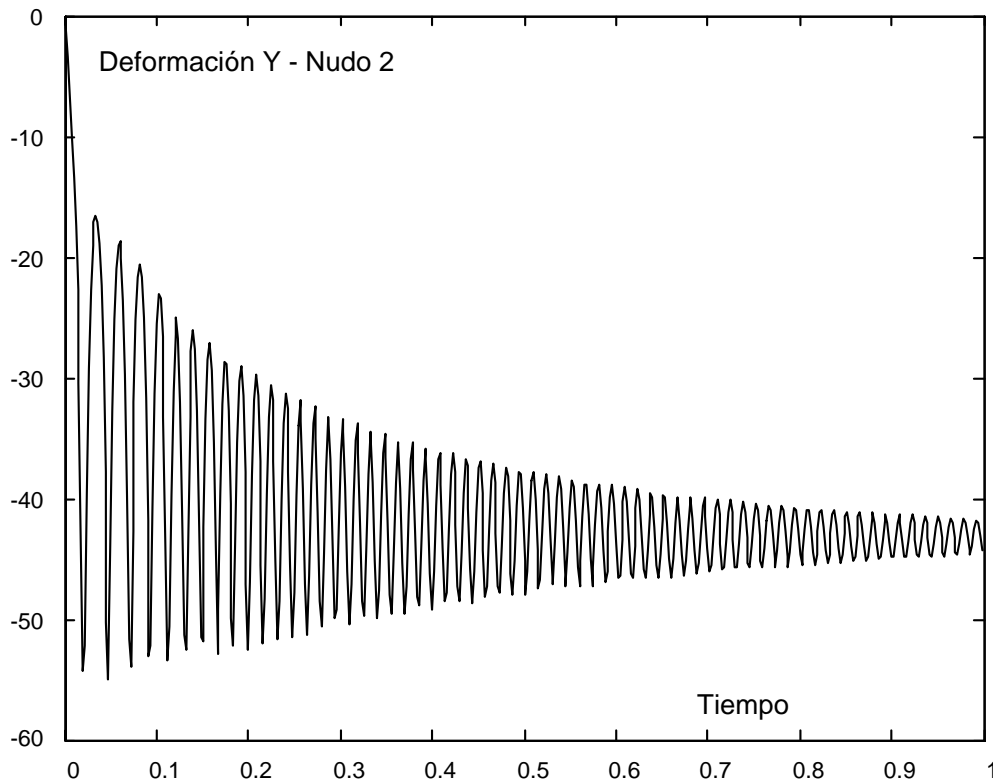


Figura 12.15 Deformación vertical de una barra apoyada - deslizante.

### 12.7. VOLADIZO MUY FLEXIBLE. DINÁMICA

Se estudia la respuesta dinámica de la viga en voladizo vertical ya analizada en régimen estático en un ejemplo anterior (apartado 12.3). La viga está modelizada mediante elementos viga de dos nudos en formulación co-rotacional, y sus propiedades son las mismas que en el análisis estático. La densidad empleada es  $\rho=2700 \text{ kg/m}^3$ .

La matriz de masa se ha supuesto diagonal. El amortiguamiento se supone proporcional a la matriz de masas, con un factor de proporcionalidad de valor 5, es decir  $C = 5 M$ .

Se aplican las mismas fuerzas que en el caso estático ( $F_Y=-50 \text{ kg}$  y  $F_X=20 \text{ kg}$ , en el extremo superior de la viga) en forma escalón en  $t=0$ . El archivo modelo5D.m contiene el modelo numérico de la estructura.

Se han efectuado dos simulaciones dinámicas empleando:

- Un integrador explícito basado en diferencias centrales (procedimiento dynex), con paso de integración  $h=6 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . El paso mínimo para garantizar la estabilidad es  $h_{CR}=6.18 \cdot 10^{-5} \text{ s}$ . El tiempo de cálculo en un ordenador personal es de 28 s.
- Un integrador implícito de Newmark con  $\gamma=1/2$ ,  $\beta=1/4$  (procedimiento dynim), con paso de integración  $h=1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ . Este integrador emplea un valor medio de 2

iteraciones para hallar el equilibrio en cada paso de tiempo. El tiempo de cálculo en este caso es de 8.7 s.

Los resultados obtenidos en ambos casos son prácticamente iguales. La figura 12.16 muestra el proceso de deformación de la viga. La presencia de amortiguamiento hace que con el paso del tiempo la velocidad y la aceleración se anulen, y la estructura adopte una configuración deformada final estática, que lógicamente coincide con la obtenida en el análisis estático (para  $t=1.5$  s ya se ha alcanzado dicha posición estática).

La figura 12.17 muestra la evolución en el tiempo de la deformación horizontal del extremo superior de la viga.

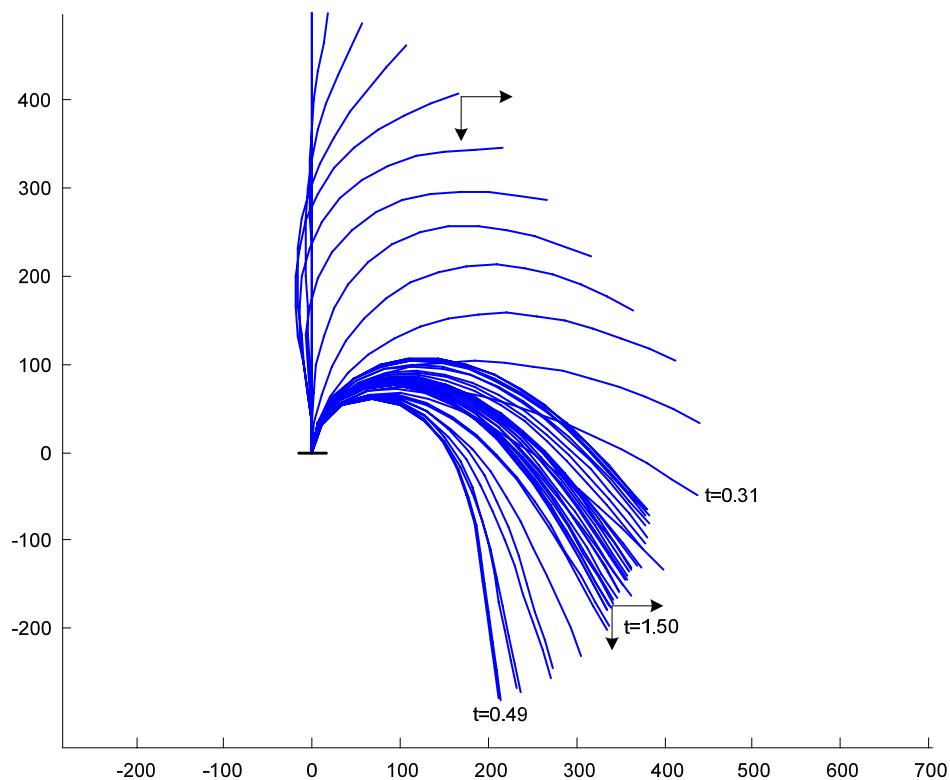


Figura 12.16 Evolución dinámica de un voladizo vertical muy flexible.

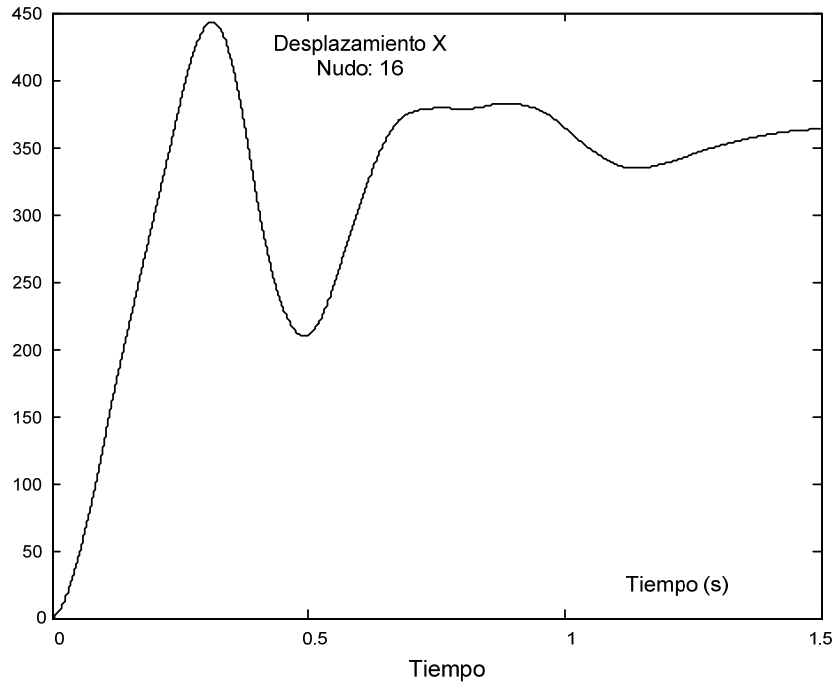


Figura 12.17 Deformación dinámica del extremo superior de un voladizo vertical.

### 12.8. CABLE PRETENSADO

Se estudia un cable pretensado axialmente y sometido a una carga distribuida perpendicular a él, que varía linealmente con el tiempo. El cable tiene una luz de 20 m, y se modeliza mediante un total de 20 barras biarticuladas (figura 12.8).

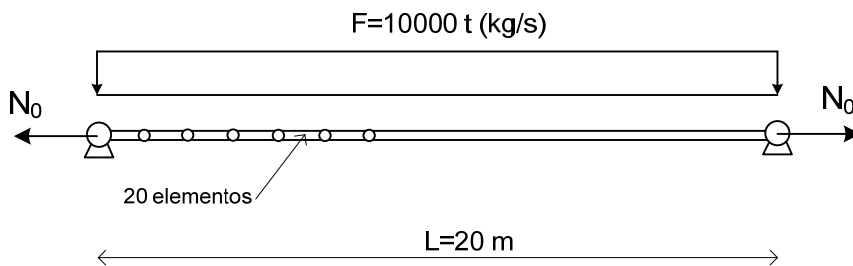


Figura 12.18 Cable pretensado con carga transversal variable.

Las propiedades del cable son:  $A_0: 2 \text{ cm}^2$ ,  $E: 2 \cdot 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ,  $\rho=7860 \text{ kg/m}^3$ . La fuerza de pretensión axial vale  $N_0 = 2000 \text{ kg}$ .

La carga exterior aplicada es perpendicular al cable, está distribuida en toda su longitud, y su resultante total varía linealmente con el tiempo ( $t$ ) según la ley:

$$F_{tot} = 10000 \cdot t \quad (\text{kg/s}).$$

En la implementación del modelo, esta carga total se aplica sobre los nudos, concentrando en cada uno de ellos la parte de cable que le corresponde. Se emplea la

matriz de masa diagonal y no se considera el amortiguamiento. El archivo cableD.m contiene el modelo numérico.

Se han efectuado dos simulaciones dinámicas distintas empleando:

- Un integrador explícito basado en diferencias centrales (procedimiento dynex), con paso de integración  $h=1.5 \cdot 10^{-4}$  s. El paso mínimo para garantizar la estabilidad es  $h_{CR}=2 \cdot 10^{-4}$  s.
- Un integrador implícito de Newmark con  $\gamma=1/2$ ,  $\beta=1/4$  (procedimiento dynim), con paso de integración  $h=1 \cdot 10^{-3}$  s. La resolución del sistema de ecuaciones no lineales en cada paso de integración se efectúa por el método de Newton, requiriendo un número medio 2 de iteraciones por cada paso.

Con ambos integradores los resultados son coincidentes, observándose una diferencia en la posición del orden del 0.15%, tras 0.7 s de integración. La figura 12.19 muestra la evolución con el tiempo obtenida para la deformación vertical del punto central del cable, que es muy similar a la existente en la bibliografía (Geradin, 1983). Se observa un comportamiento muy no lineal desde los primeros instantes del movimiento, con una oscilación no amortiguada, cuyo valor medio va aumentando al ser la fuerza exterior de magnitud siempre creciente. La respuesta lineal es cúbica, mostrada a efectos comparativos.

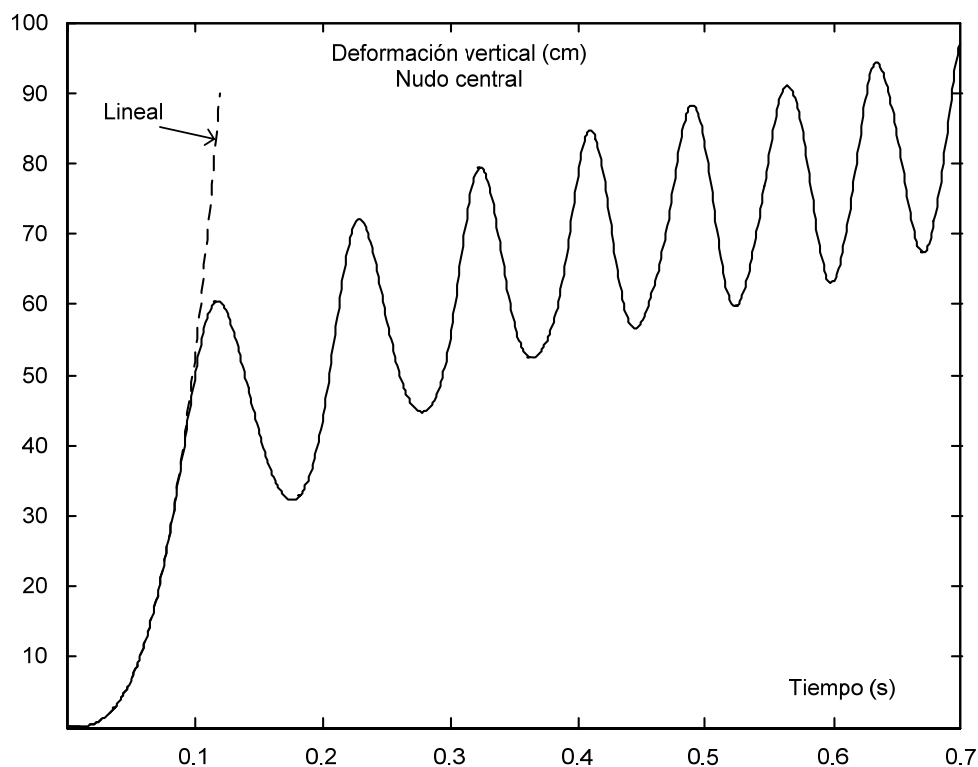


Figura 12.19 Deformación vertical (cm) del punto central del cable pretensado de luz  $L=20$  m, sometido a una carga creciente con el tiempo.

### 12.9. ARCO CIRCULAR ESBELTO

En este ejemplo se estudia un arco plano circular de muy pequeña curvatura, con luz  $L=10000$ , flecha  $f=500$  y radio  $R=25250$ . Está apoyado en sus dos extremos y cargado con una fuerza vertical que está ligeramente descentrada una distancia de 200 respecto de su centro (figura 12.20).

Sus restantes características son: módulo de elasticidad  $E=200$ , área  $A=10^4$  y momento de inercia  $I=10^8$ .

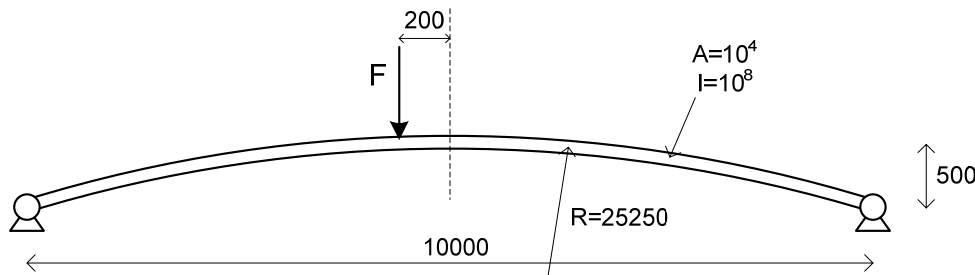


Figura 12.20 Arco circular muy esbelto.

El comportamiento de esta estructura es muy no lineal, por lo que constituye una prueba muy rigurosa para los algoritmos incrementales-iterativos. Este ejemplo ha sido estudiado por varios autores; en particular Clarke y Hancock (1990) estudian el comportamiento de diversos métodos de resolución de las ecuaciones de equilibrio para la determinación de la curva fuerza – deformación completa en el punto de aplicación de la carga.

#### 12.9.1 Modelo con elementos viga

En un primer análisis el arco se ha modelizado empleando 50 elementos viga plana rectos, en formulación co-rotacional, y se ha analizado su respuesta estática mediante el procedimiento nolin (archivo arco.m). La fuerza de referencia aplicada en cada paso de carga es  $\bar{P}=400$ . Se ha empleado el método de Newton con la técnica de seguimiento del path, con un valor inicial del parámetro de carga  $\lambda_1^1 = 2$ , número de iteraciones deseado  $\vartheta_{des} = 4$  y exponente  $\gamma = 0.5$ . En cada iteración se ha limitado el incremento del parámetro  $\lambda$  a 1.

Empleando el procedimiento nolin se ha obtenido, sin ningún problema de convergencia, la respuesta de la estructura para un amplio rango de deformaciones, empleando para ello un total de 88 incrementos de carga.

La figura 12.21 muestra la curva fuerza-deformación completa en el punto de aplicación de la fuerza vertical, en la dirección vertical. En ella se observa la respuesta altamente no lineal, con fenómenos de snap-through y snap-back, incluyendo cuatro puntos límites de fuerza y dos puntos límites de deformación, que además están muy próximos, lo cual requiere una implementación cuidadosa del método de la longitud



del arco para seguimiento del path. Estos resultados coinciden con los existentes en la bibliografía.

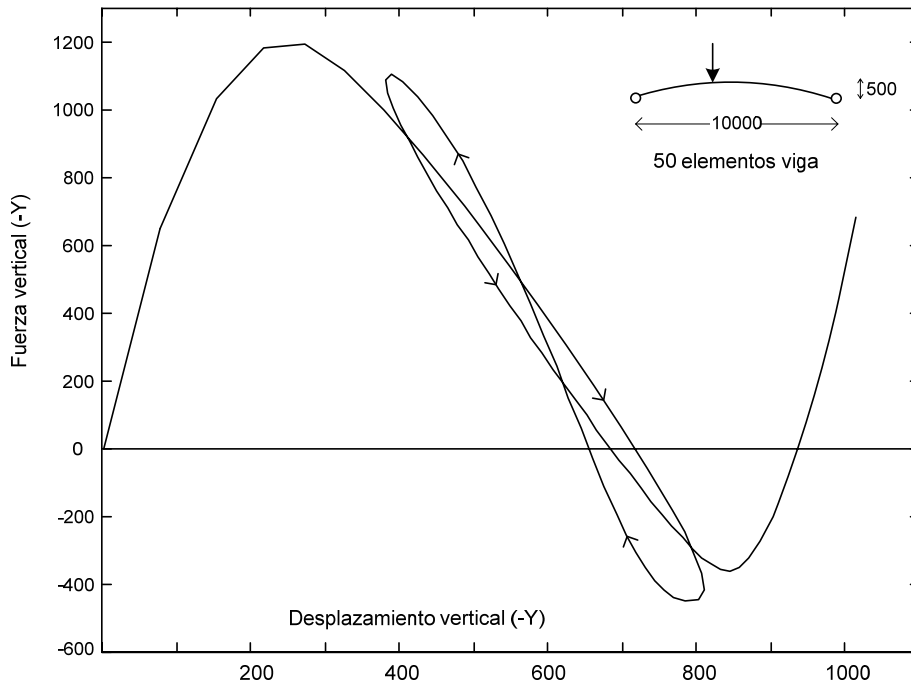


Figura 12.21 Curva fuerza - deformación de un arco circular esbelto en el punto de aplicación de la fuerza vertical.

### 12.9.2 Modelo con elementos de 4 nudos

En este caso el arco se asimila a un modelo plano de 2 dimensiones. Con objeto de obtener las propiedades resistentes del arco (área  $A=10^4$ , momento de inercia  $I=10^8$ ) con un modelo plano, se emplea un canto de 346.4 y un espesor de 28.868.

El arco se ha mallado mediante 100 elementos planos de 4 nudos: 50 en dirección longitudinal y 2 elementos en la dirección del canto (figura 12.22), con lo cual la relación de aspecto de los elementos es del orden de 1.7. Se han empleado elementos en formulación híbrida ya que el empleo de la formulación en desplazamiento estándar produce una respuesta bloqueada, incorrecta.

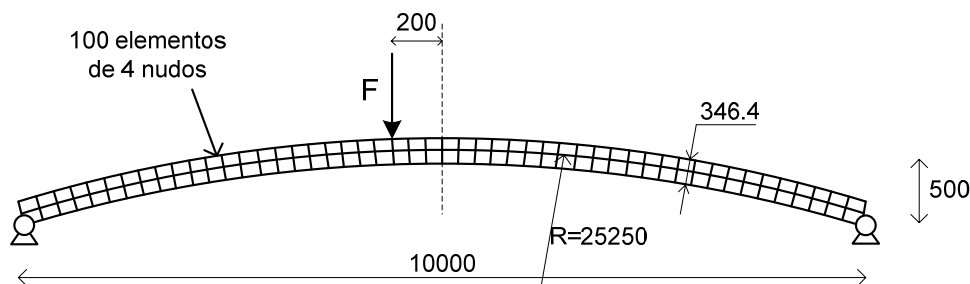


Figura 12.22 Arco circular muy esbelto modelizado con elementos planos de 4 nudos.

La respuesta estática de la estructura se ha analizado mediante el procedimiento `nolin2d` (archivo `arco2d.m`). obteniéndose la misma en un amplio rango de deformaciones, sin ningún problema de convergencia. Se ha empleado el método de Newton con la técnica de seguimiento del path, y las dos formulaciones lagrangianas, total y actualizada. La fuerza de referencia aplicada en cada paso de carga es  $P=400$ . En el caso de la formulación total se ha empleado un valor del número de iteraciones deseado  $\vartheta_{des} = 3$  y del exponente  $\gamma=0.5$ . En el caso de la formulación lagrangiana actualizada ha resultado más eficiente emplear  $\vartheta_{des} = 5$  y exponente  $\gamma=0.8$ . El valor inicial del parámetro de carga es  $\lambda_1^1 = 1$  y en cada iteración se ha limitado el incremento del parámetro  $\lambda$  a 2.

Se han empleado un total de 300 incrementos de carga en la formulación total y de 150 incrementos en la formulación actualizada. En ambos casos los resultados obtenidos son iguales.

La figura 12.23 muestra la curva fuerza-deformación completa en el punto de aplicación de la fuerza vertical, en la dirección de la fuerza. En ella se observa la respuesta altamente no lineal, con fenómenos de snap-through y snap-back, incluyendo cuatro puntos límites de fuerza y dos puntos límites de deformación. El aspecto de esta curva de respuesta es similar a la obtenida mediante elementos viga, con valores numéricos en un rango semejante, aunque con diferencias lógicas debido a la diferente modelización empleada.

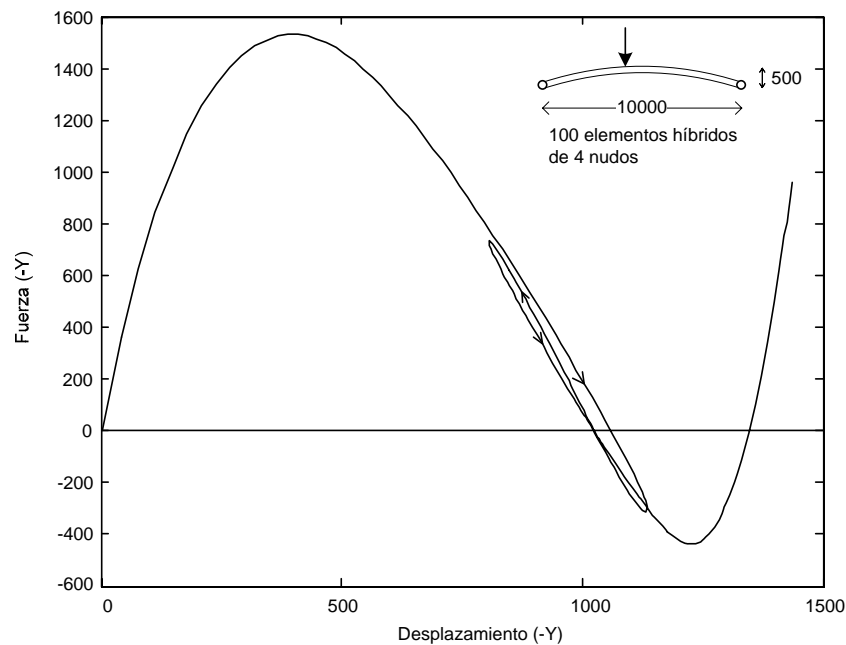


Figura 12.23 Curva fuerza - deformación de un arco circular esbelto en el punto de aplicación de la fuerza vertical. Modelo de 100 elementos planos de 4 nudos.

### 12.10. LÁMINA FLEXIBLE SOMETIDA A UN MOMENTO EN EL EXTREMO

En este ejemplo se estudia la flexión con grandes deformaciones de una lámina rectangular plana muy flexible inicialmente recta, de longitud  $L$ , y anchura  $b$ , sometida a un momento puro en su extremo y empotrada en el otro extremo. Bajo este estado de carga, sin fuerzas transversales, la lámina se deforma según un arco de circunferencia, cuyo radio es  $R = EI / M$  siendo  $M$  el momento aplicado y  $E, I$  sus propiedades de rigidez a flexión.

Cuando el momento aplicado toma un valor  $M_C = 2\pi EI / L$ , la deformada de la lámina es un círculo perfecto de radio  $R_C = L / (2\pi)$ .

La deformación del extremo libre de la lámina tiene los siguientes valores analíticos exactos:

$$\frac{U_X}{L} = \frac{\text{sen}(2\pi\mu) - 1}{2\pi\mu} \quad \frac{U_Y}{L} = \frac{1 - \cos(2\pi\mu)}{2\pi\mu}$$

siendo  $\mu = M / M_C$  la relación entre el momento real aplicado y el momento que transforma la lámina en un círculo.

Las propiedades empleadas para las simulaciones numéricas son: luz  $L= 12$ , ancho  $b=1$ , módulo de elasticidad  $E=1.2 \cdot 10^6$  y canto  $h=0.1$ .

#### 12.10.1 Modelo con vigas

En primer lugar se modeliza la lámina aproximándola a un voladizo formado por vigas rectas, empleando para ello 12 elementos viga plana iguales, de longitud unidad, en formulación co-rotacional. Se trata por lo tanto de un modelo plano.

La respuesta estática del voladizo se ha obtenido mediante el procedimiento nolin, aplicando el momento  $M_C$  que lo transforma en un círculo, y empleando para ello 100 pasos de carga (archivo roll.m). El procedimiento nolin ha obtenido sin ningún problema de convergencia la respuesta de la estructura empleado el método de Newton sin la técnica de seguimiento del path.

La figura 12.24 muestra la posición deformada de la estructura para diversos valores del momento aplicado. Todas ellas son arcos de círculo, hasta llegar al círculo completo.

La figura 12.25 muestra la relación entre el momento aplicado y las deformaciones horizontal y vertical del extremo del voladizo. La tabla 12.1 muestra los valores numéricos de las deformaciones X e Y del punto extremo del voladizo, y sus correspondientes valores exactos, con una excelente correlación.

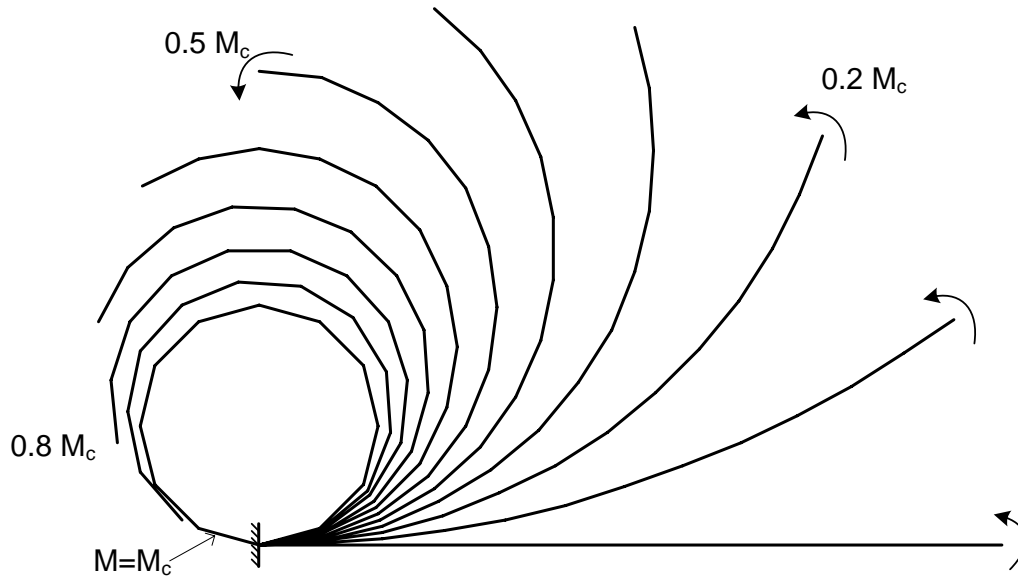


Figura 12.24 Deformación de una lámina en voladizo sometida a un momento en el extremo. Modelo de 12 elementos viga recta iguales.

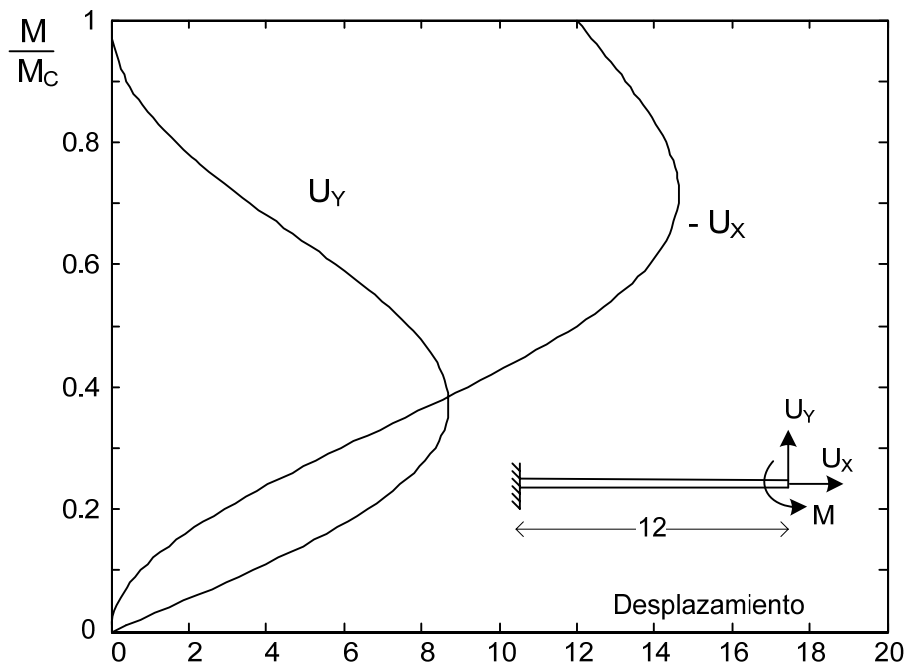


Figura 12.25 Deformaciones del extremo de una lámina flexible en voladizo, en función del momento aplicado en su extremo. Modelo de 12 elementos viga recta iguales.

$\mu = \frac{M}{M_C}$	Horizontal $U_X$		Vertical $U_Y$	
	Elementos viga	Exacto	Elementos viga	Exacto
0.25	-4.355	-4.3606	7.6449	7.6394
0.50	-12.000	-12.000	7.6613	7.6394
0.75	-14.563	-14.546	2.5629	2.5465
1.00	-12.000	-12.000	0.000	0.000

Tabla 12.1 Deformaciones del extremo de una lámina en voladizo de luz  $L=12$  sometida a un momento en su extremo. Modelo de 12 elementos viga iguales.

### 12.10.2 Modelo con cáscaras

En este caso la lámina se estudia como un modelo espacial, empleando elementos finitos cáscara de 4 nudos, siguiendo la formulación del capítulo 9. Se emplean 12 elementos iguales, inicialmente planos, de dimensiones 1 x 1.

La respuesta estática del modelo se ha obtenido mediante el procedimiento nolinsh, aplicando el momento  $M_C$  que lo transforma en un círculo, empleando para ello 20 pasos de carga, y el método de Newton sin la técnica de seguimiento del path (archivo rollsh.m).

La figura 12.26 muestra la deformada de la lámina para diversos valores del momento aplicado, todas ellas arcos de círculo, hasta llegar al círculo completo.

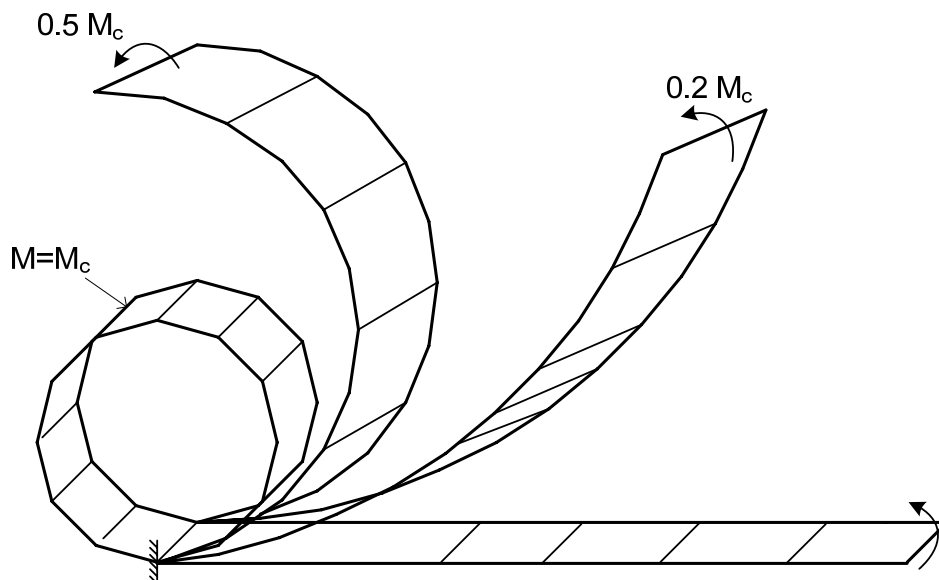


Figura 12.26 Deformación de una lámina en voladizo sometida a un momento en el extremo. Modelo de 12 elementos cáscara iguales.

La tabla 12.2 muestra algunos valores numéricos de las deformaciones horizontal y vertical del extremo de la lámina y sus correspondientes valores exactos.

$\mu = \frac{M}{M_C}$	Horizontal $U_X$		Vertical $U_Y$	
	Elemento cáscara	Exacto	Elemento cáscara	Exacto
0.25	-4.359	-4.3606	7.6440	7.6394
0.50	-12.000	-12.000	7.6601	7.6394
0.75	-14.566	-14.546	2.5570	2.5465
1.00	-12.010	-12.000	0.010	0.000

Tabla 12.2 Deformaciones del extremo de un voladizo de luz  $L=12$  sometido a un momento en su extremo. Modelo de 12 elementos cáscara iguales.

### 12.11. SEMIESFERA CON ORIFICIO

Otro ejemplo muy habitual en la bibliografía es el de una cáscara semiesférica con un orificio de  $18^\circ$  en su polo (figura 12.27). Su radio es  $R=10$  y el espesor es 0.04. Las propiedades del material son  $E=6.825 \cdot 10^7$ ,  $\nu=0.3$ .

La semiesfera está sometida a un conjunto de 4 cargas simétricas de valor  $F=200$  cada una de ellas, situadas en su base. Las dos cargas situadas en el punto A y su simétrico traccionan la cáscara y las otras dos cargas (situadas en el punto B y su simétrico) la comprimen. La cáscara está libre en su base.

Por la doble simetría del problema, sólo se considera un cuarto de la cáscara, que se malla empleando un mallado regular de  $16 \times 16$  elementos. Sobre él se aplican dos cargas de valor  $F/2$  en los puntos A y B. Se emplean los elementos cáscara curvos de 4 nudos descritos en el capítulo 9.

El problema se ha resuelto mediante el procedimiento nolinsh (archivo semiesf.m), empleando la formulación lagrangiana total. La carga total se ha aplicado en 10 pasos de carga, sin la técnica el seguimiento del path. El número total de iteraciones para todos los pasos de carga es de 56.

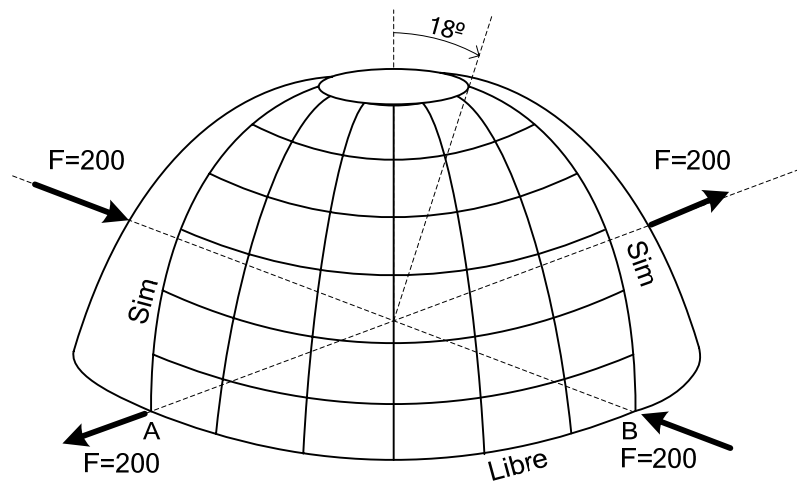


Figura 12.27. Semiesfera con orificio sometida a 4 cargas con doble simetría.

La figura 12.28 muestra la relación entre la fuerza aplicada y la deformación en los puntos A y B de la cáscara, en la dirección de las cargas aplicadas. Como consecuencia de la no linealidad del problema, ambas deformaciones son distintas, mientras que en el análisis lineal con pequeñas deformaciones dichas deformaciones resultan iguales. Estos resultados coinciden con los publicados en la bibliografía (Wagner, Gruttmann, 2005)

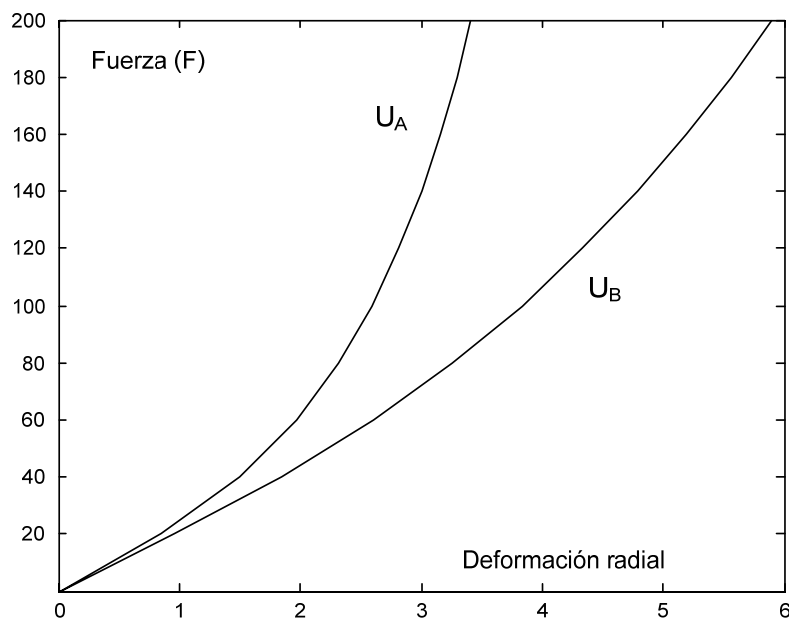


Figura 12.28. Relación fuerza – deformación para una semiesfera con orificio sometida a 4 fuerzas simétricas.

A modo de prueba de la robustez de la formulación, se ha aplicado también la carga total  $F$  en sólo 2 pasos de carga, con prácticamente los mismos resultados.

La figura 12.29 muestra la deformada de la cáscara para el valor final de la carga aplicada.

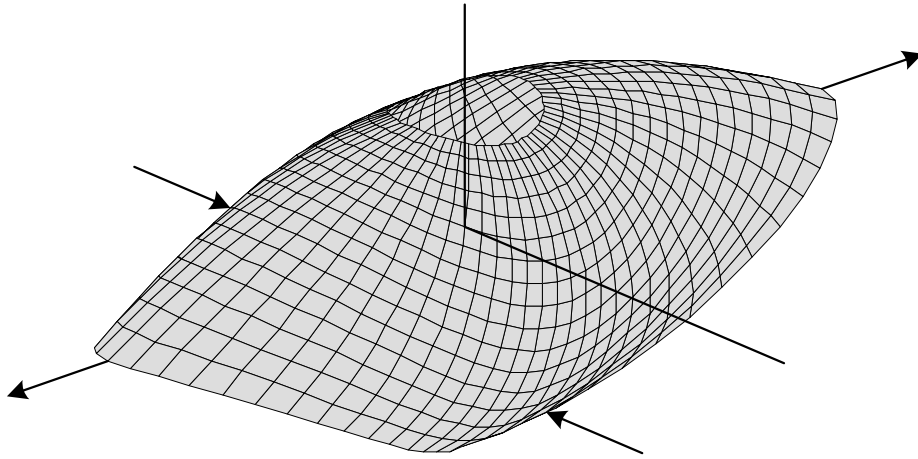


Figura 12.29. Configuración deformada de una semiesfera con orificio para  $F=200$ .



## Anejos

### 13.1. NOTACIÓN

La mayor parte de las magnitudes empleadas en mecánica de sólidos tienen carácter tensorial y para su manejo existen distintas notaciones, cada una de las cuales tiene ventajas e inconvenientes respecto a ser más o menos compactas, intuitivas, o fáciles de transformar en algoritmos de computación numérica. A continuación se resumen las distintas posibilidades y su utilización en el texto.

#### 13.1.1 Notación de índices

Consiste en emplear para cada tensor una serie de índices asociados a su rango, mostrados de forma explícita. Es muy empleada en los textos de mecánica de los medios continuos. Tiene las ventajas de su generalidad y la facilidad de transformarse en algoritmos implementables en lenguajes de programación, en los cuales el manejo de índices es imprescindible. En esta notación es habitual seguir el criterio de los índices mudos de Einstein, según el cual los índices repetidos en un monomio se suman.

Su principal inconveniente es que da lugar a expresiones farragosas, que a veces son aplicables sólo en coordenadas cartesianas, a lo cual se une el hecho de la escasa formación en su utilización, más allá de los casos simples. Esta notación se empleará aquí sólo cuando sea necesario.

#### 13.1.2 Notación de tensores

Es muy utilizada asimismo en textos de mecánica de los medios continuos. En este caso los subíndices no se muestran explícitamente, con lo que las expresiones son mucho más compactas y fáciles de recordar. Además, al ser las magnitudes tensoriales independientes del sistema de referencia, las expresiones obtenidas son válidas en sistemas de coordenadas no cartesianos. En esta notación es prácticamente universal emplear letra negrilla para los tensores de orden 1,2... y cursiva para los escalares. Además suele ser a veces habitual denominar a los tensores de orden 1 con letras

negrillas minúsculas, y a los de orden 2 o superior con negrilla en mayúsculas. Sin embargo existen muchísimas excepciones por lo que este último convenio cada vez se usa menos, y de hecho no se seguirá aquí.

En esta notación se introducen símbolos específicos para las operaciones entre tensores: el  $\cdot$  para el producto escalar (contracción de un índice), el  $:$  para el producto contracto (contracción de dos índices) y el  $\otimes$  para el producto tensorial.

### 13.1.3 Notación de matrices

Es la más habitual en textos de ingeniería mecánica y de estructuras por su equilibrio entre claridad, fácil implementación y compacidad similar a la notación de tensores estricta, y es la que se empleará preferentemente. Corresponde a una representación directa mediante matrices y vectores de las magnitudes tensoriales, y en muchas ocasiones las expresiones obtenidas son casi iguales. Además, para no complicar la notación, se empleará la misma letra o símbolo para denominar a una misma magnitud tanto en su representación tensorial, como matricial: el tipo de representación quedará definido por el contexto y por los operadores empleados. En algunos textos se suele añadir a la representación como matriz los corchetes  $[A]$ , aunque este convenio ha dejado de usarse en la actualidad, y no se seguirá aquí, pues en principio no debe haber confusión entre las notaciones.

Como es habitual los tensores de orden 1 se representan como una matriz de una columna (vector), y los tensores de orden 2 como una matriz de 2 dimensiones, donde el primer índice corresponde a la fila. En ambos casos se emplea la letra negrilla para vectores y matrices.

## 13.2. PRELIMINARES MATEMÁTICOS

### 13.2.1 Resumen de álgebra de vectores y tensores

A continuación se resume la notación empleada para las operaciones más importantes. Se emplean en este apartado letras minúsculas para los tensores de orden 1 y mayúsculas para los de orden 2, aunque este convenio no se sigue en el resto del texto.

#### 13.2.1.1 Operaciones entre vectores

- Producto escalar, o interno, de vectores.

$$\text{Notación de subíndices: } s = \sum_i a_i b_i \equiv a_i b_i$$

$$\text{Notación de tensores: } s = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\text{Notación de matrices: } s = \mathbf{a}^T \mathbf{b} = \mathbf{b}^T \mathbf{a}$$

- Producto vectorial de vectores.

Notación de tensores:  $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$

Notación de matrices:  $\mathbf{c} = \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{b}$

La notación  $\tilde{\mathbf{A}}$  corresponde a la matriz hemisimétrica asociada al vector  $\mathbf{a}$ , y por lo tanto es de orden 2.

Notación de subíndices:  $c_i = \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} a_j b_k$

El símbolo  $\epsilon$  representa el tensor alternador de orden 3, definido como  $\epsilon_{ijk} = 1$  si la permutación  $\{i,j,k\}$  es par, -1 si la permutación es impar y 0 si hay índices repetidos.

- Producto tensorial de vectores, o producto diádico. Produce un tensor  $\mathbf{D}$  de orden 2.

Notación de subíndices:  $D_{ij} = a_i b_j$

Notación de tensores:  $\mathbf{D} = \mathbf{a} \otimes \mathbf{b}$

Notación de matrices:  $\mathbf{D} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$

### 13.2.1.2 Operaciones entre tensores de orden 2

- Producto ordinario, o composición de tensores. Da lugar a otro tensor del mismo orden.

Notación de tensores:  $\mathbf{D} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$

Notación de matrices:  $\mathbf{D} = \mathbf{A} \mathbf{B}$

Notación de subíndices:  $D_{ij} = \sum_k A_{ik} B_{kj}$

En la notación de tensores, muchas veces se omite el símbolo  $\cdot$  entre los tensores, pero es más claro ponerlo para indicar que se contrae un índice entre ambos tensores.

- Producto contrato o producto escalar de dos tensores de orden 2. Contrae dos índices, para dar lugar a un escalar. Se emplea la misma expresión en notación de tensores y notación de matrices:

$$s = \mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \mathbf{B} : \mathbf{A}$$

Se puede comprobar fácilmente que se cumple:

$$\mathbf{A} : (\mathbf{B} \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \mathbf{C}^T) : \mathbf{B} = (\mathbf{B}^T \mathbf{A}) : \mathbf{C}$$

### 13.2.1.3 Otras operaciones entre vectores y tensores

- Producto ordinario de un tensor de orden 2 por un vector.

Notación de tensores:  $\mathbf{c} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{b}$

Notación de matrices:  $\mathbf{c} = \mathbf{A} \mathbf{b}$

En la notación de tensores, muchas veces se omite el símbolo  $\cdot$  entre los tensores, pero es más claro ponerlo para indicar que se contrae un índice.

- Producto contracto entre tensores de orden 2 y 4. Sean  $\mathbf{E}$  y  $\mathbf{S}$  dos tensores de orden 2 y  $\mathbf{C}$  uno de orden 4, el producto contracto entre ellos, que aparece con frecuencia, es:

$$\text{Notación de índices: } S_{ij} = C_{ijkl} E_{kl}$$

$$\text{Notación de tensores: } \mathbf{S} = \mathbf{C} : \mathbf{E}$$

### 13.2.2 Representación de matrices como vectores

En los desarrollos prácticos, es muy frecuente tener que representar tensores simétricos de segundo orden como vectores, para lo cual es necesario establecer un criterio. En primer lugar se establece un criterio simple para diferenciar la misma magnitud en ambas representaciones: sea por ejemplo  $\mathbf{A}$  un tensor simétrico de orden 2 ( $A_{ij}$ ), se denominará  $\bar{\mathbf{A}}$  a su representación como vector, almacenado en una columna ( $\bar{A}_i$ ).

Para efectuar la transformación anterior se emplea habitualmente la denominada regla de Voigt, la cual es distinta si se trata de tensores que representan esfuerzos o que representan deformaciones.

- Regla de Voigt para tensores que representan esfuerzos. Sea  $\mathbf{S}$  un tensor simétrico de orden 2 que representa un esfuerzo (p.e. la tensión de Piola-Kirchhoff), su transformación es sencillamente:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12} & S_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{S}} = \begin{Bmatrix} S_{11} \\ S_{22} \\ S_{12} \end{Bmatrix}$$

- Regla de Voigt para tensores que representan deformaciones. Sea  $\mathbf{E}$  un tensor simétrico de orden 2 que representa una deformación, como la deformación unitaria de Green. Su transformación implica multiplicar por 2 los términos fuera de la diagonal:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{12} & E_{22} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \bar{\mathbf{E}} = \begin{Bmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ 2E_{12} \end{Bmatrix}$$

Este hecho de multiplicar por 2 los términos fuera de la diagonal es necesario para poder efectuar el producto contracto de ambos tensores en cualquiera de las dos representaciones, y obtener el mismo resultado:

$$U = \mathbf{S} : \mathbf{E} = S_{11}E_{11} + S_{22}E_{22} + S_{12}E_{12} + S_{12}E_{12}$$

$$U = \bar{\mathbf{S}}^T \bar{\mathbf{E}} = S_{11}E_{11} + S_{22}E_{22} + 2S_{12}E_{12} = \mathbf{S} : \mathbf{E}$$

### 13.2.3 Traza

Para un tensor de orden 2, su traza se define como el escalar:

$$s = \text{tr}(\mathbf{A}) = \mathbf{A} : \mathbf{I} = \sum_i A_{ii}$$

Sus propiedades más importantes son:

$$\text{tr}(\mathbf{A}) = \text{tr}(\mathbf{A}^T)$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B})$$

$$\text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A})$$

$$\text{tr}(\mathbf{a} \otimes \mathbf{b}) = \text{tr}(\mathbf{a} \mathbf{b}^T) = \sum_i (\mathbf{a} \otimes \mathbf{b})_{ii} = \sum_i a_i b_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a}^T \mathbf{b}$$

Empleando la traza, el producto contracto se puede poner como:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} = \sum_{i,j} A_{ij} B_{ij} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B}) = \text{tr}(\mathbf{B} \mathbf{A}^T) = \text{tr}(\mathbf{A} \mathbf{B}^T) = \text{tr}(\mathbf{B}^T \mathbf{A})$$

### 13.2.4 Gradiente

• El gradiente de un campo escalar  $f$ , es un vector cuyas componentes son las tres derivadas parciales del escalar respecto de las tres coordenadas del espacio. La notación habitual emplea el operador nabla  $\nabla$ :

$$\text{grad}(f) \equiv \nabla f \equiv \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

Puede pensarse en el gradiente  $\nabla$  como un operador vectorial:

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{bmatrix}$$

- El gradiente de un vector  $\mathbf{v}$  es un tensor de orden 2, que se obtiene aplicando el operador gradiente a cada una de las componentes escalares del vector:

$$\text{grad}(\mathbf{v}) = \nabla \mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}}$$

En notación de subíndices y matrices se representa como:

$$(\text{grad}(\mathbf{v}))_{ij} = (\nabla \mathbf{v})_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}$$

$$\text{grad}(\mathbf{v}) = (\nabla \mathbf{v}^T)^T$$

Considerando una base ortonormal para las coordenadas  $\mathbf{x}$  definida por tres vectores  $\mathbf{e}_i$ , la expresión del gradiente de un vector es:

$$\text{grad}(\mathbf{v}) = (\nabla \otimes \mathbf{v})^T = \sum_{i,j} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

- El gradiente de un tensor  $\mathbf{D}$  de orden 2 es otro tensor  $\mathbf{T}$ , de orden 3, cada uno de cuyos términos es la derivada de las componentes del tensor respecto de las tres coordenadas.

$$\mathbf{T} \equiv \text{grad}(\mathbf{D}) = \nabla \mathbf{D} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \mathbf{x}} \quad T_{ijk} = \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k}$$

$$\mathbf{T} = \sum_{i,j,k} \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_k} \mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j \otimes \mathbf{e}_k$$

### 13.2.5 Divergencia

- La divergencia de un vector  $\mathbf{v}$  es un escalar  $d$  definido como la suma de las tres derivadas de las componentes de vector, cada una en su propia dirección:

$$d = \text{div}(\mathbf{v}) = \sum_i \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

Por lo tanto puede ponerse como el producto escalar del operador gradiente por el vector:

$$d = \text{div}(\mathbf{v}) = \nabla \cdot \mathbf{v} = \nabla^T \mathbf{v}$$

Puede comprobarse de su definición que la divergencia del vector corresponde con la suma de los términos de la diagonal del gradiente del vector, es decir con la traza del gradiente del vector:

$$d = \text{div}(\mathbf{v}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) = \nabla \mathbf{v} : \mathbf{I} = \nabla \cdot \mathbf{v}$$

La divergencia afecta a la parte simétrica del gradiente del vector. Descomponiendo el gradiente en sus componentes simétrica y hemisimétrica

$$\nabla \mathbf{v} = (\nabla \mathbf{v})_{sim} + (\nabla \mathbf{v})_{hem}$$

$$\text{div}(\mathbf{v}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{v}) = \text{tr}(\nabla \mathbf{v})_{sim} + \text{tr}(\nabla \mathbf{v})_{hem} = \text{tr}(\nabla \mathbf{v})_{sim} + 0$$

• La divergencia de un tensor  $\mathbf{D}$  de orden 2 es un vector  $\mathbf{d}$  definido como el producto escalar del operador gradiente por el tensor:

$$\mathbf{d} = \text{div}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{D}$$

Sus componentes son:

$$d_i = \{\text{div}(\mathbf{D})\}_i = \sum_j \frac{\partial D_{ij}}{\partial x_j}$$

La divergencia del tensor  $\mathbf{D}$  es igual a la traza del gradiente del tensor:

$$\mathbf{d} = \text{div}(\mathbf{D}) = \nabla \cdot \mathbf{D} = (\nabla \mathbf{D}) : \mathbf{I} = \text{tr}(\nabla \mathbf{D})$$

Puesto en forma matricial su expresión es:

$$\mathbf{d} = \text{div}(\mathbf{D}) = (\nabla^T \mathbf{D}^T)^T$$

• A continuación se desarrolla una propiedad de la divergencia que resulta útil para ciertos desarrollos teóricos. Sean  $\mathbf{D}$  un tensor de orden 2 y  $\mathbf{a}$  un vector. Se trata de hallar la divergencia del vector producto de ambos  $\mathbf{b} = \mathbf{D} \mathbf{a}$ , que es un escalar:

$$\text{div}(\mathbf{D} \mathbf{a}) = \text{div}(\mathbf{b}) = \sum_j \frac{\partial b_j}{\partial x_j}$$

Sustituyendo el valor de  $b_j$ :

$$\text{div}(\mathbf{D} \mathbf{a}) = \sum_j \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i D_{ji} a_i \right) = \sum_j \sum_i \left( \frac{\partial D_{ji}}{\partial x_j} a_i \right) + \sum_j \sum_i \left( D_{ji} \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)$$

Reordenando y empleando la traspuesta de  $\mathbf{D}$ :

$$\text{div}(\mathbf{D} \mathbf{a}) = \sum_i a_i \sum_j \left( \frac{\partial D_{ij}^T}{\partial x_j} \right) + \sum_j \sum_i \left( D_{ij}^T \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)$$

En el primer término se identifica el término  $i$  de la divergencia de  $\mathbf{D}^T$ , y en el segundo se identifica el término  $i, j$  del gradiente del vector  $\mathbf{a}$ :

$$\text{div}(\mathbf{D} \mathbf{a}) = \sum_i a_i (\text{div}(\mathbf{D}^T))_i + \sum_j \sum_i \left( D_{ij}^T (\text{grad}(\mathbf{a}))_{ij} \right)$$

En el primer sumando se identifica el producto escalar del vector  $\mathbf{a}$  por la divergencia de  $\mathbf{D}^T$ , y en el segundo el producto contracto de  $\mathbf{D}^T$  por el gradiente de  $\mathbf{a}$ :

$$\operatorname{div}(\mathbf{D} \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \operatorname{div}(\mathbf{D}^T) + \mathbf{D}^T : \operatorname{grad}(\mathbf{a})$$

Otras propiedades útiles de la divergencia son:

$$\operatorname{div}(f \mathbf{B}) = f \operatorname{div}(\mathbf{B}) + \mathbf{B} \operatorname{grad}(f)$$

$$\operatorname{div}(f \mathbf{a}) = f \operatorname{div}(\mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad}(f)$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{A} \mathbf{B}) = \mathbf{A} \operatorname{div}(\mathbf{B}) + \operatorname{grad}(\mathbf{A}) : \mathbf{B}$$

### 13.2.6 Teoremas de integración

- El teorema de integración de Gauss establece, en su forma más clásica, que la integral de la divergencia de un campo vectorial  $\mathbf{v}$  en un volumen  $V$  es igual al flujo del vector  $\mathbf{v}$  a través de la superficie  $A$  que rodea a  $V$ :

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{v}) \, dV = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{v} \, dV = \int_A \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector normal a la superficie  $A$ .

- Empleando la expresión anterior, es fácil demostrar que dada una función escalar  $f$ , la integral a un volumen  $V$  del vector gradiente de  $f$  tiene la expresión siguiente:

$$\int_V \nabla f \, dV = \int_A f \mathbf{n} \, dA$$

- Considerando un tensor  $\mathbf{D}$  de orden 2, se puede obtener la siguiente expresión vectorial que relaciona sus integrales en un volumen y en su superficie circundante:

$$\int_V \operatorname{div}(\mathbf{D}) \, dV = \int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dA$$

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{D} \, dV = \int_A \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \, dA$$



### **13.3. PROCEDIMIENTOS MATLAB**

Como complemento a lo desarrollados teóricos presentados se han desarrollado una serie de procedimientos de cálculo en el entorno Matlab®, que implementan de forma práctica las distintas formulaciones y métodos. Ello permite estudiar ejemplos prácticos con modelos de geometría compleja de forma muy sencilla.

- Procedimiento nolin

Este procedimiento permite efectuar la simulación estática no lineal de estructuras reticulares planas de forma cualquiera, compuestas por barras biarticuladas o vigas planas. Implementa el método de la longitud del arco con seguimiento del path y la iteración de Newton, completa o modificada.

- Procedimiento nolin2d

Este procedimiento permite efectuar la simulación estática no lineal de dominios continuos de dos dimensiones de forma cualquiera, modelizados mediante elementos finitos planos de 4 nudos. Se pueden emplear elementos con formulación estándar en desplazamiento o elementos híbridos con campo de tensiones impuesto. Se pueden emplear las formulaciones lagrangiana total o actualizada. Implementa el método de la longitud del arco con seguimiento del path y la iteración de Newton, completa o modificada.

- Procedimiento nolinh

Este procedimiento permite efectuar la simulación estática no lineal de dominios continuos curvos de pequeño espesor, modelizados mediante elementos finitos cáscaras de 4 nudos. Se pueden emplear las formulaciones lagrangiana total o actualizada. Implementa el método de la longitud del arco con seguimiento del path y la iteración de Newton, completa o modificada.

- Procedimiento dynex

Este procedimiento permite efectuar la simulación dinámica no lineal de estructuras reticulares planas compuestas por barras biarticuladas o vigas planas (no se pueden mezclar en un mismo modelo). Implementa el método de integración en el tiempo explícito de diferencias centrales, con paso fijo.

- Procedimiento dynim

Este procedimiento permite efectuar la simulación dinámica no lineal de estructuras reticulares planas compuestas por barras biarticuladas o vigas planas (no se pueden mezclar). Implementa el método de integración implícito de Newmark, con paso fijo. El proceso iterativo para alcanzar el equilibrio en cada paso de integración en el tiempo se efectúa mediante el método de Newton, completo o modificado.

# Bibliografía

Areias P. M. A., César de Sá J. M. A. Conceição C. A., Fernandes A.A., *Analysis of 3D problems using a new enhanced strain hexahedral element*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2003; 58:1637-1682.

Asghar Bhatti M., *Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures*, J. Wiley, 2006.

Bathe K. J., *Finite Element Procedures*, Prentice-Hall, 1996.

Belytschko T., Liu W. K., Moran B., *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*, J. Wiley, 2000.

Bonet J., Wood R. D., *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*, Cambridge University Press, 2ª Ed., 2008.

Clarke M. J., Hancock G. J., *A study of incremental iterative strategies for non-linear analyses*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 1990; 29:1365-1391.

Crisfield M. A., *A fast incremental-iterative solution procedure that handles "snap-through"*, Computers and Structures, 1981; 13:55-62.

Crisfield M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures - Vol. 1*, J. Wiley, 1991.

Crisfield M. A., *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures - Vol. 2, Advanced Topics*, J. Wiley, 1991.

Felippa C. A., *Non linear Finite Element Methods*, Department of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder, Colorado, USA, 2001.

Fung Y. C., *Foundations of Solid Mechanics*, Prentice-Hall, 1965.

Geradin M., Rixen D., *Mechanical Vibrations*, J. Wiley, 1994.

Geradin M., Hogge M., Idelshon S., *Implicit Finite Element Methods*, Computational Methods for Transient Analysis, Ed. T. Belytschko and T. J. R. Hughes, Elsevier Science Publishers, 1983; 417-471.

Hellweg H. B., Crisfield M. A., *A new arc-length method for handling sharp snap-backs*, Computers and Structures, 1998; 66:705-709.

Hinton E. (ed.), *Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, NAFEMS, Glasgow, UK, 1992.

- Holzapfel G. A., *Nonlinear Solid Mechanics: A continuum Approach for Engineering*, J. Wiley, 2000.
- Ibrahimbegovic A., *On the choice of finite rotation parameters*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1997; 149:49-71.
- Ibrahimbegovic A., Brank B., Courtois P., *Stress resultant geometrically exact form of classical shell model and vector-like parameterization of constrained finite rotations*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2001; 52:1235-1252.
- Jog C. S., *A 27-node hybrid brick and a 21-node hybrid wedge element for structural analysis*, Finite Elements in Analysis and Design, 2005; 41:1209-1232.
- Jog C. S., Annabattula R., *The development of hybrid axisymmetric elements based on the Hellinger-Reissner variational principle*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006; 65:2279-2291.
- Jog C. S., Kelkar P. P., *Non-linear analysis of structures using high performance hybrid elements*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2006; 68:473-501.
- Kotronis P., Collin F., *Implementation of path following techniques into the finite element code Lagamine*, Internal Report Géomac/3S, University of Liège, 2005.
- Malvern L. E., *Introduction to the Mechanics of Continuous Medium*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1969.
- Newmark N. M., *A Method of Computation for Structural Dynamics*, ASCE Journal of Engineering Mechanics Division, 1959; 85:67-94.
- Reddy J. N., *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press, 2004.
- Sansour C., Bednarczyk H., *The Cosserat surface as a shell model, theory and finite-element formulation*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1995; 120:1-32.
- Sansour C., Bufler H., *An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 1992; 34:73-115.
- Schweizerhof K., Ekkehard R., *Displacement dependent pressure loads in nonlinear finite element analysis*, Computers and Structures, 1984; 18: 1099-1114.
- Simó J. C., Fox D. D., *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1989; 72:267-304.

Simó J. C., Fox D. D., Rifai M. S., *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part II: The linear theory; Computational aspects*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1989; 73:53-92.

Simó J. C., Fox D. D., Rifai M. S., *On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III: Computational aspects of the nonlinear theory*, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 1990; 79:21-70.

Sze K. Y., Liu X. H. Lo S. H., *Popular benchmark problems for geometric non linear analysis of shells*, Finite Elements in Analysis and Design, 2004; 40:1551-1569.

Urthaler Y., Reddy J. N., *A Corotational finite element formulation for the analysis of planar beams*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 2005; 21:553-570.

Wagner W., Gruttmann F., *A robust non-linear mixed hybrid quadrilateral shell element*, Int. Journal for Numerical Methods in Engineering, 2005; 64:635-666.

Wenzel T., Schoop H., *A non-linear triangular curved shell element*, Communications in Numerical Methods in Engineering, 2004; 20:251-264.

Zienkiewicz O. C., Taylor R. L., *The Finite Element Method*, Fifth Ed., Vol. 2, Butterworth-Heinemann, 2000.

# Índice de materias

## A

Alargamiento, 10, 11, 36, 99, 104  
Amortiguamiento, 171  
Área en el estado deformado, 13

## B

Barra biarticulada plana, 91, 99  
Bloqueo por cortante, 139

## C

Campo de deformación, 3, 47  
Campo de deformación unitaria de cortadura, 139  
Campo de tensiones, 69, 85  
Cáscara:  
    definición geométrica, 124  
    deformación unitaria, 130  
    elemento finito, 133  
    esfuerzos, 141  
Configuración:  
    de referencia, 2  
    deformada, 2  
Convergencia, criterios de, 165, 178  
Coordenadas:  
    curvilíneas, 124  
    espaciales, 2  
    materiales, 2  
    normalizadas, 55, 133  
Co-rotacional, 99, 103, 184, 192, 196

## D

Deformación:  
    campo de, 3, 47  
    de los nudos, *ver* Grados de libertad  
    en placas, 110

Deformación unitaria:

    de cortadura, 116, 139  
    de Green-Lagrange, *ver* Tensor de Green-Lagrange  
    de Von Kármán, 111  
    en cáscaras, 130, 132  
    en placas, 111  
    en vigas, 105  
    infinitesimal, 14  
    ingenieril, 100  
Derivada direccional, 50  
Derivada material, 22  
Descomposición polar, 9  
Desplazamiento virtual, 19, 42  
Determinante:  
    de la matriz jacobiana, 70  
    del tensor gradiente de deformación, 12, 25, 30  
Diferencias centrales, 171, 192, 195  
Divergencia, 210

## E

Ecuación constitutiva del material, 32  
Ecuación de equilibrio incremental:  
    de toda la estructura, 152  
    de un elemento finito, 54, 80, 88, 143  
Ecuación de restricción, 158  
Elasticidad:  
    módulo de, 34  
    tensor de, 33  
Equilibrio:  
    de fuerzas, 40  
    de momentos, 41  
Esfera de radio unidad, 128  
Esfuerzo:  
    axial, 99, 101, 105

cortante, 118, 142  
 de membrana, 118, 142  
 Esfuerzos interiores:  
 en barras, 94  
 en cáscaras, 142  
 en placas, 118  
 en vigas, 105  
 Espacio tangente, 127, 128  
 Estabilidad del integrador, 172

**F**

Factor de corrección de cortante, 120, 142  
 Flexión:  
 de placas, 110  
 de vigas planas, 105  
 Fórmula de Rodrigues, 128  
 Formulación:  
 co-rotacional, 99, 103  
 espacial, 3  
 euleriana, 3  
 isoparamétrica, 55, 66, 80  
 lagrangiana, 3  
 lagrangiana actualizada, 75  
 lagrangiana total, 46, 91, 124  
 material, 3  
 mixta, 69, 85  
 Frecuencia propia, 172  
 Fuerza nodal equivalente, 49, 55, 60, 71, 77, 83, 152  
 Fuerzas:  
 de inercia, 167  
 de presión, 62  
 exteriores, 40, 42, 60, 83, 152  
 Fuerzas interiores equivalentes **Q**:  
 en barras planas, 94, 101  
 en cáscaras, 143  
 en elasticidad plana, 49, 60, 77, 83  
 en formulación mixta, 72, 89  
 en placas, 119  
 en vigas planas, 107  
 Función de interpolación, 47, 76, 133  
 Funcional de Hellinger-Reissner, 70

**G**

Gradiente:  
 de la deformación **F**, 5, 57, 130  
 de velocidad **L**, 23  
 definición, 6, 209  
 del desplazamiento, euleriano **H<sub>t</sub>**, 8, 76  
 del desplazamiento, material **H**, 7, 47, 112  
 Grados de libertad, 47, 76, 91, 104, 114, 133, 137, 139

**H**

Hellinger-Reissner, 70, 87  
 Híbrido, elemento, 72, 88  
 Hiperelástico, material, 34

**I**

Incompresible, material, 36  
 Incremento:  
 de los desplazamientos, 50, 77, 119, 144  
 del tensor de Green, 51, 120, 144  
 del trabajo virtual, 50, 77, 119, 143  
 del vector director, 129, 136

## Integrador:

explícito, 171  
 implícito, 175

## Interpolación:

de coordenadas, 56, 80, 132  
 de desplazamientos, 47, 56, 81, 133  
 de tensiones, 69, 85  
 del vector director, 135

## Invariantes, 34

Isótropo, material, 34, 84

**J**

Jacobiana, 56, 81, 126, 131, 133

**L**

Lagrangiana actualizada, formulación, 75  
 Lagrangiana total, formulación, 46

Lamé, parámetros de, 34

Linealización de las ecuaciones de equilibrio, 49, 72, 77, 89, 119

Longitud de arco, método de, 160

## M

Material:

- casi incompresible, 37
- de Mooney-Rivlin, 37
- de St.Venant-Kirchhoff, 33
- elástico, 33
- hiperelástico, 34
- incompresible, 36
- neo-hookeano, 36

Matriz:

- de amortiguamiento, 171
- de inercia, 170
- de masas, *ver* Matriz de inercia
- de rigidez geométrica, 51, 80, 97, 121, 144
- de rigidez geométrica de cortante, 149
- de rigidez tangente, 50, 54, 79, 95, 102, 119, 144
- de rotación, 127, 134, 138
- Jacobiana, *ver* Jacobiana.

Método:

- de diferencias centrales, 171
- de Newton, 155, 156
- del plano normal, 159
- incremental, 152
- incremental puro, 154
- restringido, 157

Módulo:

- de cortadura, 119, 142
- de elasticidad, 34
- de Poisson, 34

Momento flector y torsor: *ver* Esfuerzos interiores

Multiplicador de Lagrange, 86

## N

Nanson, fórmula de, 13

Newmark, método de, 171, 176

Nodal:

- deformación, *ver* Grado de libertad
- fuerza, *ver* Fuerza nodal equivalente

Número de iteraciones deseado, 164

## O

Operador de derivación, 47, 76, 113

## P

Parámetro de carga, 153

Paso crítico de integración, 173, 164

Paso de carga, 152

Periodo de oscilación, 172

Placa:

- deformaciones, 111
- esfuerzos interiores, 118

Plano normal, método del, 159

Planteamiento:

- euleriano, 3
- lagrangiano, 3

Potencial de las fuerzas, 71, 87

Potencial elástico, 32

Primer tensor de Piola-Kirchhoff **P**, 29, 44

Principio:

- del Trabajo Virtual, 42, 77, 168
- variacional, 70, 85

Producto:

- contracto, 207
- diádico, 207
- tensorial, 207

Punto límite, 157, 198

## R

Residuo, 155

Rigidez geométrica, *ver* Matriz de rigidez geométrica

Rigidez tangente, *ver* Matriz de rigidez tangente

Rotación del vector director, 128

Rotaciones:

- en cáscaras, 127, 136, 151

en placas, 111

## S

Seguimiento del path, 160, 184, 187, 198

Segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff **S**, 30, 45

Sistema cartesiano director, 134

Sistema de ejes co-rotacional, 99, 103

*Snap-back*, 157, 188, 196

*Snap-through*, 157, 182, 184, 196

## T

Tasa de deformación, 23

Tensor:

alternador  $\epsilon$ , 41, 207

de alargamiento **U**, 10

de Almansi  $\mathbf{E}_A$ , 20, 86

de elasticidad  $\mathbf{C}$ , 33, 51, 78, 142

de Finger, 9

de Green-Lagrange **E**, 15, 92, 130, 132

de Piola-Kirchhoff, primero **P**, 29, 44

de Piola-Kirchhoff, segundo **S**, 30, 45

de tensiones de Cauchy  $\sigma$ , 28, 42

derecho de Cauchy-Green **C**, 8

gradiente de deformación **F**, *ver* Gradiente de la deformación

gradiente de desplazamiento, *ver* Gradiente del desplazamiento

gradiente de velocidad **L**, 23

infinitesimal de deformaciones unitarias  $\epsilon$ , 14, 43

izquierdo de Cauchy-Green **B**, 9

métrico de una cáscara, 126

Tensiones:

de Cauchy, 28, 42

de Piola-Kirchhoff, 29, 30, 44, 45

en placas, 117

Trabajo virtual, 42, 44, 63, 75, 143

Trabajo virtual interior: 43, 46, 48, 77, 119, 143

Transformación:

exponencial, 127

ortogonal, 127

Traza, 209

## V

Variación:

de las deformaciones unitarias infinitesimales, 43

del tensor de Green, 19, 84, 113, 136

virtual de las deformaciones, 19, 42

Vector:

de deformaciones nodales, *ver* Grados de libertad

de fuerzas interiores, *ver* Fuerzas interiores equivalentes

de fuerzas nodales equivalentes, *ver* Fuerza nodal equivalente

director, 124

normal a la cáscara, 131

tensión, 25

Velocidad, 22

Viga plana, 103

Voigt, regla de, 208

Volumen en el estado deformado, 12

## W

Wilson, método de, 175