MATEMATICA INTUICIONISTA Y LENGUAJE *

WENCESLAO J. GONZÁLEZ FERNÁNDEZ

En el problema de la fundamentación de la matemática por el intuicionismo se aprecia un claro contraste entre cómo L. E. J. BROUWER forma su pensamiento matemático y lo da a conocer, y la exposición que M. DUMMETT hace de las bases filosóficas del intuicionismo. El contraste radica en el puesto y relevancia que uno y otro conceden al lenguaje: para el primero, el lenguaje no desempeña un papel digno de ser tenido en cuenta en la constitución del intuicionismo; para el segundo, en cambio, las bases más sólidas del intuicionismo se encuentran en una determinada visión del lenguaje, en una específica teoría del significado.

I

La formación del pensamiento matemático de BROUWER se inicia antes de entrar a la Universidad, en los útlimos cursos de bachillerato. En esta época consideró la posibilidad de una matemática cuya naturaleza fuese más como la música o la poesía que un instrumento para los ingenieros o los físicos [1]. Posteriormente, durante el período de elaboración de su Tesis Doctoral (1904-1907), mantuvo

* Comunicación presentada en las «XXII Reuniones Filosóficas», celebradas en Pamplona los días 4, 5 y 6 de Marzo de 1985.

1. VAN DALEN, D., «Brouwer: The Genesis of his Intuitionism», *Dialectica*, V. 32, (1978), p. 293.

frecuentes disputas con el director de la misma —D. J. KORTEWEG—, a quien le resultaba inaceptable la nueva filosofía de la matemática que propone BROUWER. En la correspondencia con KORTEWEG, él deja traslucir su enfoque de la matemática como un saber en sí mismo diferente del lógico y que se configura originariamente al margen de todo lenguaje, aun cuando lo emplee para transmitir el pensamiento matemático.

Esta separación entre lógica y matemática aparece con claridad en una carta fechada en 1907. En ella dice: «en cuanto al razonamiento matemático, yo muestro... que *no* es razonamiento lógico. Pero usa las conectivas del razonamiento lógico sólo a causa de la pobreza del lenguaje, y por eso puede quizá mantener vivo el acompañamiento lingüístico de los razonamientos lógicos, mientras que el intelecto humano se ha desarrollado más desde hace mucho tiempo que los razonamientos lógicos mismos. Porque no se trata de que haya una peculiar clase de personas que no razonen por lógica, sino que creo que es sólo un fenómeno de inercia el que las palabras que le pertenecen sigan aún existiendo en los lenguajes modernos. Difícilmente puede encontrarse un uso puro de esas palabras, y son empleadas de modo inadecuado en la vida diaria, en donde llevan a diversos malentendidos y dogmatismos, y en la matemática, en donde conducen a las falsas nociones de la teoría de conjuntos *(Mengenlehre)*. Esas falsas nociones no surgieron por falta de visión matemática, sino porque la matemática, dado que carece de un lenguaje puro, se las arregla con el lenguaje del razonamiento lógico, mientras que sus pensamientos no son de razonamiento lógico, sino matemático, que es realmente otra cosa distinta» [2].

Mucho tiempo después, en plena madurez intelectual, Brouwer insiste en la necesidad de separar la matemática y el lenguaje. Más aún, considera que es el *primer acto* para poder desarrollar la matemática intuicionista, insistiendo sobre esta idea tanto en sus clases en Cambridge (1946-1951) como en el período de Ciudad del Cabo (1952). En ambos casos, señala que el intuicionismo, a diferencia del formalismo, «separa completamente la matemática del lenguaje

2. Carta a D. J. KORTEWEG de 23 de Enero de 1907. En VAN DALEN, D., *Loc. Cit.*, p. 299.

matemático, en particular de los fenómenos del lenguaje que son descritos por la lógica teórica, y reconoce que la matemática intuicionista es una actividad de la mente esencialmente alingüística *(an essentially languageless activity of the mind)* que tiene su origen en la percepción de un movimiento del tiempo»[3].

Brouwer construye el edificio del pensamiento matemático sin el apoyo del lenguaje. El entiende que «el lenguaje no juega otro papel que el de ser una eficaz técnica, pero nunca infalible o exacta, para memorizar construcciones matemáticas, y para sugerirlas a otros; de modo que el lenguaje matemático, por sí mismo, nunca puede crear nuevos sistemas matemáticos»[4]. Se opone con ello a la visión *formalista,* que tiende a considerar el sistema formal como la expresión lingüística adecuada del pensamiento matemático, como un lenguaje específicamente apropiado.

Para el intuicionismo, el programa formalista de Hilbert no presta atención a la importante circunstancia de que, «entre la perfección del lenguaje matemático y la perfección de la matemática misma, no puede apreciarse una clara conexión»[5]. El obstáculo para lograr ese nexo radica, a juicio de Heyting, en «la fundamental ambigüedad del lenguaje: como no se puede fijar jamás el significado de una palabra con la suficiente precisión para excluir toda posibilidad de mala interpretación, no podemos estar nunca matemáticamente seguros de que el sistema formal exprese certeramente nuestros pensamientos matemáticos»[6].

3. BROUWER, L. E. J., «Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism», *South African Journal of Science,* V. 49, (1952), pp. 140-141. BROUWER, L. E. J., *Brouwer's Cambridge lectures on Intuitionism,* editado por D. VAN DALEN, Cambridge University Press, Cambridge, 1981, p. 4. (En los dos casos el texto de Brouwer aparece en cursiva, resaltando así la importancia que le atribuye a esta afirmación).

4. BROUWER, L. E. J., «Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism», p. 141. BROUWER, L. E. J., *Brouwer's Cambridge lectures on Intuitionism,* p. 5

5. BROUWER, L. E. J., «Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism», p. 140. Cfr. *Brouwer's Cambridge lectures on Intuitionism,* p. 4.

6. HEYTING, A., *Intuitionism. An Introduction,* North Holland, Amsterdam, 3.ª Edición, 1971. Versión castellana de V. Sánchez de Zavala: *Introducción al intuicionismo,* Tecnos, Madrid, 1976, p. 16.

También se distancia el intuicionismo de Brouwer de las posiciones defendidas por los *logicistas*. Para él, la matemática no puede asentarse en modo alguno sobre el cimiento de la lógica, ya que, debido al «carácter introspectivo de la construcción matemática» [7], no es preciso acudir al apoyo lógico: la construcción matemática es captada con claridad por el intelecto, conociéndola en un proceso cognoscitivo sin mediaciones. El intento de que la matemática se sustente sobre la lógica llevaría, a su vez, a una fundamentación «en la que entrarían principios mucho más intrincados y menos directos que los de la matemática misma; pues las construcciones matemáticas deben ser tan inmediatas para el entendimiento y sus resultados tan claros que no necesiten fundamentación de ningún tipo. Por lo demás —concluye HEYTING—, es perfectamente posible saber si un razonamiento es firme o no sin necesidad de lógica alguna: basta una clara consciencia científica» [8].

En cambio, la lógica puede ser vista desde la matemática. Más aún, como señala A. S. TROELSTRA, la actitud de BROUWER con respecto a las relaciones entre lógica y matemática se puede sintetizar diciendo que «la lógica es parte de la matemática, y lo que llamamos 'leyes lógicas' son sólo las regularidades lingüísticas observadas cuando describimos ciertas operaciones muy generales de nuestras construcciones matemáticas» [9]. Por tanto, dentro de este planteamiento, la lógica ha de ser considerada desde el razonamiento matemático, y el lenguaje ocupa un puesto claramente secundario.

II

M. DUMMETT introduce una apreciable modificación de ese cuadro general. A diferencia de BROUWER, que ponía el énfasis en la

7. BROUWER, L. E. J., «Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism», 141. «From the intuitionistic point of view... outside human thought there are no mathematical truths», en: *Brouwer's Cambridge lectures on Intuitionism,* p. 6.
8. HEYTING, A., *Op. cit.,* p. 17.
9. TROELSTRA, A. S., «The interplay between Logic and Mathematics: Intuitionism», en AGAZZI, E. (ed), *Modern Logic. A Survey,* Reidel, Dordrecht, 1980, p. 198.

construcción matemática como *actividad mental alingüística* y veía la lógica más como resultado de la matemática que como un soporte del cual depende ésta, DUMMETT considera que una de las bases para reconstruir la matemática intuicionista se encuentra en una teoría general del *significado* del lenguaje matemático [10], y centra la atención en la lógica subyacente a la matemática intuicionista como vía para justificarla [11].

La relevancia de la variación introducida aparece con claridad cuando se observa que DUMMETT, al defender la necesidad de la lógica intuicionista en lugar de la lógica clásica para la matemática, se apoya directamente sobre *ideas wittgensteinianas* acerca del lenguaje: en su radical publicidad y en el significado como uso [12]. De este modo, difiere de BROUWER, porque entiende que el lenguaje es mucho más que un mero instrumento para transmitir el pensamiento y fijar las construcciones matemáticas.

Desde su perspectiva wittgensteiniana se evita además otro de los riesgos a que se ve sometido el intuicionismo tradicional: su inclinación hacia el *solipsismo*. Se aprecia esa tendencia en la postura del personaje «In» del libro de HEYTING, especialmente cuando afirma con rotundidad: «mis pensamientos matemáticos pertenecen a mi vida intelectual y se encuentran confiados en mi propio entendimiento, lo mismo que sucede con los demás pensamientos. Solemos estar convencidos de que los demás tienen pensamientos análogos a los nuestros y que pueden entendernos cuando los expresamos con palabras, pero también sabemos que no podemos estar nunca completamente seguros de que se nos entiende con toda exactitud» [13].

Ese planteamiento intuicionista está muy distante de las concepciones de cuño wittgensteiniano —como la de DUMMETT—, porque

10. DUMMET, M., *Elements of Intuitionism*, Clarendon Press, Oxford, 1977, p. V.

11. Cfr. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», en ROSE, H. E., y SHEPHERDSON, J. C. (eds). *Logic Colloquium'73. Proceedings of the Logic Colloquium Bristol, July 1973*, North Holland, Amsterdam, 1975, p. 5. Compilado en DUMMETT, M., *Truth and Other Enigmas*, Duckworth, Londres, 1978, p. 215.

12. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», en DUMMETT, M., *Truth and Other Enigmas*, p. 226.

13. HEYTING, A., *Op cit.*, p. 19.

en ellas se cuestiona la posibilidad de un *enfoque egocéntrico* en la explicación de las propias experiencias y estados de conciencia. En tales posturas, no cabe apoyarse en el argumento analógico sobre las otras mentes: el conocimiento de los pensamientos de los otros no está basado en el mío propio, y se admite el doble uso de los predicados —los autoadscriptivos y los aliodscriptivos—, de modo que la comprensión de lo comunicado mediante las palabras puede ser completa [14].

Pues bien, aun cuando DUMMETT se distancie de posiciones del intuicionismo tradicional, no se ocupa de resaltar tales diferencias. Señala, en cambio, que no intenta hacer una exégesis de los escritos de BROUWER y HEYTING [15], sino que desea repensar el punto de partida de los intuicionistas mismos: los argumentos por los cuales se puede decir que la matemática clásica emplea formas de razonar que no son válidas de acuerdo con los modos legítimos de construir enunciados matemáticos. Y, aunque él no quiere comentar los escritos de los principales representantes del intuicionismo, reconoce que en uno de ellos —HEYTING— se perfila una teoría semántica para los enunciados matemáticos [16].

El propósito de DUMMETT es ir a la raíz misma del intuicionismo, y esa búsqueda le conduce directamente al problema del significado, porque entiende que «cualquier justificación para adoptar una lógica en lugar de otra como la lógica de la matemática debe conectarse con cuestiones de *significado*» [17]. Con ello ha dado un nuevo sesgo a las relaciones entre el lenguaje y la matemática intuicionista.

14. Cfr. GONZÁLEZ FERNÁNDEZ, W. J., «La primitividad lógica del concepto de persona», *Anales de Filosofía,* V. 1, (1983), pp. 83-84, 100-106, 110-117.

15. Cfr. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», p. 215.

16. Cfr. DUMMETT, M., «Realism», *Synthese,* V. 52, (1982), pp. 60, 91. Un análisis semántico de la lógica de predicados de A. Heyting se encuentra en KRIPKE, S., «Semantical Analysis of Intuitionistic Logic I», en CROSSLEY, J. N. y DUMMETT, M. (eds), *Formal Systems and Recursive Functions,* North Holland, Amsterdam, 1965, pp. 91-130.

17. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», p. 215.

Sin embargo, su principal aportación no es esa, aunque comienza ahí. Porque, a mi juicio, el mérito de DUMMETT no reside tanto en llamar la atención sobre la relevancia del significado en los enunciados matemáticos, cuanto en el hecho de haber explicitado, desde una postura de tipo wittgensteiniano, el tipo de orientación contenida en el intuicionismo: *la semántica anti-realista.* El ha dado un nuevo giro al viejo problema del realismo, contraponiendo el enfoque fregeano del lenguaje matemático al planteamiento intuicionista. Veamos cómo DUMMETT puede realizar ese nuevo análisis desde su filosofía inspirada en WITTGENSTEIN.

III

Se acepta generalmente que la matemática intuicionista, tal como es desarrollada por BROUWER y HEYTING, presenta dos aspectos: uno negativo y otro positivo. El *negativo* lleva al rechazo de las nociones básicas de la matemática clásica, de la teoría de conjuntos. El *positivo* consiste en la aceptación de los conceptos de «construcción» y de «prueba» (o igualdad entre dos construcciones), que se consideran lo suficientemente claros para que, al menos parte de la matemática, se contruya sistemáticamente desde algunas aserciones evidentes acerca de tales conceptos [18].

Para DUMMETT, el aspecto *negativo* se basa en una crítica de la manera en que la matemática clásica explica el significado de las expresiones [19]. Porque esa matemática, especialmente cuando sus razonamientos se apoyan en la lógica clásica, sólo puede aceptarse desde una semántica bivalente cuyo eje central sea la noción de «verdad» y admita que el significado depende de las condiciones que hacen verdadero un enunciado. En cambio, para el intuicionismo, las condiciones requeridas son aquellas bajo las cuales una aserción matemática o su negación puede ser *justificada* de modo concluyente.

La variación introducida por los intuicionistas respecto de la teo-

18. Cfr. KREISEL, G., «Foundations of Intuitionistic Logic», en NAGEL, E., SUPPES, P. y TARSKI, A. (eds), *Logic, Methodology and Philosophy of Science,* Stanford University Press, Stanford, 1962, p. 198.
19. Cfr. DUMMETT, M., *Elements of Intuitionism,* p. 362.

ría del significado centrada en las nociones de verdad y falsedad arranca, según DUMMETT, de una idea fundamental: el dominio del significado de un enunciado matemático no consiste en el conocimiento de lo que, independientemente de nuestros medios para saber si es así o no, ha de darse para que el enunciado sea verdadero, sino que consiste en la «habilidad para reconocer, ante cada construcción matemática, si constituye o no una prueba del enunciado» [20]. En tal caso, la aserción del enunciado no se entiende como algo que dice verdad, sino como una afirmación cuya *prueba* existe o puede ser construida.

En esa teoría del significado, las expresiones matemáticas se comprenden cuando se conoce «el modo en que contribuyen a determinar lo que ha de considerarse como una prueba del enunciado en el que aparece. De esta manera, se garantiza que dominar el significado de una oración o expresión matemática es algo que se manifiesta plenamente en la maestría en el uso del lenguaje, pues está directamente conectado con esa práctica» [21].

Planteada de ese modo la teoría del significado intuicionista, parece claro que DUMMETT está viendo el intuicionismo desde la perspectiva wittgensteiniana [22], según la cual el dominio del significado de un enunciado matemático consiste, en general, en la capacidad de usar ese enunciado de una cierta manera. A tenor de esta postura, la noción de *verdad,* entendida como algo que cada enunciado matemático posee de modo determinado o carece de él, independientemente de los medios que tengamos para reconocer su valor de verdad, deja de ser la noción central para una teoría del significado de los enunciados matemáticos. Se adopta, en su lugar, la concepción del significado como aquello que puede ser explicado directamente en términos de lo que realmente aprendemos cuando adquirimos el *uso* del lenguaje.

A partir de la postura wittgensteiniana se pueden conectar los

20. DUMMETT, M., «What is a Theory of Meaning? (II)», en EVANS, G. y MCDOWELL, J. (eds), *Truth and Meaning. Essays in Semantics,* Clarendon Press, Oxford, 1976, p. 110.

21. DUMMETT, M., «What is a Theory of Meaning? (II)», p. 110.

22. Cfr. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», p. 225. Cfr. DUMMETT, M., *Elements of Intuitionism,* pp. 375-376.

aspectos *negativos* y *positivos* del intuicionismo, es decir, su abandono de la semántica subyacente a la matemática clásica y su aceptación del concepto de «prueba» como núcleo del nuevo enfoque. Porque la postura basada en WITTGENSTEIN atiende a los rasgos reales del uso que aprendemos al realizar enunciados matemáticos, y considera que lo realmente aprendido cuando se consigue el dominio del lenguaje matemático es *saber reconocer,* para cada enunciado, qué cuenta para establecer ese enunciado como verdadero o como falso. Así, «en el caso de los enunciados muy simples, aprendemos algún procedimiento de cálculo que decide su verdad o falsedad; para los enunciados más complejos, aprendemos a reconocer qué debe contar como prueba o como refutación de los mismos. Esa es la práctica acerca de la cual adquirimos una destreza, y nuestro dominio de los significados de los enunciados debe consistir en la maestría en esa práctica. Debemos, por tanto —concluye DUMMETT—, reemplazar la noción de verdad, como la noción central de la teoría del significado para enunciados matemáticos, por la noción de *prueba (proof):* el dominio del significado de un enunciado consiste en la capacidad de reconocer una prueba de él cuando se nos presenta una, y el dominio del significado de cualquier expresión más pequeña que una oración debe consistir en el conocimiento del modo en que su presencia en una oración contribuye a determinar qué cuenta como una prueba de esa oración» [23].

Pues bien, mediante la perspectiva wittgensteiniana de DUMMETT, además de potenciar el desarrollo de una semántica intuicionista para el lenguaje ordinario, se puede eludir la *interpretación solipsista* de las construcciones mentales del intuicionismo matemático. Porque, aun cuando los intuicionistas insisten en los pensamientos matemáticos como individuales y en las pruebas escritas como representaciones imperfectas de las correspondientes construcciones mentales, está claro que tanto los pensamientos como las pruebas son *comunicables* y *cognoscibles* a través del lenguaje. A este respecto, DUMMETT considera que no hay justificación alguna para mantener que la representación lingüística de una prueba pueda ser, en ciertos casos, necesariamente imperfecta. A su juicio, el punto importante está en que

23. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», pp. 225-226.

la prueba lo es, en el sentido requerido, en cuanto que está expresada en un lenguaje interpretado: los rasgos que hacen de ella una prueba y que sea reconocible como tal son aquellos que le pertenecen en virtud de los significados de los signos que la expresan [24].

Con el reemplazamiento del concepto de «verdad» por el de «prueba» se produce una variación importante respecto de la semántica admitida por la *matemática clásica.* En ésta, se aceptaban los objetos matemáticos como tales y el tipo de semántica admitida era la *realista,* es decir, consideraba que los enunciados poseían un valor de verdad objetivo, independientemente de nuestros medios de conocerlo: en sí mismos eran verdaderos o falsos. En cambio, en el *intuicionismo,* se insiste en las construcciones mentales matemáticas, de modo que «existir» es sinónimo de «haberse construido», no de «tener entidad» [25], y al defender que el sentido de un enunciado matemático descansa sobre las construcciones que constituyen su prueba [26], hace que los enunciados sean entendidos sólo por referencia a algo que cuenta como evidencia en favor de ellos, inclinándose así hacia una semántica *anti-realista.*

DUMMETT mismo, en su primer artículo sobre el realismo, admite esto. Más aún: le parece obvio que de los elementos del intuicionismo se puede extraer los rasgos básicos para un modelo de perspectiva anti-realista [27]. En ella ocupa un lugar relevante la idea de *aserción justificada,* de manera que la pregunta básica no ha de ser acerca de si un enunciado es verdadero o falso, sino que ha de versar sobre si hay evidencias que permitan garantizar la aseveración realizada. El predicado 'es verdadero', a diferencia de lo que proponía TARSKI, posee en el intuicionismo carácter temporal, de forma

24. Cfr. DUMMETT, M., *Elements of Intuitionism,* pp. 390-391.

25. Cfr. HEYTING, S., *Op. cit.,* p. 14. «If the program involves ontological assertions about mathematical objects, it will be in outright conflict with the basic motivation behind intuitionism», SHAPIRO, S., «Mathematics and Reality», *Philosophy of Science,* V. 50, (1983), p. 533.

26. Cfr. KREISEL, G., *Loc. Cit.,* p. 201.

27. Cfr. DUMMETT, M., «Realism», conferencia dada el 8 de Marzo de 1963 en la Oxford University Philosophical Society. Compilado en: *Truth and Other Enigmas,* p. 164.

que un enunciado que no se toma ahora como verdadero, puede después ser considerado como verdadero [28].

En suma, el intuicionismo, propuesto originariamente por BROUWER como una *actividad mental esencialmente alingüística,* aparece desde los trabajos de DUMMETT —inspirados en la teoría del significado de WITTGENSTEIN— como un nuevo enfoque acerca del *lenguaje,* cuya principal característica consiste en el abandono de las tesis semánticas del realismo. El propio DUMMETT ha adoptado como suyas las propuestas de esta semántica anti-realista, lo cual ha provocado una polémica al respecto [29], porque incorpora elementos *verificacionistas* que parecían definitivamente superados [30].

28. Cfr. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», p. 239.

29. Entre los artículos que se ocupan de la semántica anti-realista, tal como es propuesta por M. Dummett y defendida por C. Wright, cabe señalar: MCDOWELL, J., «Truth Conditions, Bivalence and Verificationism», en EVANS, G. y MCDOWELL, J. (eds), *Truth and Meaning. Essays in Semantics,* pp. 42-66; en especial, pp. 47-50. STRAWSON, P. F., «Scruton and Wright on Anti-realism», *Proceedings of the Aristotelian Society,* V. 77, (1976-77), pp. 15-21. PUTNAM, H., «Realism and Reason», en PUTNAM, H., *Meaning and the Moral Sciences,* Routledge and Kegan Paul, Londres, 1978, pp. 123-138. EDGINGTON, D., «Meaning, Bivalence and Realism», *Proceedings of the Aristotelian Society,* V. 81, (1980-81), pp. 153-173. SINTONEM, M., «Realism and Understanding», *Synthese,* V. 52, (1982), pp. 347-378. GEACH, P., «¿Verdad o aserción justificada?», *Anuario filosófico,* V. 15, (1982), pp. 75-87. DEVITT, M., «Dummett's Anti-Realism», *The Journal of Philosophy,* V. 80, (1983), pp. 73-99. GEORGE, A., «On Devitt on Dummett», *The Journal of Philosophy,* V. 81, (1984), pp. 516-527.

30. Cfr. DUMMETT, M., «The Philosophical Basis of Intuitionistic Logic», p. 227. Cfr. DUMMETT, M., «What is a Theory of Meaning? (II)», pp. 110-111, 113-114, 116-119, 126.