

# FLUJO Y ATASCOS DE UN MEDIO GRANULAR EN LA DESCARGA DE SILOS

Memoria presentada por  
D. Iker Zuriguel Ballaz  
para optar al grado de doctor en Física

FEBRERO 2005

Dpto. de Física y Matemática Aplicada,  
Facultad de Ciencias, Universidad de Navarra,  
E-31080 Pamplona, España



D. Ángel Garcimartín Montero, Profesor Agregado del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra y D. Diego Maza Ozcoidi, Profesor Contratado Doctor del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra

CERTIFICAN: Que la presente Memoria “Flujo y atascos de un medio granular en la descarga de silos” ha sido realizada bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por D. Iker Zuriguel Ballaz. Para que así conste, en cumplimiento de la legislación vigente, firmo la presente certificación en Pamplona, el uno de Febrero de 2005

---

Fdo.: Ángel Garcimartín Montero

---

Fdo.: Diego Maza Ozcoidi



*A mi abuelo Perico.*





# Índice General

Índice General	VIII
Lista de Figuras	x
Notación	xv
Agradecimientos	xix
<b>1. Prólogo</b>	<b>1</b>
<b>2. Introducción</b>	<b>5</b>
2.1. Características de los medios granulares . . . . .	5
2.1.1. Fracción de compactación . . . . .	6
2.1.2. Número de coordinación y cadenas de fuerza . . . . .	8
2.1.3. Comportamiento no térmico . . . . .	12
2.1.4. Disipación de la energía . . . . .	13
2.1.5. Segregación . . . . .	14
2.2. Arcos, atascos y flujo . . . . .	15
2.2.1. Formación de arcos . . . . .	16
2.2.2. Atascos . . . . .	22
2.2.3. Flujo a través de un orificio . . . . .	24
2.2.4. Flujo en el interior de un silo . . . . .	29
<b>3. Sistema experimental</b>	<b>37</b>
3.1. El experimento . . . . .	37
3.2. Montaje . . . . .	40
3.2.1. Silo . . . . .	40
3.2.2. Instrumentación . . . . .	42
3.3. Medio granular . . . . .	46
3.4. Procedimiento experimental . . . . .	56
<b>4. Resultados</b>	<b>59</b>
4.1. Tamaños de las avalanchas . . . . .	59
4.1.1. Histograma. Distribución de los tamaños de las avalanchas . . . . .	61
4.1.2. Decrecimiento exponencial . . . . .	66



4.1.3.	Avalanchas pequeñas . . . . .	69
4.1.4.	Tamaño característico de la avalancha . . . . .	74
4.2.	Diámetro crítico . . . . .	76
4.3.	Probabilidad de atravesar el orificio . . . . .	79
4.4.	Probabilidad de atasco: $J_N(D)$ . . . . .	83
4.5.	Influencia de las propiedades del grano . . . . .	86
4.5.1.	Características del material . . . . .	87
4.5.2.	Factores geométricos . . . . .	90
4.6.	Flujo . . . . .	99
4.6.1.	Velocidad de las partículas a la salida del orificio . . . . .	99
4.6.2.	Flujo a través del orificio . . . . .	102
<b>5.</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>109</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>115</b>



# Índice de figuras

2.1. Tipos de contactos entre las partículas . . . . .	9
2.2. Cadenas de fuerza . . . . .	11
2.3. Efecto Janssen. Saturación de la presión . . . . .	12
2.4. Ángulos de estabilidad en una pila granular . . . . .	14
2.5. Puente formado en una simulación numérica . . . . .	17
2.6. $J_N$ respecto a $D$ en una tolva bidimensional . . . . .	18
2.7. Influencia de la rugosidad de las partículas en $J_N$ respecto a $D$ . . . . .	19
2.8. Probabilidad de los tamaños de avalanchas en una simulación numérica	21
2.9. Diagrama de fases para el estado atascado . . . . .	23
2.10. Flujo respecto a $D$ en una simulación numérica . . . . .	27
2.11. Esquema de un flujo másico y un flujo interno . . . . .	30
2.12. Métodos de llenado del silo . . . . .	32
2.13. Segregación en la descarga de un silo bidimensional . . . . .	35
3.1. Esquema del sistema experimental . . . . .	38
3.2. Fotografía del sistema experimental . . . . .	39
3.3. Esquema de la forma de un silo y una tolva . . . . .	41
3.4. Base del silo con el orificio en el centro . . . . .	42
3.5. Dispositivo experimental para romper los arcos . . . . .	44
3.6. Señal obtenida para calcular el coeficiente de restitución de las partículas	49
3.7. Perfil de la rugosidad superficial en dos dimensiones . . . . .	50
3.8. Fotografía de partículas rugosas y lisas . . . . .	51

3.9. Esquema de la forma de los ‘bolillos’ . . . . .	53
3.10. Fotografía de las diferentes formas de las partículas . . . . .	53
3.11. Dispositivo utilizado para medir la fracción de compactación . . . . .	55
4.1. Tamaño de las avalanchas según el orden correlativo . . . . .	60
4.2. Diagrama de primer retorno del tamaño de las avalanchas . . . . .	61
4.3. Histograma de los tamaños de las avalanchas . . . . .	63
4.4. Discretización de los pesos . . . . .	64
4.5. Histograma con los pesos discretos . . . . .	64
4.6. Densidad de probabilidad de los tamaños de avalancha . . . . .	65
4.7. Decrecimiento exponencial . . . . .	67
4.8. Crecimiento de $n_D(s)$ respecto de $s$ para $s < s_M$ . . . . .	70
4.9. Histogramas donde no se observa el crecimiento de $n_D(s)$ . . . . .	71
4.10. Crecimiento de $n_D(s)$ para diferentes valores de la presión del aire comprimido . . . . .	73
4.11. Colapso de los histogramas reducidos . . . . .	75
4.12. $\langle s \rangle$ en función de $D$ para esferas de vidrio . . . . .	78
4.13. $p$ en función de $D$ . . . . .	80
4.14. Comparación entre $\langle s \rangle$ y $\frac{p}{1-p}$ en función de $D$ . . . . .	81
4.15. Origen de la diferencia entre $\langle s \rangle$ y $\frac{p}{1-p}$ para $D$ pequeños . . . . .	82
4.16. $J_5(D)$ en función de $D$ . . . . .	85
4.17. $J_N(D)$ en función de $D$ para diferentes valores de $N$ . . . . .	85
4.18. $\langle s \rangle$ en función de $D$ para esferas de diferentes tipos de materiales . . . . .	88
4.19. $\langle s \rangle$ en función de $D$ para esferas de vidrio de diferente rugosidad . . . . .	88
4.20. $n_D(s)$ en función de $s/\langle s \rangle$ para esferas de diferentes propiedades . . . . .	89
4.21. $n_D(s)$ en función de $s/\langle s \rangle$ para granos de arroz y lentejas . . . . .	91
4.22. Histograma con dos exponenciales diferentes . . . . .	92
4.23. $n_D(s)$ en función de $s$ para diferentes valores de $D$ utilizando lentejas . . . . .	93
4.24. $n_D(s)$ en función de $s/\langle s \rangle$ para diferentes valores de $D$ utilizando granos de arroz . . . . .	94

4.25. $\langle s \rangle$ en función de $D$ para diferentes formas de grano . . . . .	96
4.26. $\langle s \rangle$ en función de $D$ para diferente dispersión de los tamaños de las esferas . . . . .	98
4.27. Esquema de la medida de la velocidad de las partículas a la salida del orificio . . . . .	99
4.28. Velocidad de las partículas a la salida del orificio . . . . .	100
4.29. Altura desde la que las partículas comienzan una caída libre . . . . .	101
4.30. Número de partículas caídas en función de su duración para $D = 4,0$	103
4.31. Número de partículas caídas en función de su duración para $D = 2,0$	103
4.32. Flujo en función de $D$ para $D < D_c$ y $D > 50$ . . . . .	105
4.33. Flujo en función de $D$ . . . . .	107



# Notación

$A$  -Área del orificio.

$C$  -Constante igual al valor de  $\langle s \rangle$  cuando  $D_c - D = 1$ .

$D$  -Diámetro adimensional del orificio  $D = d_O/d_P$ .

$D_c$  -Diámetro crítico por encima del cual no se producen atascos.

$d_{eq}$  -Para una partícula no esférica, es el diámetro equivalente a una esfera con su mismo volumen.

$d_l$  -Diámetro mayor en partículas no esféricas.

$d_O$  -Diámetro del orificio de un silo tridimensional. En el caso de los silos bidimensionales es el tamaño del orificio de salida.

$d_P$  -Diámetro de las partículas.

$d_s$  -Diámetro menor en partículas no esféricas.

$e$  -Coeficiente de restitución de una partícula.

$E_{c_f}$  -Energía cinética de una partícula tras una colisión.

$E_{c_i}$  -Energía cinética de una partícula antes de una colisión.

$H$  -Altura respecto de la parte superior del orificio desde la que las partículas comienzan un vuelo libre en el interior del silo.

$h$  -Altura de la capa de medio granular.

$h_i$  -Para medir el coeficiente de restitución, altura que alcanza la partícula al rebotar contra el suelo en el vuelo  $i$ .

$h_n$  y  $h_{n+1}$  -Alturas que alcanzan la partículas en los vuelos sucesivos  $n$  y  $n + 1$ .

$J_N$  -Probabilidad de que se produzca un atasco en el interior de un silo antes de que todas las partículas de su interior ( $N$ ) atraviesen el orificio.

$J_N(D)$  - $J_N$  para diferentes valores de  $D$ .

$K$  -Constante de proporcionalidad entre  $P_h$  y  $P_V$ :  $P_h = K P_V$ .

$k/2$  -Anchura de la zona del orificio contigua a sus límites por la cual no fluyen las partículas.

$m$  -Masa de una partícula.

$M$  -Masa del medio granular.

$N$  -Número de partículas en el interior del silo.

$n$  -Índice correlativo que indica el orden en se producen las avalanchas al descargar el silo.

$n_b$  -Para una serie de avalanchas con el mismo  $D$ , número total de partículas que pasan.

$n_a$  -Para una serie de avalanchas con el mismo  $D$ , número total de atascos.

$n(s)$  -Probabilidad de obtener una avalancha de tamaño  $s$ .

$n_D(s)$  -Probabilidad de obtener una avalancha de tamaño  $s$  para un diámetro adimensional determinado ( $D$ ).

$p$  -Probabilidad de que un grano pase a través del orificio.

$P_h$  -Presión horizontal que se genera en el interior de un medio granular al aplicar una presión vertical.

$P_S$  -Valor límite de la presión vertical en la base de una capa granular sobre la que no se aplica ninguna fuerza.

$P_V$  -Presión vertical que se aplica sobre una capa granular.

$r_O$  -Radio del orificio de un silo.

$s$  -Número de granos que fluyen a través del orificio en una avalancha (entre dos atascos consecutivos).

$s_{max}$  -Para un conjunto de medidas realizadas en las mismas condiciones, tamaño máximo de la avalancha.

$s_M$  -Moda en la función de densidad de probabilidad. Tamaño de la avalancha que ocurre con mayor probabilidad.

$\langle s \rangle$  -Tamaño medio de las avalanchas para cada histograma.



$t_n$  -Tiempo que la partícula permanece en el aire en el vuelo n.

$V_a$  -Volumen aparente que ocupan los granos.

$V_r$  -Volumen real que ocupan los granos.

$v_z$  -Velocidad vertical con la que las partículas atraviesan el orificio.

$W$  -Cantidad de masa que atraviesa el orificio por unidad de tiempo (caudal).

$W_b$  -Número de partículas que atraviesan el orificio por unidad de tiempo.

$\alpha$  -Ángulo que forman las paredes de una tolva respecto a la horizontal.

$\beta$  -Exponente de la ley de Beverloo que relaciona el flujo de partículas a la salida de un silo con  $D$ .

$\gamma$  -Exponente con el que diverge la ley de potencias a la que se ajustan los valores de  $\langle s \rangle$  respecto a  $D$ .

$\zeta$  -Pendiente de la tangente hiperbólica a la que se ajustan los valores de  $J_N(D)$  respecto de  $D$ .

$\theta_i$  -En el cálculo del coeficiente de fricción intergranular, ángulo en el que se desencadena una avalancha superficial. Siempre se cumple que  $\theta_r < \theta_i < \theta_m$ .

$\theta_m$  -Ángulo límite por encima del cual siempre se desencadenan avalanchas espontáneamente en la superficie de una pila de arena.

$\theta_r$  -Ángulo por debajo del cual una pila de arena siempre es estable.

$\mu_s$  -Coeficiente de fricción estático del material granular o “coeficiente de fricción intergranular”.

$\rho$  -Densidad real del material del que están fabricados los granos.

$\rho_a$  -Densidad aparente del medio granular.

$\varphi$  -Diámetro del silo.

$\phi$  -Fracción de compactación de un medio granular.



# Agradecimientos

Cuando uno piensa en las personas que han hecho posible un trabajo durante un periodo concreto de su vida, cometería un grave error si olvidase a aquellas que le ayudaron a alcanzarlo. A toda esa gente, que por motivos de espacio no puedo nombrar aquí, le estoy verdaderamente agradecido.

Especialmente quiero agradecer a Diego Maza y Ángel Garcimartín por su confianza, sus continuos consejos y sobre todo, por su AMISTAD. Quisiera agradecer especialmente a Diego el haber despertado en mí el interés por la física y a Ángel su continuo apoyo durante el primer año, sin el cual este trabajo no hubiera podido ser desarrollado.

A Luis Pugnaroni me gustaría darle las gracias por su compañía en mi primer congreso y su idea de un experimento “para hacer en la esquina de la mesa”. Tres años y medio después, la esquina sigue estando ocupada. También a Jean-François Boudet, Hamid Kellay, Yacine Amarouchene, Emeline, las dos Ninon y Bernard Bonnier quiero agradecerles su hospitalidad y todo lo que me enseñaron durante mi estancia en Burdeos.

A todos los miembros del departamento agradezco su interés, sus consejos y su ánimo constante : Héctor Mancini, Carlos Pérez, Wenceslao González, Diego Valladares, Pedro Elizalde, Marijose Collados, Pilar Ayúcar, Manu Mancini, Sergio Ardanza, Jean Bragard, Stefano Boccaletti, Fernando Varela, Carmen Palacios, Emilio Díaz, Antonio Peláez, Jorge Elorza y María Jesús Chasco. Quiero agradecer especialmente a Javier Burguete su disposición y ayuda con los problemas informáticos.

A los doctorandos por su ayuda, sus risas y sus lloros que han hecho que el día a día se haga realmente agradable: Paulina Cuello, Begoña Peña, Sergio Casado, Santiago Madruga, Cecilia Wolluschek, Carolina Mendoza, Angela Bernardini, Monserrat Miranda, María Yoldi, Cristina Arcos, Roberto Arévalo, Fernando Perales, Alberto de la Torre, Cristian Mankoc y Joaquín Goñi. Muy especialmente agradezco la ayuda en el laboratorio que me brindaron Andrea Vallone al principio de mi tesis y Martín Pastor al final.

A todas esas personas de la Universidad que a veces no se ven pero que siempre se sienten: señoras de la limpieza, bedeles, gente de la cafetería, del servicio compras... A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra le debo la beca que he disfrutado durante este periodo y al Ministerio de Ciencia y Tecnología la ayuda para mi estancia en Burdeos.

A Juantxo le agradezco, aparte de su gran acogida junto al resto de la familia Gazpio-Irujo, el vídeo de la montonera del encierro que siempre ha hecho crecer la atención en nuestras charlas.

Si alguien se merece un agradecimiento especial, esos son mis amigos y mi familia. A mis amigos de Fraga, Pamplona y Yesa (sois muchos y no os puedo nombrar a todos) les debo muchos de mis ratos de diversión. Pese a la distancia, siempre están cerca y listos para ayudar y eso es algo por lo que les estoy realmente agradecido: ¡GRACIAS CAMPEONES!

A mi tía María Esther por hacerme sentir como en casa durante estos ocho años y medio en Pamplona. A mis tíos Ana, Josetxo, Sonia y Juan Antonio y a mis primos por, entre todos, formar una familia de la que me siento orgulloso. A mi tía abuela Paca, a mis abuelos Rosendo, Maruja, Norberta y sobre todo a Perico, al que después de dos años sigo echando de menos. Sin duda, las lecciones que me enseñó van a quedar en mí para siempre. A mis hermanos Natxo y Leyre, por crecer conmigo, aprender conmigo y enseñarme esas otras cosas que uno solo no es capaz. Y a mis padres, ¿qué se puede decir de unos padres que han dedicado todos los días de su

vida a sus hijos? Gracias por todo papis.

Finalmente quiero agradecer a Mamen, por la que todo esto cobra un sentido especial y que ha estado junto a mí en todos y cada uno de los “atascos” de la tesis.



# Capítulo 1

## Prólogo

Un “medio granular” es un conjunto de partículas (granos) de similares características, cuya dinámica está gobernada por las leyes de la mecánica clásica. Para que se manifiesten las propiedades colectivas que les son propias es necesario tener un número elevado de partículas. La característica más notable de los medios granulares es que son fuertemente disipativos, aunque el material del que estén constituidos sea elástico en muy buena aproximación. Ello es debido a que el número de choques por unidad de tiempo puede tender a infinito, si los medios granulares son densos (y el tiempo entre colisiones, por tanto, tiende a cero). Características como ésta originan comportamientos que aún hoy día resultan enigmáticos.

Los medios granulares forman parte de nuestra vida diaria. Es fácil observar en nuestro entorno efectos típicos de los materiales finamente divididos, tales como la segregación (separación por tamaños de partículas de idéntica densidad) o el funcionamiento de un reloj de arena. Además, en muchos procesos industriales (industria alimenticia, farmacéutica, extracción de materia prima en canteras, industria del plástico...) la manipulación de medios granulares es obligada, y su utilización origina algunos inconvenientes.

El estudio de los medios granulares no es nuevo: Coulomb (en el s.XVIII) y posteriormente Faraday [1] y Reynolds [2] (en el s.XIX) estudiaron su extraño comportamiento en diferentes situaciones y trataron de dar alguna explicación lógica de los fenómenos que se observaban. Más adelante se buscaron soluciones totalmente empíricas a los problemas que se presentaban en la industria [3], pero hubo que esperar hasta el final del siglo XX para poder estudiar con mayor rigor la física de los medios granulares [4]. En la actualidad es necesario un desarrollo tanto científico como industrial para paliar algunos inconvenientes que ocasiona el manejo de granos [5], y para comprender mejor las pautas que rigen su comportamiento.

La materia granular, en ocasiones, puede parecerse en su comportamiento a un sólido, a un líquido o a un gas [6; 7]. Sin embargo el parecido nunca es exacto. Al igual que los líquidos, los medios granulares adoptan la forma del recipiente que los contiene, pero – como los sólidos – pueden adoptar diferentes formas cuando no están encerrados. Del mismo modo, es posible hacer fluir un medio granular por una tubería como si de un líquido se tratara, pero la presión en un medio granular no puede explicarse recurriendo al concepto de la presión hidrostática propia de los fluidos. El motivo es que los arcos que se forman entre las partículas distribuyen parte de las fuerzas hacia las paredes del recipiente. Cuando la concentración de granos es baja y éstos tienen elevada energía cinética, el medio granular se puede asemejar a un gas. Pero existen grandes diferencias en la dinámica de ambos porque un gas granular es fuertemente disipativo. Por todo ello, algunos autores consideran que nos encontramos ante un nuevo estado de la materia.

Uno de los fenómenos más sorprendentes que se dan en los medios granulares son los atascos. La palabra “*jamming*” (atasco en inglés) se usa en una gran variedad de



procesos. De hecho, a menudo experimentamos que las cosas se atascan. Los embotellamientos de tráfico, la salida de los espectadores de una sala de cine por puertas que no pueden absorber más que un pequeño flujo de personas, la sal que obstruye los orificios de un salero... son ejemplos cotidianos de atascos. Pero además, en física hay otros fenómenos (como la transición vítrea, el empaquetamiento de granos o coloides y la formación de espumas) que pueden ser considerados como atascos. Aunque existe una diferencia de escala, todos estos fenómenos comparten similitudes desde el punto de vista físico. Así, recientemente se ha llegado a describir el atasco como una transición de fase [8].

El fenómeno de los atascos en los medios granulares resulta de suma importancia para la industria. El motivo es que en numerosas ocasiones los procesos industriales en los que se maneja material granular se ralentizan, o incluso se detienen, por los atascos.

Para comprender mejor el fenómeno de los atascos se ha estudiado un caso simplificado al máximo, que es la descarga de un silo por gravedad. Un silo es un recipiente cilíndrico con una base plana en cuyo centro hay un orificio. Si el tamaño del orificio no es mucho mayor que las partículas, el flujo de éstas se interrumpe y se dice que el silo se ha atascado. Los atascos tienen su origen en la formación de arcos, también llamados puentes o bóvedas, una de las propiedades inherentes a todo medio granular.

El dispositivo experimental diseñado consiste en un silo a escala con el que se miden el tamaño y la duración de las avalanchas. A partir de estos resultados se ha obtenido la probabilidad de atasco en función de diferentes parámetros y el flujo de material a través del orificio de la base del silo. Nos proponemos con ello obtener respuesta a varias cuestiones. Una de las más elementales es si existe un tamaño

crítico del agujero a partir del cual el sistema no se atasca, o si se puede hablar de una transición de fase entre un estado en el que las partículas se atascan y otro en el que no.

Además, se ha estudiado la influencia de las propiedades del grano en el proceso de atasco para tratar de establecer cuáles son los principales mecanismos responsables de la formación de arcos. Por último, se ha medido el flujo de partículas tanto si la probabilidad de atasco es despreciable como en el régimen en el que se producen atascos, cuando el flujo no es constante sino que se interrumpe por la formación de arcos. El objetivo es conocer si en este caso son también válidas algunas de las leyes que describen el flujo continuo.

El trabajo realizado se ha dispuesto del siguiente modo. En primer lugar se expone el estado actual del problema. Para ello se explican algunas características elementales de los medios granulares necesarias para comprender su comportamiento. En el mismo capítulo se ofrece un resumen de los trabajos realizados hasta el momento en la descarga de silos y se detallan las características de los diferentes tipos de atascos en otros medios. A continuación se explica el dispositivo experimental utilizado y se describen los parámetros de nuestro sistema. Posteriormente se exponen los resultados obtenidos que se interpretan mediante un modelo simple. Finalmente, se explican las conclusiones y los posibles estudios futuros que den continuidad a este trabajo.

# Capítulo 2

## Introducción

En este capítulo se introducen las características más importantes de los medios granulares que originan que su comportamiento resulte antiintuitivo. Además, se presentarán los resultados más relevantes que existen en la literatura sobre la descarga de silos y atascos en general.

### 2.1. Características de los medios granulares

Un medio granular se puede definir como un conjunto de partículas, similares entre sí, que interactúan de un modo disipativo. El tamaño de las partículas que conforman un medio granular puede abarcar varios órdenes de magnitud: desde el orden del milímetro (granos de arena y arroz) hasta el orden del metro (coches y rocas). A los sistemas de partículas de tamaño menor que  $0,3 \text{ mm}$  se les llama “polvos”, y tienen propiedades específicas. Las más notables provienen del hecho de que algunas fuerzas de contacto (debidas, por ejemplo, a la humedad o a la carga electrostática) comienzan a ser de magnitud comparable al peso de los granos. Por eso, muchos polvos tienen un comportamiento gobernado por fuerzas cohesivas. En el límite superior, no se considera como un “medio granular” ningún sistema de partículas cuyo tamaño

sea mayor que varios metros, porque en el laboratorio sería difícil reunir el número de elementos suficientes para observar fenómenos colectivos. Sin embargo, en la naturaleza se dan algunas de esas agrupaciones: por poner un caso, los anillos de los planetas pueden considerarse un medio granular.

### 2.1.1. Fracción de compactación

Al considerar un medio granular, es necesario tener en cuenta tanto las partículas como los huecos que existen entre ellas. En general, aun estando sometidas a la acción de la gravedad, las partículas se agrupan dejando huecos entre sí. Por ello, un medio granular siempre ocupa un volumen superior al que le correspondería si lo calculáramos multiplicando el número de partículas por el volumen de cada una de ellas. El parámetro que indica la relación entre el volumen correspondiente a la masa de partículas  $V_r$  (volumen real de los granos) y su volumen aparente  $V_a$  (volumen incluyendo los huecos) se denomina *fracción de compactación*:  $\phi = \frac{V_r}{V_a}$ .

La fracción de compactación siempre toma un valor menor que uno, siendo tanto más próximo a la unidad cuanto más empaquetadas estén las partículas. En el caso de un gas granular – donde el volumen ocupado por las partículas es pequeño respecto al del recipiente – el valor de  $\phi$  está cerca de cero.

Cuando se utilizan partículas esféricas siempre existen huecos entre ellas, de manera que no es posible alcanzar el valor  $\phi = 1$ . En tres dimensiones, el empaquetamiento más denso posible para las esferas es el empaquetamiento hexagonal compacto y el cúbico centrado en las caras (*fcc*) o sus variantes, con  $\phi = 0,74$ . Es decir, el 74 % del volumen está ocupado por las partículas. La manera de alcanzar este valor en el laboratorio es colocar ordenadamente los granos uno a uno. Con otros métodos, la

mayor fracción de compactación que se puede alcanzar es  $\phi = 0,64$ , la cual corresponde al llamado en inglés “*random close packing*” (empaquetamiento denso al azar) [9]. En el límite opuesto, el empaquetamiento menos denso posible bajo la acción de la gravedad (“*random loose packing*”) está peor definido, pero parece tomar un valor cercano a 0,52 [10].

En un trabajo reciente [11], Weitz muestra que la forma de las partículas afecta notablemente al valor de la fracción de compactación. Otros autores estudiaron experimentalmente y mediante simulaciones esta dependencia: con elipsoides (en concreto se emplearon chocolatinas *M&M's*) el mayor valor de la fracción de compactación alcanzado es  $\phi = 0,72$ , notablemente superior a  $\phi = 0,64$ , el valor correspondiente al “*random close packing*” para las esferas [12].

Obviamente, además de depender de las propiedades de la partícula (forma, rugosidad,...), la fracción de compactación también depende del modo en el que se depositan los granos. Si se hace rápidamente, a los granos no les da tiempo a ordenarse, se forman gran cantidad de arcos que dejan huecos en su interior, y como resultado la fracción de compactación es baja. Al contrario, si se depositan lentamente – el modo más lento consiste en añadir un grano cuando el anterior ya se ha estabilizado – los granos se ordenan, los arcos que se forman constan a lo sumo de una partícula y la fracción de compactación es elevada.

El cambio en el valor de la fracción de compactación es el origen de un sorprendente fenómeno que se da en los medios granulares, formulado en el principio de dilatación de Reynolds [2]: “un medio granular altamente compactado en el interior de un envoltorio flexible incrementa su volumen cuando el envoltorio es deformado. Si el envoltorio es inextensible pero deformable, la configuración del medio granular no se puede

deformar a no ser que se rompa el envoltorio o se fracture el medio granular”. Dicho de otro modo, al ejercer una presión sobre un medio granular, éste se puede dilatar disminuyendo así la fracción de compactación.

Un ejemplo claro de este fenómeno se da durante un paseo por la playa. Cuando se pisa la arena mojada se puede observar que la superficie alrededor del lugar donde se ejerce la presión se seca. La explicación es simple: al ejercer una presión sobre la arena se disminuye su fracción de compactación, aumentando así el volumen de los huecos entre partículas, que son ocupados por el agua de la superficie. En el momento en que cesa la presión, las partículas relajan, la fracción de compactación aumenta y el agua vuelve a mojar la superficie.

Una formulación alternativa a la fracción de compactación es la densidad aparente ( $\rho_a$ ), que se obtiene al dividir la masa del medio granular ( $M$ ) por el volumen total que ocupa ( $V_a$ ).

$$\rho_a = \frac{M}{V_a} \quad (2.1.1)$$

La densidad aparente es función de la densidad del material,  $\rho$ , y de la fracción de compactación,  $\phi$ :

$$\rho_a = \phi \rho \quad (2.1.2)$$

### 2.1.2. Número de coordinación y cadenas de fuerza

Se define el número de coordinación de una partícula como el número de contactos con otras vecinas. Para una configuración dada, el número de coordinación medio es una propiedad estadística que refleja el número medio de contactos de todos los

granos.

El valor del número de coordinación y su influencia en otras propiedades del medio granular no se ha estudiado con profundidad. Se sabe que está relacionado con la fracción de compactación ( $\phi$ ). En principio, cuanto mayor es el número de contactos entre las partículas mayor es el empaquetamiento. Sin embargo, por el momento no se ha conseguido establecer ninguna ley que describa esta relación [13].

El principal problema para establecer una relación entre  $\phi$  y el número de coordinación estriba en la dificultad de realizar experimentos de los cuales se puedan extraer datos fiables respecto al número de contactos [14]. Además, se debe tener en cuenta que no todos los contactos son iguales. Así, pueden distinguirse tres tipos de contactos entre los granos (Figura 2.1):

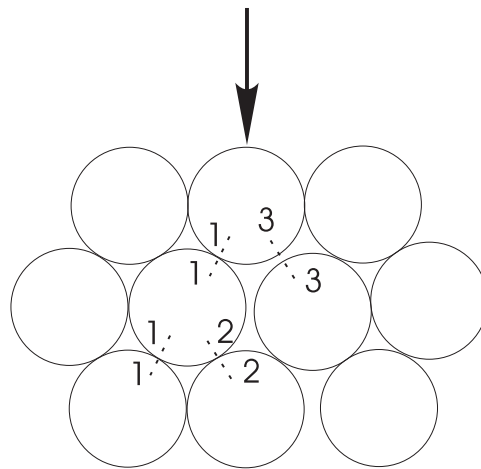


Figura 2.1: Diferentes tipos de contactos entre los granos de un medio granular. La flecha indica la posición donde se aplica la fuerza y los números el tipo de contacto entre cada partícula: 1, “contactos activos”; 2, “contactos geométricos” y 3, “contactos a presión”. Figura obtenida de *Sables, poudres et grains*, Jacques Duran, 1997 [14].

- Contactos tipo 1 o “contactos activos”: Son los contactos que transmiten la presión en un medio granular.

- Contactos tipo 2 o “contactos geométricos”: Son contactos en los cuales las partículas se tocan pero no transmiten la presión externa.
- Contactos tipo 3 o “contactos a presión”: No son contactos a una presión dada, pero pueden llegar a serlo a una presión mayor.

Los diferentes tipos de contactos entre partículas y el hecho de que su empaquetamiento no sea perfecto hacen que una fuerza externa, aplicada sobre un medio granular no se propague homogéneamente en el espacio. En la figura 2.2 se muestra un ejemplo de este fenómeno. El *principio de Pascal* no es válido en los medios granulares. La presión se transmite siguiendo los caminos marcados por las partículas en contacto, las llamadas “cadenas de fuerza”. Como consecuencia, al aplicar una presión vertical ( $P_V$ ) sobre un medio granular se genera una presión horizontal ( $P_h$ ). En primera aproximación, la presión horizontal generada es proporcional a la presión vertical ejercida:  $P_h = K P_V$ , donde  $K$  es una constante de proporcionalidad que depende de las características del material [15].

La presencia de cadenas de fuerza provoca que en un medio granular la presión no sea de tipo hidrostático (como la que corresponde a una columna de líquido). El “*efecto Janssen*” enuncia esta propiedad de los medios granulares [16]: “un medio granular en el interior de un recipiente ejerce una presión en la base que satura cuando el nivel de las partículas alcanza una determinada altura”. En la materia granular, al tratarse de un medio discreto, se entiende la presión como la media de la fuerza ejercida por las partículas por unidad de superficie.

La presión dentro de un medio granular contenido en un tubo cilíndrico sigue esta ley (Figura 2.3): cuando la altura del medio granular  $h$  es pequeña, la presión en la base del cilindro es de tipo hidrostático:  $P_V = \rho_a g h$ , donde  $\rho_a$  es la densidad



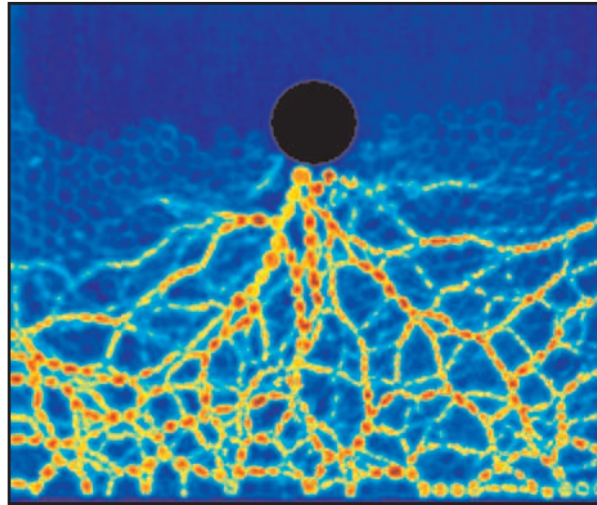


Figura 2.2: En la figura se muestra cómo una fuerza aplicada sobre un medio granular no se propaga homogéneamente, sino a través de cadenas de fuerza. Los colores verde, amarillo y rojo muestran grados crecientes de presión. En este caso, la fuerza puntual aplicada proviene del impacto de una partícula de gran tamaño y peso. Figura obtenida por Behringer y su grupo (<http://www.phy.duke.edu/research/ltb/lbgroup.html>).

aparente del medio granular. Sin embargo,  $P_V$  satura para  $h$  mayor que  $\varphi/4K\mu_s$ , siendo el valor límite de la presión vertical  $P_S = \rho_a g \varphi / 4K\mu_s$ , donde  $\varphi$  es el diámetro del cilindro,  $K$  la constante de redistribución de fuerzas y  $\mu_s$  el coeficiente de fricción estático del material granular. La altura  $h$  para la que satura la presión en la base de un recipiente cilíndrico varía entre 1 y 1,5 veces el diámetro del cilindro, dependiendo de las características del material.

Se debe reseñar que el concepto de coeficiente de fricción estático del material granular es distinto al que se usa habitualmente para la fricción entre dos sólidos. Cuando se aplica una fuerza a dos cuerpos en reposo que interactúan entre sí, se origina una fuerza de fricción proporcional al coeficiente de fricción estático ( $\mu_s$ ). Este coeficiente depende de las propiedades de la superficie de los materiales. En el caso de los medios granulares el llamado “coeficiente de fricción intergranular” (coeficiente

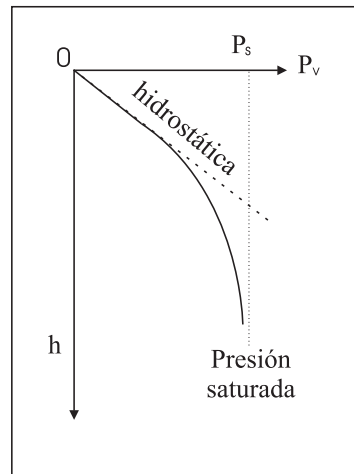


Figura 2.3: Dependencia de la presión vertical en función de la altura de la capa granular. En el eje de las abscisas se representa la presión vertical  $P_v$  y en el eje de las ordenadas la profundidad a la que se mide  $h$ . La línea discontinua vertical representa la presión límite,  $P_s$ , y la línea de trazos la presión hidrostática que ejercería un fluido. Figura obtenida de *Sables, poudres et grains*, Jacques Duran, 1997 [14].

de fricción estático del material granular) depende, además de las propiedades superficiales del grano, de su forma y de su tamaño. Se han establecido varios métodos para determinar  $\mu_s$  en un medio granular [17], aunque aún no se conocen muy bien las consecuencias que tiene el valor de este coeficiente en su dinámica. Para esferas de vidrio lisas, por ejemplo, el valor que suele encontrarse es  $\mu_s = 0,4$  [14]. El valor específico depende de varios factores.

### 2.1.3. Comportamiento no térmico

Debido a la elevada masa de las partículas, en los medios granulares las fluctuaciones de origen térmico resultan insuficientes para inducir cualquier clase de movimiento macroscópico de las partículas. Por lo tanto, carece de sentido tratar de relacionar la temperatura, en el sentido termodinámico de la palabra, con las velocidades macroscópicas de los granos. Sin embargo es habitual utilizar el concepto

de “temperatura granular” como una medida de la energía cinética asociada a las fluctuaciones de velocidad de las partículas que conforman el medio [18; 19]. Esta relación se puede establecer a partir de la distribución de velocidades, o a través del teorema de fluctuación-disipación, por ejemplo. Debido a que los medios granulares son fuertemente disipativos, este concepto es aplicable siempre que el medio esté en contacto con una fuente externa de energía. Se trata de una situación estacionaria fuera del equilibrio, dado que es necesario el aporte externo de energía para hablar de “temperatura granular”.

La dinámica de un medio granular está gobernada por las leyes de la mecánica clásica. Así, una configuración granular no puede relajarse espontáneamente si no es con la ayuda de una perturbación externa. Este es el origen de un fenómeno de metaestabilidad en la formación de las pilas granulares. Al apilar un medio granular (piénsese, por ejemplo, en un montón de arena seca) el ángulo de reposo que adopta toma valores entre  $\theta_r$  y  $\theta_m$  (Figura 2.4). Por debajo de  $\theta_r$  la pila de arena siempre es estable y por encima de  $\theta_m$  se desencadenan avalanchas en la superficie espontáneamente. Cuando el ángulo que forma la pila se encuentra entre ambos, manifiesta biestabilidad, en el sentido de que puede, o no, tener lugar una avalancha en su superficie.

#### 2.1.4. Disipación de la energía

Cuando dos partículas colisionan se produce una pérdida de energía. Aunque en primera aproximación se suele asumir que los choques son elásticos – sin pérdida de energía – en realidad los choques son siempre inelásticos. La cantidad de energía perdida está caracterizada por el coeficiente de restitución,  $e$ , que será tanto más cercano a uno cuanto más elástico sea el choque (y menos energía se pierda). La relación entre las energías cinéticas antes y después del choque, en un sistema aislado

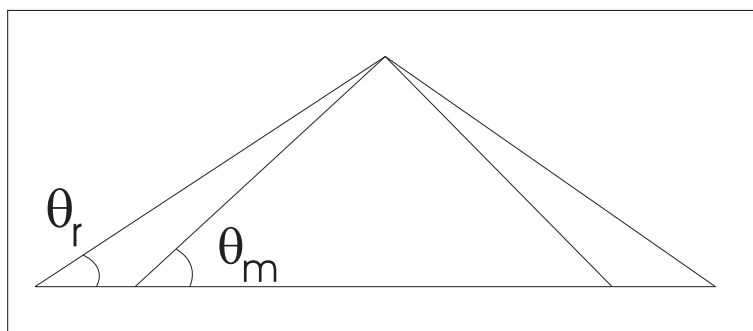


Figura 2.4: Esquema de una pila de medio granular en la que se muestran los ángulos  $\theta_r$  y  $\theta_m$  que dan lugar a una biestabilidad.

de dos partículas, viene dada por la expresión:

$$E_{c_f} = E_{c_i} e^2 \quad (2.1.3)$$

donde  $E_{c_f}$  es la energía cinética de las partículas después de la colisión y  $E_{c_i}$  la energía cinética antes de la colisión.

En un medio granular, el número de colisiones por unidad de tiempo puede llegar a ser muy elevado, y por eso son, en ocasiones, fuertemente disipativos, a pesar de que  $e$  sea cercano a la unidad.

### 2.1.5. Segregación

En un medio granular compuesto por partículas de diferentes características se puede dar el fenómeno de la segregación: las partículas, inicialmente mezcladas, tienden a agruparse con aquellas que tienen características semejantes [20]. Para que esto ocurra es necesario “fluidizar” las partículas aportándoles energía: no es posible la segregación si las partículas están en reposo. Este fenómeno ha sido ampliamente estudiado en diferentes situaciones donde el aporte de energía al medio granular se

realiza de formas muy diversas: vibración, tambor en rotación, esfuerzo tangencial, llenado de un recipiente, descarga de un silo... Los resultados encontrados dependen del modo en que se aporta la energía y de las características de las partículas utilizadas. Por el momento sólo se han resuelto problemas aislados y no se han conseguido establecer los mecanismos generales que gobiernan la segregación.

Todos los fenómenos descritos hasta ahora se dan en cualquier medio granular, pero se manifiestan con mayor o menor grado dependiendo de las propiedades específicas de las partículas. De este modo, parámetros como el coeficiente de restitución, la forma, la textura y la dureza de las partículas influyen en los fenómenos descritos en esta sección.

## **2.2. Arcos, atascos y flujo**

En esta sección se resumirán los trabajos previos en los que se han estudiado diversos aspectos de la descarga de silos por gravedad. Además, se expondrán algunos análisis generales de los atascos. Clasificamos estos trabajos en varios grupos:

- Los que se centran en el estudio de los arcos o puentes que atascan el agujero de salida de un silo. Éstos, a su vez, se dividirán en estudios experimentales y simulaciones numéricas.
- Los que analizan los atascos de un modo más general y sugieren similitudes en diferentes sistemas “atascados”.
- Los que estudian el flujo a través del orificio del silo, centrándose en las situaciones donde no se producen atascos.

- Los que analizan el comportamiento de las partículas en el interior del silo cuando se descarga por gravedad.

### 2.2.1. Formación de arcos

Una de las características inherentes a todo medio granular es su capacidad para formar arcos, también llamados puentes o bóvedas. Se puede definir un arco como un conjunto de partículas estructuradas espacialmente de tal modo que se sostienen entre sí (ver partículas verdes en la figura 2.5). Las partículas que forman un arco se estabilizan mutuamente. Si uno de los granos es eliminado, la estructura se viene abajo debido a la acción de la gravedad. Además de las partículas que constituyen el puente, existen otras que forman su base. Estas partículas (coloreadas de azul en la figura 2.5) son fácilmente identificables ya que sostienen el puente, pero su posición no se vería alterada en el caso de eliminar una de las partículas del arco [21]. Las partículas azules (bases de un puente) pueden, a su vez, pertenecer a otro puente.

Los puentes estructuran la configuración del medio granular, y son responsables de muchas de las propiedades descritas en la sección 2.1. La cantidad de arcos y su tamaño influye en la fracción de compactación y en el número de coordinación. Los arcos son también el origen de la falta de regularidad en la propagación de las fuerzas, así como los causantes de uno de los problemas de mayor importancia en los medios granulares: los atascos cuando fluyen por un orificio.

Varios son los trabajos realizados en los últimos años sobre la formación de arcos, tanto experimentales [22; 23; 24] como simulaciones numéricas [21; 25; 26] y análisis teóricos [27; 28].

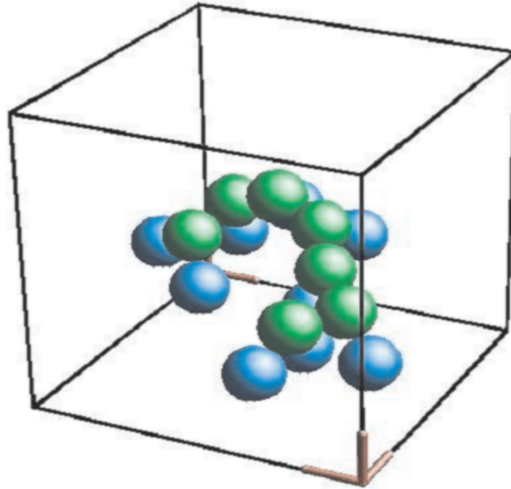


Figura 2.5: Ejemplo de puente que puede formarse en el seno del medio granular. Las partículas verdes, estables entre sí, son las que forman el puente propiamente dicho. Las esferas azules se consideran las bases del puente al no estar estabilizadas por ninguna de las partículas que lo forman. Figura cedida por L. A. Pugnaroni, obtenida en una simulación numérica.

### Trabajos experimentales en sistemas bidimensionales

K. To y sus colaboradores realizaron uno de los primeros estudios experimentales sobre la formación de arcos. En su trabajo [23] midieron la probabilidad de atasco de los discos contenidos en una tolva<sup>1</sup> bidimensional. La experiencia consistió en hacer fluir discos por un embudo plano, unos 1000 como máximo. El parámetro estudiado fue  $J_N$ , la probabilidad de que se produzca un atasco antes de que pasen en su totalidad los  $N$  discos del interior de la tolva.

En este experimento se toma como variable  $D$ , la relación entre el tamaño del orificio ( $d_O$ ) y el diámetro de los discos ( $d_P$ ):

$$D = d_O/d_P \quad (2.2.1)$$

---

<sup>1</sup>Recipiente en forma de cono invertido y abierto por abajo.

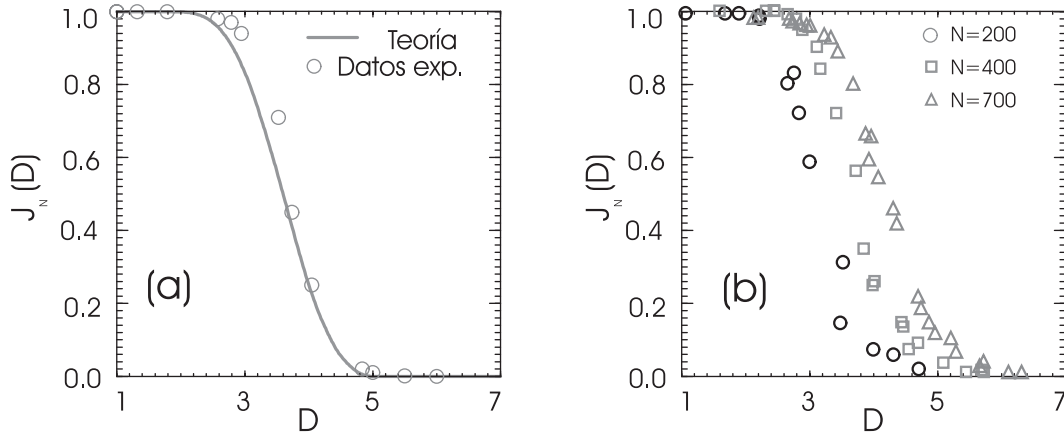


Figura 2.6: Probabilidad de atasco en función de  $D$ . En (a) se emplearon 400 discos. Los círculos son los datos experimentales y la línea continua los cálculos teóricos. En (b) se representan los resultados obtenidos experimentalmente con diferente número de discos ( $N$ ):  $\circ$ ,  $\square$  y  $\triangle$  representan respectivamente  $N = 200$ , 400 y 700. Figura obtenida de K. To et al., *Physica A* **315** (2002), 174 [24].

Los resultados encontrados para la probabilidad de atasco en función de  $D$  se muestran en la figura 2.6.

El primer resultado importante es que la probabilidad de atasco ( $J_N$ ) decrece cuando aumenta  $D$ . Pero lo realmente novedoso de este artículo es que se propone un modelo muy simple para definir la forma del arco que obstruye la salida. Los autores afirman que la línea que une los centros de los discos que forman el arco sigue un camino al azar con dos restricciones: el arco tiene que ser cóncavo y su tamaño debe taponar el agujero de salida. En la figura 2.6a se muestra la concordancia de las predicciones del modelo (línea continua) con los datos experimentales (círculos). Los autores también muestran que a medida que aumenta el número de discos en el sistema, para un mismo valor de  $D$ , crece la probabilidad de atasco  $J_N$  (Figura 2.6b).

La principal limitación de este sistema experimental es que el número de discos utilizados es pequeño. Por eso, resulta difícil obtener una estadística significativa de la probabilidad de atasco para elevados valores de  $D$ : cuando el tamaño del orificio es



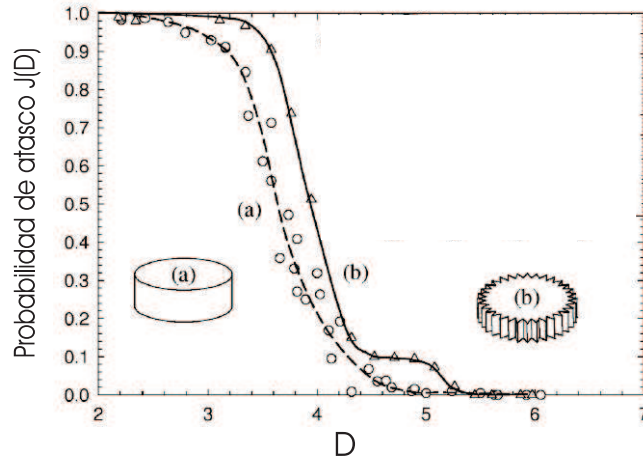


Figura 2.7: Probabilidad de atasco en función de  $D$  utilizando dos tipos de discos con diferente rugosidad. Los discos de la figura (a) tienen una superficie lisa y los de la figura (b) son, según los autores, “infinitamente rugosos”. Figura obtenida de K. To et al., Phys. Rev. Lett. **86** (2001), 71 [23].

grande,  $J_N$  se reduce considerablemente y son necesarias un gran número de partículas para ver algún atasco.

Otro aspecto investigado es el efecto de la fricción entre los discos en la probabilidad de atasco. Usando discos con la superficie en forma de dientes de sierra – infinitamente rugosos, según los autores – encuentran que la probabilidad de atasco aumenta, especialmente para  $D$  grandes (Figura 2.7). Este modo de cambiar la rugosidad de los discos es muy discutido incluso por el propio autor [29]. Se considera que utilizando estos discos no sólo se modifica la rugosidad de las partículas sino también su forma. De hecho, las características del fenómeno cambian significativamente: los puentes encontrados con los discos normales son siempre cóncavos mientras que con los “infinitamente rugosos” pueden tener forma convexa.

El mismo autor estudió la forma de los arcos y el modo en que se ve afectada al variar diferentes parámetros, tales como el ángulo de las paredes de la tolva o las propiedades superficiales de los discos [22] y [24]. El principal resultado de estos

artículos es que  $J_N$  sólo depende del ángulo de la tolva cuando éste es superior a un cierto valor.

### Simulaciones numéricas en sistemas bidimensionales

Manna y Herrmann [25] simularon un sistema con 2000 discos en el interior de un recipiente bidimensional con un orificio en la base. En este trabajo no se estudiaron los arcos de un modo directo, sino a través del tamaño de las avalanchas, entendiendo por tamaño de avalancha al número de partículas que caen entre dos atascos consecutivos.

Este análisis se inspiró en un artículo anterior [30] en el que Bak y sus colaboradores sugieren que en la descarga de un silo se podría observar SOC<sup>2</sup> (“criticalidad auto organizada”). Los autores argumentan que debido a la elevada fracción de compactación del medio granular, cuando se descarga un silo, las partículas nunca llegan a alcanzar altas velocidades. Esto hace que el efecto de la inercia sea pequeño y que se produzca la aparición espontánea de la correlación.

Según esta hipótesis, Bak y sus colaboradores muestran que la distribución en el desplazamiento interno de las partículas corresponde a un decaimiento potencial, signo de la existencia de SOC. Además, se asegura que la distribución del número de granos que fluyen a través del orificio de salida entre dos atascos consecutivos, tiene también una forma potencial. Estas simulaciones se realizaron para diferentes tamaños de agujero, encontrándose los resultados que se muestran en la figura 2.8. Como se puede observar, la distribución de los tamaños de las avalanchas puede ajustarse a una ley potencial sólo cuando  $D$  es pequeño. Para  $D = 2,83$  no parece que la ley que ajusta los resultados sea potencial. Además, el resultado no es concluyente porque el

---

<sup>2</sup>Se entiende por SOC la aparición espontánea de grandes correlaciones espaciotemporales en sistemas dinámicos lentos [31].

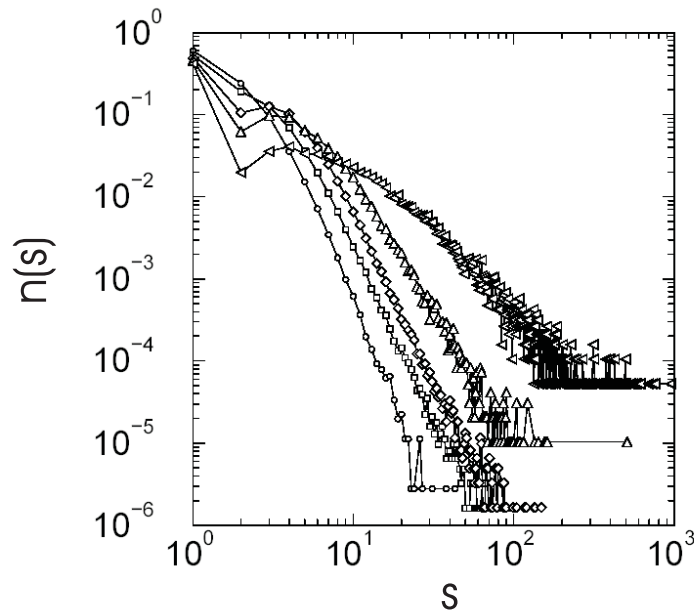


Figura 2.8: Probabilidad  $n(s)$  de obtener avalanchas de tamaño  $s$  en una simulación numérica, en escala logarítmica. Las diferentes curvas son, de izquierda a derecha, para tamaños de orificio  $D = 1,06, 1,41, 1,77, 2,12$  y  $2,83$ . Figura obtenida de S. S. Manna and H. J. Herrmann, *Eur. Phys. J. E* **1** (2000), 341 [25].

rango de valores de  $s$  donde aparece la ley potencial es muy pequeño (como mucho una década).

### Estudios en sistemas tridimensionales

El estudio de la formación de arcos en un sistema tridimensional es mucho más complejo. Hasta el momento, quizá debido a las dificultades técnicas, no se han realizado experimentos. En efecto, no es posible un acceso visual sencillo a las partículas del interior del medio granular. Pero aunque esto fuese posible (existe algún experimento en el que se usan técnicas más complejas como “microtomografía de rayos X” [32] o “tomografía de emisión de positrones”, PET) la mayor dificultad estriba en determinar los granos que forman contactos activos (ver sección 2.1.2) y constituyen un puente.

En un reciente artículo [21] Pugnaroni describió por vez primera arcos en tres dimensiones, obtenidos en simulaciones numéricas. El modelo utilizado usa un algoritmo de reestructuración no secuencial con esferas duras [33]. Es de reseñar que casi todos los puentes encontrados son de “*tipo cadena*”: en lugar de tener forma de bóveda, los puentes son una cadena de esferas sostenidas por una base de partículas estables por sí mismas (Figura 2.5). Además se encontró que ni la forma de los puentes ni su distribución de tamaños se ve afectada significativamente por la fracción de compactación. Sin embargo, la fracción de compactación sí que afecta a la distribución espacial y a la orientación de los puentes [26].

Por último, cabe mencionar los trabajos de Drescher [27; 28] quien realiza un complejo análisis teórico de la formación de arcos, relacionando este fenómeno con las propiedades del flujo de los medios granulares a través de un orificio. Las conclusiones teóricas obtenidas muestran un buen acuerdo con los resultados experimentales existentes.

### 2.2.2. Atascos

Si a la salida de un silo se forma un arco que obstruye el orificio, el flujo se detiene: se dice que el silo se ha atascado. El atasco de un medio granular a la salida de un silo es sólo uno de los muchos ejemplos de sistemas que se atascan. Las personas que huyen presas del pánico [34; 35], los atascos de tráfico a la salida o entrada de las grandes ciudades [36] o la salida de gente de una sala de cine por puertas que no son capaces de absorber ese caudal humano, son otros ejemplos cotidianos de atascos.

En un trabajo reciente [8], A. Liu y S. Nagel propusieron que los atascos en estos sistemas (y otros más, como la transición vítrea, la agregación de coloides o la formación de espumas) comparten características comunes. Además sugieren que

el “estado atascado” puede ser una nueva fase de la materia, de modo que el atasco podría equipararse a una transición de fase en el sentido termodinámico de la palabra. Los autores proponen un diagrama de fases general que, por analogía, podría aplicarse a todos estos sistemas. Las variables escogidas son, como se muestra en la figura 2.9, la temperatura, la inversa de la densidad y la carga o fuerza. Altas temperaturas o cargas dificultan el atasco, mientras que la elevada densidad lo facilita.

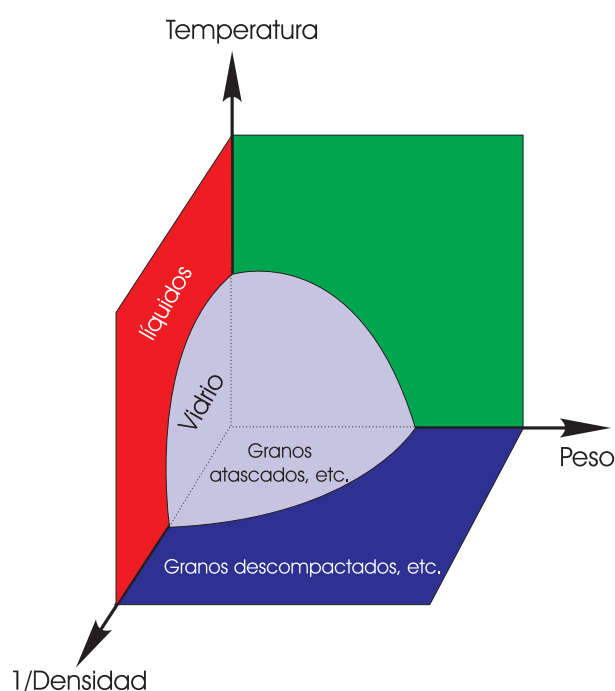


Figura 2.9: El hipotético diagrama de fases propuesto por A. Liu y S. Nagel para el estado atascado, que está representado por el volumen azul claro. Figura obtenida de A. J. Liu and S. R. Nagel, *Nature* **21** (1998), 396 [8].

Otros autores sugieren que los sistemas atascados pertenecen a una nueva clase de materiales, la llamada “materia frágil” [37; 38]. Su principal característica es que tienen la capacidad de organizar estructuras estables (arcos) al aplicárseles una fuerza externa. El sistema desordenado queda entonces atrapado en una pequeña región

del espacio sin posibilidad de escape. Si la dirección de la fuerza aplicada cambia levemente, el sistema se desatasca.

Según Cates y sus colaboradores, la materia frágil tiene la propiedad de dar lugar, en su interior, a estructuras que son resistentes a los esfuerzos que las han originado. A las fuerzas que las causan se les llama “compatibles”. Sin embargo, un leve cambio en la dirección de la fuerza hace que ésta se vuelva “incompatible” con la estructura y el sistema se desatasque, hasta que se formen otras estructuras que provoquen un nuevo atasco. Un ejemplo familiar se puede observar en los apilamientos de materia granular. Si sobre una superficie plana se van depositando de manera continua granos de arena, la forma que adoptan es aproximadamente cónica. Las partículas de la parte superior del cono no caen debido a que el sistema desarrolla unas cadenas de fuerza que compensan a la gravedad, única fuerza presente. La pila de arena, si no se le aplica ninguna otra fuerza, permanecerá estable debido a que, en este caso, la gravedad es una fuerza compatible. Pero si se hace vibrar la superficie sobre la que se encuentran los granos, se observará cómo la pila se desmorona. Las partículas de la superficie de la pila caen porque se les aplica un esfuerzo “incompatible”.

### **2.2.3. Flujo a través de un orificio**

Se define el caudal en la descarga de un silo ( $W$ ) como la cantidad de masa que atraviesa el orificio por unidad de tiempo. Recientemente algunos autores utilizan una magnitud análoga a la del caudal: el número de partículas que atraviesan el orificio por unidad de tiempo. En rigor se debería considerar esta magnitud como una frecuencia de paso de las partículas. Sin embargo, es habitual denominarla flujo. Para diferenciar ambas magnitudes, cuando se hable de esta medida de frecuencia se usará  $W_b$ . Puesto que la masa que atraviesa la base es equivalente al número de partículas por  $m$ , su

masa individual,  $W$  y  $W_b$  se relacionan mediante la ecuación:  $W = W_b m$ .

Por su importancia en la industria, el flujo en la descarga de silos ha sido muy estudiado en los últimos años. En 1961, Beverloo y sus colaboradores [39] razonaron que el caudal de un medio granular a través de un orificio debía ser proporcional a  $D$  elevado a 2,5:  $W \propto D^{2,5}$ . El origen de esta proporcionalidad es fácil de justificar: el caudal es proporcional al área del orificio ( $A$ ) y a la velocidad media en la dirección vertical con la que las partículas lo atraviesan ( $v_z$ ):

$$W \propto A v_z \quad (2.2.2)$$

La hipótesis de los autores es la siguiente: se considera que las partículas en el interior del silo tienen una velocidad despreciable respecto a la que adquieren a la salida. Esta velocidad a la salida se debe a que las partículas caen libremente, partiendo del reposo desde una altura  $H$  proporcional a  $D$  (esta hipótesis equivale a suponer que las partículas caen de lo alto de una bóveda esférica del mismo diámetro que el orificio). Por esta razón, en el orificio  $v_z \propto D^{1/2}$ , y como  $A \propto D^2$  se obtiene la “Ley de Beverloo”:

$$W \propto D^{2,5} \quad (2.2.3)$$

cuya expresión completa para el caudal en gramos por minuto es:

$$W = 35 \rho_a (d_O - 1,4 d_P)^{2,5} \sqrt{g} \quad (2.2.4)$$

Se debe reseñar que en la ecuación de Beverloo se usa la densidad aparente del material  $\rho_a$ . Además se utiliza  $d_O - 1,4 d_P$  en lugar de  $d_O$  porque, como se explicará más adelante, existe un zona, contigua a los límites del orificio, por la que no

fluyen los granos: el diámetro efectivo del orificio es menor que  $d_O$ .

La relación entre  $W$  y  $D$  encontrada por Beverloo (ecuación 2.2.3) fue obtenida posteriormente por Al-Din y Gunn [40] mediante un análisis dimensional. En este trabajo también estudiaron los efectos en el caudal de la forma del orificio y de las partículas. Estos resultados son, como se ha indicado, igualmente válidos para  $W_b$ .

En unos artículos recientes, Hirshfeld y sus colaboradores [41; 42] comprobaron numéricamente, mediante métodos de dinámica molecular, la “Ley de Beverloo”. Para un silo bidimensional, obtuvieron una relación entre el flujo ( $W_b$ ) y el diámetro de apertura [41]:

$$W_b \propto D^{1,5} \quad (2.2.5)$$

que es la ecuación propuesta por Beverloo para dos dimensiones (pues  $A \propto D$ ).

Los mismos autores, en un trabajo posterior [42] comprobaron la validez de la “Ley de Beverloo” en tres dimensiones. Cabe destacar que en ambos trabajos los autores hacen notar que el ajuste teórico no coincide con los resultados obtenidos mediante el modelo para  $D < 10$  aproximadamente (Figura 2.10). Además, para  $D < 5$  no se obtuvieron resultados del flujo porque se interrumpía debido a la formación de arcos que atascaban el orificio.

Otro importante experimento en el que se midió el caudal de un medio granular a través de un orificio circular fue el realizado por Nedderman y sus colaboradores en 1982 [43]. Mediante observaciones empíricas establecieron las siguientes conclusiones:

- El caudal  $W$  es independiente de la altura de la capa granular  $h$  siempre que  $h > 2,5 \varphi$ , donde  $\varphi$  es el diámetro del silo. Este resultado no es de extrañar,



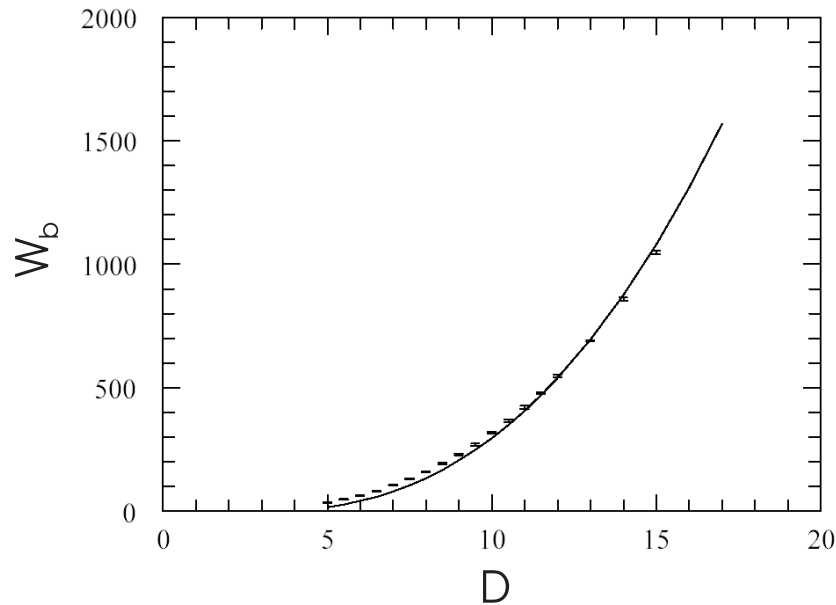


Figura 2.10: Flujo (en número de partículas por unidad de tiempo) para diferentes diámetros del orificio de salida. Los puntos son los resultados obtenidos con las simulaciones y la línea es un ajuste con la ecuación propuesta por W.A. Beverloo para tres dimensiones (2.2.3). Figura obtenida de D. Hirshfeld and D. C. Rapaport, Eur. Phys. J. E 4 (2001), 193 [42].

pues por el “efecto Janssen” la presión en la base del silo satura (ver sección 2.1.2).

- $W$  es independiente de  $\varphi$  si se cumple que  $\varphi > 2,5 d_O$  y además  $\varphi > d_O + 30 d_P$ , siendo  $d_O$  y  $d_P$  el diámetro del orificio y las partículas respectivamente. Estas dos condiciones pueden entenderse del siguiente modo: si  $\varphi$  es mayor que los valores indicados, a las partículas que caen por el orificio no les afectan las paredes del silo, de modo que los efectos de borde son irrelevantes. Con  $\varphi$  inferior a este valor, el caudal depende de las condiciones de contorno.

### Atascos parciales. Oscilaciones en el flujo.

En la actualidad se piensa que el flujo de un medio granular a través de un orificio está condicionado – entre otras cosas – por los atascos parciales. Un atasco parcial es

aquel que no llega a detener el flujo por completo de manera definitiva, sino que lo hace sólo momentáneamente o en una región del agujero. Su origen podría ser debido a la formación de puentes que no son lo suficientemente estables como para soportar el peso de los granos superiores – y por lo tanto duran poco tiempo – o a la existencia de pequeños puentes que bloquean una parte del orificio. Estos atascos parciales dan lugar a oscilaciones en el flujo, tal y como observaron Medina y sus colaboradores en la descarga de una tolva bidimensional [44].

La existencia de oscilaciones en el flujo había sido descrita con anterioridad por Hong [45] en simulaciones y por Brown y Richards [46] en experimentos. Además, Brown y Richards observaron la presencia de una zona del orificio contigua a sus límites por la cual no fluyen las partículas. La anchura de esta zona se estimó en  $k/2$ , donde  $k$  es una constante que depende de las propiedades del grano pero no depende del tamaño ni de la forma del orificio. Se puede decir, por tanto, que el diámetro efectivo de un orificio circular de diámetro  $d_O$  es  $d_O - k$ . En esta pequeña zona no fluyen los granos porque está constantemente atascada.

En un artículo reciente [47] Longhi y su grupo han encontrado un indicio claro de la existencia de un cambio de fase a medida que se disminuye  $D$  en la descarga de una tolva bidimensional. Cuando  $D$  se acerca a valores para los que se producen atascos las fluctuaciones de la presión en la pared lateral de la tolva tienden asintóticamente a una ley de potencias en  $D$ . También observan los autores que, incluso cuando no se producen atascos, existen cadenas de fuerza que parten de las paredes hacia el centro. Estas cadenas de fuerza se pueden considerar como atascos parciales, puesto que cuando se dan ralentizan el flujo momentáneamente.

### 2.2.4. Flujo en el interior de un silo

En la descarga de un silo por gravedad, es interesante considerar el flujo del medio granular en su interior. De su importancia práctica dan fe los numerosos estudios realizados por ingenieros. De ellos viene la denominación de los tipos de flujo que se dan, esencialmente, en el interior de un silo [48; 49]: flujo de embudo o interno (“*funnel flow*” o “*core flow*”) y flujo másico (“*massic flow*”). En la figura 2.11 se presenta un esquema de estos tipos de flujo.

El flujo másico se da cuando el material en el interior del silo se mueve verticalmente de manera solidaria. El movimiento relativo entre las partículas es pequeño y la superficie de la capa granular mantiene su forma original. El flujo másico tiene lugar cuando la fricción de las partículas con las paredes del silo es menor que la de las partículas entre sí. En este caso, el orden de salida de los granos es el mismo que el de entrada, al realizar la carga.

El flujo de embudo o interno se da cuando la fricción de las partículas entre sí es menor que la fricción contra las paredes. La superficie cambia de forma porque las partículas se pegan a las paredes y el flujo se desarrolla sólo en el centro del silo. El orden de las partículas en la descarga no es el mismo que el de carga, y se puede quedar material en el interior. Además, si en el interior del silo hay partículas con diferentes propiedades, el flujo interno puede causar su segregación con mayor facilidad que el flujo másico. La razón es clara: el movimiento de unas partículas respecto de otras es mucho mayor en el flujo de tipo interno que en el másico.

Existe un tipo de flujo llamado “mixto” en el cual se da el flujo másico para las partículas que están por encima de un nivel dado (alrededor de 1,2 veces el diámetro del silo) y un flujo interno para las partículas que están por debajo de ese nivel [49].

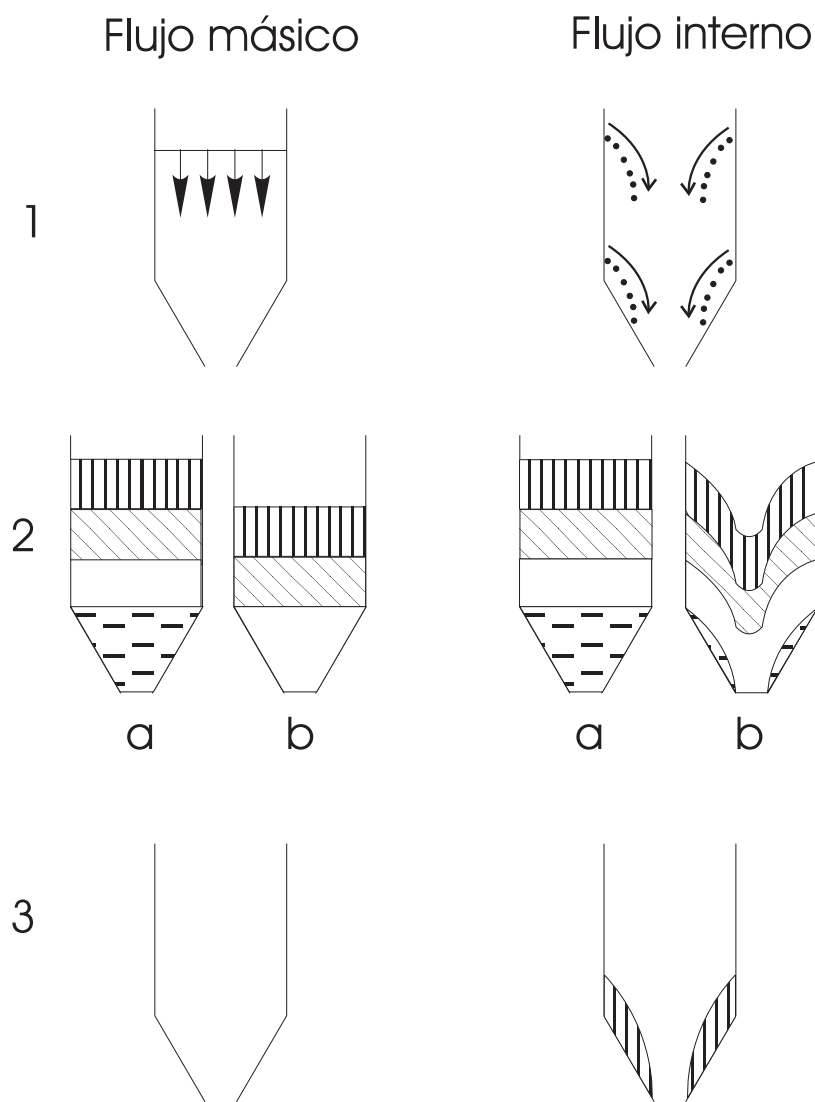


Figura 2.11: Esquema de los dos tipos de flujo que pueden darse en el interior de un silo o una tolva. Las figuras de la izquierda corresponden al flujo másico y las de la derecha al flujo de embudo o interno. En las figuras 1 se muestran las trayectorias de las partículas para cada tipo de flujo. En las figuras 2a se observa el estado inicial del silo y en las 2b el estado cuando se ha comenzado la descarga. En las figuras 3 se representa el estado final tras la descarga.

Otras características del flujo de un medio granular en el interior de una tolva han sido determinadas utilizando técnicas experimentales más complejas. En 1989, Baxter y sus colaboradores usaron una radiografía de substracción digital con la que observaron la aparición de ondas de densidad aparente al utilizar partículas de 0,6 y 0,7 *mm* de diámetro [50]. Más recientemente, Menon utilizó una espectroscopía de difusión de onda para medir la dinámica de los granos de arena en el interior de un silo tridimensional [51]. El resultado más importante de este trabajo es que, a una escala temporal mucho mayor que el tiempo medio entre colisiones sucesivas, los granos realizan agrupamientos colectivos lentos. En el límite de tiempos muy largos estos reagrupamientos originan una dinámica difusiva.

Otro fenómeno observado en el flujo interno de los granos es el llamado en inglés “*silo quaking*” (temblor en silo). Este término se usa para describir un comportamiento dinámico que se da, en determinadas ocasiones, cuando se descarga un silo: las partículas en el interior del silo se mueven rápidamente durante periodos cortos, separados por largos periodos en los que no se mueven [52].

### **Influencia del método de llenado**

Zhong y sus colaboradores estudiaron la dependencia del flujo en el interior del silo para dos tipos diferentes de partículas en función del método de llenado [49]. La carga del silo se realizó de dos maneras distintas:

- **Llenado distribuido.** Las partículas se introducen en el silo de manera uniforme en toda su superficie (Figura 2.12a). Para ello se usó un recipiente intermedio con 13 orificios homogéneamente distribuidos, a través de los cuales se vertieron los granos al silo.

- **Llenado concéntrico.** Las partículas se introducen en el silo por un solo punto situado en el centro del mismo (Figura 2.12b). Este método de llenado es el que se sigue al cargar el silo utilizando un embudo.

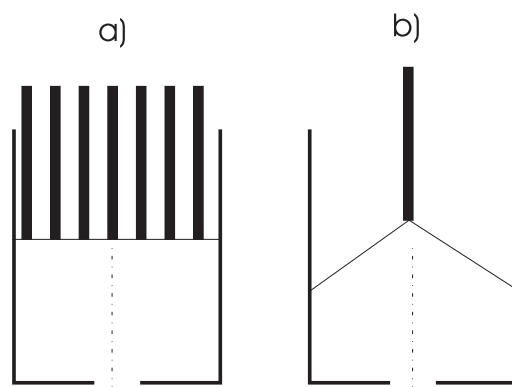


Figura 2.12: Diferentes métodos de llenado utilizados en [49]. a) Esquema del método distribuido; b) método concéntrico. Figura obtenida de Z. Zhong et al., Engng. Struct. **23** (2001), 756 [49].

Los resultados obtenidos en este trabajo muestran una gran dependencia del tipo de flujo que se desarrolla en el interior del silo con la forma de las partículas utilizadas. Si se utilizan partículas más o menos esféricas (*pellets* de plástico cilíndricos de 2 mm de diámetro por 3 mm de altura) el método de llenado tiene una gran influencia en el tipo de flujo que se da: un llenado distribuido origina un flujo interno, y un llenado concéntrico un flujo mixto. Se cree que el origen de esta diferencia en el flujo está en las diferentes configuraciones geométricas que adoptan las partículas dependiendo del método de llenado. Para otro tipo de granos menos simétricos (cebada de  $8,1 \times 3,6 \times 2,7$  mm) se da el flujo mixto independientemente del método de llenado.

Sin embargo, en un trabajo anterior Baxter y Behringer mostraron tanto experimentalmente como mediante simulaciones un resultado diferente. Con un llenado

concéntrico, el flujo de partículas no esféricas en el interior de una tolva es siempre de tipo interno [53]. Además, encontraron que, al fluir, las partículas se alineaban con las paredes de la tolva. Otros autores también han encontrado este mismo resultado: con llenado concéntrico el flujo es interno para partículas no esféricas y másico para partículas esféricas [54].

### **Problemas de segregación**

Al descargarse y cargarse el silo, las partículas se mueven unas respecto de otras: están fluidizadas. Consecuentemente, si las partículas tienen propiedades distintas se pueden segregar (ver sección 2.1.5), lo cual puede resultar muy problemático en algunos procesos industriales, ya que se produce la separación de granos inicialmente mezclados. Los ingenieros han estudiado numerosos ejemplos y tipos de segregación en el interior de un silo. Además, en sus trabajos proponen distintas soluciones empíricas para reducir este efecto [55].

Sin embargo, son pocos los estudios sistemáticos que se han realizado para comprender los mecanismos físicos que dan lugar a la segregación en el interior de un silo. En 1990, Arteaga y Tüzün [56] midieron la segregación de partículas de características iguales pero de tamaño diferente en el interior de una tolva bidimensional. Evaluando la fracción de volumen de cada tipo de partícula en diferentes etapas de la descarga, obtuvieron el grado de segregación en función de la relación de tamaños entre las partículas y la fracción de cada una de ellas en la mezcla.

Un trabajo posterior de Samadani [57] muestra resultados similares en un silo cuasibidimensional, usando imágenes digitales para caracterizar el desarrollo de la segregación. En el experimento, en el que se desarrolla un flujo de tipo interno, los autores encuentran varias características de la segregación por tamaños:

- La segregación de las partículas de mayor tamaño se produce sólo en la superficie del medio granular y no en el interior. Una vez segregadas, las partículas grandes penetran hacia el interior del silo permaneciendo estables en el centro (Figura 2.13).
- La segregación se da incluso para relaciones de tamaño entre partículas muy pequeñas. La mínima relación explorada por los autores es 1,2. Eso sí, a medida que disminuye la diferencia entre los tamaños de las partículas, la velocidad de segregación decrece.

El mecanismo sugerido por el cual se origina la segregación es el siguiente: en el flujo de tipo interno se dan avalanchas superficiales desde las paredes hacia el centro. Al rodar las partículas grandes de la superficie, se originan huecos que son ocupados por las partículas pequeñas. Una vez en el centro, las partículas grandes (segregadas) se introducen en el interior del silo siguiendo las líneas de flujo que se dan en un flujo de tipo interno (Figura 2.13).

Se debe resaltar que, tanto en [56] como en [57], el flujo en el interior de la tolva es un flujo interno. Por el momento, no existen trabajos en los que se estudie este problema desde un punto de vista físico para flujos de tipo másico.



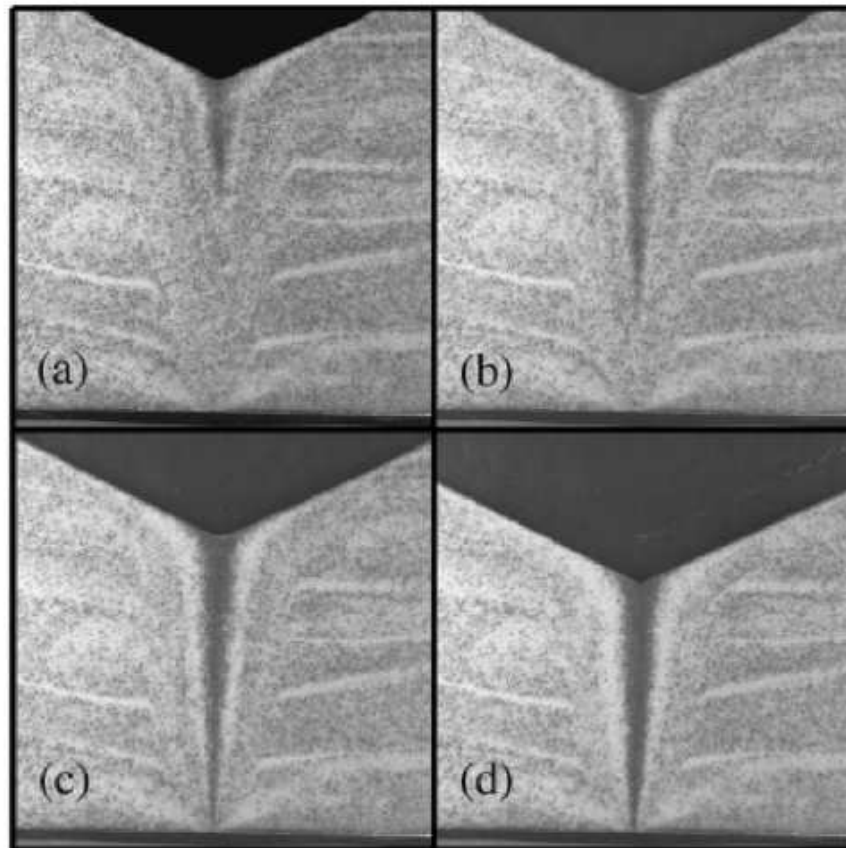


Figura 2.13: Imágenes de la segregación de partículas originada al descargar un silo bidimensional. A medida que avanza el tiempo las partículas oscuras, de mayor tamaño, se segregan en la superficie y penetran en el interior del silo. Figura obtenida de A. Samadani et al., *Phys. Rev. Lett.* **60** (1999), 7203 [57].



# Capítulo 3

## Sistema experimental

### 3.1. El experimento

El objeto del experimento llevado a cabo es estudiar los atascos y el flujo de granos en la descarga de un silo para pequeños tamaños del orificio de salida. Para ello, se construyó un silo a escala con un orificio en la base. En las figuras 3.1 y 3.2 se muestran un esquema y una fotografía del montaje. La medición básica de la experiencia es el tamaño de las avalanchas y su duración, entendiendo por avalancha la descarga que se produce entre dos interrupciones consecutivas del flujo.

El silo está lleno de partículas iguales que pueden fluir por el orificio de la base. Si el tamaño del orificio no es mucho mayor que el de las partículas, el flujo se detiene debido a la formación de arcos. Estos arcos soportan el peso de las partículas que hay encima. Después de esperar un tiempo prudencial (diez veces el máximo intervalo de tiempo medido entre la caída dos partículas consecutivas), para restablecer el flujo se rompe la estructura de los puentes con un chorro de aire a presión (Figuras 3.1 y 3.2).

El silo está sobre una base de hierro anodizado soportada por cuatro barras de

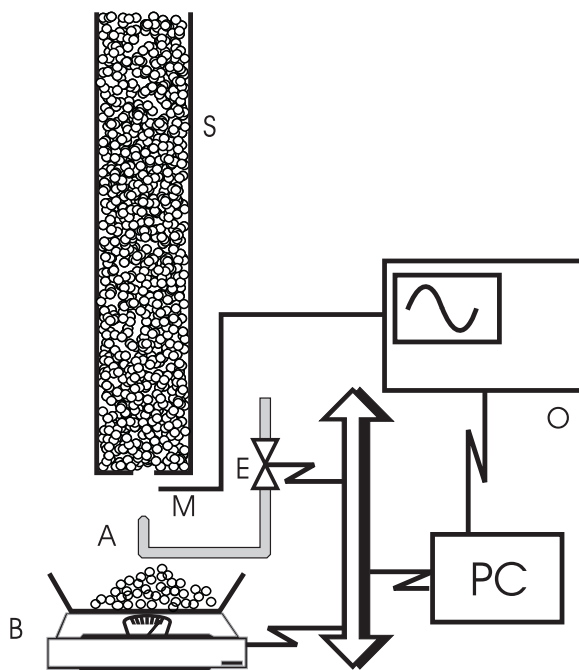


Figura 3.1: Esquema del sistema experimental. S, silo; M, micrófono; A, soprador de aire a presión; B, balanza; E, electroválvula; O, osciloscopio; PC, ordenador.

latón. Por debajo del orificio de salida, una caja recoge las partículas que caen libremente. La caja se encuentra sobre una balanza con la que se determina el peso de las partículas que caen entre dos atascos sucesivos. Como se conoce el peso de una partícula se puede hallar el número de partículas de cada avalancha. Además, junto al soprador se halla pegado un micrófono que detecta el ruido que hacen las partículas al caer. La señal es amplificada y enviada al osciloscopio para determinar la duración de cada una de las avalanchas.

Todo el sistema se encuentra sobre una mesa antivibratoria con el fin de amortiguar posibles vibraciones que se transmitan a través del suelo.

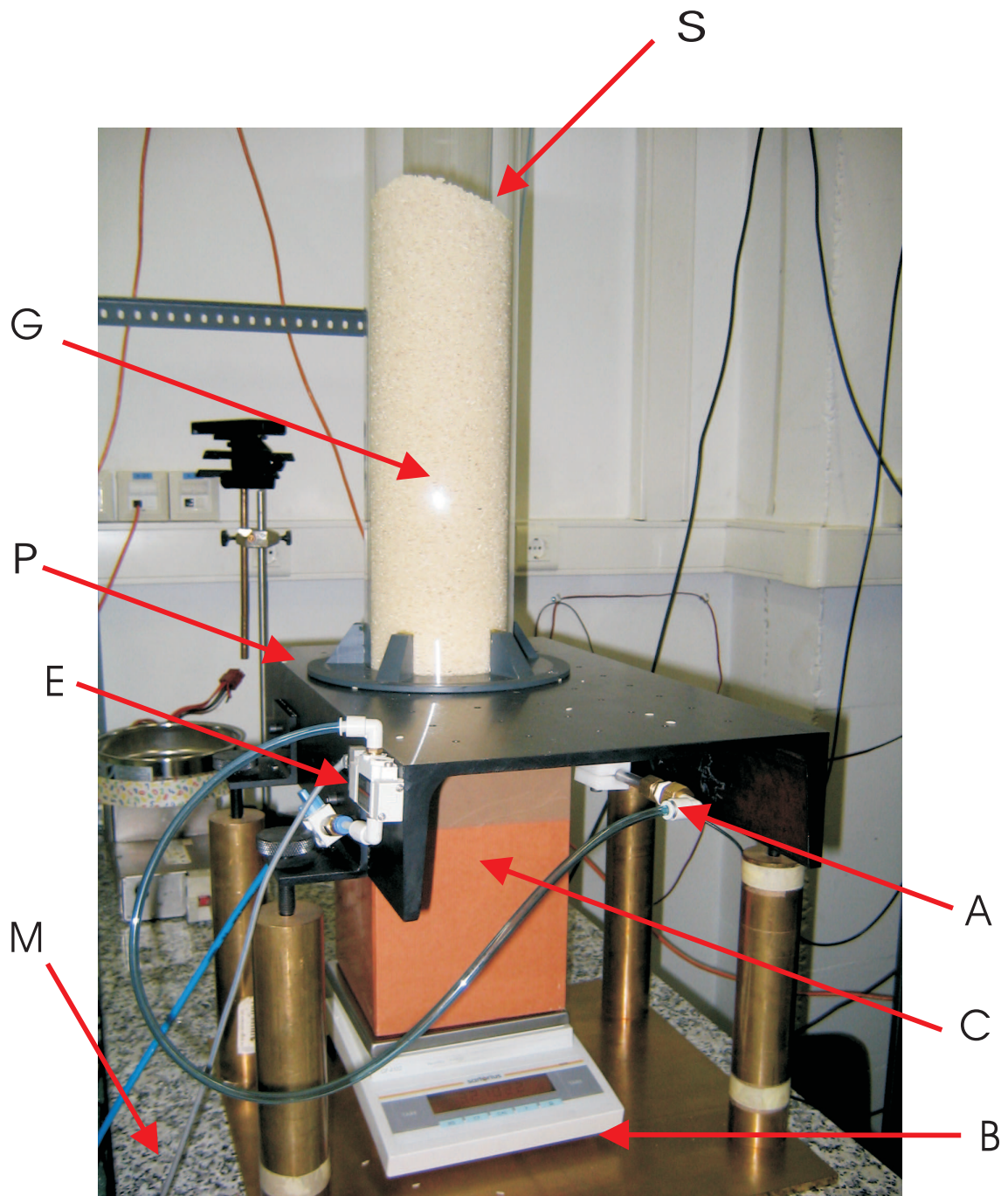


Figura 3.2: Fotografía del sistema experimental. S, silo; G, medio granular; P, soporte del silo; A, aire a presión; M, mesa antivibración; B, balanza; C, caja de cartón; E, electroválvula.

## 3.2. Montaje

En esta sección describiremos las características de cada uno de los componentes del sistema experimental y el motivo por el que se han elegido.

### 3.2.1. Silo

Se entiende por silo el recipiente cilíndrico vertical en cuya base plana hay un orificio de diámetro  $d_O$  por el que pueden caer las partículas del interior (Figura 3.3a). Es necesario aclarar que se habla de silo en sentido estricto y que en este trabajo nunca se utilizan tolvas. Al contrario que el silo, la tolva no tiene la base plana (Figura 3.3b). Las paredes contiguas al agujero tienen un ángulo determinado respecto a la horizontal  $\alpha$ , distinto de cero. Un silo es, por lo tanto, una tolva donde  $\alpha = 0^\circ$ .

En este trabajo han sido utilizados varios tipos de silos. Se utilizaron silos de diferente diámetro con el objetivo de comprobar la influencia de esta variable en la formación de arcos. Tal y como se explicó en la sección 2.2.3, Nedderman encontró que el efecto de la pared en el flujo es despreciable si el diámetro del silo es mayor que un tamaño dado (alrededor de 30 veces el diámetro de la partícula) [43]. Para comprobar este resultado en el caso de los atascos, se han usado silos de diferentes diámetros (30, 50, 80, 120 y 150  $mm$ ). Así, con esferas de 2  $mm$  de diámetro se encontró que los resultados eran esencialmente iguales con los silos de 80, 120 y 150  $mm$  de diámetro. Con el silo de 50  $mm$  de diámetro los resultados se modificaban levemente y el cambio era notable con el silo de 30  $mm$ . Este resultado concuerda con lo encontrado por R. M. Nedderman.

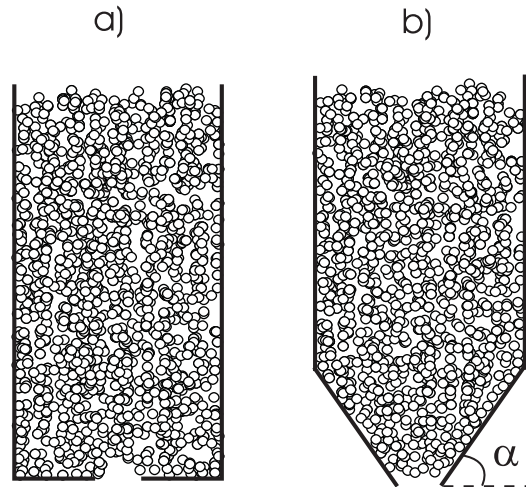


Figura 3.3: Esquema en dos dimensiones de la forma de (a) un silo y (b) una tolva.

También se han usado silos de diferentes materiales: de acero inoxidable y vidrio. Con los silos de vidrio se pretende observar directamente lo que ocurre con las partículas que están junto a las paredes. La mayoría de los resultados se han obtenido con silos de acero inoxidable. Además de su menor fragilidad, el acero inoxidable tiene una ventaja respecto al vidrio: al ser un metal, las partículas no se cargan electrostáticamente por la fricción con las paredes. En nuestros experimentos, se ha comprobado que con ambos materiales se obtienen los mismos resultados. Esto parece lógico por las condiciones experimentales empleadas: el diámetro del silo siempre es mayor que 30 veces el diámetro de las partículas, y por lo tanto los efectos de borde son despreciables.

Para poder cambiar el tamaño del orificio de salida, en la base plana del silo se coloca un disco independiente de  $10\text{ mm}$  de espesor con un orificio en el centro (Figura 3.4a). En este trabajo se han utilizado más de 50 discos con orificios circulares de diferente diámetro ( $d_o$ ). El orificio se ha maquinado con un “desbastado” a corte cónico de modo que el diámetro es menor en la parte superior que en la inferior, como

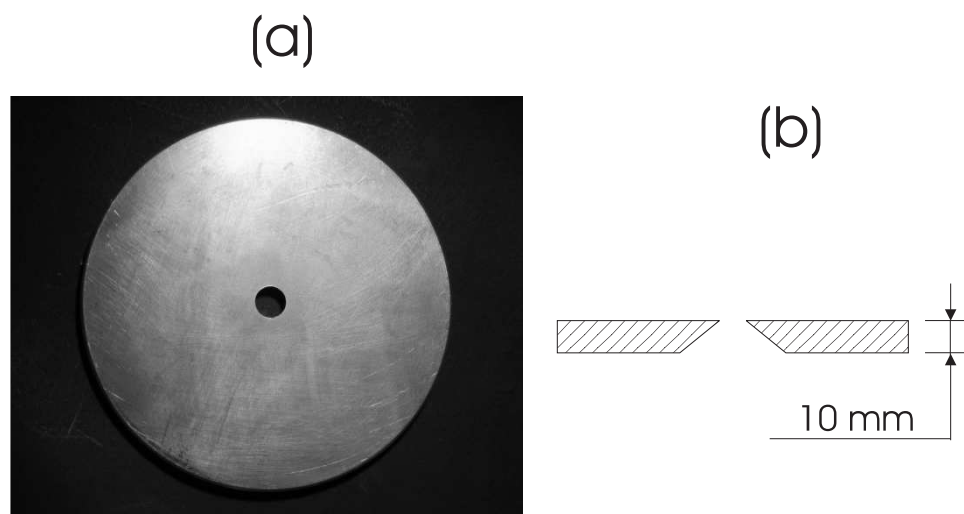


Figura 3.4: a) Fotografía superior de la base del silo con el orificio en el centro. b) Esquema de un corte transversal de la base del silo.

se muestra en el esquema de la figura 3.4b. Este diseño se realizó con el objetivo de que las partículas sólo se puedan atascar por encima del orificio. El disco se ha fabricado con diferentes materiales sin observarse ninguna diferencia en los resultados. En las primeras pruebas se escogió el acero inoxidable. No obstante, la mayoría de las medidas se han realizado con discos de latón por ser un material más blando y fácil de trabajar para modificar el tamaño del orificio. Ocasionalmente se han usado discos de vidrio para observar, directamente o a través de un espejo, la formación de arcos.

### 3.2.2. Instrumentación

Los instrumentos empleados en este trabajo han sido elegidos para automatizar la obtención de datos en la medida de lo posible. Los aparatos son controlados por el ordenador donde también se almacenan los datos. A continuación se describirán



brevemente los equipos utilizados y las características que nos llevaron a escogerlos.

**a) Balanza.**

Cuando las partículas caen a través del orificio, se recogen en una caja de cartón que está sobre una balanza *Sartorius GP 4102*. La balanza detecta un peso máximo de 4100 g y tiene una resolución de 0,01 g. Se escogió esta balanza porque con su resolución se puede detectar la caída de una partícula en casi todos los casos, ya que como se explicará más adelante, el peso de la mayoría de las partículas utilizadas es superior a 0,01 g.

**b) Sistema para romper los puentes.**

Cuando se atasca el orificio del silo, tras haberse medido el número de partículas caídas en la avalancha y la duración de la misma, el arco se rompe aplicando un chorro de aire a presión por debajo del agujero. Este mecanismo para desatascar el orificio ha sido elegido frente a otros utilizados normalmente en la industria (vibración del silo o golpes en las paredes) por dos motivos esenciales. El primero y más importante es el tratar de evitar posibles cambios en la fracción de compactación, que son muy comunes al usar estos otros mecanismos [58]. La otra ventaja de usar aire a presión es que se controla muy fácilmente y se puede aplicar siempre en condiciones similares. Esto no ocurre al golpear las paredes ya que, debido a la presencia de los canales de fuerza, dos golpes iguales en el mismo punto pueden tener efectos muy diferentes según la disposición del medio granular en el interior del silo.

El chorro de aire se consigue con el dispositivo que se muestra en la figura 3.5. Un tubo de acero transporta el aire hasta debajo del orificio para descargarlo hacia arriba a través de una boquilla de teflón. El flujo de aire está controlado mediante

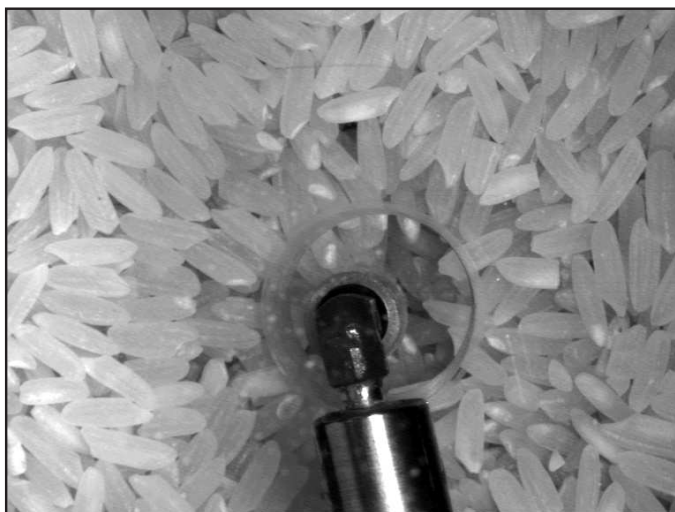


Figura 3.5: Fotografía del mecanismo para realizar la descarga de aire a presión, tomada desde la parte inferior al orificio. La base del silo transparente permite observar el medio granular contenido en el silo (granos de arroz).

una electroválvula (SMC SY5120-6LOU-01F-Q) que se abre y cierra de forma muy rápida. Para ello se usa la salida analógica de un multímetro (HP34970A) gobernado por el ordenador. En una primera inspección se observó que, por encima de cierto umbral, el tiempo durante el cual se sopla y la presión de aire utilizada no afectan significativamente los resultados. Sin embargo, un estudio cuidadoso muestra una pequeña alteración en los mismos al variar las presiones de aire entre 1 y 13 bares. Esta dependencia con la presión será explicada en el capítulo de resultados (capítulo 4). En general, y si no se indica lo contrario, en este trabajo se han usado chorros de aire de  $0,45 \pm 0,10$  segundos de duración con una presión de  $4 \pm 0,5$  bares.

### c) Medida de la duración de la avalancha.

La duración de una avalancha, definida como el tiempo que transcurre desde el instante en que se detiene el chorro de aire a presión y el instante en que cae la última partícula, se mide con la ayuda de un micrófono Valpey-Fisher VP-1093 Pinducer y

un osciloscopio HP54510A.

El micrófono está pegado al tubo de aire comprimido, de modo que detecta el ruido de las partículas, que al caer chocan con él. La señal del micrófono es amplificada y registrada con el osciloscopio. Del osciloscopio la señal se envía al ordenador, donde se usa un programa para analizarla: se detecta el último impacto, se resta la duración del chorro de aire y se obtiene la duración de la avalancha. La resolución es de 0,1 segundos debido, esencialmente, al ruido que se capta en el osciloscopio procedente del resto de aparatos. Además, hay que reseñar que aunque el interruptor se mantiene abierto 0,4 segundos con una precisión muy alta, el tiempo de respuesta de la electroválvula no permite que la duración de la descarga de aire esté controlada con la misma precisión. Se llevó a cabo una serie de 5000 realizaciones con el silo vacío y se encontró que la electroválvula permanece abierta durante  $0,45 \pm 0,10$  segundos.

#### **d) Otros instrumentos empleados.**

Además del tamaño y la duración de la avalancha, también se registraron la temperatura y la humedad ambiente. Para ello se ha utilizado el sensor comercial Rotronic Hygropalm 2. La temperatura y la humedad se almacenan en el ordenador para asegurarnos de que no influyen en la probabilidad de atasco. En nuestro laboratorio la temperatura oscila a lo largo del año entre los 18 y 26 °C y la humedad relativa alcanza valores máximos de 60 % y mínimos de 35 %.

Con el objeto de hallar la velocidad de las partículas a la salida del silo, también se ha utilizado una cámara rápida (Motionscope Redlake, modelo 1105-0003) capaz de grabar hasta a 8000 imágenes por segundo<sup>1</sup>. La cámara se situó perpendicular al eje del silo de modo que la parte superior de la imagen coincidiese con el orificio.

---

<sup>1</sup>Este trabajo se realizó en el CPMOH de la Universidad de Burdeos I.

De esta forma se registraron diversas grabaciones con las partículas cayendo durante los primeros milímetros de su vuelo libre. A continuación, con un programa en Matlab, mediante la técnica de “particle tracking” (seguimiento de partículas) se determinó su posición en cada instante. A partir de estos datos se obtuvo la velocidad de las partículas justo a la salida del orificio.

### 3.3. Medio granular

Se han empleado diversos tipos de granos cuyas principales características se presentan en la tabla 3.3. La mayoría de las partículas tienen forma esférica (grupos del 1 al 9).

Los tamaños de las esferas van desde uno hasta tres milímetros de diámetro. En general, no se han usado partículas de menor tamaño para evitar los problemas que pudieran generar las fuerzas electrostáticas y cohesivas debido a la humedad. En nuestro caso, debido al peso de las partículas y a que no permanecen durante mucho tiempo en posiciones fijas [59], se puede desprestigiar el efecto de estas fuerzas cuando se comparan con el peso. Tampoco han sido utilizadas sistemáticamente partículas de tamaños superiores a los 3 *mm*, porque su elevado peso limita el tamaño máximo de avalancha registrable con la balanza. Además, un tamaño grande de partícula implicaría tener que utilizar silos de mayor diámetro para evitar los efectos de borde.

Para comprobar que el diámetro adimensional  $D$  es el parámetro de control, se han utilizado partículas de diferente diámetro,  $d_P$  (grupos 1, 2 y 3 en la tabla 3.3). Este resultado se había observado en numerosos trabajos previos relacionados con la descarga de silos (ver sección 2.2) pero nunca en el estudio experimental de la probabilidad de atasco en tres dimensiones.

grupo	material	masa (mg)	$\rho$ ( $g/cm^3$ )	$e$	$\theta_i$	$d_s$ (mm)	$d_l$ (mm)	$d_{eq}$
1	vidrio	$1.3 \pm 0.4$	$2.4 \pm 0.1$	$0.97 \pm 0.03$	$26 \pm 1^\circ$			$1.04 \pm 0.01$
2	vidrio	$10.1 \pm 0.3$	$2.2 \pm 0.1$	$0.97 \pm 0.03$	$26 \pm 1^\circ$			$2.06 \pm 0.02$
3	vidrio	$34.7 \pm 0.4$	$2.4 \pm 0.1$	$0.97 \pm 0.03$	$27 \pm 1^\circ$			$3.04 \pm 0.02$
4	vidrio	$11.1 \pm 3.9$	$2.4 \pm 0.1$	$0.97 \pm 0.03$	$29 \pm 1^\circ$			$2.06 \pm 0.24$
5	vidrio	$26.0 \pm 2.1$	$2.5 \pm 0.1$	$0.97 \pm 0.03$	$26 \pm 1^\circ$			$2.70 \pm 0.08$
6	plomo	$46.0 \pm 3.8$	$11.4 \pm 0.5$	$0.49 \pm 0.1$	$25 \pm 1^\circ$			$1.98 \pm 0.06$
7	plomo	$150 \pm 14$	$10.9 \pm 0.5$	$0.49 \pm 0.09$	$27 \pm 1^\circ$			$3.0 \pm 0.1$
8	delrin	$18.9 \pm 0.3$	$1.34 \pm 0.05$	$0.92 \pm 0.02$	$29 \pm 1^\circ$			$3.00 \pm 0.02$
9	acero	$4.0 \pm 0.1$	$7.6 \pm 0.3$	$0.97 \pm 0.03$	$27 \pm 1^\circ$			$1.00 \pm 0.01$
10	bolillos	$6.0 \pm 0.5$	$1.7 \pm 0.2$		$31 \pm 1^\circ$	$1.85 \pm 0.2$	$1.95 \pm 0.02$	$1.9 \pm 0.2$
11	lentejas	$33 \pm 5$	$1.3 \pm 0.5$		$38 \pm 1^\circ$	$2.44 \pm 0.04$	$4.4 \pm 0.4$	$3.6 \pm 0.2$
12	arroz	$16 \pm 3$	$1.2 \pm 0.4$		$42 \pm 1^\circ$	$2.0 \pm 0.2$	$6.6 \pm 0.8$	$3.0 \pm 0.3$

Tabla 3.3. Propiedades de los diferentes tipos de partículas.  $\rho$  es la densidad del material,  $\theta_i$  es el ángulo con el que se desarrolla una avalancha en una pila granular y  $e$  es el coeficiente de restitución de las partículas al chocar contra una placa de vidrio. Para partículas no esféricas  $d_s$  y  $d_l$  son el diámetro menor y mayor respectivamente.  $d_{eq}$  es el diámetro equivalente a una esfera con el mismo volumen que el grano. Los errores mostrados son la desviación estándar obtenida con varias mediciones.

En general, las partículas utilizadas tienen una baja dispersión en tamaño, en torno al 1%. En un caso especial – partículas de vidrio del grupo 4 en la tabla 3.3 – se han usado partículas con dispersión del 12% en su diámetro para analizar la influencia de este parámetro en la probabilidad de atasco.

### Densidad y coeficiente de restitución.

Con el objetivo de estudiar la influencia en la formación de arcos de diversas variables, como el coeficiente de restitución y la densidad de las partículas, se han utilizado esferas fabricadas con diferentes tipos de materiales (grupos 2, 6, 8 y 9 en la tabla 3.3).

Para determinar el coeficiente de restitución de las partículas utilizaremos una aproximación muy simple y fácil de implementar. Si se deja rebotar una partícula contra una superficie lisa, la energía disipada en cada colisión está determinada por la ecuación 2.1.3 (sección 2.1.4):  $E_{c_f} = E_{c_i} e^2$ . Teniendo en cuenta que en cada vuelo, en el punto de altura máxima y velocidad nula, toda la energía cinética de la partícula está almacenada en forma de energía potencial ( $E_p = m g h_i$ ):

$$e^2 = \frac{h_{n+1}}{h_n} \quad (3.3.1)$$

donde  $h_n$  y  $h_{n+1}$  son las alturas que alcanzan la partículas en los vuelos sucesivos  $n$  y  $n + 1$  respectivamente. Como la altura que alcanza una partícula está relacionada con el tiempo de vuelo según  $h = \frac{1}{2} g t^2$ , sustituyendo  $h$  en la ecuación 3.3.1 se obtiene la ecuación 3.3.2 que relaciona los tiempos de vuelo sucesivos  $t_n$ , con el valor del coeficiente de restitución.

$$e = \frac{t_{n+1}}{t_n} \quad (3.3.2)$$

El procedimiento experimental seguido para calcular  $e$  es el siguiente. Desde una altura de 40 cm se deja caer una partícula sobre una placa de vidrio y se registran los impactos con un micrófono. En la figura 3.6 se presenta una señal de las obtenidas.

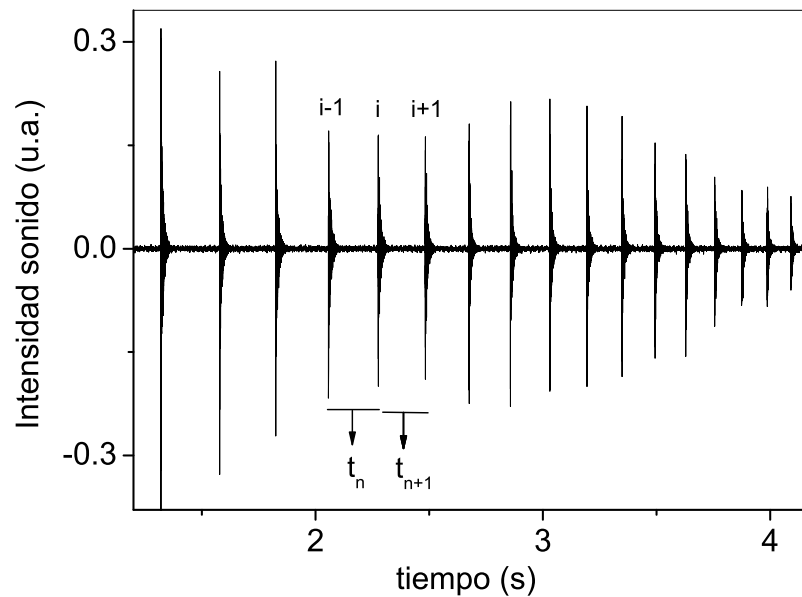


Figura 3.6: Intensidad del sonido detectado por el micrófono en función del tiempo. Con estos resultados se obtiene el instante en el que se producen las colisiones (...  $i - 1$ ,  $i$ ,  $i + 1$ ...) y el tiempo que las partículas están en el aire en cada uno de los vuelos (...  $t_{n-1}$ ,  $t_n$ ,  $t_{n+1}$ ...).

Se halla  $e$  para todas las colisiones, se repite el proceso con varias esferas iguales y se calcula la media y la desviación típica. Los valores de los coeficientes de restitución encontrados se presentan en la tabla 3.3. Nótese que no se ha podido determinar el coeficiente de restitución de las partículas no esféricas. En estos casos el valor de  $e$  depende mucho de cómo se produce el impacto y, en general, cada colisión contra la placa de vidrio es compleja.

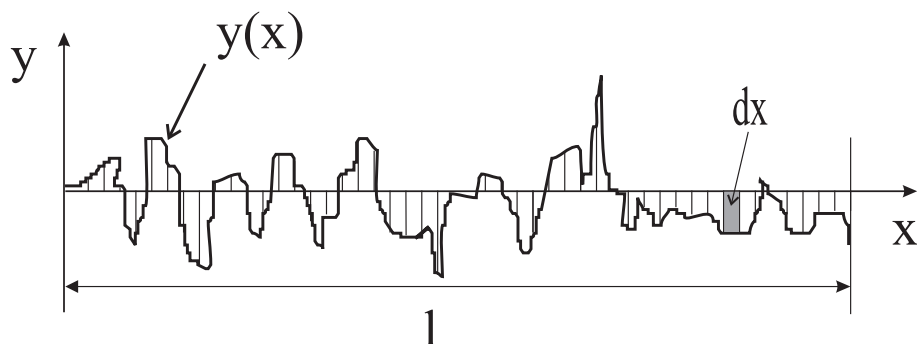


Figura 3.7: Esquema de un perfil de la rugosidad superficial en dos dimensiones.

Se ha calculado el error que se puede cometer en el cálculo de  $e$  debido a la energía que se pierde durante el vuelo de una partícula por fricción con el aire. En el peor de los casos se pierde un 1 % de la energía disipada en la colisión: en ese caso particular habría que sumar un 1 % al valor obtenido de  $e$ .

### Rugosidad de la superficie.

Otra de las características del medio granular que se ha modificado es la rugosidad superficial de las partículas. Se puede definir la rugosidad<sup>2</sup> de una superficie  $R$  como el valor promedio aritmético de las distancias absolutas del perfil  $y(x)$  desde una línea que se toma como  $y = 0$ , dentro de la longitud de medición  $l$  (Figura 3.7):

$$R = \frac{1}{l} \int_0^l |y| dx \quad (3.3.3)$$

Para aumentar la rugosidad de las partículas se han tomado esferas de vidrio del grupo 3 de la tabla 3.3 y se han atacado químicamente de forma sucesiva con ácido fluorhídrico a diversas concentraciones (1 %, 2 %, 5 %, 10 % y 20 % en volumen). Tras

<sup>2</sup>Existen varias definiciones de rugosidad. Por simplicidad se ha escogido la del valor promedio del valor absoluto de  $y$ .



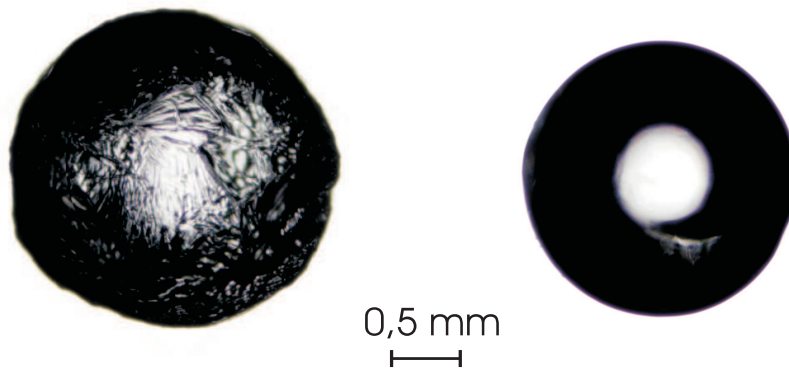


Figura 3.8: A la izquierda, fotografía con un microscopio de contraste de fase de una partícula de vidrio tras el tratamiento con ácido fluorhídrico al 20 % en volumen (grupo 5 en la tabla 3.3). A la derecha, fotografía de una partícula de vidrio sin tratar.

cada tratamiento la rugosidad de las partículas aumenta de forma considerable. Sin embargo, este parámetro ha sido estudiado sólo cualitativamente con una lupa y un microscopio de contraste de fase (figura 3.8). Las partículas del grupo 5 de la tabla 3.3 corresponden a las esferas tras el tratamiento con ácido fluorhídrico al 20 % en volumen.

Es de resaltar que un cambio en la rugosidad de la superficie de un grano no tiene por qué implicar un cambio en la fricción intergranular del medio. Cuantitativamente, uno de los parámetros que suele utilizarse para medir la fricción entre las partículas en un medio granular es el ángulo con el que se desarrolla una avalancha en la superficie ( $\theta_i$ ). El dispositivo utilizado para esta medida consiste en una caja de cartón apoyada sobre un soporte en el que se pega un inclinómetro digital con una resolución de  $0,1^\circ$ . Partiendo de la posición horizontal se va aumentando la inclinación del soporte hasta que se da una avalancha superficial. Se registra el ángulo, se recarga la caja y se repite la operación unas 20 veces.

Se considera que a medida que la fricción del medio granular es mayor,  $\theta_i$  aumenta. En la tabla 3.3 se muestra cómo, pese a que la superficie de las partículas tratadas (grupo 5) es notablemente más rugosa,  $\theta_i$  permanece constante. Además, como se ve, la fricción del medio granular depende de otros parámetros, como el diámetro o la forma de las partículas.

### Forma de la partícula.

Finalmente hemos utilizado partículas de formas no esféricas (grupos 10, 11 y 12 en la tabla 3.3 y figura 3.10). Los granos de pasta – comercialmente se destinan a hacer sopa de ‘bolillos’ – son cilindros con casquetes esféricos en sus extremos (Figura 3.9 y 3.10b). El diámetro de los cilindros es de  $1,85 \pm 0,01 \text{ mm}$  y su altura  $1,95 \pm 0,01 \text{ mm}$ . En primera aproximación se puede considerar que las lentejas (Figura 3.10c) tienen forma lenticular y el arroz (Figura 3.10d) forma de elipsoide de revolución. En las lentejas el radio de revolución es el doble de su espesor y en el arroz su longitud es tres veces mayor que el radio de revolución.

Cuando se trabaja con partículas no esféricas, para obtener  $D$  es necesario determinar el diámetro de las partículas ( $d_P$ ). De entre las diversas posibilidades existentes se ha optado por hallar el volumen de las partículas y asignarles un  $d_{eq}$  que es el diámetro equivalente para una esfera de ese volumen. A partir de  $d_{eq}$  el valor de  $D$  viene determinado por:  $D = d_O/d_{eq}$ . Este parámetro es sólo un indicador cualitativo del tamaño del grano. Los efectos reales de la diferencia en el tamaño de los diámetros en una misma partícula serán estudiados en el futuro.

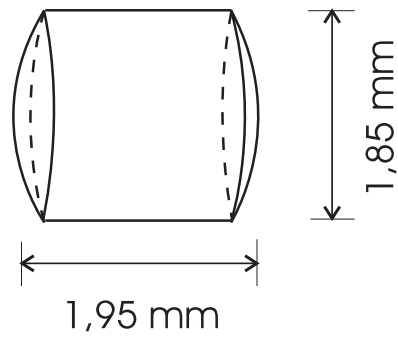


Figura 3.9: Esquema de la forma de los 'bolillos'.

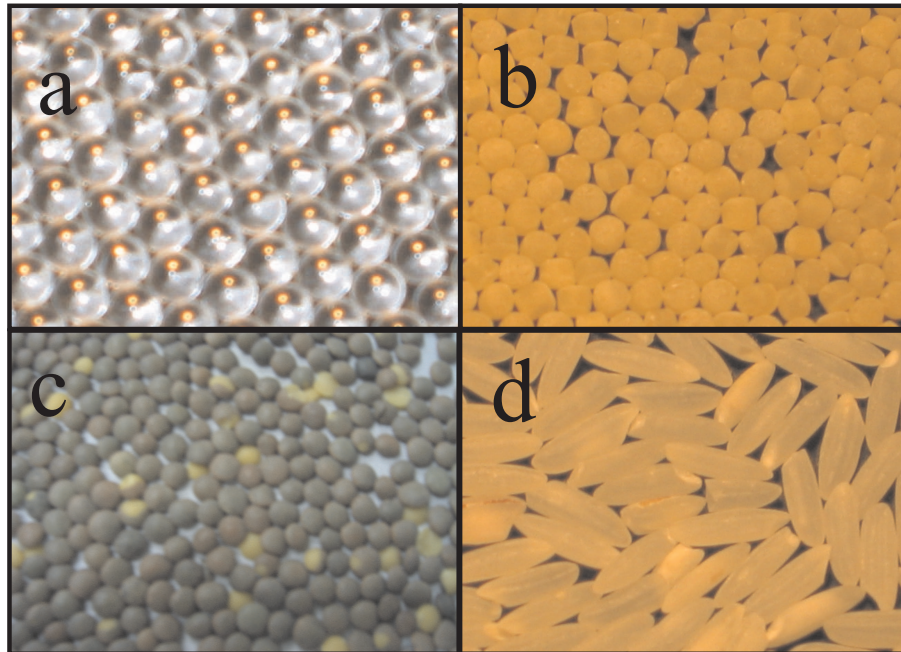


Figura 3.10: Fotografía de las diferentes formas de las partículas utilizadas. (a) Partículas esféricas, (b) granos de pasta, (c) lentejas y (d) arroz.

Una de las principales limitaciones encontradas a la hora de elegir las partículas ha sido su elevado coste <sup>3</sup>. Así, aunque en general el precio de una partícula no suele ser caro, el hecho de que para llenar un silo se necesiten entre  $10^5$  y  $5 \times 10^5$  partículas, hace que la adquisición de algunos tipos no sea factible. En la medida de lo posible, se ha tratado de utilizar granos accesibles en el mercado, como perdigones de plomo (grupos 6 y 7 en la tabla 3.3), ‘bolillos’, lentejas y arroz.

Es oportuno aclarar que la mayoría de los experimentos han sido realizados con esferas de vidrio de baja dispersión en tamaño (grupos 1, 2 y 3). Por ello, cuando no se haga una mención explícita, nos estaremos refiriendo a este tipo de partículas. El resto de partículas se han utilizado solamente para comprobar la influencia de diferentes parámetros en la formación de arcos.

### **Fracción de compactación.**

El tipo de partículas utilizado, así como el sistema de recarga del silo (del que se hablará más adelante), influyen en la fracción de compactación del medio granular.

El método empleado para medir el valor de la fracción de compactación en el interior del silo, aunque simple, es muy reproducible. En primer lugar se toman un gran número de partículas y se vierten, del mismo modo que cuando se carga el silo, en una probeta de las mismas dimensiones que éste. En estas condiciones se mide  $V_a$ , el *volumen total o aparente* ocupado por las partículas. A continuación se calcula  $V_r$ , el *volumen real* que ocupan las partículas. Para ello, se vierte un volumen conocido de agua en la probeta hasta un nivel cualquiera, superior al *volumen aparente*. A este volumen que alcanza el agua se le llamará “volumen enrasado” (Figura 3.11). Para

---

<sup>3</sup>En la página web <http://www.lmgc.univ-montp2.fr/MIDI/club/Listebilles.html> se indica el precio de diferentes tipos de partículas.

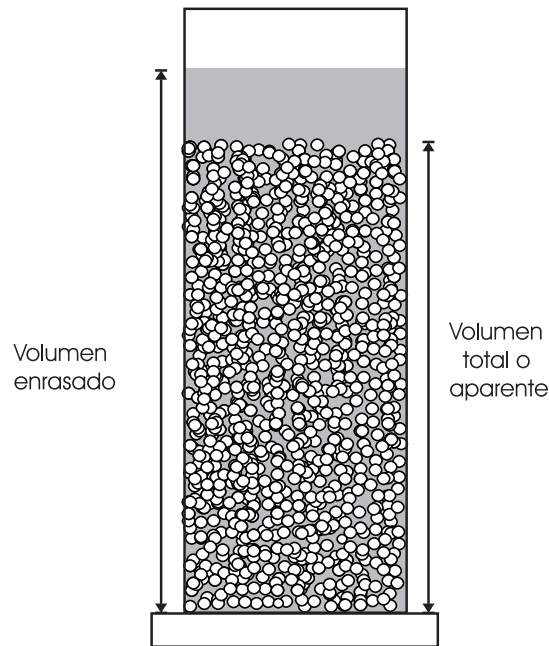


Figura 3.11: Esquema del dispositivo utilizado para medir la fracción de compactación.

saber el *volumen real* que ocupan los granos basta con restar el volumen de agua utilizado del “volumen enrasado”. Cuando se vierte el agua hay que tener mucho cuidado para que no quede aire entre las partículas. Para ello es necesario realizar el proceso lentamente y, en ocasiones, golpear o agitar suavemente la probeta. Finalmente, para obtener la fracción de compactación se divide el *volumen real* que ocupan los granos por el *volumen aparente* (ecuación 2.1.1).

En los experimentos con ‘bolillos’, lentejas y arroz, se ha utilizado silicona en lugar de agua para calcular el *volumen real* que ocupan las partículas. La razón es que el agua podría permear en este tipo de granos con lo que las medidas no serían correctas.

La fracción de compactación se ha medido en numerosas ocasiones. El valor obtenido, prácticamente constante para partículas esféricas y ‘bolillos’, es de  $\phi = 0,59 \pm 0,02$ . Además, como se explicará en la siguiente sección, con estas partículas se desarrolla

un *flujo másico* que nos ha permitido comprobar que el valor de la fracción de compactación no se altera a lo largo de la descarga. La fracción de compactación de las lentejas y el arroz ha sido  $0,59 \pm 0,02$  y  $0,55 \pm 0,02$  respectivamente. Pensamos que con estos materiales  $\phi$  oscila significativamente a lo largo de la descarga porque se ha observado el efecto de “silo quaking” (temblor en silo). Sin embargo, el *flujo interno* que se desarrolla no nos permite, por el momento, cuantificar esta variación.

### 3.4. Procedimiento experimental

Todos los instrumentos de los que se ha hablado hasta el momento están conectados al ordenador a través de los puertos serie y GPIB. El objetivo es que el proceso esté automatizado para poder realizar un gran número de medidas. El diagrama de flujo del programa del ordenador (realizado en C y en Matlab) es como sigue:

- Se rompe el puente que produce el atasco con aire a presión que se dirige hacia el centro del orificio, por su parte inferior. Para ello se cierra un interruptor del multímetro, que hace que se abra la electroválvula durante un pequeño lapso de tiempo (en general 0,45 segundos).
- Desde que cesa el chorro de aire a presión, el sistema permanece en espera hasta que termina la avalancha. Para conocer – aproximadamente – el momento en que la avalancha ha terminado, se toma con el ordenador el peso de la balanza a intervalos de 2 segundos. Cuando dos pesadas consecutivas son iguales, se considera que se ha detenido la caída granos sobre la balanza y, por lo tanto, la avalancha ha terminado.
- Se pesa la masa caída en la avalancha y se convierte a número de granos.

Al mismo tiempo se mide su duración a partir de la señal detectada por el micrófono.

- Una vez calculado el número de granos y la duración de la avalancha, se mide la temperatura y la humedad ambiente que, junto al resto de datos, se registran en un archivo.
- Después de un tiempo de espera, que puede estar entre dos y diez segundos, se repite el proceso.
- Cuando el nivel de los granos cae por debajo de una altura igual a 2,5 veces el diámetro del silo, el programa se detiene para que se recargue el silo. Si el peso de las partículas utilizadas es muy grande es necesario recargar el silo antes de alcanzar el nivel de 2,5 veces el diámetro del silo. La razón es que siempre se tiene que cambiar la caja antes de alcanzar el peso máximo que puede soportar la balanza.

Todo el proceso explicado se lleva a cabo automáticamente excepto la recarga del silo. El método utilizado para la recarga tiene gran importancia ya que, como se explicó en la sección 2.2.4, afecta significativamente al patrón de flujo que se origina en el interior del silo durante la descarga. Por eso siempre se ha tratado de llenar el silo con el método “concéntrico” para obtener un *flujo másico*. El método concéntrico se lleva a cabo vertiendo manualmente el medio granular desde la caja al silo rápidamente. Sólo cuando se utilizaban silos de diámetro pequeño se ha empleado un embudo.

Para observar el tipo de flujo que se da en el interior del silo se han usado dos silos de vidrio transparente. Se ha comprobado que, cuando se usan partículas esféricas,

el flujo es *másico* siempre que la superficie del medio granular esté por encima de un nivel de aproximadamente 1,2 veces el diámetro del silo. Cuando el nivel de las partículas es inferior a este valor se desarrolla un *flujo interno* tal y como ocurre en los trabajos de Z. Zhong en el denominado *flujo mixto* [49].

Para evitar la aparición del *flujo interno*, el silo se recarga siempre antes de que el nivel de los granos sea inferior a 2,5 veces el diámetro del silo. Además, al mantener el nivel del medio granular por encima de 2,5 veces el diámetro del silo, la presión en la base es constante. Tal y como se explicó en la sección 2.1.2, debido al “efecto Janssen” la presión en la base de un silo permanece constante siempre y cuando el nivel de los granos sea superior a más o menos 1,5 veces el diámetro del silo. De este modo también se obtiene un flujo a través del orificio cuyas características no varían con el tiempo (ver sección 2.2.3).

Cuando se han utilizado partículas no esféricas (lentejas y arroz) el procedimiento de llenado ha sido el mismo – llenado concéntrico – desarrollándose, tal y como observaron Baxter y Behringer [53] y Cleary [54] en anteriores trabajos, un *flujo interno*. Para los ‘bolillos’ se ha obtenido un *flujo mixto* como en el caso de las esferas.

Se ha descrito hasta aquí el sistema experimental utilizado. Para ello se han explicado los equipos empleados así como las razones por las que éstos fueron elegidos. También se han presentado los diferentes tipos de medio granular con los que se ha tratado de obtener pistas sobre los mecanismos físicos que gobiernan la formación de arcos. Por último se ha explicado el procedimiento experimental que se ha seguido, haciendo especial hincapié en aquellas acciones – como la recarga del silo – que pueden afectar significativamente al proceso de atasco.



# Capítulo 4

## Resultados

En este capítulo se mostrarán los resultados obtenidos. En primer lugar se explicará con detalle la distribución de tamaños de las avalanchas y se propondrá un modelo simple que ayuda a su interpretación. Seguidamente se expondrán los resultados encontrados para diferentes diámetros adimensionales del orificio de salida y se mostrará la existencia de un tamaño crítico por encima del cual el flujo no se interrumpe. Estos mismos datos se presentarán de un modo alternativo, utilizando la probabilidad de atasco. A continuación se explicará la influencia de las propiedades del grano en el tamaño de las avalanchas. Finalmente se mostrarán las medidas del flujo a través del orificio.

### 4.1. Tamaños de las avalanchas

La primera elaboración de los datos experimentales consiste en realizar una estadística del tamaño de las avalanchas. Se define el tamaño de una avalancha ( $s$ ) como el número de partículas que caen entre dos atascos consecutivos. En la figura 4.1 se ha representado el tamaño de avalanchas sucesivas para un determinado valor de  $D$ .

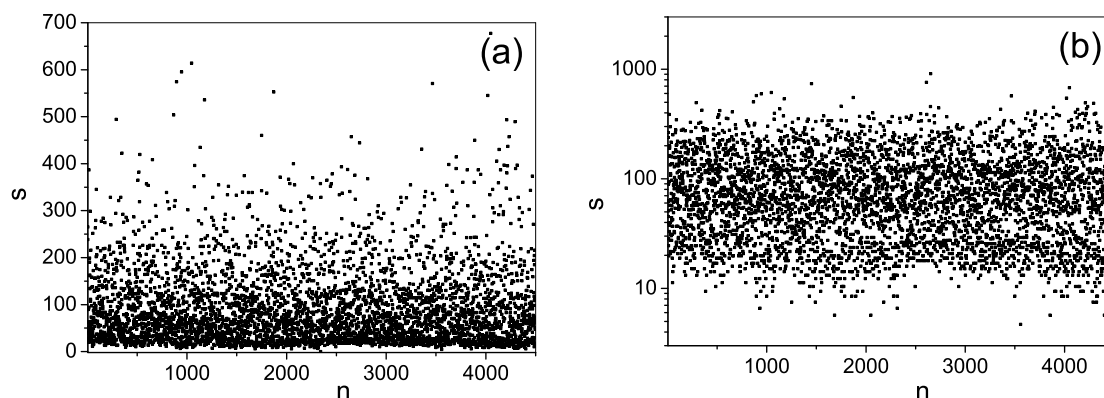


Figura 4.1: a) Tamaño de las avalanchas sucesivas obtenidas en una misma realización para  $D = 2,43$ . El diámetro del orificio de salida ( $d_O$ ) es  $5 \text{ mm}$  y las partículas utilizadas tienen  $2,06 \text{ mm}$  de diámetro (grupo 2 de la tabla 3.3). En el eje de las ordenadas se representa el tamaño  $s$  de las avalanchas, siendo el índice  $n$  el puesto correlativo en que aparecen. b) La misma gráfica en escala semilogarítmica.

En el eje de las ordenadas se representan los tamaños, y en las abscisas el índice  $n$  indica el puesto correlativo en que aparecen. Como puede observarse, la distribución de tamaños de las avalanchas puede llegar a ser muy grande: en la figura, para  $D = 2,43$ , se obtienen avalanchas que difieren en más de dos órdenes de magnitud. Representando los datos en escala semilogarítmica (Figura 4.1b) se obtiene una distribución homogénea de los mismos puesto que, como se explicará más adelante, la función de densidad de probabilidad sigue una ley que ajusta bien a una exponencial.

Un primer resultado es que no existe correlación entre el tamaño de avalanchas sucesivas. Hemos realizado un diagrama de primer retorno de la secuencia, en el que se representa el tamaño de cada una de las avalanchas frente al tamaño de la avalancha anterior (Figura 4.2a). Debido a que las avalanchas pequeñas son mucho más probables que las grandes, la observación de esta figura no permite valorar si existe correlación. Por ello, se han representado los mismos datos en escala logarítmica

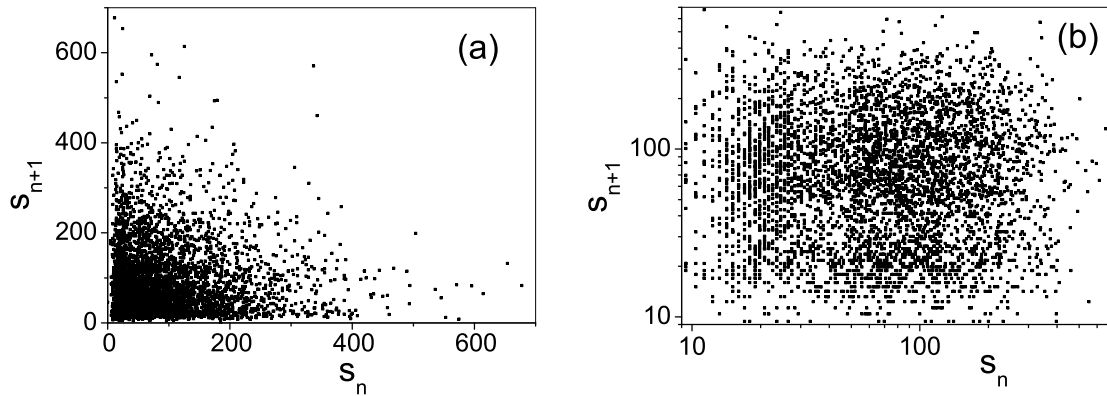


Figura 4.2: Diagrama de primer retorno para las avalanchas mostradas en la gráfica 4.1. En el eje de las ordenadas se representa el tamaño de una avalancha,  $s_{n+1}$ , y en el eje de las abscisas el tamaño de la avalancha anterior,  $s_n$ . En la figura (a) el diagrama de primer retorno está en escala lineal y en la figura (b) en escala logarítmica.

(Figura 4.2b), obteniéndose una nube de puntos homogéneamente distribuidos, signo de que no existe correlación entre los tamaños de las avalanchas.

#### 4.1.1. Histograma. Distribución de los tamaños de las avalanchas

El siguiente paso consiste en describir la distribución de los tamaños de las avalanchas. Para ello se construye un histograma en el que se representa la probabilidad de que ocurran avalanchas de determinado tamaño.

El procedimiento para construir un histograma es el siguiente. En primer lugar se miden experimentalmente tantas avalanchas como sea necesario. Típicamente en cada experiencia se obtienen unas 3000 avalanchas, manteniéndose todas las variables fijas. Este número de sucesos permite construir histogramas de hasta 100 barras (en inglés *bins*) con una resolución aceptable. En ocasiones, para aumentar la resolución en los resultados, se han llegado a medir hasta  $3 \times 10^4$  avalanchas.

Para un  $D$  fijo, si el tamaño de la avalancha máxima ( $s_{max}$ ) no es mayor de unas 100 partículas, se seleccionan los intervalos para que cada barra corresponda a una partícula. De este modo las barras, de anchura  $s = 1$ , estarán centradas en  $s = 1, 2, 3, \dots, s_{max}$ .

Si  $s_{max}$  es mayor de 100 partículas se selecciona la anchura de las barras para que su número no sea superior a 100: el histograma siempre tiene entre 50 y 100 barras. Solamente una condición es impuesta en su elección: la anchura de cada barra debe corresponder a un número entero de partículas. En algunos casos, si se quiere disminuir la anchura de las barras para mejorar su resolución, se aumenta el número de avalanchas obtenidas para poder incrementar el número de barras. Una vez se ha determinado la posición y tamaño de las barras se cuenta el número de avalanchas que caen en cada intervalo. Con estas premisas se obtiene un histograma como el que se muestra en la figura 4.3, donde se representa el número de avalanchas obtenido para cada tamaño  $s$ .

Uno de los problemas que se han encontrado cuando se construye un histograma está relacionado con la discretización de los pesos: las mediciones de la balanza son siempre números discretos múltiplos de 0,01 gramos. Normalmente el número de partículas obtenido al dividir el peso de cada avalancha por el peso de una partícula es un número no entero, debido al error acumulado respecto al peso medio de las partículas. Al redondear estos valores aparecen saltos discretos porque a cada tamaño de avalancha  $s$  le corresponde un número diferente de intervalos de discretización de la balanza. En la figura 4.4a se muestra el peso obtenido para diferentes avalanchas que sólo puede tomar valores múltiplos de 0,01 gramos. A la vez, con líneas rojas, se marcan los límites inferior y superior que se utilizan para asignar cada  $s$ . Se observa

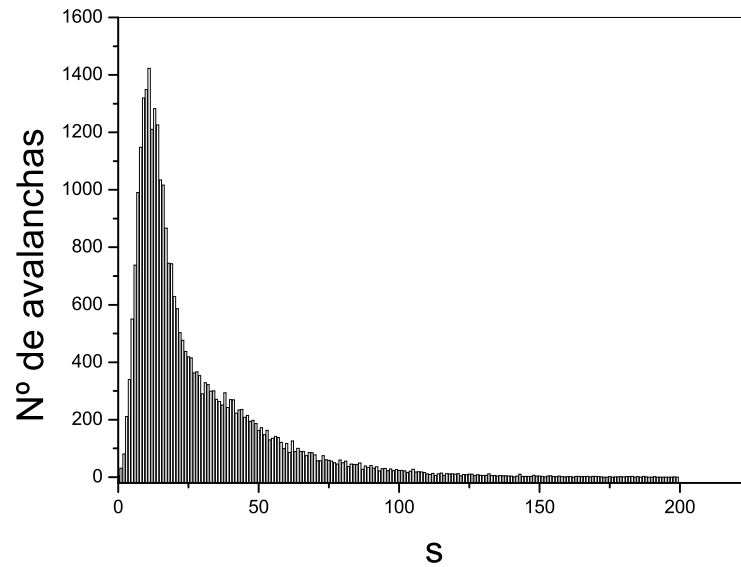


Figura 4.3: Número de veces que se obtiene cada uno de los tamaños de avalancha para  $D = 2,43$ . Este histograma está construido con los resultados de la figura 4.1.

que a los  $s$  pares les corresponden cuatro pasos de la balanza (cuatro filas de los valores discretos del peso). Sin embargo, a los valores impares de  $s$ , les corresponden únicamente tres valores discretos del peso. Este problema de resolución de la balanza hace que en el histograma de la probabilidad aparezcan oscilaciones: la probabilidad de obtener avalanchas pares siempre parece mayor que la de las impares (Figura 4.5a).

Para solucionar este problema se ha utilizado la técnica de “*dithering*” [60], que consiste en añadir ruido a los resultados de los pesos obtenidos. El ruido añadido es un ruido blanco de amplitud correspondiente a tamaños de avalancha entre  $s = -1$  y  $s = 1$ . Así se evita la discretización de los pesos y los saltos en la probabilidad. Tras añadir ruido, los resultados mostrados en la figura 4.4a quedan tal y como se muestra en la figura 4.4b. En la figuras 4.5a y 4.5b se muestra el histograma obtenido con los datos antes y después de añadir ruido: el problema debido a la discretización se ha eliminado mediante la técnica de “*dithering*”.

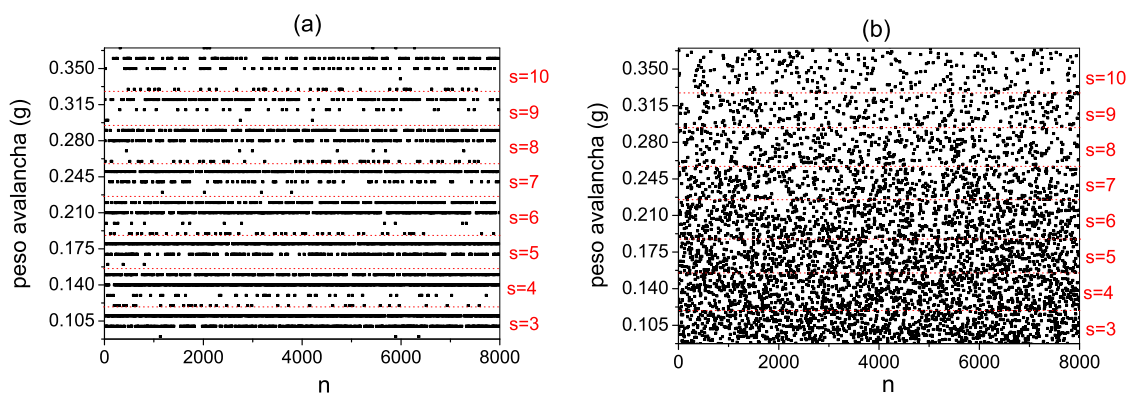


Figura 4.4: a) Peso de las avalanchas sucesivas obtenidas en una misma realización para  $D = 2,01$ . El diámetro del orificio de salida ( $d_O$ ) es  $6,10 \text{ mm}$  y las partículas utilizadas tienen  $3,04 \text{ mm}$  de diámetro (grupo 3 de la tabla 3.3). Con líneas discontinuas rojas se muestra el número de partículas  $s$  que corresponde a cada pesada. Sólo se han representado los pesos que corresponden a  $s$  entre 3 y 10. En la figura (b) se muestran los mismos resultados tras añadir un ruido blanco al peso obtenido para cada avalancha.

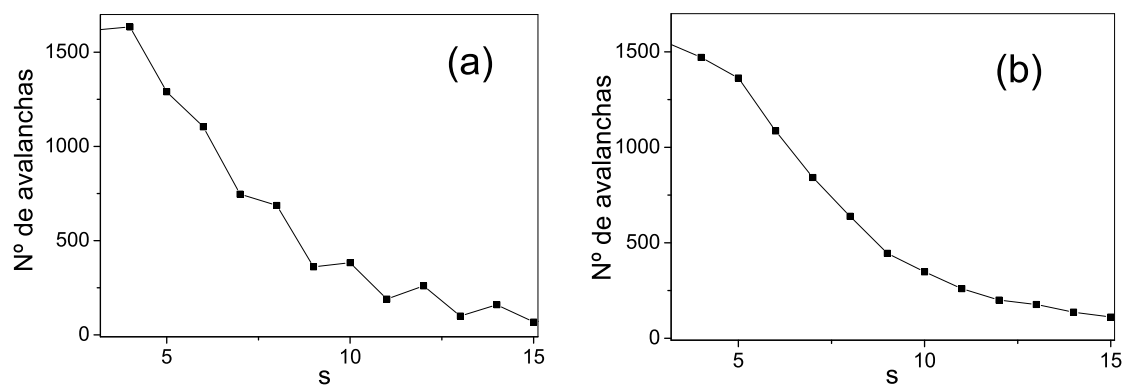


Figura 4.5: Histogramas obtenidos con los datos de la figuras 4.4a (a) y 4.4b (b).

La discretización sólo es importante para pequeños valores de  $D$ , cuando la anchura de las barras es una partícula. Cuando la anchura es dos – o cualquier número par – se compensan los errores. Si la anchura es un número impar mayor que uno, el error originado por la discretización se compensa parcialmente y no es importante.

Con el objeto de encontrar la función de densidad de probabilidad de los tamaños de avalancha, se debe normalizar el histograma. La normalización se realiza de modo que el área bajo la curva del histograma sea la unidad. Para ello, hay que tener en cuenta que la anchura de las barras puede ser distinta de uno. El histograma final, que resulta después de todo este proceso, es el que se representa en la figura 4.6.

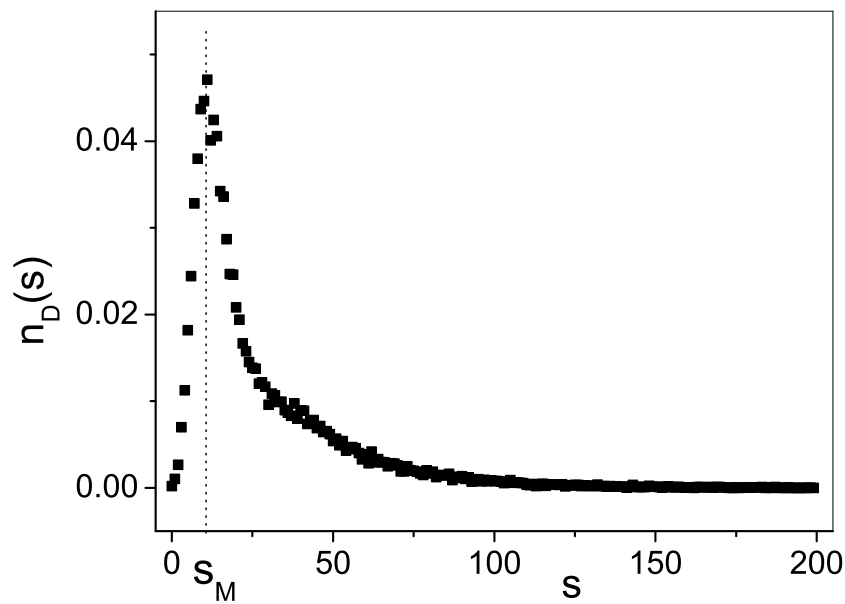


Figura 4.6: Probabilidad de encontrar una avalancha  $n_D(s)$  en función de su tamaño  $s$ . Este histograma se ha obtenido con los resultados mostrados en la figura 4.1 ( $D = 2,43$ ). El tamaño de la barra de error es, en todo los casos, igual o inferior al tamaño de los símbolos. La línea punteada indica el tamaño de la avalancha  $s_M$  que ocurre con mayor probabilidad.

En el histograma se observan dos regiones diferentes. Si definimos  $s_M$  como la moda del tamaño de las avalanchas (el tamaño de avalancha que tiene mayor probabilidad de ocurrir) observamos que en torno a este valor se produce un cambio en la forma de la densidad de probabilidad. En la figura 4.6 se ha trazado una línea de puntos vertical en  $s = s_M$ . Para avalanchas de tamaño menor a  $s_M$  ( $s < s_M$ ) la probabilidad crece con  $s$ . Para  $s > s_M$  la probabilidad de obtener una avalancha decrece al aumentar  $s$ . Este tipo de distribuciones son muy comunes en los medios granulares. En simulaciones numéricas, Radjai y su grupo [61] y Snoeijer y su grupo [62], encontraron el mismo tipo de histogramas para la distribución de fuerzas en el interior de un medio granular. Una conjetura que no ha podido ser justificada [63] es que la distribución en tamaño de las avalanchas debe coincidir con la distribución de fuerzas. Parece que ese es el caso.

#### 4.1.2. Decrecimiento exponencial

Se ha encontrado que en todos los histogramas obtenidos con granos esféricos, independientemente del valor de  $D$ , el decrecimiento de la probabilidad de obtener una avalancha es exponencial. El mejor método para observar el decrecimiento exponencial es representar esta zona del histograma en escala semilogarítmica: los resultados se ajustan a una recta (Figura 4.7). Para un  $D$  constante, el valor de la exponencial no se ve alterado cuando se modifican variables como el diámetro de las partículas, el diámetro del silo, la presión del chorro de aire con el que se rompen los arcos o la duración del mismo. Como se observa en la figura los tamaños de las barras de error sólo son importantes para valores pequeños de  $n_D(s)$ . A partir de ahora, como los errores son similares en todos los histogramas, no se representarán para facilitar la observación de los resultados.



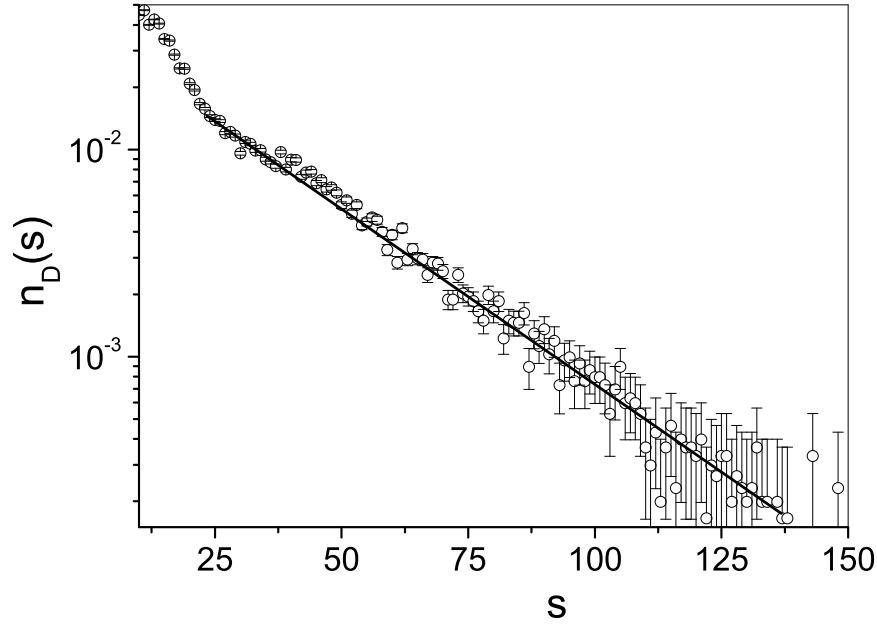


Figura 4.7: Probabilidad de encontrar una avalancha  $n_D(s)$  en función de su tamaño  $s$  en escala semilogarítmica para  $s > s_M$ . La línea continua negra es una guía visual para apreciar que los puntos se ajustan a una recta. Los datos son los mismos que los mostrados en la figura 4.6 ( $D = 2,43$ ).

### Modelo teórico

Una serie de eventos que den lugar a una densidad de probabilidad con un decrecimiento exponencial es un indicio muy fuerte de que el proceso está descorrelacionado. Llamemos  $p$  a la probabilidad de que un grano pase a través del orificio, siendo por tanto  $1 - p$  la probabilidad de que lo atasque. Si se considera que  $p$  es constante para los diferentes granos,  $n_D(s)$  – la probabilidad de obtener una avalancha de tamaño  $s$  – es el resultado de multiplicar  $s$  veces la probabilidad de que un grano pase (esto es,  $p^s$ ) y una vez la probabilidad de que un grano atasque el orificio (esto es,  $1 - p$ ). Así la distribución de tamaños de las avalanchas viene dada por:

$$n_D(s) = p^s (1 - p) \quad (4.1.1)$$

Aplicando logaritmos a ambos miembros de la ecuación:

$$\log(n_D(s)) = s \log(p) + \log(1 - p) \quad (4.1.2)$$

La ecuación 4.1.1 reproduce perfectamente el decrecimiento exponencial ajustando un único parámetro,  $p$ . Este modelo, basado en un modelo de percolación unidimensional [64], tiene algunas implicaciones claras que ayudan a comprender mejor los resultados obtenidos:

- El modelo sólo es válido si la probabilidad de que un grano pase a través del orificio es independiente de la de su vecino. Alternativamente, en caso de que exista cierta dependencia, ésta debe ser constante. De ser así,  $p$  correspondería al valor medio de la probabilidad de atasco de todas las partículas. Si esta condición no se cumple, no se puede considerar a cada grano independientemente de su vecino y el modelo carece de sentido [65].
- El hecho de que aparezca el decrecimiento exponencial indica que la probabilidad de que un grano se atasque ( $1 - p$ ) es constante a lo largo de toda la avalancha. Para avalanchas diferentes, con idénticas condiciones experimentales,  $1 - p$  también debe ser constante. La excepción a esta regla es la primera parte del histograma: para avalanchas menores que  $s_M$  no hay decrecimiento exponencial y el modelo no es válido.
- La pendiente de la recta que aparece en la gráfica en escala semilogarítmica (Figura 4.7) está determinada por  $p$ . De la ecuación 4.1.2 se obtiene que esta pendiente es  $\log(p)$ .

Además, puesto que el decrecimiento exponencial existe independientemente de  $D$ , se puede afirmar que este modelo es válido para cualquier  $D$ . Cambiando  $D$  sólo se modifica el exponente del decrecimiento exponencial y por lo tanto  $p$ . La probabilidad de que una partícula pase por el orificio sin atascarlo, crece con  $D$ .

### 4.1.3. Avalanchas pequeñas

La forma de la primera parte del histograma, cuando  $s < s_M$ , no se comprende tan bien como el decrecimiento exponencial, y por el momento no se ha encontrado ninguna argumentación convincente para explicarla.

En principio, como se muestra en la figura 4.8, parece que la probabilidad crece con una ley de potencias, ya que se puede ajustar bien a una recta cuando se representa en escala logarítmica. Esta afirmación debe ser confirmada porque, por el momento, no es posible encontrar esta ley de potencias en una región de valores de  $s$  mayor que una década.

Un problema que se ha encontrado en esta zona del histograma y que ha suscitado una gran controversia es si se deben tener en cuenta las avalanchas de tamaño cero. En principio se pensó en excluir las avalanchas con  $s = 0$ . Se creía que si no caían partículas por el orificio era porque no se había destruido el puente. En consecuencia, si tenemos en cuenta la definición de tamaño de avalancha (número de partículas que caen entre dos atascos consecutivos), las avalanchas de tamaño cero no deberían ser consideradas. Sin embargo, una exploración visual del fenómeno nos ha permitido observar que el puente se rompe, pero se forma otro antes de que caiga la primera partícula. Consecuentemente debemos considerar que se ha producido una “avalancha”, aunque el atasco se produzca sin que caiga ninguna partícula.

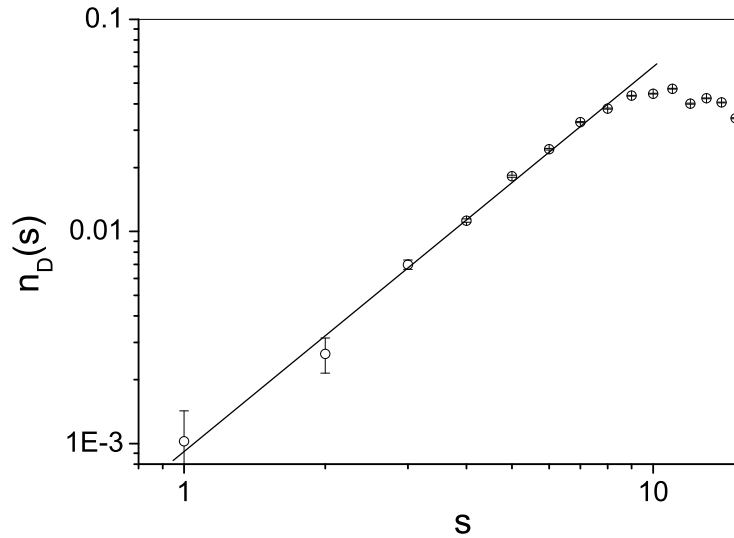


Figura 4.8: Probabilidad de encontrar una avalancha  $n_D(s)$  en función de su tamaño  $s$  en escala logarítmica para  $s < s_M$ . La línea continua negra es un ajuste lineal que indica que es posible que los puntos sigan un crecimiento potencial. Los resultados son los mismos que los mostrados en la figura 4.6 ( $D = 2,43$ ). Nótese que el valor de  $n_D(s)$  para  $s = 0$  no aparece debido a que se han representado los resultados en escala logarítmica.

Una de las características más importantes del crecimiento de  $n_D(s)$  cuando  $s < s_M$  es que depende fuertemente de  $D$ . Se pueden diferenciar tres situaciones diferentes según el valor de  $D$ .

Cuando  $D$  es muy pequeño (por ejemplo  $D < 1,5$ ) la moda se da para avalanchas de tamaño cero ( $s_M = 0$ ). Si esto ocurre no existe el crecimiento potencial (Figura 4.9a).

Para  $D$  intermedios, cuando  $s_M$  toma valores entre 10 y 20 partículas, el crecimiento de  $n_D(s)$  se observa bastante bien (Figura 4.8). No obstante, para tener una buena resolución en los resultados es necesario obtener un gran número de avalanchas.

Cuando  $D$  es muy grande (por ejemplo  $D > 3$ ) no podemos observar la primera parte del histograma por falta de resolución. Para estos valores de  $D$  el tamaño de las

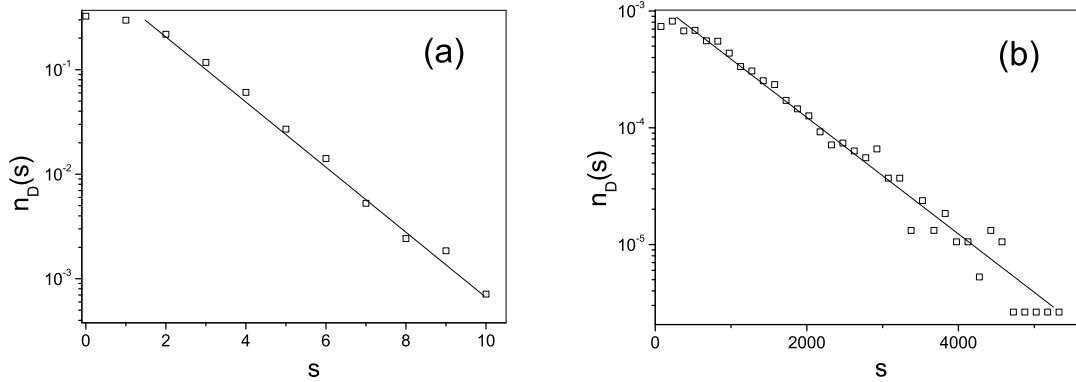


Figura 4.9: Dos ejemplos de histogramas en los que no se observa bien el crecimiento de  $n_D(s)$ . En (a), para  $D = 1,41$ , no existe crecimiento porque  $s_M = 0$ . En (b), para  $D = 3,55$ , si el crecimiento existe, no se observa por un problema de resolución ya que cada barra tiene 150 partículas de anchura.

avalanchas es muy grande y, como se ha explicado anteriormente, el histograma tiene que hacerse con barras (*'bins'*) de varias partículas. Por esta razón, toda la parte en la que  $n_D(s)$  crece puede quedar incluida en la primera barra. En la figura 4.9b se muestra un histograma donde la anchura de la barra es 150 partículas. Si existe, la parte en la que  $n_D(s)$  crece queda oculta, por construcción, en la primera barra. Para tratar de resolver este problema se han construido histogramas con la anchura de las barras en escala logarítmica, pero aún así no se consiguió un resultado suficientemente satisfactorio. La única solución posible para este problema es incrementar significativamente el número de avalanchas obtenidas para aumentar la resolución y poder reducir la anchura de las barras. Por el momento se ha descartado esta opción por ser muy laboriosa. Como ejemplo, para obtener la curva de la figura 4.8 se midieron  $3 \times 10^4$  avalanchas.

La distribución de probabilidades  $n_D(s)$  cuando  $s < s_M$  es muy sensible a variables como el diámetro de las partículas ( $d_P$ ) y el diámetro del silo ( $\varphi$ ) que, como se ha

explicado en la sección anterior, no afectan al decrecimiento exponencial.

Todos los factores mencionados hasta ahora hacen que no se comprenda muy bien esta zona del histograma. Sin embargo, usando un disco transparente en la base del silo, la observación visual nos hace pensar que la causa de este crecimiento de  $n_D(s)$  cuando  $s < s_M$  es la que se expone a continuación. Cuando se rompe un puente existe un número mínimo de partículas que caen a través del orificio: es de suponer que la mayor parte de las partículas que estaban formando el puente caigan sin formar un atasco. Creemos que esto se debe a que la perturbación inicial (mediante el chorro de aire) crea un estado transitorio cuyas características son notablemente diferentes a las del flujo estacionario de partículas que se alcanza posteriormente a lo largo de la avalancha. Debido a esta perturbación inicial, durante los primeros instantes de cada avalancha, la fracción de compactación (ver sección 2.1.1) es menor que en el resto de la avalancha. De ser así, no es sorprendente que la probabilidad de atasco sea menor durante estos primeros instantes. Lo cual repercutiría en los valores obtenidos para  $n_D(s)$  en esta zona, que son inferiores a los que se obtendrían si el fenómeno del estado transitorio no existiese.

Esta hipótesis se apoya en otra observación: la influencia de la presión del chorro de aire en la primera parte del histograma (para  $s < s_M$ ). Se han llevado a cabo diferentes medidas manteniendo  $D$  constante y modificando la presión del aire comprimido entre 1 y 13 bares. Los resultados obtenidos en la zona del decrecimiento exponencial son esencialmente los mismos, independientemente del valor de la presión. Sin embargo, para  $s < s_M$  el histograma varía con la presión como se muestra en la figura 4.10. Al aumentar la presión parece que la curva potencial (una recta en

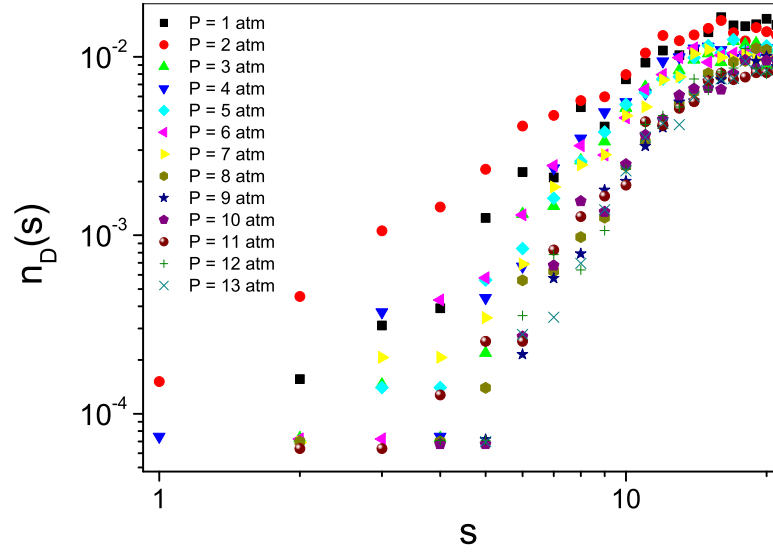


Figura 4.10:  $n_D(s)$  en función de  $s$  en la zona donde  $s < s_M$ , en escala logarítmica, para diferentes valores de la presión del chorro de aire. El tamaño de las barras de error (que no se muestra para facilitar la observación de los resultados) es similar al mostrado en la figura 4.8. Se ha escogido  $D = 2,96$  para poder apreciar al menos una década de  $s$  con una resolución aceptable.

escala logarítmica) se desplaza hacia la derecha: disminuye la probabilidad de encontrar avalanchas pequeñas a medida que aumenta la presión del chorro de aire. Este resultado está en buen acuerdo con la hipótesis del estado transitorio. Al aumentar la presión, en principio, se disminuye la fracción de compactación durante el estado transitorio y disminuye la probabilidad de encontrar avalanchas pequeñas.

Esta zona del histograma no ha sido mostrada con anterioridad en la descarga de silos. De hecho, en algunos trabajos, como en el de Manna [25], no se ha observado ni siquiera para  $D$  intermedios (ver figura 2.8 en la sección 2.2.1). En estas simulaciones los arcos se rompen eliminando una de las dos partículas del puente que están en contacto con la base del silo. Por ello, en el caso de que existiese, el estado transitorio sería mucho más corto. Además, este peculiar sistema de desatasco origina que el

número de avalanchas de una partícula sea mayor que en nuestro experimento: al eliminar una partícula de la base del puente es mucho más probable que se forme otro arco sin que caiga ninguna otra partícula que fluidizando el medio granular mediante un chorro de aire.

#### 4.1.4. Tamaño característico de la avalancha

Como se ha explicado en la sección 4.1.2 el decrecimiento exponencial está presente en todos los histogramas obtenidos con esferas, independientemente del valor de  $D$ . Al aumentar  $D$  aumenta el valor de  $p$ : la pendiente de la recta obtenida en escala semilogarítmica es más pequeña. En otras palabras, al aumentar  $D$  aumenta la probabilidad de encontrar avalanchas de tamaño grande.

Los diferentes histogramas abarcan varios órdenes de magnitud en los tamaños de avalancha (ver figura 4.9). Para comparar histogramas para distintos  $D$ , se necesita una escala. El objetivo es reducir (en inglés ‘*rescale*’) los tamaños de las avalanchas dividiéndolos por un parámetro característico. Es habitual utilizar la avalancha media  $\langle s \rangle$  de cada histograma como parámetro característico [61]. Así, los tamaños de avalancha reducidos se obtienen dividiendo los valores de  $s$  de cada histograma con la avalancha media  $\langle s \rangle$  correspondiente:

$$\langle s \rangle = \frac{\sum_{n=1}^n s}{n} \quad (4.1.3)$$

Los resultados obtenidos para  $D$  desde 1,74 hasta 3,88 se muestran en la figura 4.11. Excepto en la zona donde  $s < s_M$ , todos los histogramas colapsan en uno solo: son todos iguales con la única diferencia del valor de  $\langle s \rangle$  para cada uno de ellos. Expresado de otro modo, los exponentes de las exponenciales reducidas son los mismos



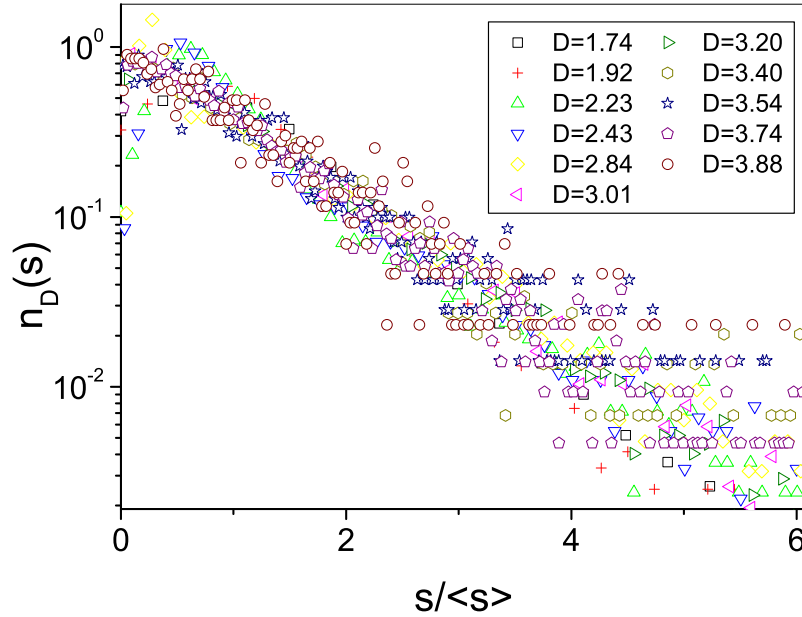


Figura 4.11: Histogramas reducidos para diferentes  $D$  desde 1,74 hasta 3,88. En cada histograma se ha reducido el tamaño de la avalancha  $s$  con la avalancha media  $\langle s \rangle$ .

independientemente de  $D$ . Si se tiene en cuenta que el peso de la primera parte del histograma en el conjunto del mismo es poco significativo, estamos en condiciones de afirmar que cada histograma queda caracterizado con un solo parámetro: la avalancha media  $\langle s \rangle$ .

De aquí en adelante a este tipo de histogramas, en los que se utiliza el tamaño de avalancha reducido, se los denominará “histogramas reducidos”.

En esta sección se han presentado los resultados experimentales obtenidos para la densidad de probabilidad de los tamaños de las avalanchas. Estos resultados muestran claramente la existencia de dos regiones. La primera se da para avalanchas menores que la moda y se observa que  $n_D(s)$  crece con  $s$ . Se ha propuesto que este comportamiento puede deberse a la existencia de un estado transitorio con propiedades

distintas a las del flujo estable que se alcanza posteriormente. Este extremo no se ha podido comprobar. Para avalanchas mayores que la moda se ha obtenido un decrecimiento exponencial de  $n_D(s)$  con  $s$ . Este comportamiento tiene su origen en una probabilidad constante de paso de las partículas durante toda la avalancha. Además, se ha encontrado que los histogramas pueden caracterizarse con un solo parámetro: el tamaño medio de la avalancha  $\langle s \rangle$ . Alternativamente se pueden caracterizar los decrecimientos exponenciales con otro parámetro: la probabilidad de que un grano pase a través del orificio  $p$ . Como se explicará más adelante, aunque tienen significado diferente, ambos parámetros están estrechamente relacionados. En las siguientes secciones se presentarán los resultados de  $\langle s \rangle$  y  $p$  para diferentes valores de  $D$ .

## 4.2. Diámetro crítico

Una vez caracterizado cada uno de los histogramas con la avalancha media correspondiente, es importante conocer su dependencia con  $D$ . En la figura 4.12a se muestran los resultados experimentales obtenidos con esferas de vidrio (series 2 y 3 en la tabla 3.3) para 50  $D$  diferentes.

Una de las cuestiones más interesantes de la descarga de silos por gravedad es si existe un tamaño del orificio de salida por encima del cual no se producen atascos. Si esto fuese así se podría considerar la posibilidad de que en ese punto se de una transición de fase – en el sentido termodinámico de la palabra – entre un estado “atascado” y un estado “no atascado”. En el estado “atascado” el flujo de partículas es un estado metaestable ya que antes o después se producirá un atasco. Sin embargo, en principio nada hace pensar que no se puedan formar puentes de todos los tamaños. Por lo tanto, por muy grande que sea el orificio de salida, cabría esperar que si se

espera el tiempo suficiente, se forme un arco que origine un atasco. La existencia de un tamaño crítico contradice esa intuición.

Una de las características de las transiciones de fase es que existe alguna magnitud que diverge siguiendo una ley de potencias a medida que el parámetro de control se acerca al punto crítico. En este caso se ha encontrado que los tamaños medios de las avalanchas se pueden ajustar mediante una ley de potencias que diverge a medida que  $D$  se acerca a un diámetro crítico ( $D_c$ ) por encima del cual el sistema no se atasca:

$$\langle s \rangle = \frac{C}{(D_c - D)^\gamma} \quad (4.2.1)$$

que aplicando logaritmos:

$$\log \langle s \rangle = \log C + \gamma \log\left(\frac{1}{D_c - D}\right) \quad (4.2.2)$$

donde  $\gamma$  es el exponente con el cual diverge la ley de potencias y  $C$  es una constante igual al valor de  $\langle s \rangle$  cuando  $D_c - D = 1$ . Para partículas de vidrio esféricas el mejor ajuste se da para  $\gamma = 6,9 \pm 0,2$ ,  $C = 9900 \pm 100$  y  $D_c = 4,94 \pm 0,03$  (figura 4.12a).

Para asegurarnos de que el ajuste con la ecuación 4.2.1 es correcto, se ha representado  $\langle s \rangle$  en función de  $\frac{1}{(D_c - D)}$  en escala logarítmica. Hay que destacar que el ajuste con la ley de potencias es válido para todo  $D$ . En general, esto no ocurre en las transiciones de fase, ya que el ajuste se da únicamente para valores cercanos al punto crítico. Además, el valor del coeficiente de la ley de potencias ( $\gamma = 6,9 \pm 0,2$ ) es bastante elevado para lo que suele ser habitual en este tipo de divergencias.

El valor obtenido para el diámetro crítico está en el límite inferior del intervalo predicho en trabajos previos, donde se suponía para  $D_c$  un valor entre cinco y diez.

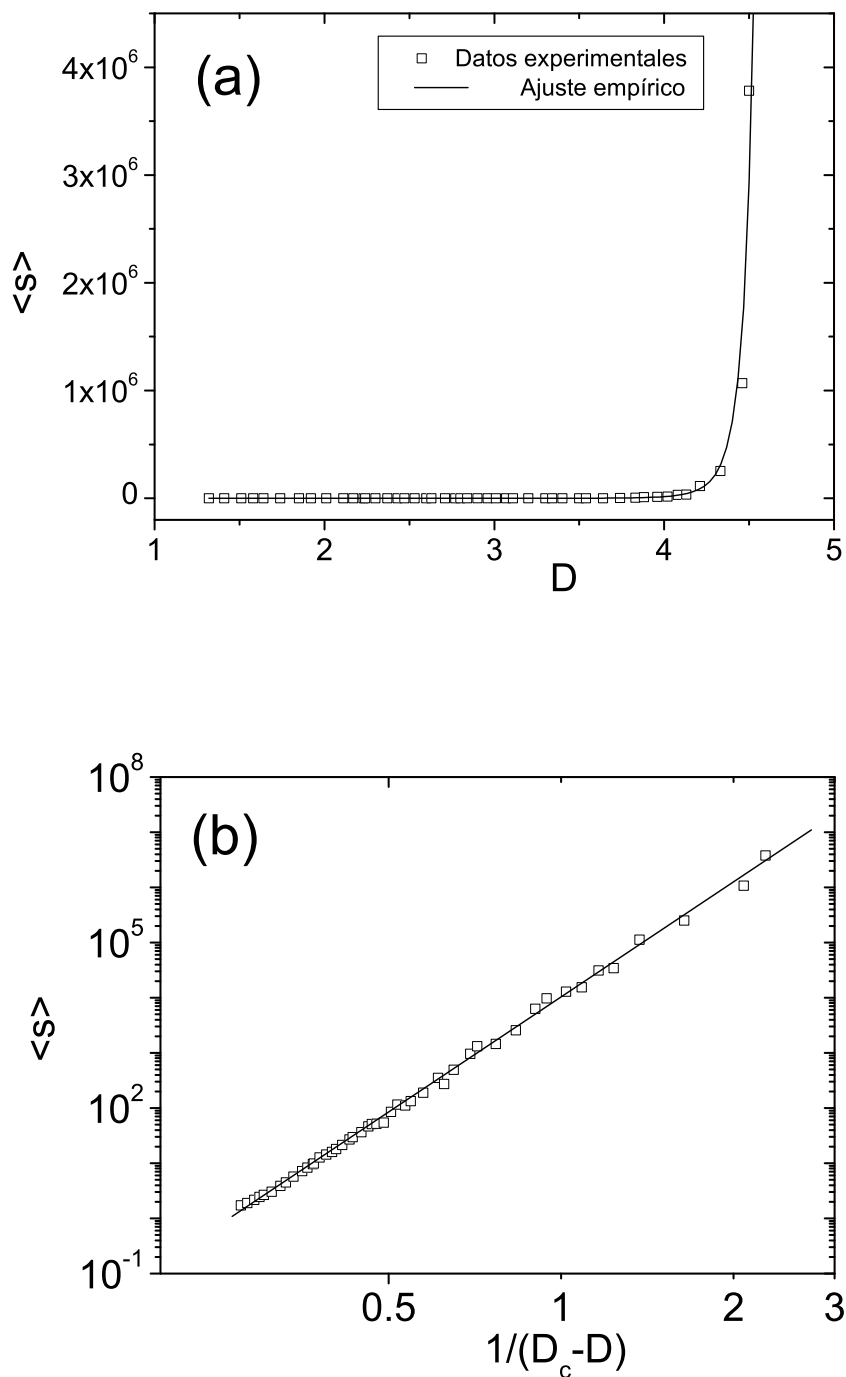


Figura 4.12: a) Avalancha media  $\langle s \rangle$  en función de  $D$  para esferas de vidrio. Los cuadrados son resultados experimentales y la línea continua es un ajuste con la ecuación 4.2.1. b)  $\langle s \rangle$  en función de  $\frac{1}{(D_c - D)}$  en escala logarítmica. La pendiente de la recta obtenida es el valor del exponente  $\gamma$  ( $\gamma = 6,9 \pm 0,2$ ). En ambas figuras el tamaño de las barras de error es menor o igual al tamaño de los símbolos.

Además, éste es el primer trabajo donde se encuentra un resultado tan preciso ( $D_c = 4,94 \pm 0,03$ ) del diámetro crítico del orificio de un silo cuando se descargan partículas esféricas [66].

### 4.3. Probabilidad de atravesar el orificio

Como se ha mencionado anteriormente, en lugar de  $\langle s \rangle$ , la otra variable que puede utilizarse para caracterizar un histograma es  $p$ , la probabilidad de que una partícula pase a través del orificio sin atascarlo. En esta sección se presentarán los resultados obtenidos de  $p$  en función de  $D$ . Para obtener los diferentes valores de  $p$  se ha representado, para cada histograma, el logaritmo de  $n_D(s)$  en función de  $s$ . Así, como se vio en la figura 4.1.2, el decrecimiento exponencial aparece en forma de una recta fácilmente ajustable. La pendiente de esta recta es  $\log(p)$ .

Los valores de  $p$  para diferentes  $D$  se muestran en la figura 4.13. Con esta gráfica es difícil demostrar la existencia de un diámetro crítico a partir del cual el sistema nunca se atasque, donde  $p=1$ . Esto es así porque no se ha podido encontrar una ley que ajuste los resultados de  $p$  en función de  $D$ . Así pues, utilizando los valores de  $p$  no se puede establecer un valor de  $D_c$  como se hizo con  $\langle s \rangle$ . Se debe reseñar que los valores de  $p$  son más imprecisos que los de  $\langle s \rangle$ . El error cometido al calcular la pendiente del histograma es mucho mayor que el cometido al calcular  $\langle s \rangle$ . Además, a la hora de establecer la existencia de un  $D_c$ , trabajar con  $\langle s \rangle$  es más práctico ya que nos permite alcanzar mayores valores de  $D$ . La razón es que con menor número de avalanchas, se puede obtener  $\langle s \rangle$  con una resolución aceptable; en cambio para hallar  $p$  se necesita ajustar el histograma, lo cual exige un gran número de avalanchas.

Hay que destacar que no es posible alcanzar un valor de  $p = 1$  experimentalmente

puesto que  $p$  se halla a partir de la pendiente del histograma, que no se podría obtener si  $p = 1$  (puesto que no habría atascos). Para  $D = 4,21$  – el mayor valor de  $D$  para el que se ha podido obtener un histograma con suficiente resolución – se ha encontrado un valor de  $p = 0,999989$ . En un sentido práctico este valor de  $p$  se puede considerar igual a uno.

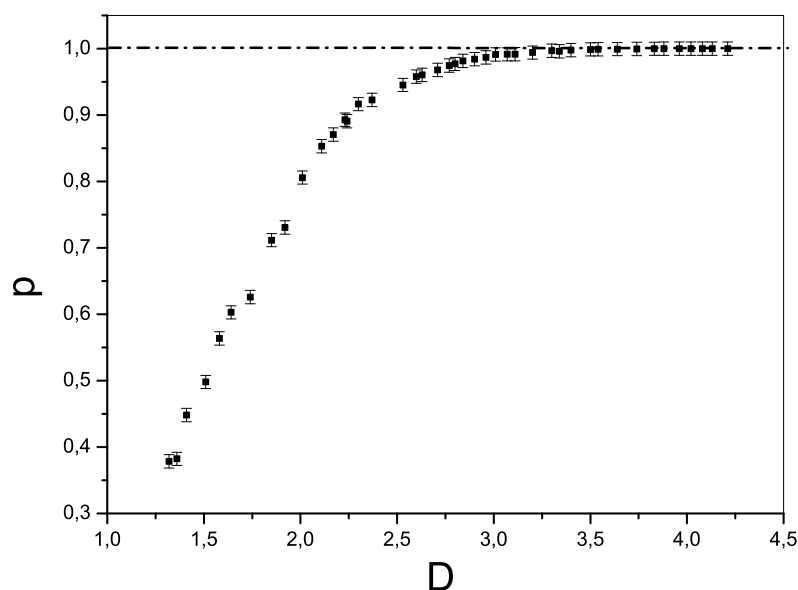


Figura 4.13: Probabilidad de que una partícula pase a través del orificio sin atascarlo en función de  $D$ . Los valores de  $p$  han sido obtenidos a partir del ajuste del decrecimiento exponencial de los histogramas.

### Relación entre $\langle s \rangle$ y $p$ .

Tanto  $\langle s \rangle$  como  $p$  son dos parámetros diferentes pero igualmente válidos para caracterizar el histograma. De hecho, ambas variables están estrechamente relacionadas. Desde un punto de vista discreto se puede asumir que  $p$ , la probabilidad de que una partícula pase a través del orificio, para una serie de avalanchas, está determinada por el cociente entre el número total de partículas que pasan en todas las avalanchas

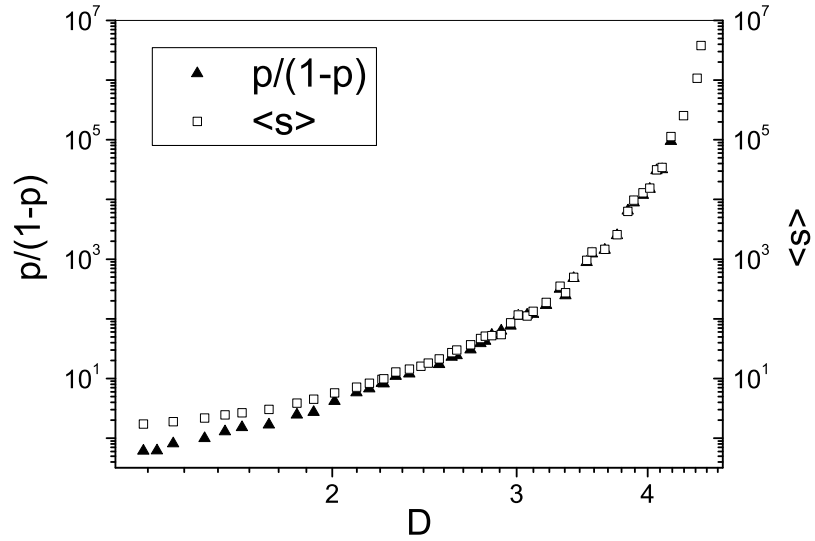


Figura 4.14:  $\langle s \rangle$  (cuadrados) y  $\frac{p}{1-p}$  (triángulos) en función de  $D$ . Los valores de  $p$  utilizados en esta gráfica son los obtenidos con las pendientes de los histogramas. El tamaño de las barras de error es, en todos los casos, menor o igual al tamaño de los símbolos.

$n_b$  y el número de sucesos totales (ecuación 4.3.1). El número de sucesos totales viene determinado por la suma del número de atascos  $n_a$  y las partículas que pasan  $n_b$ .

$$p = \frac{n_b}{n_a + n_b} \quad (4.3.1)$$

Si usamos la definición de avalancha media de la ecuación 4.1.3 se obtiene que el numerador (sumatoria de las partículas que caen en las  $n$  avalanchas) es igual a  $n_b$  y el denominador (el número de avalanchas medido) es igual a  $n_a$ . De este modo podemos escribir  $\langle s \rangle$  como:  $\langle s \rangle = \frac{n_b}{n_a}$ . Sustituyendo en la ecuación 4.3.1 y despejando  $\langle s \rangle$  obtenemos la siguiente relación entre  $\langle s \rangle$  y  $p$ :

$$\langle s \rangle = \frac{p}{1-p} \quad (4.3.2)$$

En la figura 4.14 se muestran los datos obtenidos de  $\langle s \rangle$  (hallada directamente

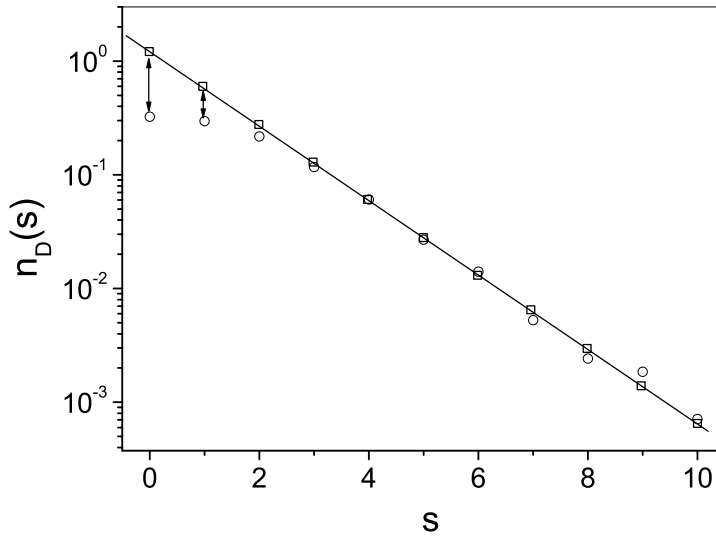


Figura 4.15: Resultados de la figura 4.9a. Los círculos indican el valor de  $n_D(s)$  obtenido experimentalmente, la línea continua es el ajuste con una ley exponencial y los cuadrados los valores que se está dando indirectamente a  $n_D(s)$  al utilizar  $p$ . Las flechas muestran la diferencia entre ambos parámetros.

de los resultados experimentales con la ecuación 4.1.3) y los de  $\frac{p}{1-p}$  (con  $p$  obtenida de las pendientes de los histogramas) para diferentes  $D$ . Como se puede observar, excepto para pequeños valores de  $D$ , los resultados coinciden. La diferencia en los resultados para  $D$  pequeños se debe a que cuando se trabaja con  $\langle s \rangle$  se usan todos los resultados experimentales obtenidos – círculos en la figura 4.15 – incluida la primera parte del histograma, donde  $s < s_M$ . Cuando se usa  $p$ , en la zona de avalanchas pequeñas, se están asignando valores a  $n_D(s)$  – cuadrados en la figura 4.15 – mayores que los medidos experimentalmente. Esta diferencia entre el uso de  $p$  y  $\langle s \rangle$  para la probabilidad de obtener avalanchas pequeñas es la causante de que, en la figura 4.14, los puntos obtenidos con  $p$  caigan por debajo de los obtenidos con  $\langle s \rangle$ .

La diferencia entre utilizar  $\langle s \rangle$  y  $p$  también se puede interpretar del siguiente



modo. Cuando se utiliza  $\langle s \rangle$  como parámetro característico del histograma se están evaluando al mismo tiempo las dos regiones: el estado transitorio que se da en las primeras décimas de segundo y el estable alcanzado después. Al utilizar  $p$  se evalúa solamente la zona donde la probabilidad de paso es constante. La diferencia entre ambos parámetros disminuye al aumentar  $D$ , a medida que decrece el peso de la primera parte en el conjunto del histograma. Por esta razón, la diferencia entre  $\langle s \rangle$  y  $\frac{p}{1-p}$  solamente se da para  $D$  pequeños. Se debe reseñar que aunque en algunos histogramas se vean pocos puntos en la zona que no se ajusta a la exponencial, su peso en el conjunto del mismo puede ser grande (ver como ejemplo la figura 4.15).

#### 4.4. Probabilidad de atasco: $J_N(D)$

En esta sección se presentarán los resultados mostrados anteriormente de un modo distinto, para compararlos con los de K. To [22; 23; 24], único trabajo experimental en el que se estudia la formación de arcos en la descarga de un silo.

En nuestro experimento, para cada  $D$ , con el silo lleno de partículas se han obtenido los tamaños de varios miles de avalanchas. En el trabajo de K. To el planteamiento es diferente, ya que se fija el número de partículas en el interior del silo ( $N$ ) y se mide la probabilidad de que se de un atasco antes de que todas fluyan a través del orificio. Este proceso se repite para diferentes valores de  $D$ . Se llamará  $J_N(D)$  a la probabilidad de que se de un atasco antes de que todas las partículas ( $N$ ) caigan a través de un orificio de diámetro normalizado  $D$ .

Con los tamaños de las avalanchas obtenidos en nuestro experimento es sencillo calcular  $J_N(D)$  para un número de partículas  $N$ . Para  $D$  fijo se toman nuestros tamaños de avalancha  $s$ , se selecciona  $N$ , y se halla  $J_N(D)$ , que viene dado por la

siguiente expresión:

$$J_N(D) = \frac{\text{Avalanchas con } s < N}{\text{Avalanchas totales medidas}} \quad (4.4.1)$$

Este sencillo cálculo se puede realizar para cada  $D$  con tantos  $N$  como se desee. En la gráfica 4.16 se representa  $J_5(D)$ , la probabilidad de que se forme un atasco antes de que caigan 5 partículas, en función de  $D$ . Cuando  $D$  es muy pequeño ( $D < 1,5$ ),  $J_5(D) = 1$ : siempre se forma un atasco antes de que caigan 5 partículas. A medida que  $D$  aumenta,  $J_5(D)$  decrece hasta que para  $D = 3$  se hace casi nulo: prácticamente nunca se produce un atasco antes de que caigan 5 partículas.

En la figura 4.17 se muestra  $J_N(D)$  en función de  $D$  para diferentes valores de  $N$ . La forma de  $J_N(D)$  se parece mucho a una tangente hiperbólica  $(1 - (\tanh(\zeta(D - D_{0,5}))/2))^1$ . Por eso se ha utilizado este ajuste (líneas continuas en la figura 4.17) aunque no se conoce ninguna razón que lo justifique. Todas las curvas para diferentes  $N$  tienen un comportamiento muy similar. La diferencia más clara entre ellas es que la pendiente de la tangente hiperbólica ( $\zeta$ ) se hace más pronunciada a medida que  $N$  aumenta. Sin embargo, el elevado valor de todas las pendientes y los consiguientes errores que se cometen al hallarlas, no permiten encontrar una ley suficientemente clara que relacione  $\zeta$  y  $D$ . Cabe esperar que, dado que existe un  $D_c$  por encima del cual no hay atascos, una hipotética curva para  $N = \infty$  tuviera la forma de una función escalón: cuando  $D < D_c$  siempre se da un atasco antes de que caigan infinitas partículas ( $J_\infty = 1$ ), y cuando  $D > D_c$  nunca se forma un atasco ( $J_\infty = 0$ ).

Otro signo de la existencia de un diámetro crítico del orificio de salida es que la distancia entre las diferentes curvas de la gráfica 4.17 disminuye con  $N$ , pese a que

---

<sup>1</sup> $D_{0,5}$  es el valor del diámetro adimensional para el cual  $J_N(D) = 0,5$

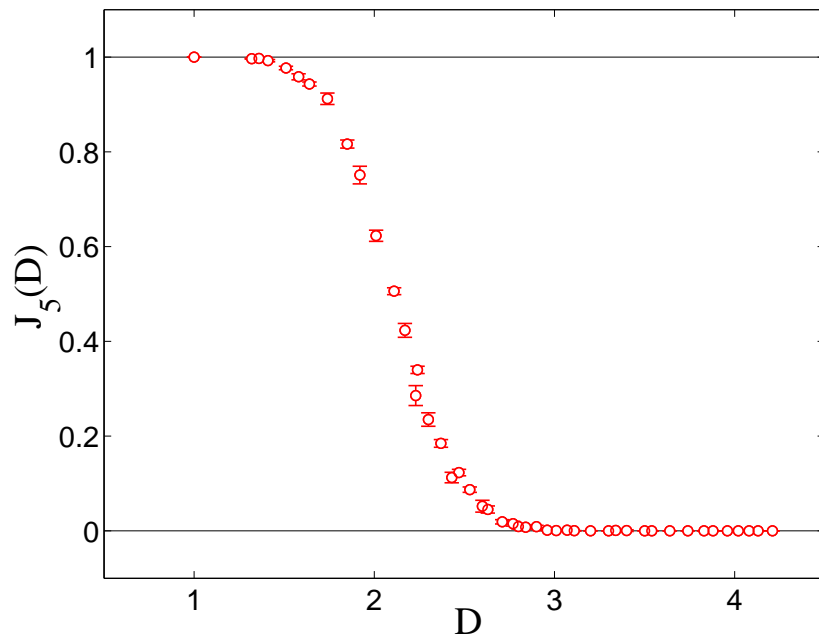


Figura 4.16:  $J_5(D)$ , probabilidad de que se produzca un atasco antes de que caigan 5 partículas, en función de  $D$ .

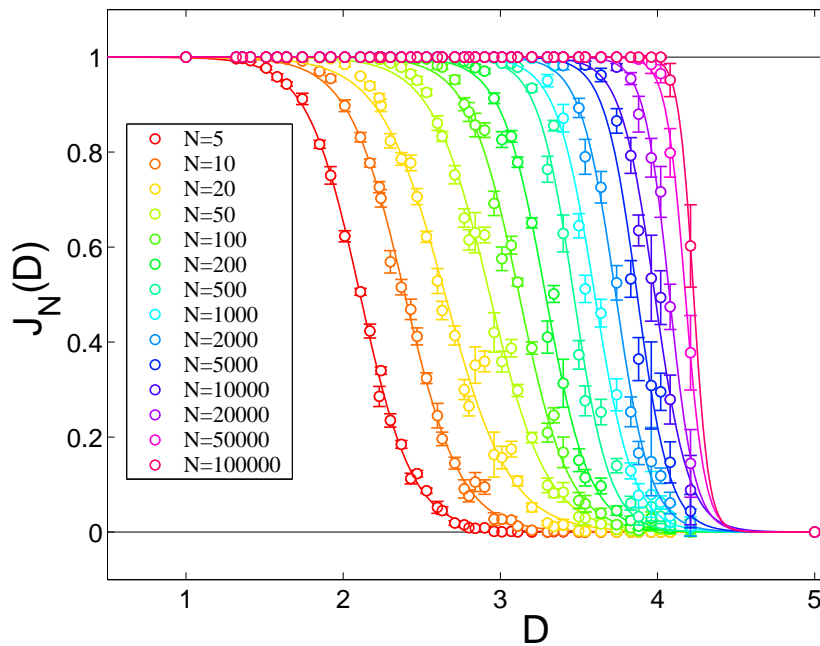


Figura 4.17:  $J_N(D)$ , probabilidad de que se produzca un atasco antes de que caigan  $N$  partículas, en función de  $D$  para  $N = 5$  hasta  $N = 10^5$ . Los círculos son resultados experimentales y las líneas continuas un ajuste con una tangente hiperbólica.

media entre las curvas un incremento sucesivo en el orden de magnitud.

Comparando estos resultados con los obtenidos por K. To (ver figura 2.6 en la sección 2.2.1) observamos que son cualitativamente equivalentes. Sólo existen diferencias cuantitativas debido a las condiciones experimentales de ambos trabajos: aquí se utilizan esferas en un silo en tres dimensiones mientras que K. To y su grupo utilizan discos en una tolva de dos dimensiones. Esta coincidencia cualitativa en los resultados de la probabilidad de atasco es muy importante porque nos da un indicio de que los mecanismos físicos que originan los arcos, en dos y tres dimensiones, son los mismos.

## 4.5. Influencia de las propiedades del grano

Modificando las propiedades del medio granular se pretende comprender mejor su influencia en el proceso de atasco para obtener indicios sobre los mecanismos físicos que lo gobiernan. En particular, sería interesante averiguar si la formación de atascos está influenciada por factores dinámicos (como la energía disipada en una colisión entre partículas) o estáticos (en los que sólo influye la geometría de los arcos).

Se han clasificado las propiedades en dos grupos:

- Características del material con el que están contruidos los granos. Entre éstas se explorarán la densidad del material, el coeficiente de restitución y las propiedades de la superficie o rugosidad del grano.
- Factores geométricos de los granos. En este grupo se incluirán la forma de los granos y su dispersión en tamaño.

Cada uno de los grupos de propiedades será estudiado analizando su influencia en la forma del histograma y en la avalancha media para diferentes  $D$ .

### 4.5.1. Características del material

El primer objetivo que nos planteamos es analizar la influencia en la formación de arcos de las propiedades del material del que están formadas las partículas. Comparando materiales de diferente densidad se pretende conocer si la energía cinética con la que los granos llegan a la salida del orificio juega un papel importante en el proceso de atasco. Asimismo se han usado materiales con diferentes coeficientes de restitución para analizar la importancia que tiene en el proceso la disipación de energía en las colisiones.

En la figura 4.18 se muestra  $\langle s \rangle$  en función de  $D$  para partículas esféricas de materiales de diferente densidad y coeficiente de restitución: plomo, acero, delrin y vidrio (ver tabla 3.3). Se han representado los resultados en escala semilogarítmica para apreciar mejor las diferencias que puedan existir entre los diversos materiales. En una primera aproximación se puede afirmar que ni la densidad ni el coeficiente de restitución del material influyen significativamente en el proceso de atasco: se trata de un proceso que no se ve afectado por la energía cinética con la que llegan los granos al orificio ni por la disipación de energía en las colisiones.

La rugosidad del material es otro aspecto a tener en cuenta, que puede indicar el papel que juega en los atascos la fricción entre las partículas. Como se explicó en la sección 3.3 se ha modificado la rugosidad de las partículas de vidrio tratándolas con ácido fluorhídrico. Los resultados para las partículas después de cada uno de los ataques se muestran en la figura 4.19. Al contrario de lo que afirma el trabajo de K. To [23] (Figura 2.7 en la sección 2.2.1), en la gráfica se observa que la rugosidad de los granos, en el rango de valores estudiado, no afecta significativamente a la formación de arcos. Hay que tener en cuenta que es probable que el cambio de la rugosidad en

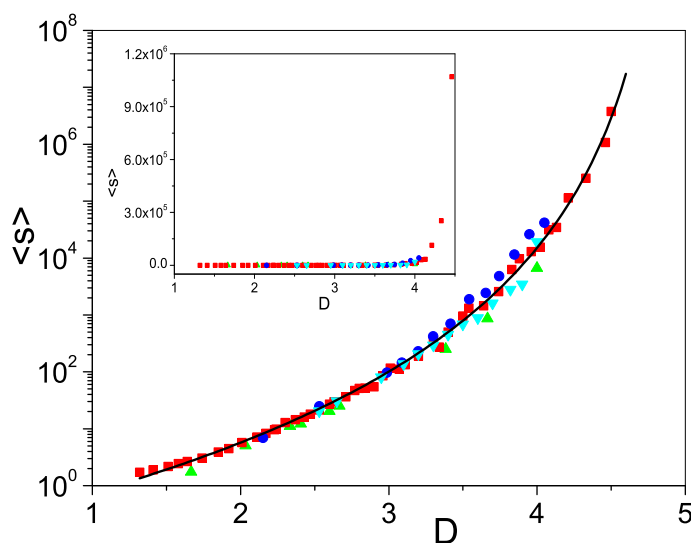


Figura 4.18:  $\langle s \rangle$  en función de  $D$  para esferas de diferentes tipos de materiales en escala semilogarítmica. En verde, rojo, azul y azul claro se han representado los resultados para el delrin (grupo 7 en la tabla 3.3), vidrio (grupos 2 y 3), plomo (grupo 6) y acero (grupo 8) respectivamente. El tamaño de las barras de error es, en todos los casos, menor o igual al tamaño de los símbolos. La línea continua negra es el ajuste explicado en la sección 4.2. En el recuadro interno, la misma gráfica en escala lineal.

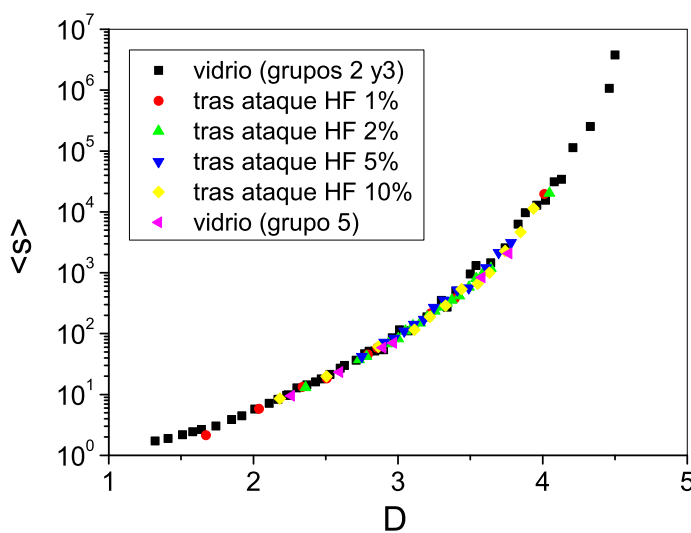


Figura 4.19:  $\langle s \rangle$  en función de  $D$  para esferas de vidrio después de ataques sucesivos con concentraciones diferentes de ácido fluorhídrico. Las partículas del grupo 5 son esferas de vidrio tras el ataque con ácido fluorhídrico al 20% en volumen. El tamaño de las barras de error es, en todos los casos, menor o igual al tamaño de los símbolos.

el experimento de K. To implique un cambio en la forma de los granos [29]. Además se debe reseñar que, en tres dimensiones, es prácticamente imposible alcanzar una rugosidad equivalente a la de los discos utilizados por K. To.

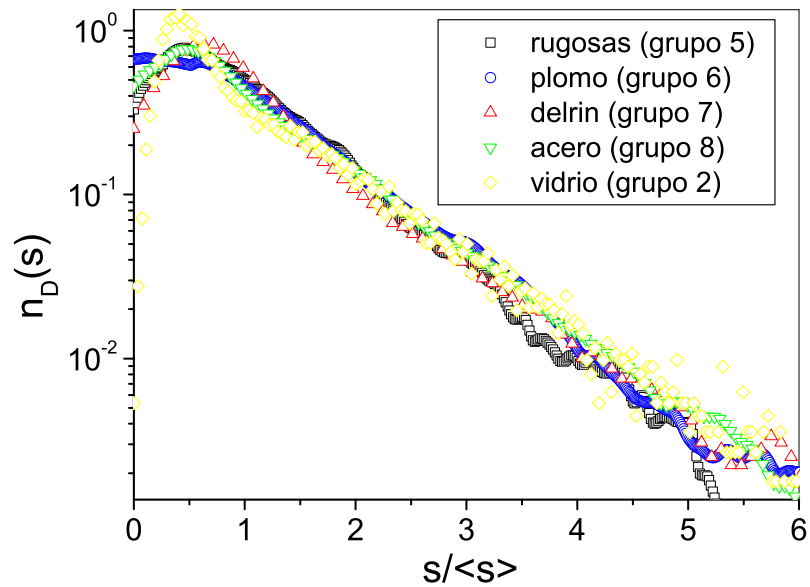


Figura 4.20:  $n_D(s)$  en función de  $s/\langle s \rangle$  en escala semilogarítmica para partículas de diferentes densidades, coeficientes de restitución y propiedades superficiales.

Tal y como se hizo con las partículas de vidrio para diferentes  $D$  (ver sección 4.1.4) se han representado diferentes histogramas reducidos ( $n_D(s)$  en función de  $s/\langle s \rangle$ ) para partículas de diferente densidad, coeficiente de restitución y rugosidad. Como puede observarse en la figura 4.20, todos los histogramas colapsan en el mismo. Esto corrobora los resultados obtenidos al comparar  $\langle s \rangle$ : la diferencia en la densidad del material, coeficiente de restitución y rugosidad de la superficie no introduce ninguna variación en los resultados obtenidos con partículas esféricas.

### 4.5.2. Factores geométricos

El siguiente aspecto estudiado dentro de las propiedades del medio granular es la influencia de los factores geométricos del grano en la formación de puentes.

#### Forma de las partículas

La manera más sencilla para tratar de modificar la geometría de los puentes es cambiar la forma de los granos. En este trabajo se han realizado experimentos con granos de ‘bolillo’, lentejas y arroz. Las formas de estos granos son diferentes: los ‘bolillos’ son casi cilindros con un diámetro similar a la altura, en las lentejas el diámetro de revolución es más o menos el doble de su espesor y en el arroz su altura es unas tres veces mayor que el diámetro de revolución. El objetivo es tratar de evaluar la influencia de la asimetría de las partículas en la formación de atascos. Para ello se analizará, en primer lugar, la influencia de la forma del grano en la densidad de probabilidad de los tamaños de las avalanchas.

#### *Influencia en el histograma.*

Para partículas esféricas, la forma de los histogramas es siempre la misma: una primera zona para  $s < s_M$ , donde  $n_D(s)$  crece con  $s$  y cuya existencia depende del valor de  $D$ , y una parte donde  $n_D(s)$  decrece exponencialmente al aumentar  $s$  (sección 4.1.2).

Cuando las partículas no son esféricas, el decrecimiento exponencial no se manifiesta de un modo tan claro para todo  $D$ . En la figura 4.21 se muestran los histogramas



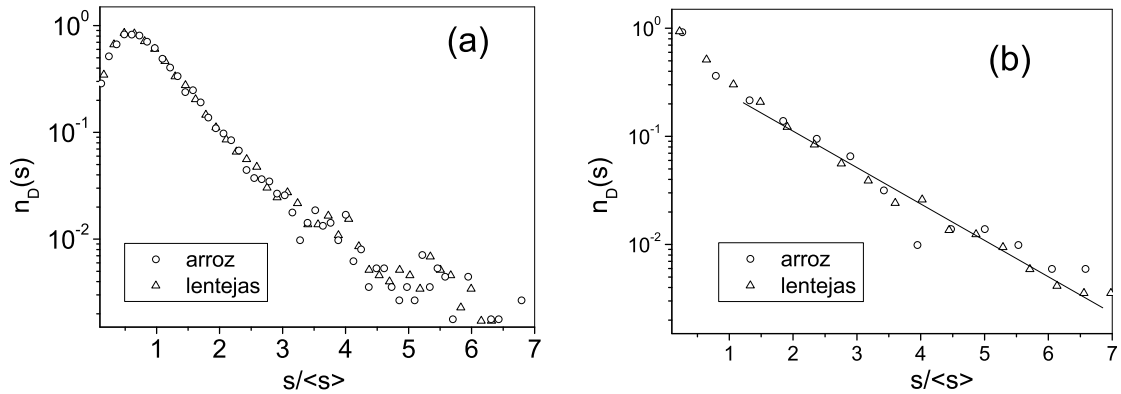


Figura 4.21:  $n_D(s)$  en función de  $s/\langle s \rangle$  para granos de arroz y lentejas. En la figura (a)  $D = 1,95$  y  $2,70$  para las lentejas y el arroz respectivamente, mientras que en (b)  $D = 3,60$  y  $5,40$ .

de lentejas y arroz, para diferentes  $D$ , en escala semilogarítmica<sup>2</sup>. Cuando  $D$  es pequeño (Figura 4.21a) los datos obtenidos no se ajustan a una recta: el decrecimiento exponencial no existe. Cuando  $D$  es grande (Figura 4.21b) parece que se recupera la dependencia exponencial. Por el momento se desconoce el motivo de este comportamiento.

Una posible explicación para este cambio, que se produce sólo con partículas asimétricas, es la siguiente: como las partículas tienen dos longitudes características distintas es posible que en el histograma se obtenga una combinación de las exponenciales que corresponden a cada una de las longitudes. En la figura 4.22 se muestra un histograma obtenido con lentejas en el que parece que se observan dos exponenciales diferentes. Si esto fuese así, parece lógico que, en función del valor de  $D$ , predomine una u otra exponencial. Utilizando lentejas y arroz la aparición de las dos exponenciales diferentes en un mismo histograma sólo se da en casos muy concretos, para valores pequeños de  $D$  (menores que 3).

<sup>2</sup>No se muestran histogramas del ‘bolillo’ porque, al tener una forma semejante a la esfera, no se han apreciado diferencias de comportamiento.

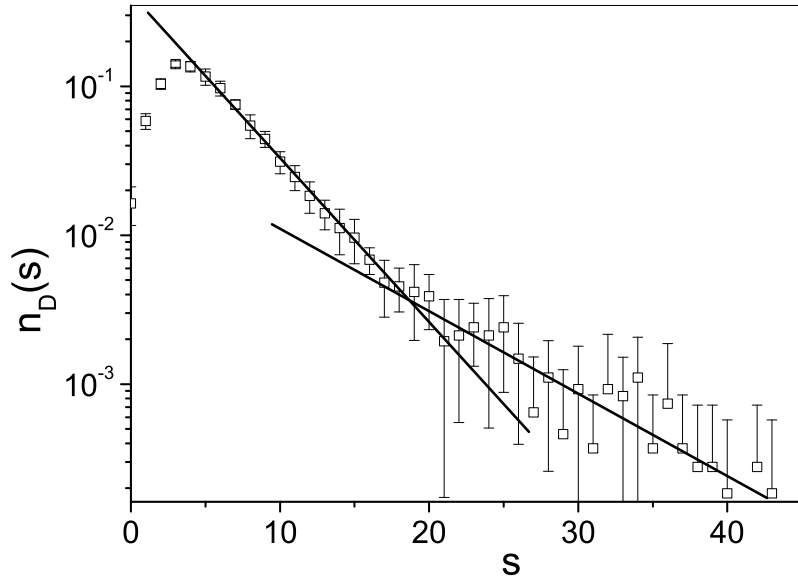


Figura 4.22:  $n_D(s)$  en función de  $s$  en escala semilogarítmica utilizando lentejas. El diámetro del orificio utilizado es  $8,00 \text{ mm}$  y  $D = 2,21$ . Los cuadrados son los resultados experimentales y las líneas continuas muestran las dos pendientes que se han ajustado.

Otra posibilidad para explicar el cambio en la distribución en el tamaño de avalanchas estaría relacionada con el *flujo interno* y la organización que se establece entre los granos – alineamiento – cuando éstos no son esféricos (ver sección 2.2.4). Como se muestra en los trabajos de Baxter y Behringer [53] y Cleary [54] y contrariamente a lo encontrado por Zhong y su grupo [49], se ha comprobado que, al utilizar partículas no esféricas, en el interior del silo siempre se desarrolla un *flujo interno* (ver sección 2.2.4). Con lentejas y arroz, también se ha observado el fenómeno de “temblor en silo” que se explicó en la sección 2.2.4.

El hecho de que coincida la aparición del *flujo interno* con el cambio en la distribución de tamaños de las avalanchas nos lleva a pensar que puede existir alguna relación entre ambos. En efecto, Manna (ver sección 2.2.1) en sus simulaciones siempre encuentra un *flujo interno* y obtiene una distribución de tamaños de las avalanchas similar a

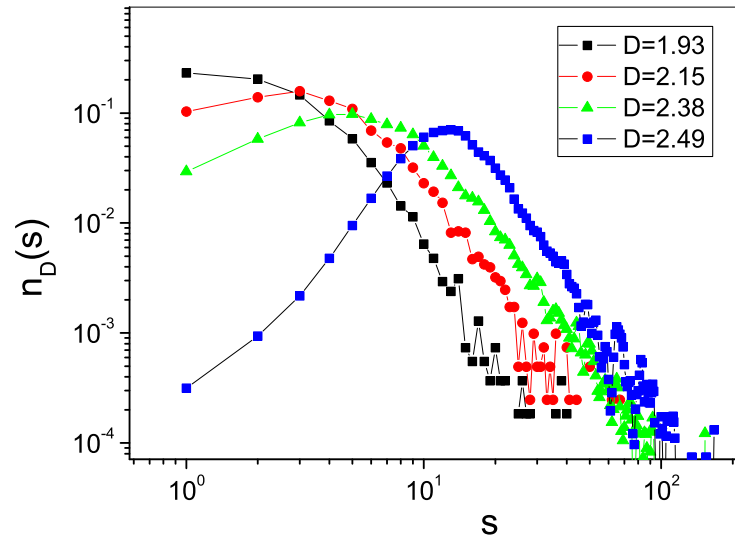


Figura 4.23:  $n_D(s)$  en función de  $s$  para diferentes valores de  $D$  cuando se usan lentejas. Los puntos negros, rojos, verdes y azules corresponden a valores de  $D = 1,93$ ;  $2,15$ ;  $2,38$ ; y  $2,49$  respectivamente.

la que se obtiene en este trabajo con partículas no esféricas. Esta distribución parece ajustarse con una ley de potencias. En la figura 4.23 se muestran varios histogramas obtenidos con lentejas, sin reducir  $s$  dividiéndolo por  $\langle s \rangle$ , para compararlos con los histogramas de Manna (Figura 2.8 en la sección 2.2.1). Como puede observarse los resultados son cualitativamente los mismos. La diferencia más notable entre las dos figuras se da en el primer punto de los histogramas, cuando  $s = 1$ . Como se explicó anteriormente, el origen de esta diferencia puede estar en el diferente sistema de desatasco que se utiliza en ambos trabajos.

Así pues, pensamos que el origen del cambio de la forma del histograma al utilizar partículas no esféricas puede deberse a dos razones:

- La presencia de dos longitudes características en las partículas no esféricas, que implicaría la aparición de dos leyes exponenciales.

- El *flujo interno* que se desarrolla en el interior del silo.

El mejor modo para comprobar si alguna de las dos hipótesis presentadas es correcta es realizar un experimento en un silo bidimensional con partículas de diferentes formas. En principio la fenomenología en dos y tres dimensiones debería ser similar porque se ha comprobado que, cualitativamente, nuestros resultados son iguales a los obtenidos por K. To en un silo bidimensional (sección 4.4).

### *Influencia en el diámetro crítico.*

Una vez se ha explicado la influencia del cambio de la forma del grano en la forma del histograma se mostrarán los valores de  $\langle s \rangle$  en función de  $D$  para tratar de obtener el diámetro crítico correspondiente, tal y como se hizo con las partículas esféricas en la sección 4.2.

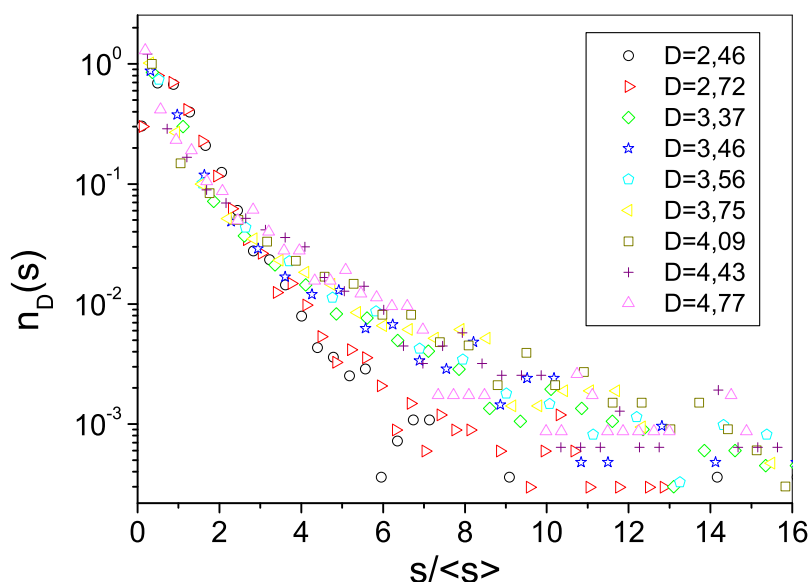


Figura 4.24:  $n_D(s)$  en función de  $s/\langle s \rangle$  en escala semilogarítmica para diferentes valores de  $D$  utilizando granos de arroz.

Debe recordarse que la utilización de  $\langle s \rangle$  como parámetro característico del histograma era lícito en el caso de las esferas porque al reducir  $s$  dividiéndolo por  $\langle s \rangle$  todos los histogramas colapsaban en el mismo. En el caso de las lentejas y el arroz no se da ese colapso de los histogramas. En la figura 4.24, donde se representan diversos histogramas reducidos obtenidos con granos de arroz, se aprecian notables diferencias para diferentes valores de  $D$ . Por esta razón, estrictamente no se podría utilizar  $\langle s \rangle$  como parámetro característico. Con todo, y recordando que se trata de una aproximación, se utilizará este parámetro para evaluar la existencia de un diámetro crítico del orificio.

Como se muestra en la figura 4.25a, las variaciones en la forma del grano tienen una gran influencia en la avalancha media obtenida en función de  $D$ . También puede observarse que para valores de  $D$  cercanos a  $D_c$  la avalancha media es más pequeña al utilizar partículas no esféricas. Esto no es así para  $D$  pequeños, probablemente debido a que la forma del histograma depende de  $D$ . También hay que destacar que las diferencias en el valor de  $\langle s \rangle$  son notables incluso cuando la forma del grano se desvía muy poco de la esfera, como ocurre con los ‘bolillos’.

Todos los ajustes mostrados en la gráfica 4.25a se han realizado con la ecuación 4.2.1 obteniéndose los valores para las constantes que se muestran en la tabla 4.1. Para comprobar que el ajuste con la ecuación 4.2.1 es correcto, se ha representado  $\langle s \rangle$  respecto de  $1/(D_c - D)$ , como se hizo con las esferas de vidrio. En la figura 4.25b se muestran los resultados de todas las formas de partículas exploradas.

En la tabla 4.1 se aprecia un aumento de  $D_c$  con la asimetría de los granos. Además, se ha encontrado que los valores del exponente  $\gamma$  y de la constante  $C$  son más elevados cuando se trabaja con granos asimétricos (lentejas y arroz) que con granos simétricos

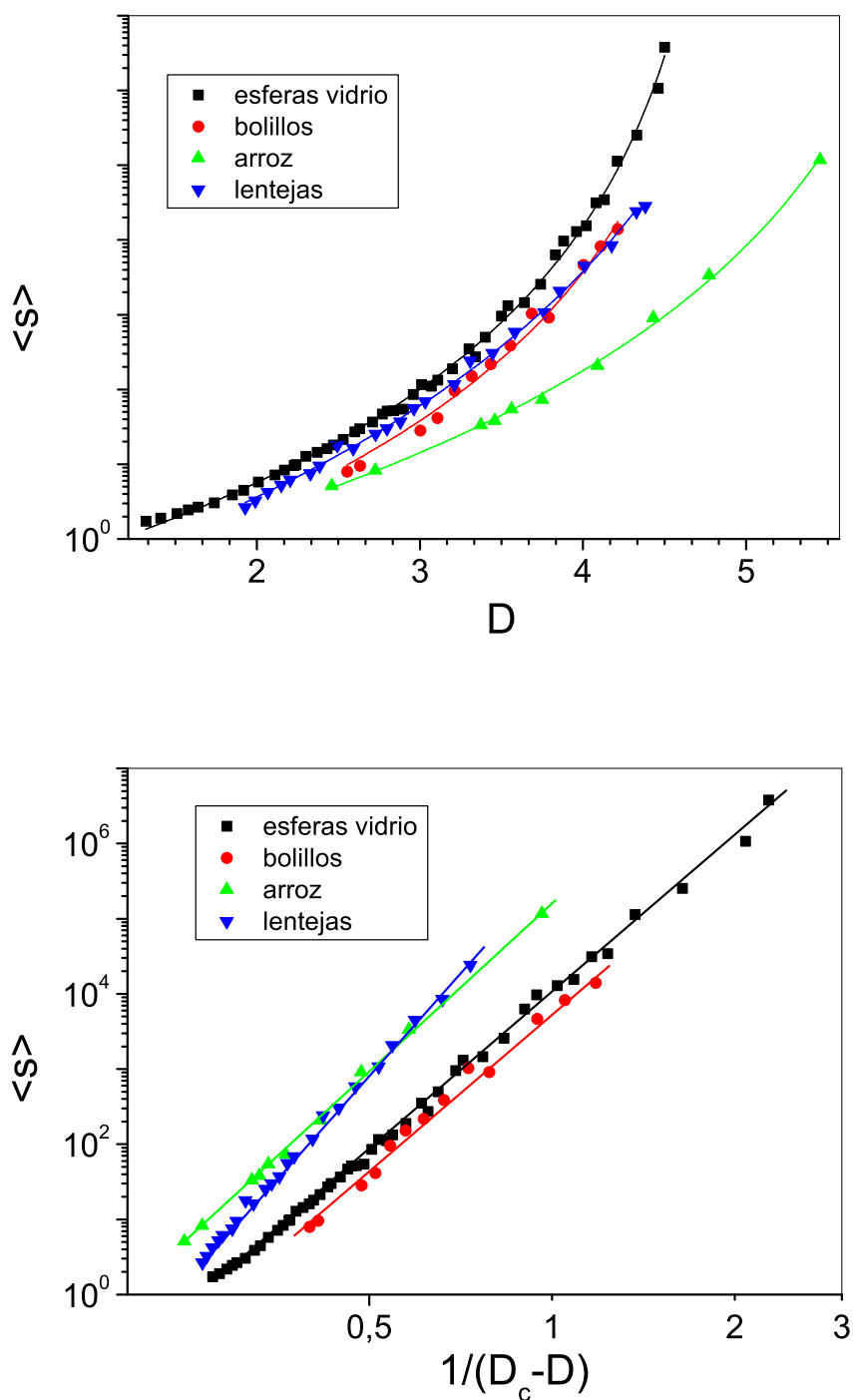


Figura 4.25: a)  $\langle s \rangle$  en función de  $D$  para esferas de vidrio, ‘bolillos’, arroz y lentes (puntos negros, rojos, verdes y azules respectivamente). El tamaño de las barras de error es, en todos los casos, menor o igual al tamaño de los símbolos. Las líneas continuas muestran los ajustes con la ecuación 4.2.1 para cada uno de los grupos de puntos. b)  $\langle s \rangle$  en función de  $1/(D_c - D)$  con los mismos materiales de la figura (a). Las pendientes de las rectas obtenidas son los valores de los distintos exponentes  $\gamma$ .

material	C	$D_c$	$\gamma$
esferas	$(9,9 \pm 0,1) \times 10^3$	$4,94 \pm 0,03$	$6,9 \pm 0,2$
bolillos	$(5,6 \pm 0,2) \times 10^3$	$5,06 \pm 0,06$	$6,9 \pm 0,5$
lentejas	$(1,1 \pm 0,1) \times 10^6$	$5,83 \pm 0,05$	$9,4 \pm 0,3$
arroz	$(1,69 \pm 0,05) \times 10^5$	$6,49 \pm 0,05$	$7,5 \pm 0,5$

Cuadro 4.1: Valores obtenidos para las constantes, al ajustar los resultados de los diferentes materiales con la ecuación 4.2.1.

(esferas y ‘bolillos’). Este resultado demuestra que los factores geométricos de las partículas afectan significativamente al proceso de atasco.

A partir de los resultados obtenidos con partículas no esféricas se puede concluir que un cambio en la geometría del grano provoca una alteración importante en la formación de arcos. Esto es un fuerte indicio en favor de que el proceso de atasco es un problema esencialmente geométrico.

### Dispersión en tamaño de las partículas.

Otra de las formas para tratar de cambiar la geometría de los puentes es introducir partículas de diferente tamaño en el interior del silo. Aunque este proceso parece sencillo, su implementación práctica es muy difícil debido a los problemas que puede ocasionar la segregación por tamaños de las partículas. La segregación se puede producir siempre que el medio granular está compuesto por partículas que tienen diferentes características y estén en movimiento (ver sección 2.1.5). En el caso particular de nuestro experimento se podría producir tanto en la carga como en la descarga del silo (ver sección 2.2.4).

De este modo, no es posible realizar de un modo sencillo una serie de experimentos con una mezcla de partículas de 1 y 2 mm, ya que se podría producir su segregación

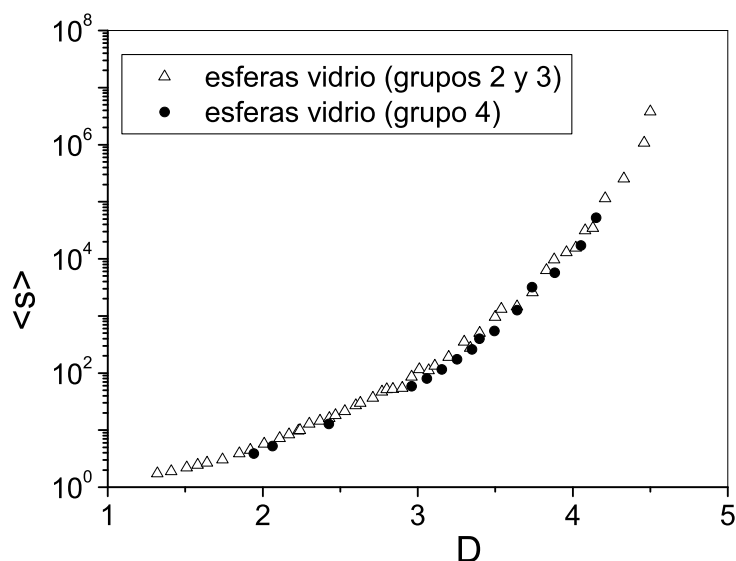


Figura 4.26:  $\langle s \rangle$  en función de  $D$  para esferas de vidrio con diferente dispersión de tamaños. Los triángulos y círculos muestran los resultados obtenidos con partículas de dispersión en tamaño alrededor del 1% (grupos 2 y 3 en la tabla 3.3) y 12% (grupo 4) respectivamente. El tamaño de las barras de error es, en todos los casos, menor o igual al tamaño de los símbolos.

por tamaños y las condiciones del experimento no estarían controladas. Sólo se han realizado medidas con partículas de vidrio (serie 4 en la tabla 3.3) cuya dispersión en tamaño (12% en el diámetro) es considerablemente mayor que el resto. En la figura 4.26 se muestra que los valores de  $\langle s \rangle$  para diferentes  $D$  son exactamente los mismos que los obtenidos con partículas de vidrio de baja dispersión en tamaño. Se puede concluir que con la dispersión de tamaños introducida o bien no se modifica la disposición geométrica de las partículas, o la modificación no es suficiente como para alterar el proceso de formación de arcos.

Se debe reseñar que en el caso estudiado, con partículas polidispersas, no se ha probado de manera terminante que no se produzca algún tipo de segregación. Sin embargo, una prueba indirecta de que no se da segregación es que no se han encontrado diferencias en los tamaños de avalancha a medida que pasa el tiempo.



## 4.6. Flujo

Todos los resultados mostrados hasta ahora están hallados a partir del tamaño de las avalanchas, sin tener en cuenta las características dinámicas del problema. En esta sección se presentarán los resultados obtenidos en este aspecto.

### 4.6.1. Velocidad de las partículas a la salida del orificio

Un primer objetivo es medir la velocidad de las partículas a la salida del orificio. Como se explicó en la sección 2.2.3, una aproximación bastante aceptada consiste en suponer que las partículas en el interior del silo tienen velocidad nula. Supongamos que las partículas salen por el orificio con una velocidad adquirida al caer, en caída libre y partiendo del reposo, desde una altura del orden del radio del orificio, es decir desde lo alto de una bóveda esférica centrada en el agujero.

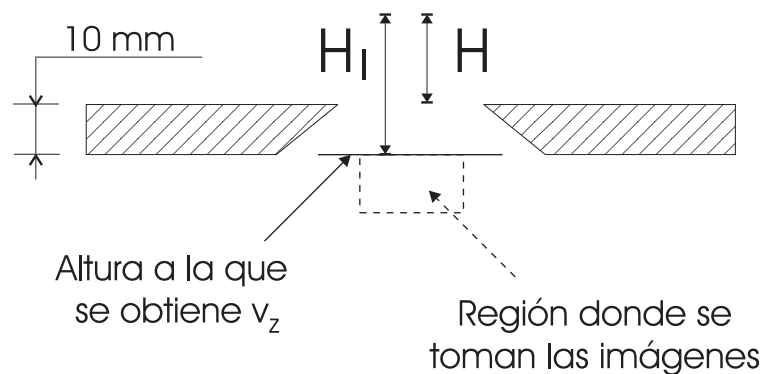


Figura 4.27: Esquema que muestra la región donde se mide la velocidad de las partículas para obtener su velocidad a la salida del orificio y posteriormente la altura, respecto de la parte superior del orificio  $H$  desde la que comienzan una caída libre.

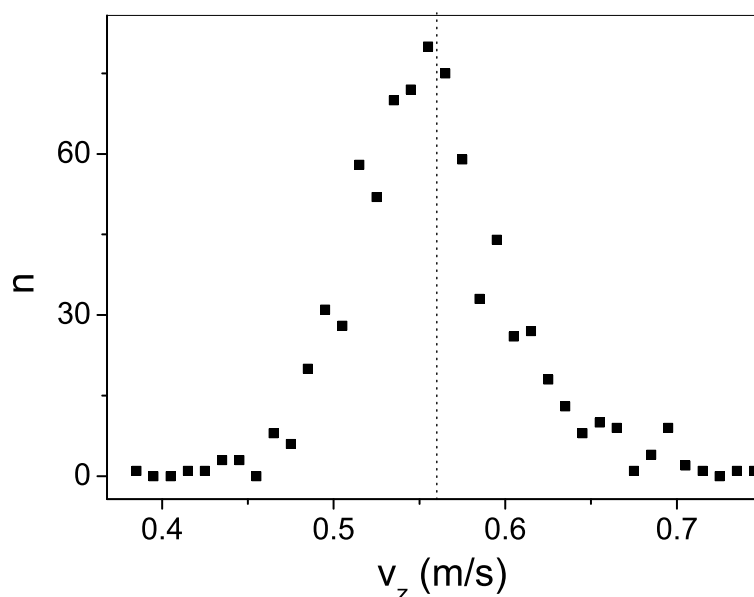


Figura 4.28: Histograma en el que se representa la velocidad de 800 partículas a la salida del orificio.

Se ha medido la posición de las partículas cayendo en vuelo libre, en la parte inferior del orificio, en la región que se muestra en la figura 4.27. A partir de estos datos, se ha obtenido la velocidad  $v_z$  de las partículas a la salida del orificio (línea continua negra la figura 4.27). Como se observa en la gráfica 4.28, en el punto de medida, las partículas tienen velocidades del orden de  $0,5 \text{ m s}^{-1}$ .

Resulta más interesante calcular la altura correspondiente a estas velocidades, si se cumple la hipótesis de que los granos caen en vuelo libre desde una altura dada y partiendo del reposo. La ecuación que relaciona la altura y la velocidad en este caso es:  $H_l = \frac{v_z^2}{2g}$ . Para obtener la altura ( $H$ ) desde la que comienza la caída libre respecto a la parte superior del orificio (ver figura 4.27), a los valores de  $H_l$  hay que restarles el espesor de la base del silo ( $10 \text{ mm}$ ). De este modo se obtienen los resultados de la figura 4.29. Las alturas encontradas parecen estar en buen acuerdo

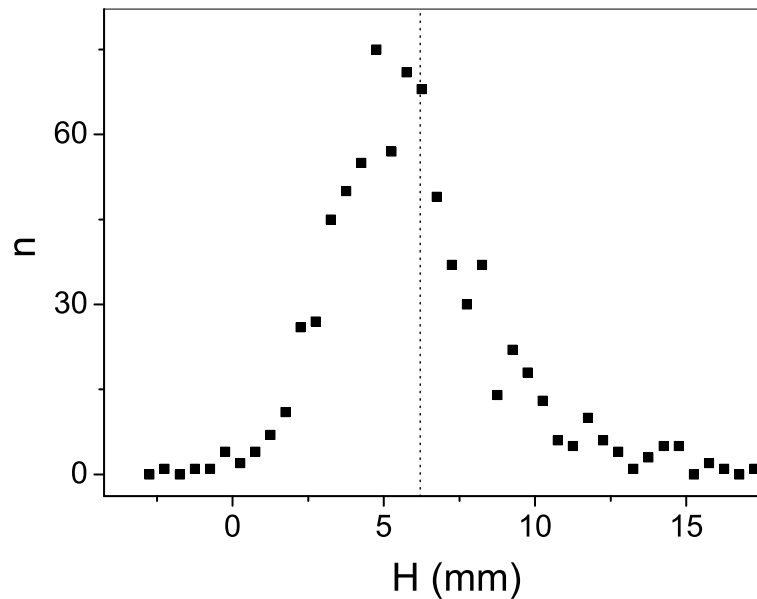


Figura 4.29: Histograma en el que se representa la altura, respecto de la parte superior del orificio  $H$ , desde la que comienzan una caída libre unas 800 partículas.

con las predicciones previas: el valor medio de la altura desde la que caen los granos es  $6,24 \text{ mm}$  mientras que el radio del orificio utilizado  $r_O$  es  $5,24 \text{ mm}$ . Este resultado debe ser corroborado midiendo la velocidad de caída de las partículas para diferentes valores de  $D$ .

Una posible fuente de error en estos cálculos es que las partículas pueden comenzar la caída libre sin partir del reposo. Aunque se acepta que esta velocidad inicial es despreciable respecto a la que se alcanza posteriormente, es posible que las alturas obtenidas estén ligeramente sobredimensionadas. También hay que destacar que se ha estimado el posible error cometido en los cálculos por la acción de la fuerza de rozamiento viscosa del aire. En todos los casos esta fuerza es menor del uno por mil de la fuerza de la gravedad, con lo que su efecto es despreciable.

### 4.6.2. Flujo a través del orificio

Consideremos ahora el flujo de materia granular a través del orificio. Para cada una de las avalanchas, además de obtener el tamaño, se ha medido su duración con una resolución de 0,1 segundos (ver sección 3.2.2). Para obtener el valor del flujo de cada avalancha en número de partículas por segundo ( $W_b$ ) se divide el número de partículas caídas entre el tiempo durante el que fluyen. Si se repite este proceso para un gran número de avalanchas se obtiene con una elevada precisión el flujo medio para cada  $D$ .

Otro modo de mostrar estos resultados es representando en una gráfica el tamaño de las avalanchas  $s$  (en número de partículas) respecto a su duración. En la figura 4.30 se representan estos datos para  $D = 4,0$ . Existe una relación lineal entre el número de partículas caídas y la duración de la avalancha: el flujo no es sino la pendiente de la recta que ajusta los puntos experimentales. La elevada correlación de los resultados mostrados tiene gran importancia para la industria porque es posible predecir, con una precisión muy alta, el número de partículas caídas – o en su caso la masa – durante un tiempo de descarga dado.

Cuando  $D$  es pequeño, la correlación de los tamaños de avalancha respecto su duración no es buena. En efecto, en la figura 4.31 se observa cómo para  $D = 2,0$  la dispersión de los resultados obtenidos es muy alta. Inicialmente cabría pensar que esta dispersión se debe, principalmente, al error que se comete por la resolución con la que se mide la duración de la avalancha (0,1 s). El error relativo es mucho mayor cuando una avalancha es corta (para  $D$  pequeño) que cuando es larga (para  $D$  grande).

Sin embargo, creemos que la resolución del sistema experimental no es el único motivo por el que se obtiene la dispersión de los resultados. Tal y como se explicó en

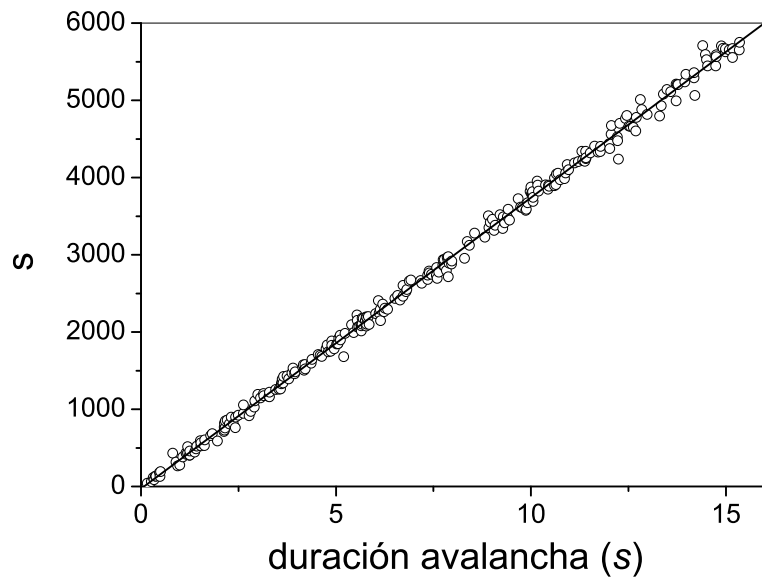


Figura 4.30: Número de partículas caídas en las diferentes avalanchas en función de su duración para  $D = 4,0$ . La línea continua es un ajuste lineal de los puntos cuya pendiente es el valor del flujo.

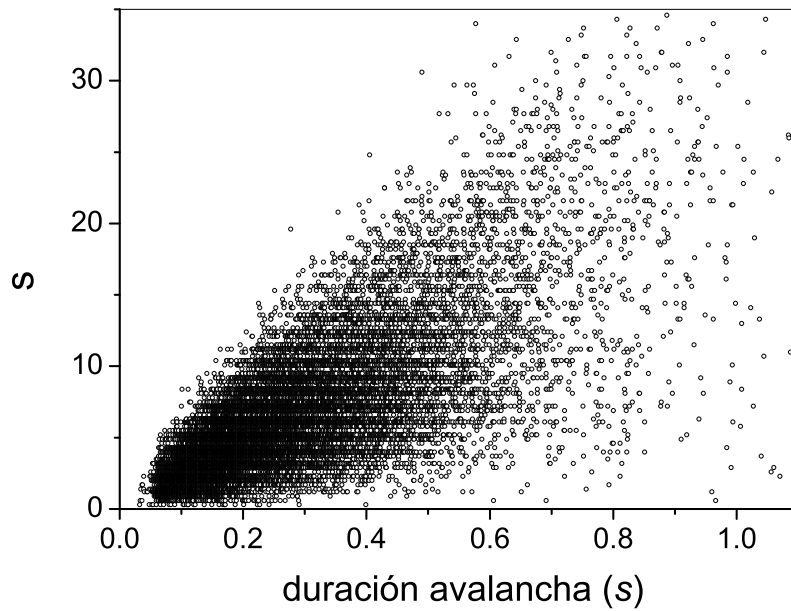


Figura 4.31: Número de partículas caídas en las diferentes avalanchas en función de su duración para  $D = 2,0$ .

la sección 2.2.3, se piensa que cuando un medio granular fluye a través de un orificio el flujo fluctúa debido a la formación de arcos que no bloquean completamente la salida [46; 47]. En principio, como el flujo disminuye al disminuir  $D$ , el valor relativo de las fluctuaciones respecto al flujo medio es mayor cuanto menor es  $D$ . Este hecho se ve reflejado en que la dispersión de los resultados obtenida en la figura 4.31 es mayor que 0,1 segundos, como cabría esperar si se tratase simplemente de un problema de resolución. Sin embargo, como se ha mostrado en la figura 4.30, la dispersión para  $D$  cercanos a  $D_c$  es prácticamente inapreciable.

Este resultado ha sido observado recientemente por Steingart y Evans [67]. Con un sistema similar al empleado por Medina y su grupo [44], no observan las oscilaciones en el flujo encontradas por éstos. La razón que argumentan es que en el experimento de Medina (sistema bidimensional puro) los atascos parciales son más probables que en el experimento de Steingart y Evans, donde se utiliza un silo cuasibidimensional con un espesor igual a siete veces el diámetro de la partícula.

### Flujo en función de $D$

A partir de la pendiente de las gráficas se obtiene directamente el flujo medio  $W_b$  en número de partículas por segundo. Si se repite esta medida para un amplio rango de  $D$  se obtiene  $W_b$  respecto a  $D$ . Para las esferas de vidrio hemos comprobado que si  $D$  es lo suficientemente grande, se cumple la *ley de Beverloo*:

$$W_b \sim D^\beta; \quad (4.6.1)$$

donde  $\beta = 2,5$  en 3 dimensiones. El resultado, mostrado en la figura 4.32a, está en perfecto acuerdo con lo explicado por Beverloo [39], Al-Din [40] y Hirshfeld [41].

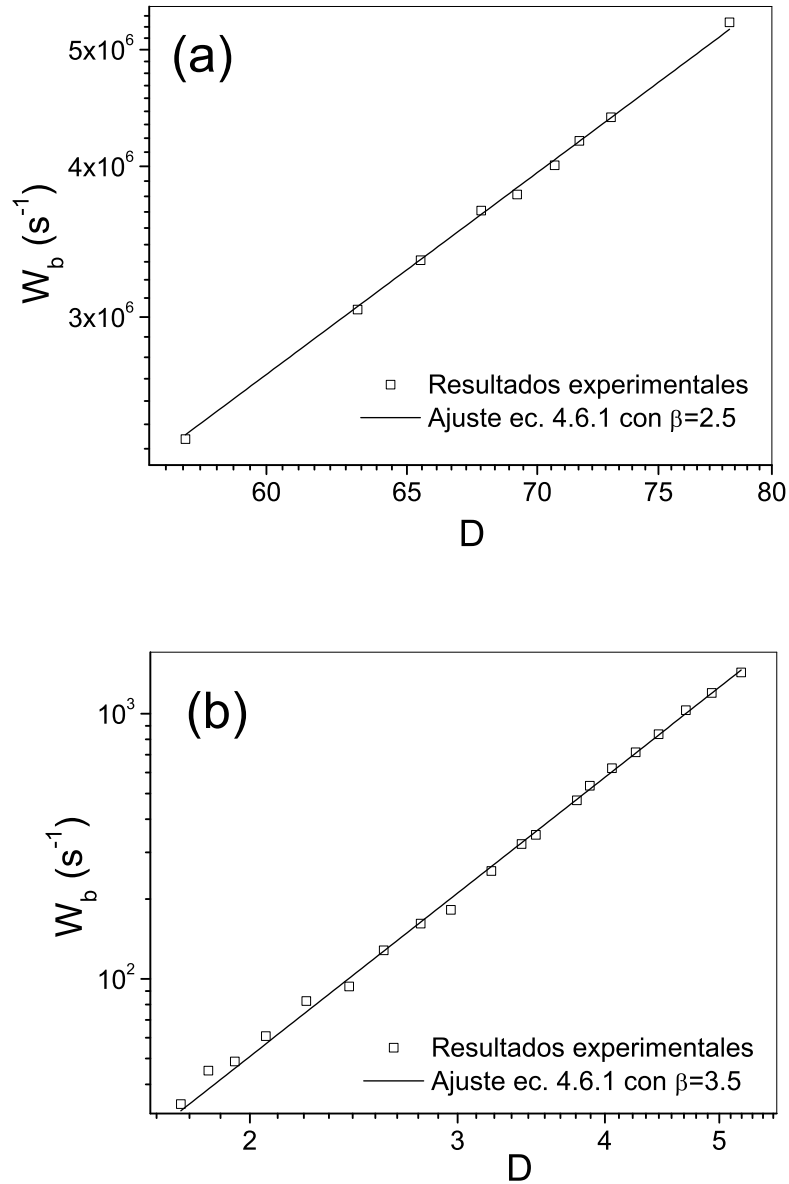


Figura 4.32: Número de partículas por segundo que fluyen a través del orificio para diferentes valores de  $D$ . Los resultados están representados en escala logarítmica. El tamaño de las barras de error es, en todos los casos, menor o igual al tamaño de los símbolos. En (a), con partículas de vidrio de  $d_P = 1,04$ , cuando  $D > 50$  se obtiene  $\beta = 2,5$ . En (b), con partículas de vidrio de  $d_P = 2,06$ , cuando  $D < D_c$  se obtiene  $\beta = 3,5$ .

En cambio, se ha medido también el flujo para valores de  $D$  donde se producen atascos y, como se muestra en la figura 4.32b, la *ley de Beverloo* no es válida: cuando  $D < D_c$  el exponente ( $\beta$ ) vale 3.5. Este valor del exponente  $\beta$ , mayor en el régimen donde se producen atascos que donde no, puede tener su origen en la importancia que tienen en el flujo sus fluctuaciones o atascos parciales para valores pequeños de  $D$ . Cabe pensar que el flujo se ralentiza al aumentar las oscilaciones. Como se observa en la gráfica 4.33, cuando  $D$  es grande  $\beta = 2,5$  (la línea continua muestra el ajuste). A medida que  $D$  disminuye y se acerca a  $D_c$  el flujo decrece más de lo que predice la *ley de Beverloo* y el exponente aumenta suavemente hasta  $\beta = 3,5$ : el flujo se ralentiza más de lo esperado. El origen de este aumento en el exponente cuando  $D < D_c$  puede deberse a que en el modelo de Beverloo no se tienen en cuenta las fluctuaciones del flujo.

Nótese que en la figura 4.33 los resultados del flujo obtenidos con partículas de diferente tamaño no son iguales. Esto se debe a que el flujo, además del diámetro del orificio de salida  $d_O$  (o, adimensionalizado,  $D$ ), depende de otras variables (ecuación 2.2.4).

En esta sección se han explicado los resultados obtenidos para el flujo. En primer lugar se muestra que las velocidades de las partículas en el orificio de salida están en buen acuerdo con la hipótesis de Beverloo: las partículas tienen una velocidad que adquieren al caer libremente y partiendo desde el reposo, desde una altura del orden del tamaño del orificio. Otro resultado interesante es que la correlación entre el número de partículas que caen en una avalancha y su duración es muy alta. También se ha mostrado que se cumple la *ley de Beverloo* para orificios grandes: el flujo es proporcional a  $D$  elevado a 2,5. Sin embargo, para tamaños por debajo del diámetro



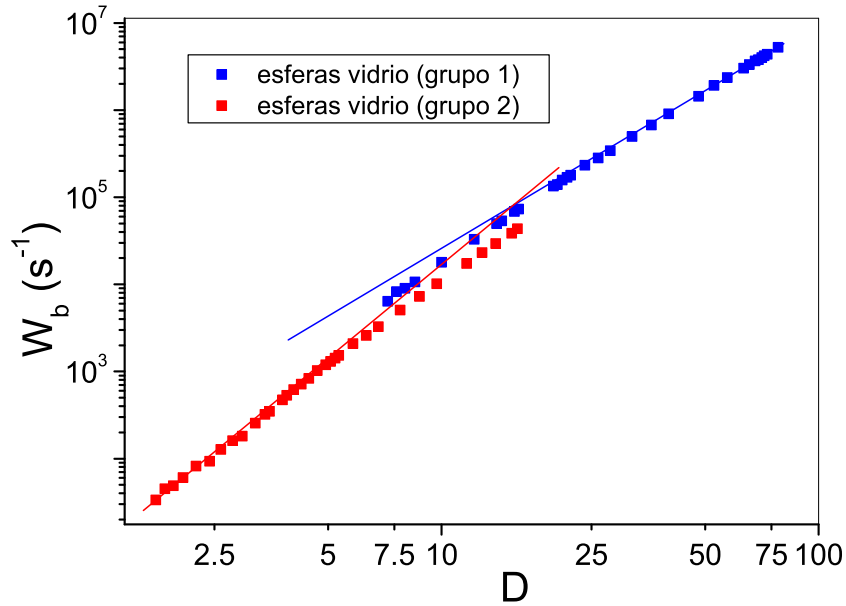


Figura 4.33: Número de partículas por segundo que fluyen a través del orificio para diferentes valores de  $D$ . El tamaño de las barras de error es, en todos los casos, menor o igual al tamaño de los símbolos. Los resultados están representados en escala logarítmica. Las pendientes de las líneas continuas muestran el cambio en el exponente ( $\beta$ ).

crítico se encuentra que el exponente aumenta hasta 3,5. Se cree que este cambio de comportamiento se debe a la mayor importancia de las oscilaciones en el flujo cuando éste es bajo. Además, el cambio en la pendiente del flujo es otro signo de la existencia de un tamaño crítico del agujero por encima del cual no hay atascos.



# Capítulo 5

## Conclusiones

En este capítulo se intentará dar una visión global del conjunto de conclusiones parciales que se han expuesto a lo largo de esta memoria. Además, se propondrán algunas sugerencias para investigaciones futuras que han surgido a partir de la realización de este trabajo.

Uno de los primeros resultados, importante aunque no novedoso, es que en la descarga de un silo el parámetro de control es la relación entre el diámetro del agujero y el de las partículas. Este hecho ya había sido explicado en diferentes condiciones experimentales y en simulaciones, pero es la primera vez que se comprueba en un estudio experimental de la distribución de los tamaños de avalancha en un silo tridimensional.

### **La probabilidad de paso, un proceso descorrelacionado.**

Para partículas esféricas, se ha encontrado que el tamaño de una avalancha no está correlacionado con el de la inmediatamente anterior. Este aspecto quedó de manifiesto con un diagrama de primer retorno en el que los puntos aparecen homogéneamente distribuidos.

También se ha mostrado que en el histograma (en el que se muestra la probabilidad de los tamaños de las avalanchas) existen dos regiones bien diferenciadas. Cuando el

tamaño de las avalanchas es menor que la moda, la probabilidad crece de un modo que no se ha podido determinar con suficiente resolución, pero que bien podría ser una ley de potencias. Cuando el tamaño de las avalanchas es mayor que la moda, la probabilidad decrece exponencialmente.

Para explicar la región del decrecimiento exponencial se ha propuesto un modelo muy simple, basado en que la probabilidad de que un grano – o grupo de granos – pase a través del orificio sea constante en el tiempo. Consecuentemente, la probabilidad de que el silo se atasque es la misma en cada instante. El modelo no es válido cuando el tamaño de las avalanchas es menor que la moda. Pensamos que esto se podría deber a la existencia de un estado transitorio que se da durante los instantes inmediatamente posteriores a la ruptura del puente. Es necesario comprobar este fenómeno mediante otras experiencias. Medir el flujo instantáneo o la fracción de compactación en las proximidades del orificio a lo largo de toda la avalancha son dos de las posibilidades, pero no se han implementado por el momento. Otra opción, que se tiene previsto realizar en un futuro, es hacer el experimento con un silo bidimensional. De este modo se podría acceder visualmente a las proximidades del orificio y observar si realmente se da el estado transitorio.

Otro de los resultados importantes de este trabajo es que, si se utilizan partículas esféricas, al reducir el tamaño de la avalancha con la avalancha media, todos los histogramas para distintos diámetros del orificio de salida colapsan en el mismo. Se puede afirmar que el histograma queda caracterizado con la avalancha media  $\langle s \rangle$ . Alternativamente, se puede caracterizar la parte exponencial del histograma con  $p$ .

### **Existencia de un diámetro crítico.**

Utilizando los resultados de las avalanchas medias para 50 valores diferentes del diámetro del orificio y ajustándolos con una ley de potencias se ha encontrado que existe una divergencia para un cierto diámetro  $D_c$ . En el caso de partículas esféricas se ha encontrado que  $D_c = 4,94 \pm 0,03$ : cuando el diámetro del agujero es mayor que 4,94 veces el de la partícula, el orificio no se atasca. Esto es un indicio de la existencia de una transición entre un estado “atascado” (en el que el flujo es una situación metaestable) y un estado “no atascado” (donde el flujo no se interrumpe). Sin embargo, para afirmar ese extremo habría que encontrar cuál es el parámetro de orden, alguna variable física (como la viscosidad del medio granular) que dé una divergencia crítica para  $D = D_c$ .

### **La formación de arcos, un problema geométrico.**

Se han obtenido resultados del tamaño de las avalanchas medias en función de  $D$  utilizando diferentes tipos de partículas. Se observa que cuando se usan esferas los resultados son los mismos independientemente de su densidad, coeficiente de restitución y rugosidad. En consecuencia, el tamaño crítico del orificio no se ve afectado por estos parámetros. Sin embargo, una pequeña modificación en la forma de los granos origina un notable cambio en el tamaño de la avalancha media y en el diámetro crítico. Esto es una prueba de que, al menos para los tamaños de orificio estudiados, la formación de arcos que atascan el orificio de salida es un proceso esencialmente geométrico, donde factores como la energía cinética de los granos, la disipación de la energía o las propiedades superficiales de las partículas tienen poca importancia.

Todas estas conclusiones han sido corroboradas mediante el estudio de la forma de

los histogramas para los distintos tipos de granos. Cuando las partículas son esféricas se obtiene, en todos los casos, un decrecimiento exponencial. Cuando la forma de las partículas no es esférica la forma de la distribución de los tamaños de las avalanchas es diferente. Este comportamiento podría deberse a dos motivos diferentes. El primero es que las dos longitudes características que tienen este tipo de granos podrían originar en el histograma dos exponenciales diferentes (correspondientes a cada una de las longitudes). Un trabajo que puede ayudar a confirmar esta suposición es realizar medidas utilizando partículas esféricas con un agujero ovalado en la base del silo. Para probar que la hipótesis planteada es cierta, en el histograma deberían aparecer las dos pendientes correspondientes a cada una de las longitudes características de la elipse sin que cambie el tipo de flujo en el interior del silo. Otra posibilidad para explicar el cambio de la forma del histograma es que dependa del tipo de flujo en el interior del silo. Así, el flujo de tipo interno – que sólo hemos encontrado para partículas no esféricas – produciría, por alguna razón que se desconoce, el cambio en la forma de la distribución de los tamaños de las avalanchas.

Un estudio interesante sería medir los tamaños de avalancha para los diferentes materiales cuando el diámetro del orificio está próximo al diámetro crítico. Aunque en la región estudiada en este trabajo (hasta  $D = 4,1$ ) no se dan diferencias significativas entre partículas de diferente densidad, coeficiente de restitución, rugosidad y dispersión, cabe la posibilidad de que éstas aparezcan cerca del punto crítico. Para ello se ha implementado un silo con un sistema de recarga automática. Este silo permitirá obtener tamaños de avalanchas que con el sistema experimental presentado en esta memoria son inalcanzables.

### **Flujo cuando se producen atascos.**

Se han medido las velocidades de las partículas a su salida por el orificio. Los resultados encontrados están en buen acuerdo con la hipótesis establecida por *Beverloo*, según la cual las partículas atraviesan el orificio con una velocidad como la debida a una caída libre partiendo del reposo desde una altura del orden del radio del orificio.

Otro resultado importante es la elevada correlación que existe entre la duración de las avalanchas y sus tamaños, siempre que el diámetro del orificio sea lo suficientemente grande ( $D > 3,5$ ).

Además, se ha encontrado que los resultados de flujo en función del diámetro del orificio se ajustan a la *ley de Beverloo* ( $W \sim D^{2,5}$ ) sólo cuando el diámetro del orificio es suficientemente grande. Para tamaños del agujero inferiores al diámetro crítico, el flujo decrece más rápido de lo esperado:  $W \sim D^{3,5}$ . La *ley de Beverloo* no se cumple en el régimen donde se producen atascos. Este novedoso resultado muestra que, cuando se producen atascos, existe algún fenómeno físico que ralentiza el flujo que no se contempla en la *ley de Beverloo*. Cabe la posibilidad de que este fenómeno físico sea el de las oscilaciones en el flujo. Se piensa que a medida que el diámetro del orificio decrece, el valor relativo de las oscilaciones se hace más importante y el flujo disminuye más de lo que cabría esperar según la *ley de Beverloo*. Esta hipótesis debe ser confirmada con un estudio más extenso. Además se deberá establecer el modo en que afectan al flujo las principales propiedades de las partículas.

Los resultados presentados en esta memoria son los primeros pasos del trabajo que implica la comprensión de los fenómenos de atasco en la descarga de un silo. Las incógnitas que se nos plantean son muchas y el camino que queda por recorrer es, sin duda, apasionante.



# Bibliografía

- [1] M. Faraday, *On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces*, Philos. Trans. R. Soc. London **52** (1831), 299–318.
- [2] O. Reynolds, *On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. With experimental illustrations*, Phil. Mag. Ser. 5 **20** (1885), 469.
- [3] Robert H. Perry, *Manual del ingeniero químico*, 6 ed., vol. 1, Ed. McGraw-Hill, Mexico, 1992.
- [4] P. G. de Gennes, *Granular matter: a tentative view*, Rev. Mod. Phys. **71** (1999), S374.
- [5] F. J. Muzzio, T. Shinbrot, and B. J. Glasser, *Powder technology in the pharmaceutical industry: the need to catch up fast*, Powder Technology **124** (2002), 1.
- [6] H. M. Jaeger and Sidney R. Nagel, *Physics of the granular state*, Science **255** (1992), 1523.
- [7] H. M. Jaeger, Sidney R. Nagel, and R. P. Behringer, *Granular solids, liquids, and gases*, Rev. Mod. Phys. **68** (1996), 1259.
- [8] A. J. Liu and S. R. Nagel, *Jamming is not cool anymore*, Nature **21** (1998), 396.

- [9] A. Metha and G. C. Barker, *The dynamics of sand*, Rep. Prog. Phys. **57** (1994), 383.
- [10] A. P. Shapiro and R. F. Probststein, *Random packings of spheres and fluidity limits of monodisperse and bidisperse suspensions*, Phys. Rev. Lett. **68** (1992), 1422.
- [11] D. A. Weitz, *Packing in the spheres*, Science **303** (2004), 968.
- [12] A. Donev, I. Cisse, D. Sachs, E. A. Variano, F. H. Stillinger, R. Connelly, S. Torquato, and P. M. Chaikin, *Improving the density of jammed disordered packings using ellipsoids*, Science **303** (2004), 990.
- [13] D. Bideau and A. Hansen (eds.), *Disorder and granular media*, Eds. D. Bideau and A. Hansen, 1993.
- [14] Jacques Duran, *Sables, poudres et grains*, Ed. Eyrolles, Paris, 1997.
- [15] Lord Rayleigh, Phil. Mag. Ser. 6 **11** (1906), 129.
- [16] H. A. Janssen, *Tests on grain pressure silos*, Z. Vereins Deutsch Ing. **39** (1895), 1045.
- [17] L. Svarovsky, *Powder testing guide*, Ed. Elsevier Applied Science, London and New York, 1987.
- [18] J. J. Brey, J. W. Dufty, and A. Santos, *Kinetic models for granular flow*, J. Stat. Phys. **97** (1997), 281.
- [19] A. Santos, *Granular fluid thermostated by a bath of elastic hard spheres*, Phys. Rev. E **67** (2003), 051101.
- [20] J. C. Williams, *The segregation of particulate materials: A review*, Powder Technology **15** (1976), 245.

- [21] L. A. Pugnaloni, G. C. Barker, and A. Mehta, *Multi-particle structures in non-sequentially reorganized hard sphere deposits*, *Advances in Complex Systems* **4** (2001), 289.
- [22] K. To and P. Y. Lai, *Jamming pattern in a two-dimensional hopper*, *Phys. Rev. E* **66** (2002), 011308.
- [23] K. To, P. Y. Lai, and H. K. Pak, *Jamming of granular flow in a two-dimensional hopper*, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001), 71.
- [24] K. To, P. Y. Lai, and H. K. Pak, *Flow and jam of granular particles in a two-dimensional hopper*, *Physica A* **315** (2002), 174.
- [25] S. S. Manna and H. J. Herrmann, *Intermittent granular flow and clogging with internal avalanches*, *Eur. Phys. J. E* **1** (2000), 341.
- [26] L. A. Pugnaloni and G. C. Barker, *Structure and distribution of arches in shaken hard sphere deposits*, *Physica A* **337** (2004), 428.
- [27] A. Drescher, A. J. Waters, and C. A. Rhoades, *Arching in hoppers: I. Arching theories and bulk material flow properties*, *Powder Technology* **84** (1995), 156.
- [28] A. Drescher, A. J. Waters, and C. A. Rhoades, *Arching in hoppers: II. Arching theories and critical outlet size*, *Powder Technology* **84** (1995), 177.
- [29] Kiwing To, *Comunicación privada*.
- [30] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality: An explanation of the 1/f noise*, *Phys. Rev. Lett.* **59** (1988), 381.
- [31] P. Bak, C. Tang, and K. Wiesenfeld, *Self-organized criticality*, *Phys. Rev. A* **38** (1988), 364.

- [32] G. T. Seidler, G. Martinez, L. H. Seeley, K. H. Kim, E. A. Behne, S. Zaranek, B. D. Chapman, S. M. Heald, and D. L. Brewster, *Granule-by-granule reconstruction of a sandpile from x-ray microtomography data*, Phys. Rev. E **62** (2000), 8175.
- [33] A. Mehta and G. C. Barker, *Vibrated powders: A microscopic approach*, Phys. Rev. Lett. **67** (1991), 394.
- [34] D. Helbing, I. Farkás, and T. Vicsek, *Simulating dynamical features of escape panic*, Nature **407** (2000), 487.
- [35] D. J. Low, *Following the crowd*, Nature **407** (2000), 465.
- [36] B. S. Kerner and H. Rehborn, *Experimental properties of phase transitions in traffic flow*, Phys. Rev. Lett. **79** (1997), 4030.
- [37] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J. P. Bouchaud, and P. Claudin, *Jamming, force chains, and fragile matter*, Phys. Rev. Lett. **81** (1998), 1841.
- [38] M. E. Cates, J. P. Wittmer, J. P. Bouchaud, and P. Claudin, *Jamming and stress propagation in particulate matter*, Physica A **263** (1999), 354.
- [39] W. A. Beverloo, H. A. Leniger, and J. van de Velde, *The flow of granular solids through orifices*, Chem. Eng. Sci. **15** (1961), 260.
- [40] N. Al-Din and D. J. Gunn, *The flow of non-cohesive solids through orifices*, Chem. Eng. Sci. **39** (1984), 121.
- [41] D. Hirshfeld, Y. Radyzner, and D. C. Rapaport, *Molecular dynamics studies of granular flow through an aperture*, Phys. Rev. E **56** (1997), 4404.
- [42] D. Hirshfeld and D. C. Rapaport, *Granular flow from a silo: Discrete-particle simulations in three dimensions*, Eur. Phys. J. E **4** (2001), 193.

- [43] R. M. Nedderman, U. Tüzün, S. B. Savage, and G. T. Houlsby, *The flow of granular materials: I. Discharge rates from hoppers*, Chem. Eng. Sci. **37** (1982), 1597.
- [44] A. Medina, J. A. Cordoba, E. Luna, and C. Treviño, *Velocity field measurements in granular gravity flow in a near 2D silo*, Phys. Lett. A **250** (1998), 111.
- [45] D. C. Hong and J. A. McLennan, *Molecular dynamics simulations of hard sphere granular particles*, Physica A **187** (1992), 159.
- [46] R. L. Brown and J. C. Richards, *Profile of flow of granulaes through apertures*, Trans. Instn. Chem. Engrs. **38** (1960), 243.
- [47] E. Longhi, N. Easwar, and N. Menon, *Large force fluctuations in a flowing granular medium*, Phys. Rev. Lett. **89** (2002), 045501.
- [48] G. H. Ristow, *Hopper and silo discharge*, Ed. IMechE Seminar Publication, UK, 1999.
- [49] Z. Zhong, J. Y. Ooi, and J. M. Rotter, *The sensitivity of silo flow and wall stresses to filling method*, Engng. Struct. **23** (2001), 756.
- [50] G.W. Baxter, P. Behringer, T. Fagert, and G. A. Johnson, *Pattern formation in flowing sand*, Phys Rev. Lett. **62** (1989), 2825.
- [51] N. Menon and D. J. Durian, *Diffusing-wave spectroscopy of dynamics in a three-dimensional granular flow*, Science **275** (1997), 1920.
- [52] C. Wensrich, *Experimental behaviour of quaking in tall silos*, Powder Technology **127** (2002), 87.
- [53] G.W. Baxter and P. Behringer, *Cellular automata models of granular flow*, Phys Rev. A **42** (1990), 1017.

- [54] Paul W. Cleary, *The effect of particle shape on hopper discharge*, Second International Conference on CFD in the Minerals and Process Industries (CSIRO, Melbourne, Australia), December 1999, p. 71.
- [55] J. W. Carson, T. A. Royal, and D. J. Goodwill, *Understanding and eliminating particle segregation problems*, Bulk Solids Handling **6** (1986), 139.
- [56] P. Arteaga and U. Tüzün, *Flow of binary mixtures of equal-density granules in hoppers – size segregation, flowing density and discharge rates*, Chem. Eng. Sci. **45** (1990), 205.
- [57] A. Samadani, A. Pradhan, and A. Kudrolli, *Size segregation of granular matter in silo discharges*, Phys. Rev. Lett. **60** (1999), 7203.
- [58] E. R. Nowak, J. B. Knight, E. Ben-Naim, H. M. Jaeger, and S. R. Nagel, *Density fluctuations in vibrated granular materials*, Phys. Rev. E **57** (1998), 1971.
- [59] Évelyne Kolb, *Comunicación privada*.
- [60] R. Etchenique and J. Aliaga, *Resolution enhancement by dithering*, Am. J. Phys. **72** (2004), 159.
- [61] F. Radjai, M. Jean, J. J. Moreau, and S. Roux, *Force distributions in dense two-dimensional granular systems*, Phys. Rev. Lett. **77** (1996), 274.
- [62] J. H. Snoeijer, M. van Hecke, E. Somfai, and W. van Saarloos, *Force and weight distributions in granular media: Effects of contact geometry*, Phys. Rev. E **67** (2003), 030302(R).
- [63] Gary Barker, *Comunicación privada*.
- [64] D. Stauffer and A. Aharony, *Introduction to percolation theory*, Ed. Taylor and Francis, London, 1992.

- [65] I. Zuriguel, L. A. Pugnaloni, A. Garcimartín, and D. Maza, *Jamming during the discharge of grains from a silo described as a percolating transition*, Phys. Rev. E **68** (2003), 30301(R).
- [66] I. Zuriguel, A. Garcimartín, D. Maza, L. A. Pugnaloni, and J. M. Pastor, *Jamming during the discharge of granular matter from a silo*, aceptado en Phys. Rev. E.
- [67] D. A. Steingart and J. W. Evans, *Measurements of granular flows in two-dimensional hoppers by particle image velocimetry. Part I: experimental method and results*, Chem. Eng. Sci. **60** (2005), 1043.