



# Universidad de Navarra

Programa de Doctorado en  
Sistemas Complejos

**Dinámica de un Dímero Magnético**

Laura Milena Pérez Fuentes





Universidad de Navarra

Programa de Doctorado en  
Sistemas Complejos

## Dinámica de un Dímero Magnético

Memoria presentada por **D<sup>a</sup>. Laura Milena Pérez Fuentes** dentro de la materia **Proyecto de Investigación** del Programa de Doctorado

El presente trabajo ha sido realizado bajo mi supervisión y ha obtenido la calificación de: .....

Pamplona, 19 de mayo de 2014

Dr. Héctor Mancini Maza



Declaración:

Por la presente yo, **D<sup>a</sup>. Laura Milena Pérez Fuentes**, declaro que esta memoria es fruto de mi propio trabajo y que en mi conocimiento, no contiene ni material previamente publicado o escrito por otra persona, ni material que sustancialmente haya formado parte de los requerimientos para obtener cualquier otro título en cualquier centro de educación superior, excepto en los lugares del texto en los que se ha hecho referencia explícita a la fuente de la información.

De igual manera, autorizo al Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, la distribución de esta memoria y, si procede, de la "fe de erratas" correspondiente por cualquier medio, sin perjuicio de los derechos de propiedad intelectual que me corresponden.

Pamplona, 19 de mayo de 2014

D<sup>a</sup>. Laura Milena Pérez Fuentes

© Laura Milena Pérez Fuentes

Derechos de edición, divulgación y publicación:

© Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra



# Agradecimientos

Primero que todo agradezco a mi tutor, Profesor Dr. Héctor Mancini, por todo su apoyo en este periodo de mi vida y por confiar en mi. Agradezco a todos los Profesores y mis compañeros del Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra por el tiempo compartido, aunque haya sido poco en Pamplona, fue intenso y muy grato.

También quisiera agradecer al Profesor Dr. Harald Pleiner del Instituto Max Planck de Investigación en Polímeros (Magancia, Alemania), y al mismo Instituto donde parte de esta investigación fue realizada.

Finalmente, agradezco a mi esposo e hijo por su incondicional amor y apoyo, sin los cuales este doctorado no habría sido posible.





# Índice General

<b>1.- Introducción</b>	<b>1</b>
1.1.- Breve historia del magnetismo .....	1
1.2.- Clasificación básica de los materiales magnéticos .....	7
<b>2.- Dinámica de la Magnetización</b>	<b>11</b>
2.1.- Estado del Arte .....	11
2.2.- Ecuaciones de Movimiento .....	16
2.2.1.- Conservación del modulo .....	17
2.3.- Ecuación Landau-Lifshitz Conservativa .....	18
2.4.- Disipación de Gilbert: Ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert .....	20
2.5.- Soluciones de Equilibrio .....	23
2.6.- Campo Efectivo .....	23
2.7.- Dinámica de una partícula .....	25
<b>3.- Dinamica de un dímero magnético</b>	<b>28</b>
3.1.- Motivación del problema .....	28
3.2.- Modelo teórico .....	29
3.2.1.- Consideraciones numéricas e indicadores .....	33
3.2.2.- Caso conservativo .....	36
3.2.3.- Caso disipativo .....	41
<b>4.- Conclusiones</b>	<b>47</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>49</b>

# Capítulo 1

## Introducción

En este capítulo se introduce el magnetismo de forma no técnico, se describe algunas características de los materiales magnéticos, como también los conceptos básicos que se usarán a lo largo de esta memoria.

### 1.1 Breve Historia del Magnetismo

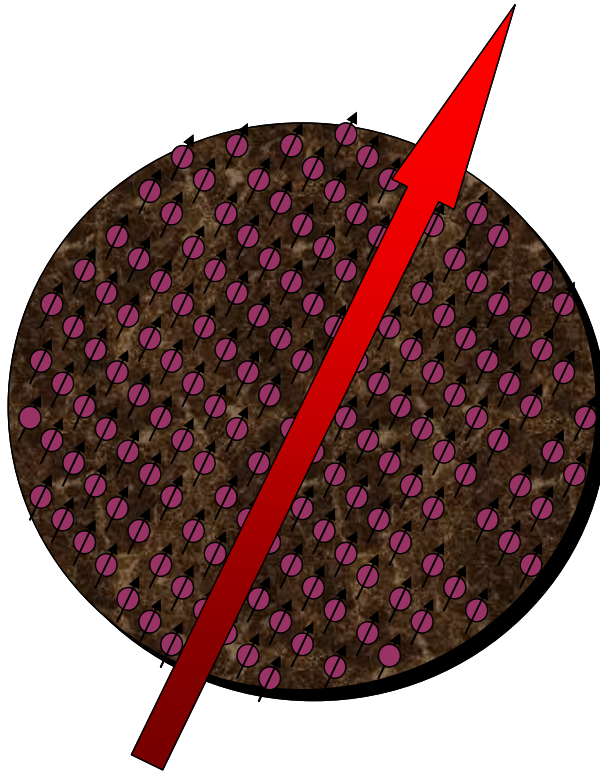
El magnetismo se centra en el amplio estudio sobre espín y sus efectos colectivos, y sobre partículas cargadas en movimiento; consecuentemente está fundamentalmente relacionado con los fenómenos eléctricos [1]. En palabras simples el magnetismo clásico estudia las fuerzas de atracción o repulsión que un objeto ejerce sobre otro. Este es un campo muy activo y diverso de la física, donde todavía existen múltiples fenómenos que investigar. Si bien es cierto el magnetismo tiene un origen puramente cuántico, muchas de las propiedades pueden ser explicadas clásicamente o semi-clásicamente. Nos gustaría aclarar que en esta memoria solo se estudiarán sistemas que puedan ser descritos por la teoría (semi-)clásica.

La historia del magnetismo es muy antigua, se remonta a la antigua Grecia y China. La leyenda versa que un pastor llamado Magnes cuando paseaba por la zona de Magnesia en Asia Menor se asombró de que los clavos de sus zapatos se adhirieran a la roca sobre la cual caminaba. Este tipo de roca se llamó después magnetita. Los primeros registros sobre descripciones de materiales magnéticos son alrededor del 600 A.C. sobre las propiedades magnéticas de piedras de ferrita férrica natural ( $\text{Fe}_3\text{O}_4$ ) por filósofos chinos y griegos. Las brújulas chinas con piedra imán son elaboradas alrededor del 100 D.C., en cambio en occidente la primera referencia occidental a la

brújula es por Alexander Neckem en el año 1175 . El celebre libro "*De Magnete*" publicado en el año 1600 escrito por William Gilbert, quien era el medico personal de la Reina Elisabeth I y contemporáneo a Galileo, es la culminación de décadas de experimentos con imanes y electricidad, en el cual se demuestra que la Tierra es un imán, y que este era el motivo por el cual las brújulas apuntaban al norte [2]. En Inglaterra en el año 1745 Gowin Knight, descubre el proceso para producir acero magnetizado, con lo cual produce los primeros imanes artificiales, que con carácter comercial fueron vendidos a otros científicos y a navegantes.

El físico danés Hans Christian Oersted, demostró que una corriente eléctrica produce un campo magnético en el año 1820. Posteriormente, Michael Faraday propone la ley de inducción electromagnética en 1831, además propone el uso de *lineas de campo* para representar el campo magnético, concepto que se generalizo posteriormente a cualquier campo vectorial. Hasta aquel entonces el magnetismo y la electricidad eran tratados por separado, hasta que James C. Maxwell unifica las teorías electromagnéticas, dando una visión global del electromagnetismo clásico [3]. Haciendo un salto en la historia hasta después de los inicios de la creación de la teoría Cuántica, en el año 1925 fue introducido el concepto de *espín* como el **momento angular intrínseco** de una partícula cuántica, siendo este una nueva propiedad de la materia [4]. Normalmente el espín se denota por la letra **S**. Este nuevo concepto, reportado inicialmente por Ralph Kronig, George Uhlenbeck y Samuel Goudsmit, vuelve a revolucionar la física ya que hasta aquel entonces solo se conocían las propiedades de masa y de carga. El hecho de tener un numero cuántico adicional ayudo a entender profundamente como se comportan los constituyentes de la materia, tanto así que hoy sabemos que la materia se puede clasificar en dos grandes grupos *bosones*, que son partículas con espín par; y *fermiones* que son partículas con espín impar, tal que ellas cumplen con diferentes estadísticas, respectivamente [4]. El primer intento teórico por entender el efecto del espín en la dinámica de los electrones fue hecho por Wolfgang Pauli, creado una ecuación para el electrón que contuviese dicha información en la aproximación no-relativista; la cual hoy lleva su nombre. Además, enunció el principio sobre los fermiones, estableciendo que no puede haber dos

de estas partículas con todos sus números cuánticos idénticos. Basado en los trabajos de Pauli, uno de los físicos más prominentes del siglo XX, Paul A. M. Dirac desarrollo en 1928 una ecuación que describe correctamente al electrón, esta ecuación se conoce como *ecuación de Dirac*, y le da un énfasis relativista al espín [5].



**Figura 1.1:** Esquema de un mono-dominio magnético.

Hasta el día de hoy se ha observado experimentalmente que el componente mínimo del magnetismo es el momento dipolar magnético, denotado generalmente por  $\mu$ . Tal que dicho momento de un sistema (atómico) determinado se puede escribir en función del momento angular,  $\mathbf{J}$ , total mediante la ecuación [1]:

$$\boldsymbol{\mu} = -g(q_e/2m)\mathbf{J}, \quad (1.1)$$

donde  $-q_e$  y  $m$  son la carga del electrón y la masa, respectivamente. El factor  $g$  es un factor característico. Para electrones  $g$  se conoce como “factor de Lande”, mientras que para protones o

neutrones como “factor nuclear”. Una de las grandes virtudes de la ecuación de Dirac es el hecho que se puede derivar el valor  $g$ , que explícitamente es  $g=2$ . Este valor es muy cercano al valor medido, donde las diferencias vienen dadas por fluctuaciones cuánticas de los campos electromagnéticos [6]. Nos gustaría comentar someramente que se ha postulado la existencia de monopolos magnéticos, sin embargo no ha habido evidencia experimental reproducible que lo compruebe. En el caso clásico, un material magnético esta compuesto por múltiples átomos, donde se forman agrupaciones llamadas *dominios magnéticos* y el componente mínimo se conoce como **mono-dominio**. La relación entre la descripción del microscópica y la macroscópica esta dada por  $\mathbf{m} = \langle \mu \rangle / V$ , donde  $\mathbf{m}$  se conoce como magnetización,  $V$  es el volumen de la región y el símbolo  $\langle \bullet \rangle$  denota el promedio o valor esperado. La Figura 1.1 muestra un esquema de un mono-dominio magnético, donde se ejemplifica el hecho que el colectivo de átomos genera una magnetización efectiva en el material magnético.

Continuando con la historia, una vez que ya entendió el concepto del espín, se empezó a estudiar como interactúan entre ellos. En el mismo año 1928, Werner Heisenberg y Paul A. M. Dirac, en forma independiente, desarrollaron la interacción de intercambio entre dos electrones desapareados cuando están relativamente próximos [7]. Esto se puede dar en el mismo átomo o ion, como entre dos átomos o iones. La interacción de intercambio es fundamental y describe buena parte de los procesos magnéticos, además de tener manifestaciones en la química. El modelo fenomenológico que propuesto por ambos premios Nobel, conocido como *modelo de Heisenberg*, para dos operadores de espín ( $\mathbf{S}_1, \mathbf{S}_2$ ) tiene un Hamiltoniano de la forma [1]:

$$\mathcal{H} = J_{12} \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2, \tag{1.2}$$

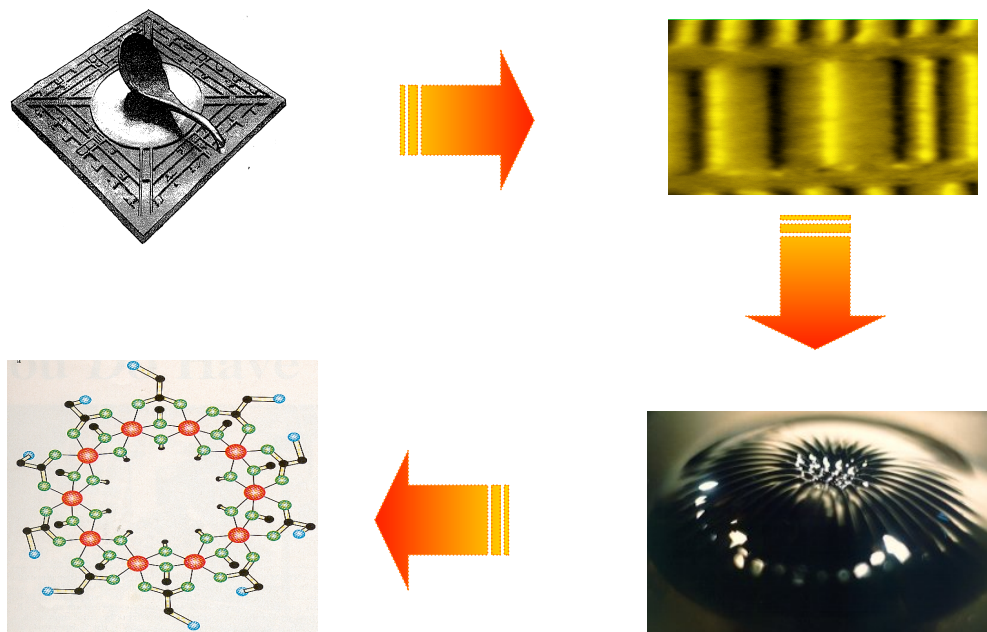
donde  $J_{12}$  es la integral de intercambio. Después de este modelo, se han desarrollado múltiples generalizaciones de la ecuación (1.2) para entender diferentes fases magnéticas de los materiales. También se ha ocupado de forma clásica suponiendo que no son operadores de espín, sino momentos angulares clásicos [1,7]. En muchos casos origen cuántico del magnetismo se pierde

cuando se trata de explicar los efectos magnéticos de los sólidos de dimensiones espaciales mayores o del orden de los micrómetros [8].

Por otra parte y mas de un punto de vista tecnológico, en el siglo XX se siguió avanzando en la mejora de imanes, en 1930 produce el primer imán de Alnico que es una aleación principalmente de cobalto, níquel, y aluminio (de allí el nombre Al-Ni-Co) [9]. Hasta la década de los 70 fueron los imanes permanentes más fuertes de uso comercial, ya que algunos poseen una intensidad de campo en los polos que es aproximadamente 3000 veces más fuerte que el campo magnético de la Tierra. Una de las aplicaciones tecnológicas del magnetismo que ha tenido un gran impacto en nuestra forma de ver el mundo, es la grabación magnética cuyos orígenes remontan a los trabajos de Oberlin Smith en 1878. Lo que uno puede recordar de niñez son escuchar música en una radio-cassette o ver películas en citas de VHS. Allí el almacenamiento de datos eran mediante cintas magnéticas, que simplemente son una banda plástica con un material magnetizado. La historia de la grabación magnética es por si interesante, y se dejará al lector de esta memoria que lo investigue por si solo si lo desea [10].

En las ultimas décadas se ha desarrollado en forma explosiva la nano-ciencia, que es el estudio de objetos con escalas espaciales de nanometros ( $10^{-9}$  m), en al menos alguna dirección espacial. Una de las características fundamentales de las nano-estructuras es que la razón entre la superficie y el volumen es tremenda. En un mismo material, muchas de las propiedades físicas cambian a estas escalas respecto a las propiedades del bulto [11-12]. Solo por nombrar dos aplicaciones en concreto veamos en breve, los *ferrofluidos* y las *moléculas magnéticas*. Estos fluidos son suspensiones de nanopartículas magnéticas en un liquido no conductor típicamente aceites o agua [13]. Los ferrofluidos normalmente no presentan fase magnética en ausencia de campo externo aplicado. Las aplicaciones son múltiples, desde usos militares hasta medicinales [13, 14]. A su vez, las moléculas magnéticas son sistemas en los que se puede obtener magnetización permanente no a través de un ordenamiento magnético, sino por un fenómeno puramente molecular [15]. El primer caso se que estudio fue el  $Mn_{12}$  [ $Mn_{12}O_{12}(CH_3COO)_{16}(H_2O)_4$ ]

se midió experimentalmente el efecto túnel en la desmagnetización [15, 16]. En estos últimos años se han sintetizado variados tipos de moléculas magnéticas con diferentes propiedades y aplicaciones [16].



**Figura 1.2:** Esquema breve de la historia del magnetismo. Los recuadros superiores son una brújula china (izquierda) y una cinta de grabación magnética (derecha). Los recuadros inferiores son un ferrofluido (derecha) y una molécula magnética (izquierda).

La Figura 1.2 muestra esquemáticamente lo que hemos relatado sobre la historia. Hemos tomado en consideración cuatro ejemplos en secuencia temporal progresiva. Partimos con la brújula que ayudó a la exploración de los mares, seguimos la cinta de grabación magnética que nos cambió la forma de comunicarnos, seguimos con los ferro-fluidos que están generando una revolución en múltiples campos aplicados como por ejemplo en medicina se usa trasladar dosis radioactivas a través del torrente sanguíneo, y por último una imagen de una molécula magnética que todavía no conocemos sus verdaderos alcances y potenciales tecnológicos. Finalmente, nos gustaría remarcar que para versiones muchísimo más acabadas de la historia del magnetismo se puede encontrar en las referencias [1,4,8,9,16,17-20] que nos hemos basado en parte para escribir esta sección.

## 1.2 Clasificación básica de los materiales magnéticos

Los materiales magnéticos pueden ser clasificados según su respuesta ante campos magnéticos aplicados como diamagnéticos, paramagnéticos, ferromagnéticos o antiferromagnéticos [1]. Estas respuestas difieren fuertemente en su intensidad. El **diamagnetismo** se debe al movimiento de los electrones, y es la propiedad de todos los materiales en repeler al campo magnético. En su estado fundamental los materiales diamagnéticos no presentan momento magnético atómico, por lo cual no pueden presentar magnetización espontánea. Elementos diamagnéticos típicos son por ejemplo el Helio, o el Bismuto. El **paramagnetismo** se manifiesta solo cuando hay un campo externo aplicado, a pesar de que los elementos que si poseen momento magnético atómico. Cuando un campo magnético está presente, los materiales paramagnéticos exhiben una magnetización en la dirección del campo, siendo ella es proporcional al campo externo. En general estos materiales no poseen un ordenamiento magnético, y sus momentos magnéticos están distribuidos en forma aleatoria en ausencia de campo aplicado. El efecto paramagnético es por lo general mucho más intenso que el diamagnético. Algunos materiales paramagnéticos son el Hidrogeno, el Sodio, el Rubidio, así como el Galio. Las primeras teorías tanto del diamagnetismo como del paramagnetismo se debe al físico francés Paul Langevin formulada a principio del 1900 [21]. Su teoría concuerda bastante bien con los varios datos experimentales. Versiones mejoradas de estas teorías de carácter cuántico fueron hechas por Wolfgang Pauli y por Lev D. Landau, respectivamente [1,9,22].

El **ferromagnetismo** produce un ordenamiento en la configuración de los momentos magnéticos del material, tal que tiene a ordenarlos en la misma dirección y sentido. Estos materiales tienen momento magnético no nulo, y son capaces de presentar magnetización espontánea en ausencia de campos externos. Su efecto es relativamente fuerte, produciendo magnetizaciones algunas



veces mayores en ordenes de magnitud al del campo magnético aplicado. Los materiales ferromagnéticos por excelencia son Hierro, Cobalto y Níquel. Finalmente, en el **antiferromagnetismo** los momentos magnéticos interactúan de tal forma que produce patrones alternados en la dirección del momento magnético de cada momento en forma de pares tal que la magnetización global es nula. El elemento antiferromagnético básico es el Cromo o el Manganeso. Las primeras teorías para entender los materiales ferro- y antiferro fueron desarrolladas por Pierre Weiss y por Louis Néel, respectivamente [23-24]. Luego siguieron los modelos de Heisenberg, Ising y los modelos de bandas hechos por Stoner. Una visión mas completa de ello se puede encontrar en las referencias [1,9,20,22].

**Figura 1.3:** Esquema de tabla periódica con características magnéticas.

**TABLA PERIODICA DE LOS ELEMENTOS**

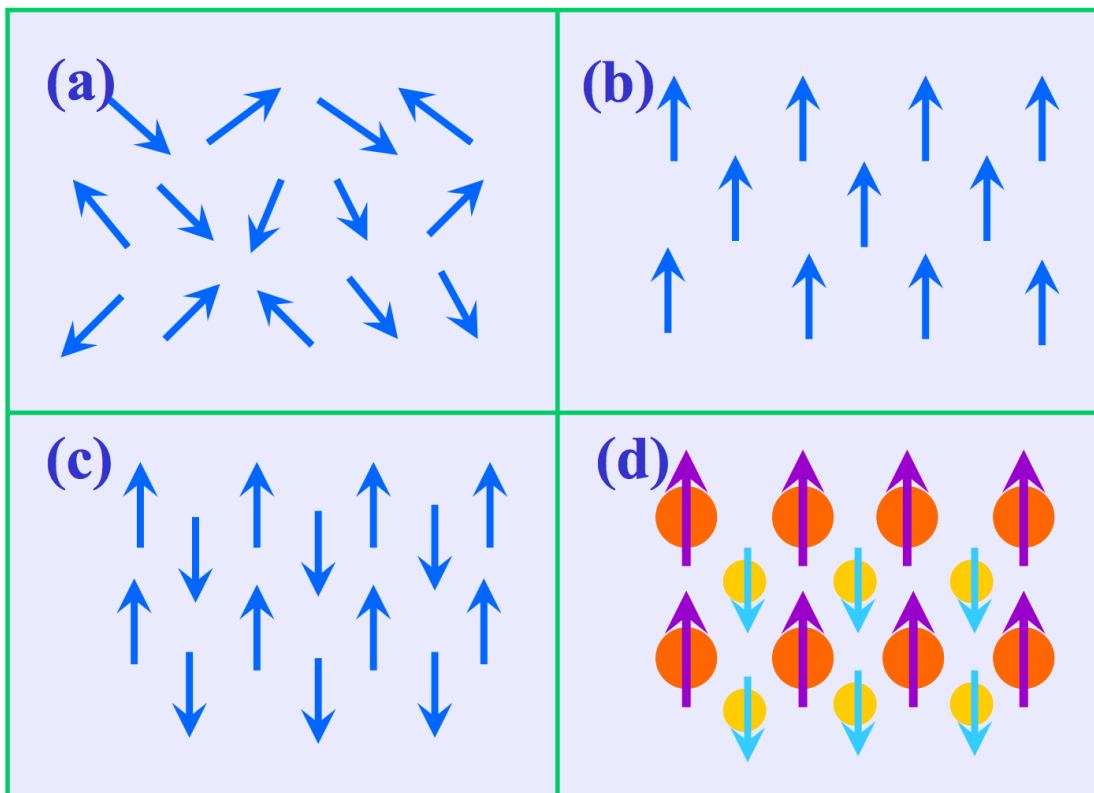
	1A	2A	3A	4A	5A	6A	7A	8	1B	2B	3B	4B	5B	6B	7B	0		
1	1 H															2 He		
2	3 Li	4 Be										5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne	
3	11 Na	12 Mg										13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar	
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	L La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	A Ac	89 Th	90 Pa	91 U	92 Np	93 Pu	94 Am	95 Cm	96 Bk	97 Cf	98 Es	99 Fm	100 Md	101 No	102 Lr	103 Lr
				57 La	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
				89 Ac	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

■ Paramagnético      ■ Antiferromagnético  
■ Diamagnético      ■ Ferromagnético

Para dar una idea de como se distribuyen “magnéticamente” los elementos químicos, la Figura 1.3 muestra el la tabla periódica de elementos con sus correspondientes propiedades magnéticas.

Podemos apreciar que los elementos paramagnéticos son los más abundantes, seguidos por los diamagnéticos puros; y finalmente por los ferro- y antiferromagnéticos. Por supuesto que combinaciones de distintos elementos producen diferentes ordenes magnéticos, como por ejemplo las compuestos  $\text{CrBr}_3$ ,  $\text{Cu}_2\text{MnAl}$ ,  $\text{EuO}$  y  $\text{MnAs}$  son materiales ferromagnéticos, mientras que los compuestos  $\text{MnO}$ ,  $\text{FeO}$ ,  $\text{RbMnF}_3$  y  $\text{KFeF}_3$  son antiferromagnéticos.

**Figura 1.4:** Esquema sobre diferentes ordenamientos magnéticos. Los recuadros son: (a) paramagnético,



(b)ferromagnético, (c) antiferromagnético, y (d) ferrimagnético.

Por otra parte, hacemos notar que existen otros tipos de ordenes magnéticos. Como es el caso del **ferrimagnetismo**. Los materiales ferrimagnéticos consisten en al menos dos sub-redes magnéticas acopladas antiferromagnéticamente [1]. Este presenta magnetización espontánea en ausencia de campo. Los valores de magnetización de un ferrimagneto por lo general nos menores que los de un ferromagneto. Típicos materiales ferrimagnéticos son de la forma  $(\text{XO})\cdot\text{Fe}_2\text{O}_3$ , donde

X es un ion metálico divalente, como Mn, Ni, Fe, Co, o Mg; otro material que ha tomado un reciente interés es el GdFeCo. La Figura 1.4 es un esquema de los cuatro principales tipos de ordenes magnéticos. El recuadro (a) muestra el caso paramagnético, donde vemos que los momentos magnéticos están alzar. El recuadro (b) muestra el caso ferromagnético donde todos los momentos magnéticos están alineados en la misma dirección. El recuadro (c) muestra un ejemplo de materiales antiferromagnéticos donde se observa que los momentos están alienados con un patrón itinerante con magnitudes iguales. Por ultimo, el recuadro (d) expone el caso del ferrimagnetismo donde también hay una alineación itinerante, pero la magnitud de los momentos de las diferentes especies difieren.

Finalmente, hacemos notar que debido a que los ferromagnetos pueden exhibir magnetización espontánea por largos periodos de tiempo, y los valores de saturación son relativamente mayores que los otros tipos de materiales, los convierte en materiales interesantes desde el punto de vista tecnológico. En lo que sigue de la memoria trabajaremos solo sobre estos materiales.

## Capítulo 2

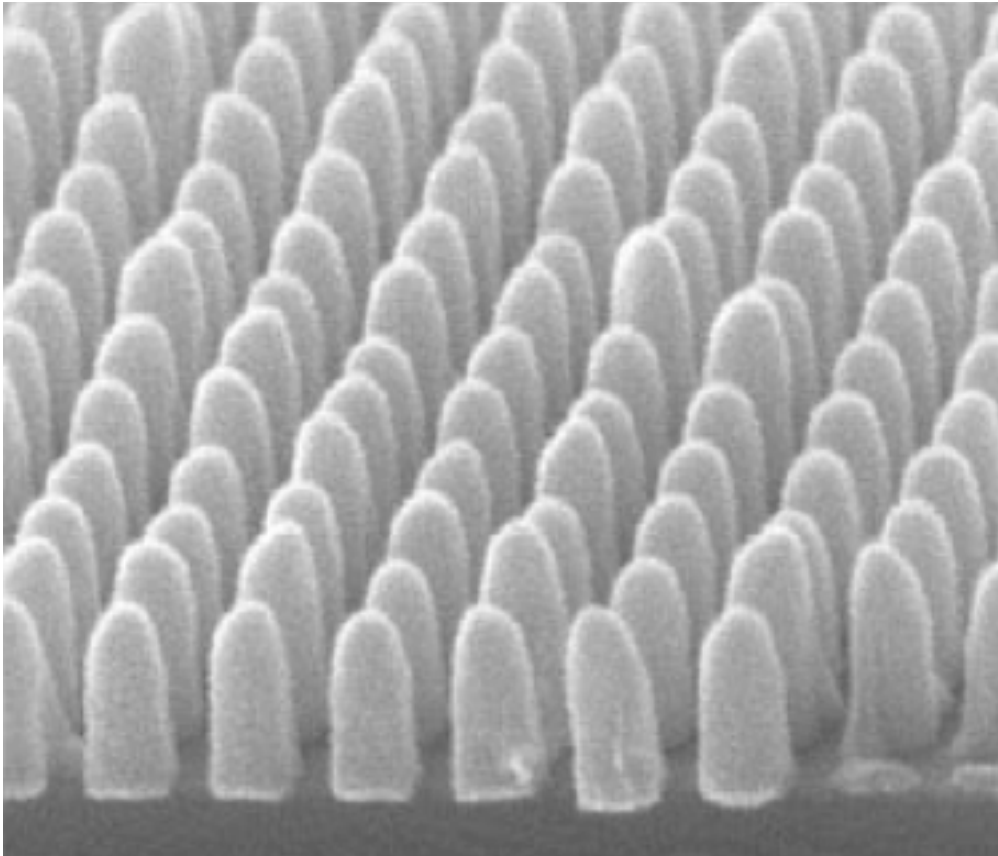
# Dinámica de la Magnetización

En este capítulo se estudia la dinámica de sistemas magnéticos en general. Se presenta primeramente un estado del arte, luego se describe las ecuaciones de movimiento y se ven las principales características. Finalmente, se describe la dinámica de una partícula magnética.

### 2.1 Estado del Arte

En ciencia de materiales una aplicación significativa de las partículas magnéticas es la grabación magnética. De hecho, existe un interés por almacenar datos en sistemas que consisten en colecciones de granos magnéticos sobre un sustrato no magnético [25-26]. Como comentamos en el capítulo anterior a escala meso- y macroscópica, donde los efectos cuánticos no son relevantes, el componente mínimo de un sistema magnético es el mono-dominio magnético. Actualmente, la tecnología puede producir arreglos de mono-dominios con diferentes características tanto del arreglo como del material a diferentes escalas de tamaño partiendo desde los nanómetros. Por lo cual es accesible el estudio tanto de un mono-dominio aislado, pocos dominios, o como también el estudio del arreglo completo.

Dependiendo de la geometría y de la composición, los dominios pueden tener direcciones privilegiadas donde magnetizarse, estas direcciones se les llama ejes fáciles de magnetización. Si un mono-dominio posee un eje de fácil magnetización, a muy baja temperatura, la magnetización a campo externo nulo puede tener dos orientaciones posibles las que pueden representar los bits 0 ó 1, siendo base de memorias magnéticas. Hoy por hoy se han alcanzado densidades de almacenamiento de información del orden de  $10^2$  Gbit/in<sup>2</sup> o más [25].



**Figura 2.1:** Conjunto de nano-cilindros ordenados. Cada partícula tiene magnetización uniforme por lo cual se puede considerar como un bit de información. La figura ha sido tomada de la referencia [25].

La Figura 2.1 muestra un arreglo de partículas magnéticas típicas el cual es un candidato prototipo para los nuevos sistemas de información. Cuando hay efectos externos aplicados, como un campo magnético, los momentos magnéticos muestran dinámicas interesantes.

Los procedimientos estándares para estudiar la dinámica de momentos magnéticos es a través de las ecuación de Landau–Lifshitz (LL) [27] o bien de la ecuación de Landau–Lifshitz–Gilbert (LLG) [28]. Por otra parte, dependiendo de la distancia entre partículas y/o de la geometría del sistema magnéticos, los diferentes tipos de interacciones magnéticas se puede manifestar. El efecto de ellas puede cambiar drásticamente el proceso de reversión magnética. De hecho, cualquier tipo de interacción entre partículas o bien efectos de auto-energía (como auto-interacción dipolar) genera términos no-lineales en la ecuaciones de movimiento. Consecuentemente, la combinación de las interacciones, la disipación de energía y la inyección de energía mediante campos magnéticos externos, generan una dinámica compleja.

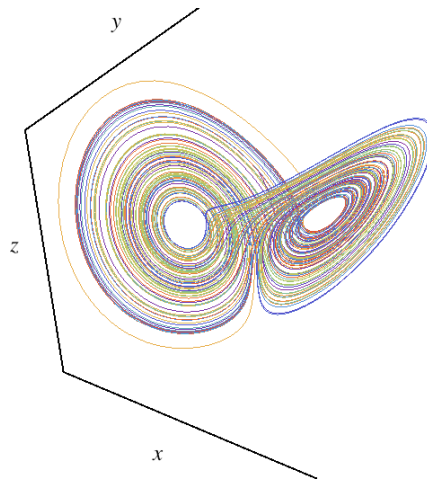
Problemas no-lineales en magnetismo han sido estudiado en muchos casos y el estado del arte se puede encontrar en las referencias [29-32]. Desde el punto de vista teórico, soluciones analíticas tanto para las ecuaciones de LL y LLG son dificultosas de obtener debido a la no-linealidades de estas ecuaciones; y solo en muy pocos casos se han podido obtener. Por ejemplo, un caso donde se conocen soluciones analíticas, tanto para el caso conservativo como disipativo, es el problema de una partícula con anisotropía uniaxial en presencia de un campo externo paralelo al eje de anisotropía [33]. Soluciones analíticas para una partícula anisótropa con diferentes orientaciones del campo respecto a los ejes de anisotropía se pueden encontrar en las referencias [34-35]. Asimismo, un buen tratamiento sobre el aspecto no-lineal cualitativos de la dinámica disipativa de una partícula magnética con anisotropía uniaxial bajo un campo magnético circularmente polarizado fue reportado en la referencia [36], y como una continuación a dicho trabajo un estudio sobre las perturbaciones del momento magnético cuando el campo esta polarizado elípticamente fue también realizado la referencia [37]. En ambos casos se estudian las bifurcaciones asociadas a los ciclos limites, encontrando las regiones de inestabilidad de estos. En le caso de polarización circular, se puede hacer un cambio de variables llevando el sistema no-autónomo a uno autónomo con un campo efectivo. Un estudio sobre estados quasi-periódicos usando teoría de perturbaciones en la ecuación de LLG fue reportado en la referencia [38].

Dinámicas complejas en magnetismo ha sido un tópico de bastante interés tanto desde el punto de vista teórico como experimental [29]. Uno de los fenómenos más interesante en sistemas complejos es el **caos** [39-44]. El comportamiento caótico en sistemas dinámicos no-lineales determinísticos es un comportamiento *aperiodico* a largos lapsos de tiempo; es decir las series temporales asociadas a cada componente del sistema son no regulares [40]. Hasta la fecha, solo se ha observado que el caos aparece en conjuntos de ecuaciones diferenciales ordinarias tal que su dimensión efectiva sea mayor o igual que tres, lo que concuerda con la teoría del caos [41]. Una característica fundamental y universal de los sistemas caóticos es que ellos tienen una gran *sensibilidad a las condiciones iniciales*. Esto que implica para en un régimen de parámetros donde

el caos ocurre, si se deja evolucionar el sistema con dos condiciones iniciales infinitesimalmente cerca luego de un cierto tiempo las dos trayectorias dejan de estar cercanas y empiezan a tener evoluciones totalmente diferentes [42]. Mas aún, estos modelos poseen el hecho que sus *atractores son extraños*, lo que significa que las trayectorias en el espacio de fases no son ni suaves, ni son curvas cerradas; pero si en la mayoría compactas (ocupan una región del espacio de fases finita) [40]. Respecto a que el sistema sea determinista, se refiere a que ninguna fuerza aleatoria este presente. Cuando se combinan ambos efectos, es decir se tiene un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales estocásticas, por lo general el umbral del caos cambia o se suprime [43]. Diferentes técnicas se utilizan para la caracterización del caos, tales como transformadas de Fourier o/y de Wavelet, diagramas de bifurcaciones, secciones de Poincaré, diagramas de fases con atrasos, mapas de recurrencias, cálculos de diferentes correlaciones de las series temporales, computo de la dimensión fractal del atractor, como también el calculo *exponentes de Lyapunov* [40-45]. Este ultimo método se basa en el computo de la divergencia de dos condiciones iniciales infinitesimalmente cercanas. Los algoritmos descritos para calcular los exponentes de Lyapunov en el trabajo de Wolf y colaboradores son los más usados [44]. Basados en estos algoritmos, se han hecho estudios paramétricos variando simultáneamente dos parámetros en orden de clasificar los diferentes regímenes de un sistema. Una descripción general sobre este tópico se puede encontrar en la referencia [45].

Este fenómeno del caos, que es transversal a todas las ramas de la ciencia, fue descubierto por Edward Lorenz en 1963 estudiando problemas de fluidos, específicamente en la convección de una capa de fluido calentado desde la parte inferior [39]. Fue un trabajo pionero ya que abordó el problema desde un punto de vista teórico, y lo complementó con simulaciones numéricas. La clave del sistema de ecuaciones de Lorenz esta en reducir las ecuaciones en derivadas parciales de la hidrodinámica y de transferencia de calor a un conjunto de tres ecuaciones diferenciales ordinarias. Las cuales dan cuenta desde la transición del estado conductivo, al convectivo estacionario; y posteriormente otra transición desde dicho estado a uno convectivo aperiódico.

Además, de encontrar este sistema de ecuaciones, mediante simulaciones numéricas logro encontrar un orden dentro de la aperiodicidad, haciendo un mapa de recurrencia del máximo local de una de las componentes. El trabajo de Lorenz no tomo impacto casi por una década, sin embargo ha creado áreas de investigación, revolucionando la manera de entender el mundo.



**Figura 2.2:** Trayectoria del sistema de Lorenz [39]:  $\dot{x} = p(x - y)$ ,  $\dot{y} = (r - z)x - y$ ,  $\dot{z} = xy - bz$ , con  $r=29$ ,  $p=7$  y  $b=8/3$  y condiciones iniciales aleatorias.

Hacemos notar que el hecho de la existencia de la divergencia en las condiciones iniciales, se popularizo como el *efecto mariposa* y esto se debe en parte a que el atractor extraño encontrado en el sistema de Lorenz tenga forma de Mariposa como se muestra en la Figura 2.2. Dos fuentes bibliográficas sobre la fascinante historia del caos se pueden encontrar en las referencias [46-47].

Situándonos nuevamente en sistemas magnéticos, múltiples experimentos que muestran pautas caóticas han sido reportados [48-51]. Típicamente las muestras magnéticas son esferas de YIG (*Yttrium-Iron-Garnet*) [48]. Vale la pena mencionar que mediante el uso de la técnica de resonancia ferromagnético, diferentes rutas al caos se han encontrado tales como cascadas duplicación del período, rutas cuasi-periódicos, y de dinámica intermitente. Por lo tanto, se necesita una descripción teórica incluyendo diagramas de fase de las regiones caóticas y puede motivar a otros experimentos en esta área. Estudios teóricos sobre el caos de una partícula magnética anisotrópica en prescencia de campos magnéticos dependiente del tiempo ha sido un



abordado desde diferentes enfoques [52-57]. Recientemente, se ha hecho un estudio numérico exhaustivo sobre mapas bi-dimensionales de Exponentes de Lyapunov [55-56]. En el se encuentran islas de periodicidad dentro del caos.

Finalmente nos gustaría comentar que la interacción entre partículas magnéticas da lugar a varios comportamientos complejos, más aun si hay campos externos presentes [58-59]. Esto ha sido el trabajo de investigación original que se presenta en esta memoria; los resultados los profundizaremos en el próximo capítulo.

## 2.2 Ecuaciones de Movimiento

Consideremos un sistema de  $N$  partículas magnéticas, asumiendo que cada partícula puede ser representada por un mono-dominio. consideremos además que ellas están colocadas fijas en algún arreglo magnético. Entonces, la evolución de temporal del sistema es puramente rotacional, y puede ser modelada por la ecuación de Landau-Lifshitz; la cual para cada partícula se puede escribir de la forma [27, 30]:

$$\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma|\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\lambda^i |\gamma|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \mathbf{T}^i, \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{M}^i$  representa el momento magnético de la partícula  $i$ , tal que  $i = (1, \dots, N)$ ; y donde  $\gamma$  es el factor giromagnético, cuyo valor numérico es aproximadamente  $|\gamma| = |\gamma_e| \mu_0 \approx 2.21 \times 10^5 \text{ m A}^{-1} \text{ s}^{-1}$ . Aquí,  $\mathbf{H}_{eff}^i$  denota el campo efectivo de la partícula  $i$ . Este campo en general depende de todos los momentos magnéticos y de campos externos, es decir  $\mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{H}_{eff}^i(\mathbf{M}^1, \dots, \mathbf{M}^N, \mathbf{H}_{ext}(t))$ . Ahondaremos más sobre él en una próxima subsección. El primer termino de la mano derecha es un termino típicamente de precesión, mientras que el segundo termino es un termino fenomenológico que da cuenta de la disipación. Los coeficientes de

disipación  $\{\lambda^i\}$  son magnitudes adimensionales. Notemos que  $\lambda^i \geq 0 \quad \forall i$ , tal que el limite  $\lambda^i \equiv 0$  el sistema se vuelve no-disipativo. La introducción de este término adicional fue elegido por consideraciones heurísticas [27]. Valores típicos del coeficiente de disipación son el orden de  $10^{-4}$  a  $10^{-3}$  en garnetes,  $10^{-2}$  o mayores en Cobalto, Níquel, o en Permalloy [33]; y de orden de  $10^{-4}$  en moléculas magnéticas [60]. Por ultimo,  $\mathbf{T}^i$  representa todos los otros torques sobre la partícula  $i$  que no se pueden escribir dentro del campo efectivo.

### 2.2.1 Conservación del modulo

Veamos una propiedad general de la ecuación (2.1). Si aplicamos producto escalar respecto de  $\mathbf{M}^i$  a ambos lados de la ecuación se tiene que:

$$\mathbf{M}^i \cdot \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i. \quad (2.2)$$

Entonces si  $\mathbf{T}^i \perp \mathbf{M}^i$  (o bien directamente si  $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$ ) el modulo de cada momento magnético es conservado, ya que

$$\mathbf{M}^i \cdot \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} |\mathbf{M}^i|^2 \right) = 0 \quad (2.3)$$

Esta es una propiedad dinámica bastante interesante, ya que en estos casos ( $\mathbf{T}^i \perp \mathbf{M}^i$ ), el sistema de  $3N$  ecuaciones tiene  $N$  restricciones, por lo cual puede ser descrito por un sistema  $2N$ -dimensiones de variables equivalente. Además, el hecho que el sistema sea  $2N$ -dimensional hace que y por ende las ecuaciones de movimiento se puedan representar en otras coordenadas como por ejemplo en coordenadas esféricas o bien en estereográfica. Por otra parte, debido a que las ecuaciones magnéticas son altamente no-lineales desde un punto de vista numérico tener esta propiedad es muy útil; ya que tener una constante de movimiento ayuda a verificar el método numérico a usar y sirve como un controlador de precisión.

Finalmente, hacemos notar que torques  $\mathbf{T}^i$  que no cumplan con esta propiedad necesariamente debe ser alguna función angular o bien directamente proporcional a la magnetización de cada partícula  $\mathbf{M}^i$ .

## 2.3 Ecuación Landau-Lifshitz Conservativa

Cuando  $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$ ,  $\lambda^i = 0$  y  $\mathbf{H}_{eff}^i$  no es una función explícita del tiempo, la ecuación (2.1) es conservativa. Bajo estas consideraciones el campo efectivo,  $\mathbf{H}_{eff}^i$ , puede ser derivado de una función de Hamilton:

$$\mathbf{H}_{eff}^i = -\nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H}, \quad (2.4)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el Hamiltoniano del sistema, y el gradiente es respecto a las componentes de  $\mathbf{M}^i$ . En tal caso podemos escribir la ecuación (2.1) de la forma

$$\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = |\gamma| \mathbf{M}^i \times \nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H}. \quad (2.5)$$

Notemos que, en esta ecuación el espacio de fase es conservado, esto se puede demostrar mediante

$$\nabla_{\mathbf{M}^i} \cdot \left( \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right) = |\gamma| \nabla_{\mathbf{M}^i} \cdot (\mathbf{M}^i \times \nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H}) = \mathbf{M}^i \cdot (\nabla_{\mathbf{M}^i} \times (\nabla_{\mathbf{M}^i} \mathcal{H})) = 0. \quad (2.6)$$

Por lo tanto, con esta propiedad y el hecho que el modulo se conserva, podemos decir que el espacio de fase de este sistema conservativo son  $N$  esferas de radio  $|\mathbf{M}|$ .

Más aun, la ecuación (2.5) es simpléctica, y esta asociada a la dinámica de Nambu para  $N$ -tripletes de variables dinámicas y  $2N+1$  constantes de movimientos (Hamiltoniano y los  $N$

módulos) [61-64]. Por lo cual, para la partícula  $i$ , de componentes  $\mathbf{M}^i = (M_x^i, M_y^i, M_z^i)$ , la ecuación

(2.1) en la forma de Nambu puede ser escrita

$$\frac{dM_k^i}{dt} = \frac{\partial \left( M_k^i, \frac{1}{2} |\mathbf{M}^i|^2, \mathcal{H} \right)}{\partial (M_x^i, M_y^i, M_z^i)}, \quad (2.6)$$

donde  $k = (x, y, z)$  y en el lado derecho de la ecuación (2.6) la función  $\partial(\bullet, \bullet, \bullet) / \partial(\bullet, \bullet, \bullet)$  denota una derivada Jacobina.

Por otra parte, como el sistema (2.5) puede ser descrito por un sistema de  $2N$  ecuaciones para variables equivalentes ya que el modulo de cada momento magnético es independiente del tiempo, existe una transformación de variables que permite escribir el sistema con una estructura tipo Hamiltoniana. Esta transformación es  $\mathbf{M}^i = (f(M_z^i) \cos \xi^i, f(M_z^i) \sin \xi^i, M_z^i)$  tal que

$$f(M_z^i) = \sqrt{1 - (M_z^i)^2}. \text{ Entonces definiendo el vector } 2N \text{ dimensional, } \mathbf{w} = (M_z^1, \dots, M_z^N; \xi^1, \dots, \xi^N),$$

como el vector de variables canónicas y momentos canónicos conjugados; la ecuación de movimiento para  $\mathbf{w}$  se lee

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{\mathbf{I}} \\ \tilde{\mathbf{I}} & 0 \end{pmatrix} \nabla_{\mathbf{w}} \mathcal{H} \quad (2.7)$$

donde  $\tilde{\mathbf{I}}$  es la matriz identidad de  $N \times N$ ; y el Hamiltoniano,  $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\mathbf{w})$ , es ahora una función de  $\mathbf{w}$ . La ecuación (2.7) representa la ecuación de movimiento de Hamilton para  $\mathbf{w}$ . Esta representación de la ecuación (2.5) es una forma equivalente para la dinámica de espines clásicos conservativa. La idea de buscar cambios de variables que describan las ecuaciones de movimiento de una forma conocida es útil desde el punto de vista formal, y en principio permiten conocer la propiedades generales del sistema. Como podemos ver por las ecuaciones (2.6) y (2.7) existe una

conexión intrínseca entre dinámica de Nambu y dinámica de Hamilton. Esto es posible de demostrar en forma genérica [65].

Como observación general, la dinámica de Nambu, ha abierto una nueva rama de investigación tanto en mecánica clásica como en mecánica cuántica. El trabajo de Nambu fue el primero en que cual se pensó en trabajar con números impares de variables canónicas [61]. Un problema interesante del punto de vista abstracto, fue generalizar álgebra asociada a los corchetes de Poisson, y su posible cuantización [66]. Un buen artículo sobre los fundamentos de esta dinámica en forma mas abstracta se puede encontrar en la referencia [67].

## 2.4 Disipación de Gilbert: Ecuación de Landau-Lifshitz-Gilbert

Debido a que la descripción de la disipación es fenomenologica (y muy dependiente del tipo de material), se han propuesto múltiples maneras de agregarla aparte de la Landau-Lifshitz. El más conocido de estos fue hecho por Gilbert a mediados del siglo pasado [28, 68]. La ecuación del Landau-Lifshitz-Gilbert (LLG) esta dada por:

$$\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i + \frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} + \mathbf{T}^i, \quad (2.8)$$

donde  $(\gamma_G, \lambda_G^i)$  son las constantes de Gilbert. La ecuación de LLG, esta inspirada para una disipación proveniente de una función de disipación tipo Rayleigh [28]. Este termino extra posee una derivada con respecto al tiempo en la magnetización, por lo cual hace que el operador diferencial sea mas complicado que lo normal. Para poder describirlo de forma simple se puede aplicar diferentes representaciones.

En ausencia del termino de torque extra,  $\mathbf{T}_i = \mathbf{0}$ , la ecuación de LL es equivalente a la ecuación de LLG con diferentes escalas temporales y diferentes parámetros. Para mostrar ello,

multipliquemos con un producto vectorial a ambos lados de la ecuación (3.2) con  $\mathbf{M}_i$ . Con lo cual se tiene

$$\mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times \left( \mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right), \quad (2.9)$$

dado que

$$\mathbf{M}^i \times \mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = \mathbf{M}^i \left( \mathbf{M}^i \cdot \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right) - |\mathbf{M}^i|^2 \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \quad (2.10)$$

se tiene que

$$\mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) - \lambda_G^i |\mathbf{M}^i|^2 \frac{d\mathbf{M}^i}{dt}, \quad (2.11)$$

donde hemos usado el hecho que el modulo se conserva. Ahora insertando (2.11) en (2.8) tenemos finalmente que

$$\kappa^i \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\lambda_G^i |\gamma_G|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i), \quad (2.12)$$

donde  $\kappa^i = 1 + (\lambda_G^i)^2 |\mathbf{M}^i|$  es una constante positiva definida. Si identificamos  $\gamma_G = \gamma$ ,  $\lambda_G^i = \lambda^i$  obtenemos la ecuación (2.1) salvo por un cambio de escala temporal, dado para cada partícula por  $1/\kappa^i$ . O bien podemos redefinir nuevos parámetros de la forma  $\gamma \rightarrow \gamma^i \doteq \gamma_G / \kappa^i$  y  $\lambda^i |\gamma| \doteq \lambda_G^i |\gamma_G| / \kappa^i$  con lo cual obtenemos una ecuación de LL equivalente para cada partícula. La diferencia es que en LL solo se tiene una constante  $\gamma$  igual para todas las partículas y ahora queda una constante diferente  $\gamma^i$  para cada partícula. Si son partículas idénticas (misma constante de disipación y modulo) tendrán un parámetro  $\gamma$  único. Notemos que el cambio de escala temporal es difícil de detectar experimentalmente. Esto es fácil de verificar para una partícula, ya que como

en este caso el modulo es una constante, luego puede ser tomado a la unidad ( $|\mathbf{M}|=1$ ) entonces usando que  $\lambda \sim 10^{-4} - 10^{-2}$  se tiene que  $\kappa^{-1} \approx 0.999999$ .

Por el contrario, si se agrega un torque extra,  $\mathbf{T}_i \neq \mathbf{0}$ , tenemos que estas ecuaciones no son equivalente, y por lo tanto dan diferentes dinámicas. Veamos como queda la ecuación (2.8) al tomar el producto vectorial en el caso general:

$$\mathbf{M}^i \times \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \left( \mathbf{M}^i (\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i) - |\mathbf{M}^i|^2 \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} \right) + \mathbf{M}^i \times \mathbf{T}^i. \quad (2.13)$$

Luego insertando (2.13) en (2.8) se tiene que LLG en forma explícita es:

$$\begin{aligned} \left(1 + (\lambda_G^i)^2 |\mathbf{M}^i|\right) \frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = & -|\gamma_G| \mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\lambda_G^i |\gamma_G|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i) + \mathbf{T}^i \\ & + \frac{\lambda_G^i |\gamma_G|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times \mathbf{T}^i + |\gamma_G| \left( \frac{\lambda_G^i}{|\mathbf{M}^i|} \right)^2 (\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i) \mathbf{M}^i \end{aligned} \quad (2.14)$$

Notemos que la ecuación general de LLG (2.14) tiene dos términos extras respecto de la ecuación de LL. Los cuales son de naturaleza totalmente diferente, uno depende del productor vectorial  $(\mathbf{M}^i \times \mathbf{T}^i)$  y el otro del producto escalar  $(\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{T}^i)$ . Luego, independiente de las propiedades de simetría de un sistema particular no se pueden anular ambos si  $\mathbf{T}^i \neq \mathbf{0}$ .

Dado que desde mecánica cuántica es posible obtener desde primeros principios la ecuación conservativa (2.5), se ha debatido bastante sobre cual de los dos modelos es el correcto; ya que el problema se presenta cuando existen torques que no son posibles de escribir como un campo efectivo. Con aproximaciones semiclásicas, se ha logrado obtener términos disipativos [69-74]. De hecho, se ha derivado de forma explícita la ecuación (2.1) [69]. Otras discusiones acerca de cual de las dos es consistente con la termodinámica (irreversible) se han planteado en los últimos años [71, 75-76], dando más favorable el enfoque de Landau-Lifshitz. Recientemente,

tanto desde el punto de vista experimental como teórico se ha encontrado que la disipación no-local [77] nano-materiales con diámetros de 100 nm aproximadamente [78]. Queremos remarcar finalmente que este tópico sigue abierto a la discusión científica, y se ira aclarando a medida que se hagan más experimentos con efectos donde las descripciones no sean equivalentes salvo un cambio de escala temporal.

## 2.5 Soluciones de Equilibrio

Las soluciones más simples a las ecuaciones de movimiento son las de equilibrio, estas vienen dadas por la condición . Dicha condición en las ecuaciones de LLG () da como consecuencia un sistema algebraico de ecuaciones de la forma:

$$-\gamma_G |\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i + \mathbf{T}^i = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

En el caso que  $\mathbf{T}^i \equiv \mathbf{0}$  para todo  $i$ , esta se simplifica a

$$\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{0}, \quad (2.16)$$

la cual es también valida para la ecuaciones de LL, debido a la equivalencia entre ambas formulaciones. Notemos que en este caso para dar un cierre al sistema se usa la conservación del modulo de cada momento magnético  $|\mathbf{M}^i| = M_s^i$ . Hacemos notar que estas soluciones serán estables o inestables dependiendo de los parámetros del sistema en estudio.

## 2.6 Campo Efectivo

El campo efectivo de un sistema magnético en general es derivado de un funcional que toma en cuenta los campos externos como a sus vez de las interacciones entre las partículas. Este funcional lo denotaremos por  $\mathcal{H}$ . Consecuentemente, el campo externo se puede introducir a



través de la *interacción de Zeeman*, mientras que las interacciones típicas entre partículas pueden ser la de *intercambio* o la *dipolar* [1,7,9,20,79-82]. Normalmente existen tres tipos predominantes de interacciones intercambio para mono-dominios magnéticos, el modelo de Heisenberg, el modelo Ruderman-Kittel-Kasuya-Yosida (RKKY) [79-81], el modelo de Dzyloshinsky-Moriya [82-83]. Estos tres modelos son cuánticos, sin embargo se usan para modelar a nivel macroscópico. El modelo de Heisenberg es el más usado y por lo general se usa para interacciones los primeros y segundos vecinos; mientras que el modelo RKKY la constante de intercambio deja de ser local y varía espacialmente de vecino en vecino. La energía de Dzyloshinsky-Moriya (DM) es asimétrica y prefiere ciertos vecinos y orientaciones. El caso de la energía dipolar es macroscópica, y es una interacción de largo alcance que mezcla todos los vecinos [1]. Además, para modelar la geometría de las partículas y sus correspondientes propiedades de la composición magnética del material, se incluyen auto-interacciones fenomenológicas, conocidas como *energía de anisotropía*. Estas son funciones no-lineales de la magnetización que a orden más bajo (y más comunes) son formas cuadráticas, sin embargo ciertos materiales poseen anisotropías de mayor orden [9,20]. Dependiendo del sistema a tratar se decide que interacción y auto-interacción son más importantes. Por lo tanto, un funcional genérico puede ser escrito de la forma:

$$\mathcal{H} = -\sum_{i=1}^N \left( \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{H}_{ext} + \mathbf{M}^i \cdot \vec{\mathbf{A}}_{(i)} \cdot \mathbf{M}^i \right) + \sum_{i \neq j}^{N,N} \left( J_{ij} \mathbf{M}^i \cdot \mathbf{M}^j + \mathbf{D}_{ij} (\mathbf{M}^i \times \mathbf{M}^j) + \mathbf{M}^i \cdot \vec{\mathbf{B}}_{ij} \cdot \mathbf{M}^j \right) + \sum_{i \neq j}^{N,N} \left( \frac{\mathbf{M}^i \cdot \mathbf{M}^j}{d_{ij}^3} - \frac{3(\mathbf{M}^i \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij})(\mathbf{M}^j \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij})}{d_{ij}^5} \right) \quad (2.17)$$

donde  $\mathbf{H}_{ext}$  es el campo externo,  $\vec{\mathbf{A}}_{(i)}$  denota la matriz de anisotropía de la partícula  $i$ . Aquí la notación  $\underline{\mathbf{V}}$  denota el vector traspuesto de  $\mathbf{V}$ . Las constantes  $J_{ij}$  son conocidas como las constantes de intercambio entre la partícula  $i$  y la partícula  $j$ . Esta podría depender de la distancia entre partículas  $d_{ij}$ , es decir,  $J_{ij} = J_{ij}(d_{ij})$ , cuando pasa esto se conoce como interacción RKKY. El

vector  $\mathbf{D}_{ij}$  es el vector de DM, el cual tiene reglas asocias bien determinadas [78]. La matriz  $\tilde{\mathbf{B}}_{ij}$  denota la matriz de la interacción de intercambio antisimétrica. El ultimo termino es la interacción dipolar de la ecuación (2.17), donde  $\hat{\mathbf{n}}_{ij}$  denota un vector unitario en la dirección relativa de la partícula  $i$  respecto de la partícula  $j$ . Por ultimo, hacemos notar que el campo externo puede ser una función explícita del tiempo y puede variar de amplitud en cada punto, es decir  $\mathbf{H}_{ext} = \mathbf{H}_{ext}(\{i\}, t)$ .

En esta memoria no tomaremos en cuenta el efecto de DM, así como tampoco de anisotropías de intercambio. Además asumiremos anisotropía esta en un solo eje [9], por lo cual la energía de anisotropía se reduce a:

$$\mathcal{H}_{an} = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N K_i (\hat{\mathbf{q}}^i \cdot \mathbf{M}^i)^2 \quad (2.18)$$

Por otra parte, el campo efectivo se puede obtener usando la misma relación funcional (2.4), en nuestro caso este es:

$$\mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{H}_{ext} + K_i (\hat{\mathbf{q}}^i \cdot \mathbf{M}^i) \hat{\mathbf{q}}^i - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N J_{ij} \mathbf{M}^j + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^N \left( \frac{\mathbf{M}^j}{d_{ij}^3} + \frac{3(\mathbf{M}^j \cdot \hat{\mathbf{n}}_{ij}) \hat{\mathbf{n}}_{ij}}{d_{ij}^5} \right) \quad (2.19)$$

En casos conservativos y cuando el campo externo es independiente del tiempo, el funcional (2.17) puede ser entendido claramente como la *energía magnética* del sistema. De hecho, en tal caso sería constante de movimiento.

## 2.7 Dinámica de una partícula

En este ultimo apartado del capítulo estudiamos la evolución temporal de una partícula magnética anisotrópica de magnetización  $\mathbf{M}$  en presencia de un campo externo aplicado,  $\mathbf{H}_{ext}$ . La

anisotropía se asume uniaxial donde su eje esta represando por el vector unitario  $\hat{\mathbf{n}}$ . En particular analizaremos el caso cuando no hay efectos externos,  $\mathbf{T} = \mathbf{0}$ , y la disipación es cero  $\lambda = 0$ ; es decir estamos en la situación conservativa. Bajo estas consideraciones el campo efectivo se puede escribir de la forma:

$$\mathbf{H}_{eff} = \mathbf{H}_{ext} + \beta(\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})\hat{\mathbf{n}}, \quad (2.20)$$

donde  $\beta$  es la constante de anisotropía, cuyos valores típicos pueden ser positivos o negativos dependiendo del material [1,20]. La evolución temporal dada por la ecuación (2.1) se reduce a

$$\frac{d\mathbf{M}}{dt} = -|\gamma|(\mathbf{M} \times \mathbf{H}_{ext} + \beta(\mathbf{M} \cdot \hat{\mathbf{n}})\mathbf{M} \times \hat{\mathbf{n}}). \quad (2.21)$$

Para poder hacer un análisis mas independiente del material específico usamos las variables dimensionales  $\mathbf{m} = \mathbf{M}/|\mathbf{M}|$  y el tiempo  $\tau = t|\gamma||\mathbf{M}|$  [31], lo cual produce que el campo efectivo se normalice a  $\mathbf{h}_{eff} = \mathbf{H}_{eff}/|\mathbf{M}|$ . Además esta normalización conduce a que la magnetización este en la esfera unidad  $|\mathbf{m}| = 1$ . Escogiendo la dirección del campo perpendicular al eje de anisotropia de tal forma que  $\mathbf{h}_{ext} = h_x \hat{\mathbf{x}}$  y que  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ . Consecuentemente la ecuación (2.21) por componentes queda

$$\frac{dm_x}{d\tau} = -\beta m_y m_z \quad (2.22)$$

$$\frac{dm_y}{d\tau} = (\beta m_x - h_x) m_z, \quad (2.23)$$

$$\frac{dm_z}{d\tau} = h_x m_y. \quad (2.24)$$

Este es un sistema de ecuaciones que tiene nos componentes no lineales debido a la anisotropia.

Este sistema de ecuaciones tiene dos conjuntos de soluciones estacionarias  $\mathbf{m}_{0,a} = \pm \hat{\mathbf{x}}$  y

$\mathbf{m}_{0,b} = p \hat{\mathbf{x}} \pm \sqrt{1-p^2} \hat{\mathbf{z}}$ , donde  $p = h_x/\beta$ . Notemos que el sistema tiene dos constantes de

movimiento la energía magnética y la conservación del modulo, luego es sistema es integrable, es

decir podemos encontrar soluciones analíticas para  $\mathbf{m}(\tau)$  usando una única variable. Estudiemos soluciones en torno a  $\mathbf{m}_{0,b}$ , para ello hagamos la siguiente transformación:

$$\mathbf{m}(\tau) = \left( p - X \cos(u(\tau)), -Y \sin(u(\tau)), \pm \sqrt{1 - (p - X \cos(u(\tau)))^2 - (Y \sin(u(\tau)))^2} \right). \quad (2.25)$$

Insertando esta transformación en la ecuación (2.22) se obtiene que:

$$\frac{du}{d\tau} = \pm \delta \sqrt{1 - (p - X \cos u)^2 - (Y \sin u)^2}, \quad (2.26)$$

donde  $\delta = \beta Y / X$ . Notemos que esta ecuación diferencial se puede integrar fácilmente ya que la ecuación (2.26) se puede escribir de la forma

$$\tau = \pm \frac{1}{\delta} \int_{u_0}^u \frac{dz}{\sqrt{1 - (p - X \cos z)^2 - (Y \sin z)^2}}. \quad (2.27)$$

Resolvamos la integral indefinida de la ecuación (2.27). Para ello hagamos el cambio de variables  $q = \cos z$ , luego la integral del queda

$$I = \int \frac{dq}{\sqrt{(1-q^2)(a+bq+cq^2)}} = \frac{1}{\sqrt{c}} \int \frac{dq}{\sqrt{(1-q^2)(A+q)(B+q)}}, \quad (2.28)$$

donde  $a = 1 - p^2 - Y^2$ ,  $b = 2pX$  y  $c = Y^2 - X^2$ . Cuando  $c > 0$ , esta integral se puede expresar en términos de funciones elípticas de primer orden  $F(\alpha|\chi)$ . Explícitamente se tiene que

$$I = \frac{2}{\sqrt{c(A+1)(1-B)}} F \left( \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{(A+1)(B+q)}{(B+1)(A+q)}} \right) \middle| \frac{(A-1)(B+1)}{(A+1)(B-1)} \right), \quad (2.29)$$

con esta integral se tiene una solución implícita para  $u(\tau)$ . En general, diferentes configuraciones tanto de campo como de auto-energía de interacción darán funciones elípticas de Jacobi. Un estudio mas acabado se puede encontrar en la referencia [31].

## Capítulo 3

# Dinámica de un dímero magnético

En el presente capítulo se estudia la dinámica de dos partículas magnéticas anisotrópicas interactuando en presencia de un campo magnético externo usando la ecuación de Landau-Lifshitz en ausencia de torques extras, es decir  $\mathbf{T}^i = \mathbf{0}$ . La interacción entre las partículas se debe a la energía de intercambio, descrita por el límite clásico de la ecuación (1.2). Examinaremos tanto el caso conservativo como el disipativo. Esencialmente los resultados que mostraremos en este capítulo han sido publicados recientemente [58].

### 3.1 Motivación del problema

El magnetismo molecular se está convirtiendo cada vez más accesible debido al notable desarrollo de técnicas experimentales y se han encontrado aplicaciones tecnológicas en diversas áreas como la computación cuántica [84, 85], almacenamiento de alta densidad de datos [86, 87] o la refrigeración magnética [88, 89], sólo por mencionar algunos. En las últimas décadas, se han sintetizado nuevos tipos de moléculas con propiedades magnéticas interesantes, en el que el momento magnético se puede colocar simétricamente en diferentes configuraciones geométricas [90]. Un ejemplo sencillo son, por ejemplo, estructuras magnéticas en forma de anillo unidimensional [91-94]. En algunos regímenes de temperatura, las propiedades magnéticas de estas moléculas son generalmente bien descritas por el modelo clásico de Heisenberg con pequeñas correcciones de anisotropía [95, 96]. Por lo tanto, es importante para las aplicaciones un estudio detallado sobre el comportamiento dinámico de este tipo de sistemas magnéticos.

El comportamiento dinámico de unas pocas de partículas magnéticas que interactúan a través de una interacción de intercambio fue estudiado en las referencias [97-100]. Los autores se centran en el equilibrio de la función de espín-correlación para las diferentes configuraciones geométricas. El problema de la interacción de las partículas magnéticas acopladas por interacción de corto y largo alcance se analizó en las referencias [101, 102], concluyéndose que, debido a la interacción dipolar, el módulo total de la magnetización no es constante, sino una función fluctuante dependiente del tiempo. Recientemente, un dímero magnético se ha analizado en el contexto de la mecánica estadística, teniendo en cuenta el acoplamiento tanto dipolar como la interacción Dzyaloshinskii-Moriya [103]. Sin embargo, a nuestro conocimiento, un estudio paramétrico en el comportamiento dinámico y la correspondiente caracterización de los estados caóticos de dos partículas magnéticas no fueron hechas anteriormente [58].

En este capítulo describimos dicha caracterización. En particular, se estudia un campo aplicado en la dirección perpendicular a la dirección de anisotropía principal, el llamado eje fácil. Además, nos centramos en el efecto de la fuerza de interacción relativa entre las partículas. Se estudia tanto el caso conservativo como el disipativo. En el primer caso, caracterizamos el comportamiento dinámico calculando numéricamente el máximo exponente de Lyapunov y los diagramas de bifurcación. En el caso disipativo calculamos los estados de saturación final como una función de la magnitud del campo magnético aplicado, la constante de cambio, y las constantes de anisotropía.

### **3.2 Modelo teórico**

Para modelar un dímero tenemos que tener en cuenta dos partículas magnéticas. Suponiendo que cada una puede ser representada por un monodominio magnético de

magnetización  $\mathbf{M}^i$  con  $i = (1,2)$ , la evolución temporal del sistema puede ser modelada por un conjunto de ecuaciones de Landau-Lifshitz:

$$\frac{d\mathbf{M}^i}{dt} = -|\gamma|\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i - \frac{\lambda|\gamma|}{|\mathbf{M}^i|} \mathbf{M}^i \times (\mathbf{M}^i \times \mathbf{H}_{eff}^i), \quad (3.1)$$

donde los campos magnéticos efectivos,  $\mathbf{H}_{eff}^i$ , están dadas por:

$$\mathbf{H}_{eff}^i = \mathbf{H}_{ext} + \beta_i (\mathbf{M}^i \cdot \hat{\mathbf{n}}_i) \hat{\mathbf{n}}_i + J\mathbf{M}^k, \quad (3.2)$$

con  $(i,k) = 1,2$  tal que  $i \neq k$ , donde  $\mathbf{H}_{ext}$  es el campo magnético externo,  $\beta_i$  mide la anisotropía a lo largo del eje  $\mathbf{n}_i$  y  $J$  es la constante de acoplamiento de intercambio. Se observa que para este tipo especial de anisotropía, llamada uniaxial, las constantes  $\beta_i$  pueden ser positivas o negativas dependiendo de la sustancia específica y de la forma de la muestra en uso [104]. La constante de acoplamiento mide la intensidad de interacción entre las dos partículas. Note que  $J$  también puede tomar valores positivos o negativos dependiendo del tipo de interacción; por ejemplo, para  $J < 0$  ( $J > 0$ ) el acoplamiento será antiferromagnético (ferromagnético). En lo que sigue se supone que las partículas tienen la misma magnitud  $|\mathbf{M}^1| = |\mathbf{M}^2| = M_S$  y el mismo eje de anisotropía  $\hat{\mathbf{n}}_1 = \hat{\mathbf{n}}_2 = \hat{\mathbf{n}}$ , tal que  $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{z}}$ . El campo magnético externo  $\mathbf{H}_{ext}$  se asume independiente del tiempo y perpendicular a  $\mathbf{n}$ , por lo que sin pérdida de generalidad, es fijado a lo largo del eje x:  $\mathbf{H}_{ext} = H_x \hat{\mathbf{x}}$ .

Vale la pena mencionar que, en los materiales estándar la aproximación de macroespín (partículas como monodominio) es solamente válida cuando los efectos de la superficie de anisotropía no son relevantes [105]. Para tamaños mayores de partículas, aparecen estados no uniforme magnéticos, como vórtices en nano-puntos de cobalto. Además, la forma de la nanopartícula juega un papel importante en la aproximación de macroespín [106]. En el caso de las moléculas magnéticas, este modelo es solamente válido en la aproximación semiclásica [95,96],

de lo contrario los efectos cuánticos deberían ser considerados [107]. Por último, señalemos que, debido a la naturaleza no lineal del problema, las soluciones analíticas se pueden encontrar sólo en casos particulares, por lo que sólo estudios numéricos son posibles.

Con el fin de simplificar y acelerar la integración de las ecuaciones de movimiento utilizamos unidades sin dimensión, reescribiendo la ecuación (3.1) en términos de la magnetización  $\mathbf{m}^i = \mathbf{M}^i / M_s$  y el tiempo  $\tau = t|\gamma|M_s$  [31]. Esto conduce a la normalización  $|\mathbf{m}^i| = 1$ .

Con el fin de obtener una mejor comprensión física del problema, vamos a evaluar las escalas introducidas aquí. Los valores experimentales típicos de  $M_s$  son, por ejemplo, para materiales de

cobalto,  $M_{s[Co]} \approx 1.42 \times 10^6 \text{ A/m}$  para los materiales de níquel  $M_{s[Ni]} \approx 4.8 \times 10^5 \text{ A/m}$  [31], o para

cristales de  $Mn_{12}$   $M_{s[Mn_{12}]} \approx 4.77 \times 10^4 \text{ A/m}$  [108]. Destacando las frecuencias giromagnéticas en

el rango de los gigahercios  $|\gamma|M_{s[Co]} \approx 308 \text{ HGz}$ ,  $|\gamma|M_{s[Ni]} \approx 106 \text{ HGz}$  y  $|\gamma|M_{s[Mn_{12}]} \approx 10.5 \text{ HGz}$ ,

respectivamente. Por lo tanto la escala de tiempo ( $\tau = 1$ ) está en el rango de los picosegundos,

$$t_{s[Co]} = 1 / (|\gamma|M_{s[Co]}) \approx 3.2 \text{ ps}, \quad t_{s[Ni]} = 1 / (|\gamma|M_{s[Ni]}) \approx 9.4 \text{ ps}, \quad \text{y} \quad t_{s[Mn_{12}]} = 1 / (|\gamma|M_{s[Mn_{12}]}) \approx 95.2 \text{ ps},$$

respectivamente. La tecnología de hoy en día es capaz de medir los procesos en pico y femto-segundos. De hecho, Beaurepaire et al. [109] fueron los primeros en observar la dinámica de espín en una escala de tiempo por debajo de la escala de picosegundos en níquel. Recientemente, se han observado fenómenos en una escala de tiempo menor que 100 fs [110, 111].

Para evitar artefactos numéricos, es adecuado resolver la ecuación adimensional correspondiente ecuaciones (3.1) utilizando la representación cartesiana:

$$\begin{aligned} \frac{dm_x^i}{d\tau} = & m_z^i (Jm_y^k - \beta_i m_y^i) - Jm_y^i m_z^k \\ & + \lambda \left( (h_x + Jm_x^k)(m_y^i)^2 + (h_x + Jm_x^k)(m_z^i)^2 - m_x^i (Jm_y^i m_y^k + Jm_z^i m_z^k + \beta_i (m_z^i)^2) \right), \end{aligned} \quad (3.3)$$



$$\begin{aligned} \frac{dm_y^i}{d\tau} = & -h_x m_z^i + J(m_x^i m_z^k - m_x^k m_z^i) + \beta_i m_x^i m_z^i \\ & + \lambda \left( J(m_y^k \left( (m_x^i)^2 + (m_z^i)^2 \right) - m_y^i (m_x^i m_x^k + m_z^i m_z^k)) - h_x m_x^i m_y^i - \beta_i m_y^i (m_z^i)^2 \right), \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{dm_z^i}{d\tau} = & h_x m_y^i + J(m_y^i m_x^k - m_x^i m_y^k) \\ & + \lambda \left( \beta_i m_z^i \left( (m_x^i)^2 + (m_y^i)^2 \right) + J(m_z^k \left( (m_x^i)^2 + (m_y^i)^2 \right) - m_z^i (m_x^i m_x^k + m_y^i m_y^k)) - h_x m_x^i m_z^i \right), \end{aligned} \quad (3.5)$$

dónde  $h_x = H_x / M_S$ . Observando que las segundas filas de las ecuaciones (3.3)-(3.5) son una consecuencia del término disipativo que contienen las no-linealidades cuadráticas y cúbicas. Los términos cuadráticos se producen por el campo externo, mientras que los coeficientes cúbicos son proporcionales al intercambio y las constantes de anisotropía. La parte conservativa, en cada ecuación, contiene no-linealidades cuadráticas, y términos lineales que se generan por el campo externo. Notemos que este sistema tiene cuatro soluciones homogéneas simples:

$$\{\mathbf{m}^1, \mathbf{m}^2\} = \{\pm \hat{\mathbf{x}}, \pm \hat{\mathbf{x}}\}, \quad (3.6)$$

de forma que su estabilidad depende de los parámetros de control [40,41].

Por otra parte, remarcamos que el sistema tiene por lo menos dos constantes de movimiento (los dos módulos individuales  $|\mathbf{m}^1| = |\mathbf{m}^2| = 1$ ). Teniendo en cuenta estas restricciones del sistema la dimensión efectiva del espacio de fase es cuatro. Además, note que cuando  $\lambda = 0$ , la energía magnética también se conserva. En el caso disipativo, la energía magnética no se conserva, pero alcanza un valor estacionario después de un transiente.

Para poder entender en mejor manera este sistema dinámico dividiremos lo que resta de la sub-sección en sub-sub-secciones. Primeramente comentaremos sobre el método numérico e indicadores dinámicos. Después estudiaremos las soluciones conservativas, y finalmente la soluciones disipativas.

### 3.2.1 Consideraciones numéricas e indicadores

El sistema dinámico descrito por la ecuaciones (3.3)-(3.5) no se puede resolver analíticamente para todos los caso, esto es debido al acoplamiento y no-linealidades. Por lo tanto, se debe resolver numéricamente. Desde el punto de vista numérico, la integración de estas ecuaciones se realiza utilizando un método estándar de integración Runge-Kutta de cuarto orden [41]. El paso de tiempo utilizado es de  $d\tau = 0.01$ , que garantiza una precisión de  $10^{-8}$  en la magnetización. Para verificar que el método funciona se calcula ambas constante de movimiento,  $|\mathbf{m}^1| = |\mathbf{m}^2| = 1$ , de forma dinámica.

Primeramente, la caracterización de los comportamientos dinámicos de la ecuaciones (3.3)-(3.5) se hace mediante la evaluación de los exponentes de Lyapunov (LEs). Este método consiste en cuantificar la divergencia entre dos trayectorias cercanas del campo vectorial (Wolf, 1985; Gallas, 2010). En general, para un sistema dinámico de dimensión efectiva  $N$  descritas por un conjunto de ecuaciones diferenciales de la forma,  $dX_k/d\tau = F_k(\mathbf{X}, \tau)$ , el k-ésimo exponente de Lyapunov viene dado por:

$$\Lambda_k = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\tau} \ln \left( \frac{\|\delta X_k(\tau)\|}{\|\delta X_k(\tau_0)\|} \right) \right), \quad (3.7)$$

donde  $\|\delta X_k(\xi)\|$  es la distancia entre las trayectorias de la k-ésima componente del campo vectorial en el tiempo  $\xi$ ; tal que  $\delta \mathbf{X}$  satisface la ecuación:

$$\frac{d\delta \mathbf{X}}{d\tau} = \tilde{\mathbf{J}} \cdot \delta \mathbf{X}, \quad (3.8)$$

donde  $\tilde{\mathbf{J}}$  es la matriz Jacobiana de  $\mathbf{F}$  respecto de  $\mathbf{X}$ , es decir  $[\tilde{\mathbf{J}}]_{ab} = \partial F_a / \partial X_b$ . Luego para computar los exponentes de Lyapunov hay que resolver un sistema acoplado de  $(N+1)N$  variables. Recordemos que uno tiene tantos LEs como dimensiones espaciales de fase tenga en el sistema dinámico [40]. Éstos pueden ser ordenados  $\Lambda_1 \geq \Lambda_2 \geq \dots \geq \Lambda_N$ . El primer exponente es el mayor exponente de Lyapunov (MLE), que normalmente se denota por  $\Lambda_1 = \Lambda_{\max}$ . Aquí tratamos con el régimen no disipativo, y para este tipo de sistemas los LEs vienen en pares  $(\Lambda_i, \Lambda_{N-i+1})$  de tal manera que su suma es igual a cero [40,41]:

$$\sum_i \Lambda_i = 0, \quad (3.8)$$

y al menos dos LEs son iguales a cero. Explorando la dependencia de MEL con los diferentes parámetros del sistema, uno puede identificar áreas en el espacio de parámetros donde la dinámica es caótica (MEL positivo), o bien donde se presenta dinámicas no-caóticas regulares (MEL cero o negativo). Los exponentes de Lyapunov son calculados con las técnicas expuestas en las referencias [44]. En particular, estos son computados para un período de tiempo de  $\tau = 32768$  después de un transiente de tiempo inicial de  $\tau = 1024$ . El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt se lleva a cabo después de cada  $\delta\tau = 1$  [55,56]. El error  $E_{rr}$  en la evaluación de los LEs ha sido comprobado por el uso de  $E_{rr} = \sigma(\Lambda_1) / \max(\Lambda_1)$ , donde  $\sigma(\Lambda_1)$  es la desviación estándar del máximo LE positivo, lo cual es suficientemente pequeño para el propósito del presente análisis.

En este caso, se explora la dependencia de MLE con diferentes parámetros de control del sistema. Uno puede, por ejemplo, dibujar mapas bidimensionales que ilustran la magnitud del MLE como una función de dos parámetros. Esto permite determinar los intervalos de parámetros que conducen a la dinámica caótica, es decir, MLE positivo, y aquellos que muestran dinámicas regulares (periódicos o cuasiperiódicos), MLE cero o negativo. Si el sistema dinámico es de alta dimensionalidad, se puede dar el caso de tener mas de un de un exponente de Lyapunov positivo

para un parámetro fijo, se dice que el sistema exhibe un régimen hyper-caótico [112-117]. Además, siguiendo una técnica explicada en la Ref. [45], se utiliza un proceso de resolución de zoom iterativo para investigar más a fondo la dependencia de la dinámica respecto a variaciones muy pequeñas de los parámetros del sistema. Esta técnica se utiliza generalmente para el estudio de sistemas dinámicos que contienen fases caóticas complicadas y topologías de frontera interesantes, por ejemplo, las curvas donde las redes de islas estables de oscilaciones periódicas con cada vez mayor periodicidad se acumulan de forma sistemática.

Aparte de este método, existen otros indicadores de cómo medir los diferentes estados dinámicos de un sistema, tal como el espectro de Fourier, secciones de Poincaré, funciones de correlación, mapas de recurrencia, o diagramas de bifurcación, entre otros [29,31,32,52-57]. El más clásico es el cálculo de la transformada rápida de Fourier (FFT) denotada por  $S(\boldsymbol{\omega})$ . La FFT nos da una función compleja de la señal en el espacio de frecuencias  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \dots, \omega_p)$ , produciendo un conjunto de pares  $\{\omega_k, S(\omega_k)\}$ . Con esta señal uno puede calcular su espectro de potencia,  $|S(\boldsymbol{\omega})|^2$ , y contar el número de cúspides,  $N_p$ , correspondientes a cada frecuencia. Este número es una medida de los modos de oscilación del sistema. Consecuentemente, cuando el sistema exhibe un comportamiento periódico aparecen un número finito de cúspides; mientras que para regímenes caóticos, en el espectro Fourier típicamente se observa una gran cantidad de cúspides, los cuales forman como un “continuo” de puntos [29,42]. El cálculo de la transformada rápida de Fourier es computado después de un transiente suficientemente largo para obtener el estado permanente del sistema, y tomando en consideración lo expuesto en las referencias [118-119].

Otro método usual para identificar los diferentes regímenes es mediante diagramas de bifurcación. Existen múltiples métodos de cómputo de ellos, los dos más comunes son: (a) contar cuántos puntos cruzan por alguna sección de Poincaré [52], (b) contar el número de máximos de las series de tiempo [54]. Hacemos notar que ambos métodos son equivalentes, ya que entregan en esencia la misma información. Con estos criterios de conteo se tiene que si el sistema está en

un estado estacionario un único punto será apreciado, en cambio si se está en un estado de multi-periodicidad habrá tantos puntos como modos de oscilación. En el caso de un régimen cuasiperiódico o en el caso caótico se tendrá una gran cantidad de puntos formado casi un “continuo”. Normalmente, el caso cuasiperiódico a pesar de ser múltiples puntos en el diagrama se ve más compacto que en un caso caótico.

Finalmente, hacemos notar que para dinámicas complejas lo que se debe hacer para tener una buena caracterización numérica es utilizar de varios indicadores para tener certeza de los regímenes. El método más usado actualmente es basado en exponentes de Lyapunov [45].

### 3.2.2 Caso Conservativo

En este apartado se analiza la dinámica de las ecuaciones (3.3)-(3.5) cuando la disipación es cero,  $\lambda = 0$ . Estas ecuaciones pueden tener diferentes tipos de comportamientos, de regular a caótico. Un caso interesante, en el cual el sistema tiene una solución analítica, es cuando las anisotropías son nulas, esto significa  $\beta_1 = \beta_2 = 0$ . De hecho, la magnetización total  $\mathbf{L} = \mathbf{m}^1 + \mathbf{m}^2$  satisface:

$$\frac{d\mathbf{L}}{d\tau} = -\mathbf{L} \times \mathbf{h}, \quad (3.9)$$

que es la ecuación de un solo momento magnético en presencia de un campo magnético y su solución es

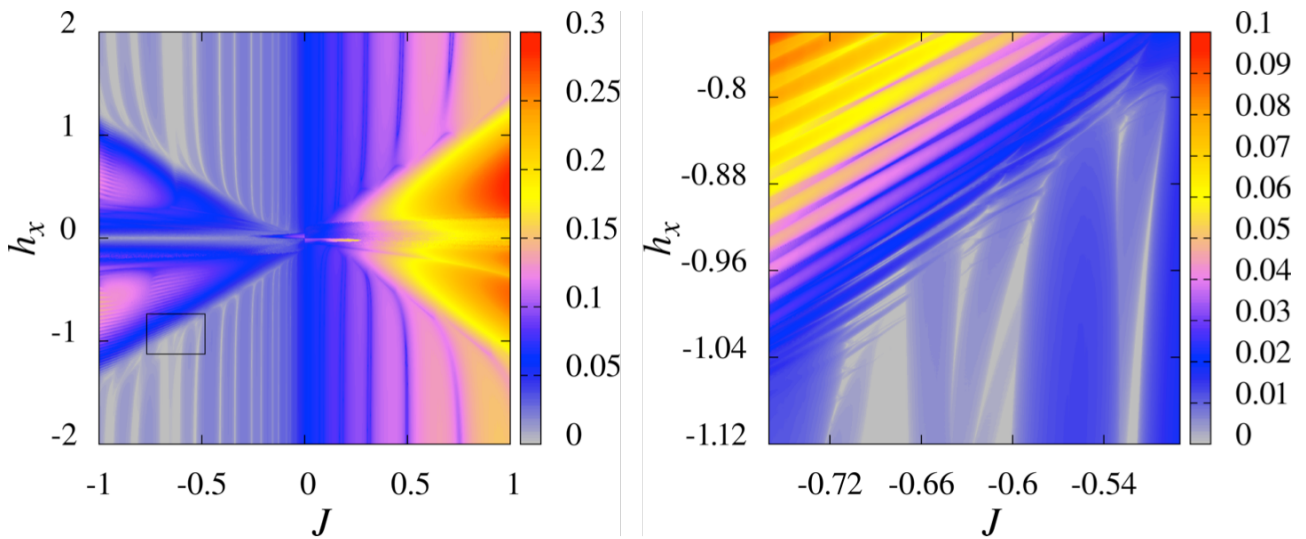
$$\mathbf{L}(\tau) = \begin{pmatrix} L_x(0) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ L_y(0) \\ L_z(0) \end{pmatrix} \cos(h_x \tau) + \begin{pmatrix} 0 \\ L_z(0) \\ -L_y(0) \end{pmatrix} \sin(h_x \tau), \quad (3.10)$$

donde  $L_j(0)$  son las condiciones iniciales a lo largo del módulo de las limitaciones individuales.

Además, cuando el sistema es anisotrópico  $\beta_j \neq 0$  las únicas soluciones analíticas son posibles

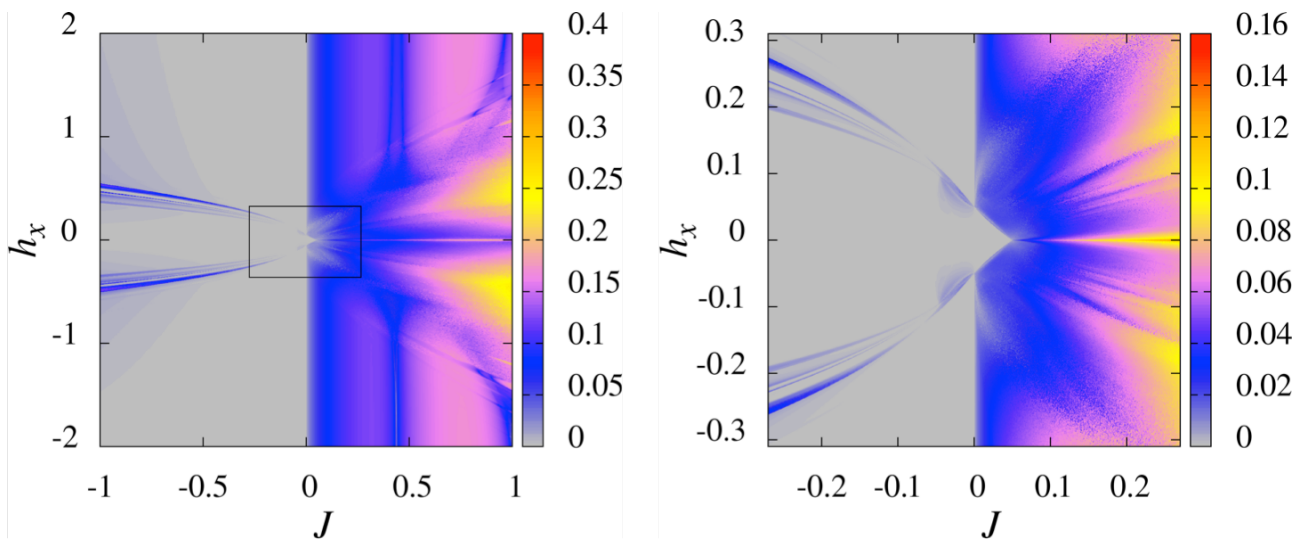
cuando las partículas están desacopladas  $J = 0$ . En tal caso las soluciones están en la forma de las funciones elípticas como se mostró en el capítulo anterior [17]. Cuando  $\beta_j \neq 0$  y  $J \neq 0$  solo soluciones numéricas son posibles.

Las figuras 3.1 y 3.2 muestran diagramas de fase de código de colores para los MLE como una función de  $J$  y  $h_x$  para diferentes e iguales valores de las constantes de anisotropía, respectivamente. En ambos casos sus valores absolutos son el mismo, de tal forma que  $|\beta_1| = |\beta_2| = 0.1$ . Los paneles de la izquierda muestran una amplia gama de los parámetros, mientras que los marcos de la derecha muestran un zoom específico del marco de la izquierda correspondiente. La zona del zoom se indica mediante un cuadro negro. Podemos observar que la energía de anisotropía juega un papel importante, ya que los diagramas son completamente diferentes.



**Figura 3.1:** Diagrama de fase que muestra el Mayor Exponente de Lyapunov (MEL) en código de colores como función de la amplitud del campo  $h_x$  y la constante de acoplamiento  $J$  para dos niveles diferentes de resoluciones. Los parámetros fijos son:  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = -0.1$  y  $\lambda = 0$ . En ambos casos la resolución es de  $10^3 \times 10^3$  exponentes de Lyapunov.

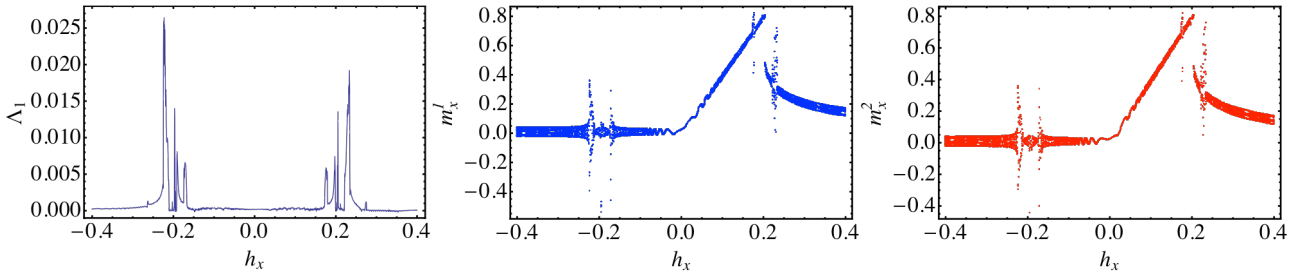
Para diferentes anisotropías (Fig. 3.1) cuando la constante de intercambio de acoplamiento es positiva ( $J > 0$ ) el sistema está siempre en regímenes caóticos, mientras que para valores negativos de  $J$ , aparecen múltiples transiciones entre regímenes regulares y caóticos. Estas transiciones se pueden observar con una mejor resolución en el panel derecho de la Fig. 3.1, en la que aparecerán patrones complejos en el diagrama de MEL.



**Figura 3.2:** Diagrama de fase que muestra el Mayor Exponente de Lyapunov (MEL) en código de colores como función de la amplitud del campo  $h_x$  y la constante de acoplamiento  $J$  para dos niveles diferentes de resoluciones. Los parámetros fijos son:  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 0.1$  y  $\lambda = 0$ . En ambos casos la resolución es de  $10^3 \times 10^3$  exponentes de Lyapunov.

La Figura 3.2 muestra los MEL como una función de  $h_x$  y  $J$  para constantes de anisotropía iguales. Podemos observar que cuando  $J$  es negativo, el sistema se comporta casi regular, excepto por cuatro columnas situadas simétricamente respecto a  $h_x$ . Para valores positivos de  $J$  el sistema está en regímenes caóticos excepto para una pequeña región cuando los valores de  $h_x$ . Para cuantificar la dinámica de esta región de muestra un zoom en el cuadro de la derecha. Claramente observamos que existe un triángulo cercano  $J \sim 0$  donde el sistema se mantiene en regímenes periódicos, luego los estados son esencialmente caóticos.

Con el fin de investigar en más detalle diferentes tipos de transiciones entre comportamiento regular y comportamiento caótico analizamos una sección transversal vertical de la Figura 3.2 en el rango  $-0.4 \leq h_x \leq 0.4$  para  $J = -0.2$ .

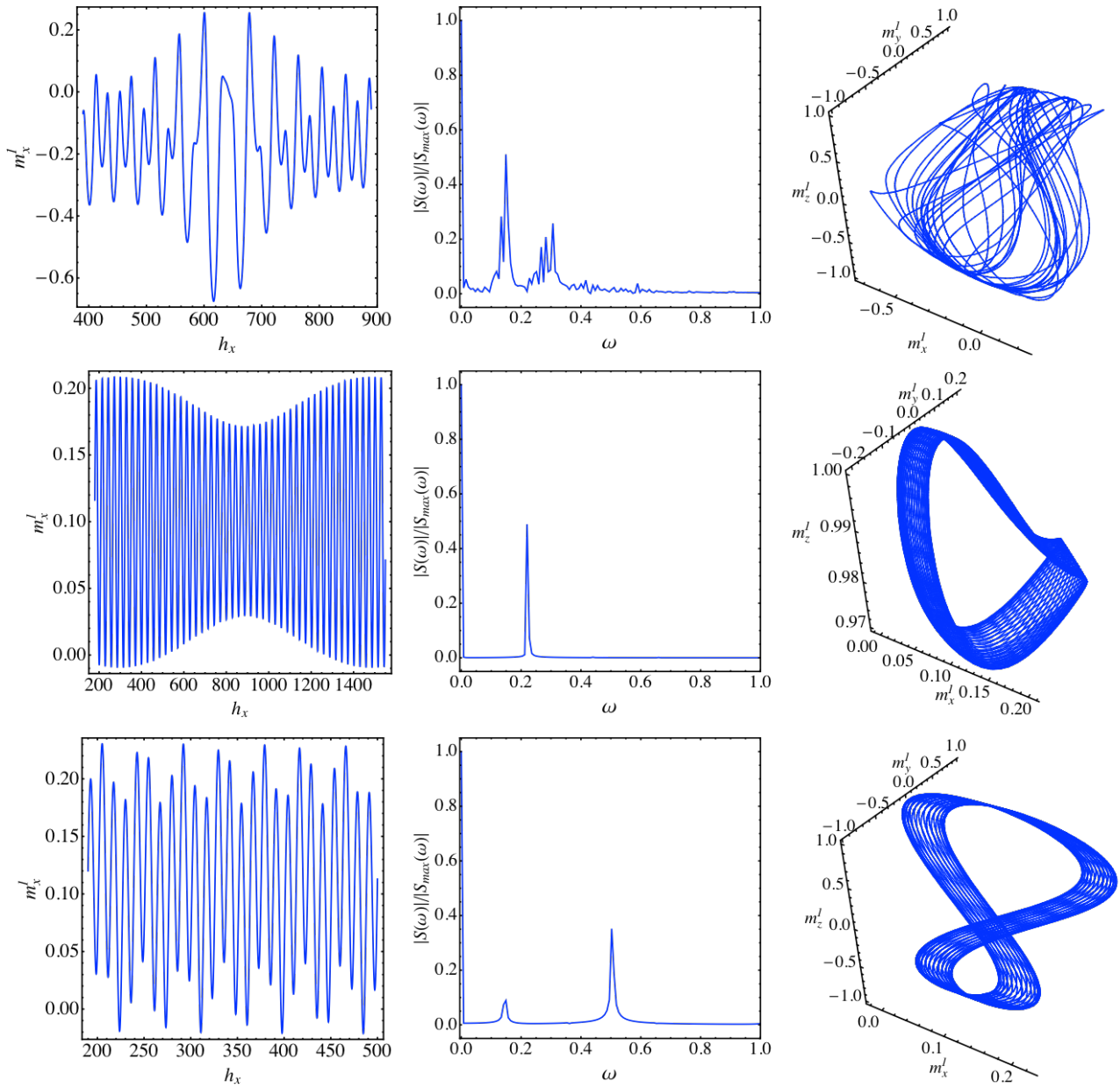


**Figura 3.3:** Mayor Exponente de Lyapunov (MEL) y diagramas de bifurcación de  $m_x^1$  y  $m_x^2$  en función de  $h_x$ . Los parámetros fijos son:  $J = -0.2$ ,  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = 0.1$  y  $\lambda = 0$ .

En la Figura 3.3 se muestra el MEL y los diagramas de bifurcación para  $m_x^1$  y  $m_x^2$  como función de  $h_x$ . Del MEL observamos que el sistema se inicia en estados regulares y presenta una transición a comportamientos caóticos para valores cercanos a  $h_x \approx -0.265$ . Por encima de este, se encuentran alternancia de comportamientos regulares y caóticos medida que aumenta el parámetro  $h_x$ . Para valores  $h_x \gtrsim 0.28$  el sistema solo exhibe estados regulares. Por último, se observa que existe una correspondencia entre ambas componentes  $x$ , como se muestra en los diagramas de bifurcación. De hecho, como podemos observar los estados regulares antes del régimen caótico son cuasiperiódico, ya que el diagrama de bifurcación muestra una zona densa (pero compacta) de máximos. En el caso de los estados caóticos podemos ver que en ambos diagramas de bifurcación se observa que los máximos de  $m_x^j$  están repartidos en un amplio espectro de valores. Además, hacemos notar que en la región central,  $-0.16 \lesssim h_x \lesssim 0.16$ , de la Figura 3.3 los tipos de periodicidad son bastantes diferentes a los observados en ambos extremos de los valores del



campo, es decir  $h_x \lesssim -0.28 \wedge h_x \gtrsim 0.28$ . Para ejemplificar lo dicho anteriormente, tomemos tres valores específicos de campo magnético.



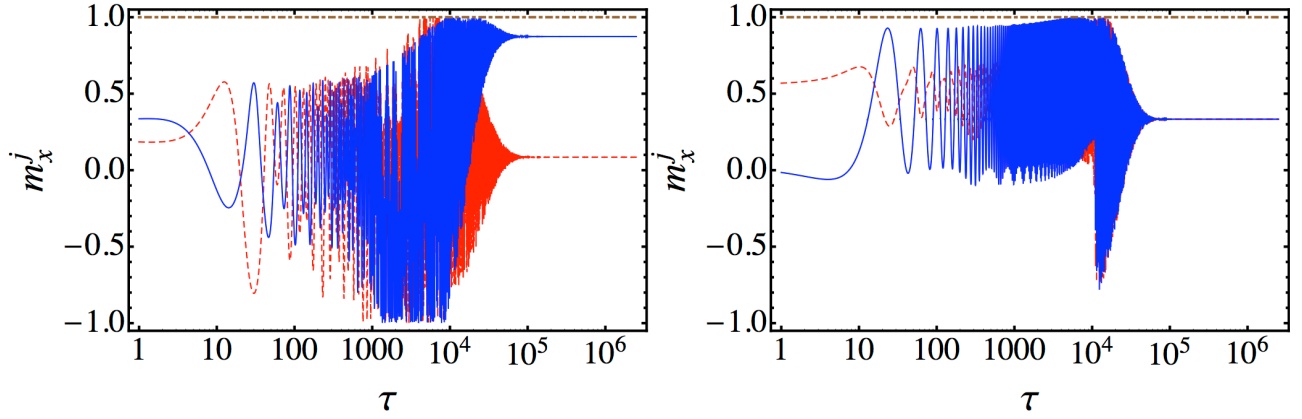
**Figura 3.4:** Serie de tiempo de  $m_x^l$  (izquierda), su transformada de Fourier correspondiente (centro), y diagrama paramétrico tridimensional de  $\mathbf{m}^l$ , para tres valores de campo:  $h_x = -0.22$  (arriba),  $h_x = -0.22$  (medio) y  $h_x = -0.22$  (abajo). Los otros parámetros fijos son los mismo de la Figura 3.3.

La Figura 3.4 muestra tanto la serie temporal de  $m_x^1$  con su correspondiente transformada de Fourier normalizada a la unidad  $S(\omega)/S_{\max}(\omega)$ , como también la evolución paramétrica de  $\mathbf{m}^1$  para tres valores particulares de campo. En el primer caso  $h_x = -0.22$  tal que estado dinámico es caótico. Esto se puede observar tanto en la serie temporal que es aperiódica, como en la transformada de Fourier que tiene múltiples picos. Además, claramente el diagrama de fases tridimensional es un atractor extraño. En los siguientes dos casos particulares a  $h_x = -0.22$  y  $h_x = -0.22$  se muestran dos estados cuasiperiodicos diferentes. El segundo caso tiene dos frecuencias dominantes, mientras que en el tercero son tres como se pueden apreciar en la FFT. Ambos diagramas de fases son toros dentro la esfera unidad  $|\mathbf{m}^1| = 1$ . En el segundo caso podemos notar que las amplitudes la componente-z de la magnetización varían poco, y están en un rango cercano a la unidad; mientras que en el tercer caso cubre casi todo el rango de valores posibles, es decir  $(-1,1)$ . En el caso de la componente-x las fluctuaciones en ambos casos están en el rango  $(0, .25)$ .

### 3.2.3 Caso Disipativo

En este apartado se analiza el caso de un sistema disipativo,  $\lambda \neq 0$ . Los valores del coeficiente de amortiguamiento pueden variar varios ordenes de magnitud. En el caso de magnetismo molecular son por lo general bastante pequeños, de ahí primeramente fijamos su valor en  $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ . En este caso, las soluciones comunes son las estacionarias y los ciclos limintes. Siendo muchísimo más típico las primeras, las cuales llegan al equilibrio y alcanzan su valor constante después de un transiente, como se muestra en la Figura 3.5. Estos estados estacionarios finales son fuertemente dependiente de los valores de los parámetros. De hecho, la magnetización de las dos partículas puede ir al mismo valor o no, como se muestra en el marco

izquierdo de la Fig. 3.5. El tipo de transiente puede ser regular (como en las oscilaciones armónicas amortiguadas clásicas) o caóticas, dependiendo del estado correspondiente del caso no disipativo.



**Figura 3.5:** Series temporales de las componente-x de las partículas  $m_x^1$  y  $m_x^2$ , y el modulo de la primera partícula  $|\mathbf{m}^1|$ . Las líneas discontinua y continua representan  $m_x^1$  y  $m_x^2$ , respectivamente, mientras que la línea de trazos y puntos representan al módulo. Los parámetros fijos son  $h_x = 0.1$ ,  $J = -0.1$ ,  $\beta_1 = 0.1$  y  $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ . El panel derecho es para  $\beta_2 = 0.1$  y el izquierdo es para  $\beta_2 = -0.1$ .

La tasa de decaimiento característica puede ser dilucidada a partir del análisis lineal. Para estimar dicha tasa, se comienza con una solución homogénea del sistema  $\mathbf{m}^1 = \mathbf{m}^2 = \hat{\mathbf{x}}$  cuando  $h_x > 0$ . De acuerdo a la condición de conservación del modulo de la magnetización, tenemos que

$$m_x^j = \sqrt{1 - \left( (m_y^j)^2 + (m_z^j)^2 \right)}. \text{ Luego para las pequeñas desviaciones la componente a lo largo del eje}$$

$\hat{\mathbf{x}}$  se puede expresar como:

$$m_x^j \approx 1 - \frac{(m_y^j)^2 + (m_z^j)^2}{2}. \tag{3.11}$$

Por lo tanto, utilizando una linealización estándar [41] el sistema queda:

$$\frac{dm_y^j}{d\tau} = -\lambda(h_x + J)m_y^j + (\beta_j - h_x - J)m_z^j + \lambda Jm_y^k + Jm_z^k, \tag{3.12}$$

$$\frac{dm_z^j}{d\tau} = (h_x + J)m_y^j + \lambda(h_x + J - \beta_j)m_z^j - Jm_y^k + \lambda Jm_z^k, \quad (3.13)$$

donde todos los términos de orden  $\Theta(m_{a,b}^n)$  con  $n > 2$  han sido despreciados. Por lo tanto, el

sistema lineal se caracteriza por la matriz:

$$\begin{pmatrix} -(h_x + J)\lambda & -h_x - J + \beta_1 & J\lambda & J \\ h_x + J & (-h_x - J + \beta_1)\lambda & -J & J\lambda \\ J\lambda & J & -(h_x + J)\lambda & -h_x - J + \beta_2 \\ -J & J\lambda & h_x + J & (-h_x - J + \beta_2)\lambda \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

Los valores propios de esta matriz,  $\sigma$ , son obtenidos usando las raíces de la ecuación secular:

$$\sigma^4 + a_3\sigma^3 + a_2\sigma^2 + a_1\sigma + a_0 = 0, \quad (3.15)$$

donde  $a_j$ , en regímenes débilmente disipativos, están dados aproximadamente por

$$a_3 = \lambda(4(h_x + J) - \Sigma), \quad (3.16a)$$

$$a_2 = 2h_x^2 + (4J - \Sigma)(h_x + J), \quad (3.16b)$$

$$a_1 = \lambda(4h_x^3 + 3h_x^2(4J - \Sigma) + 2h_x(4J^2 - 3J\Sigma + \Pi) - 2J(J\Sigma - \Pi)), \quad (3.16c)$$

$$a_0 = h_x(h_x + 2J)(h_x^2 + h_x(2J - \Sigma) - J\Sigma + \Pi), \quad (3.16d)$$

con  $\Sigma = \beta_1 + \beta_2$  y  $\Pi = \beta_1\beta_2$ . En general, los valores propios son funciones complejas,

$\sigma = \sigma_R + i\sigma_I = -\eta + i\Omega$  de modo que  $\eta$  es el factor de crecimiento de la perturbación y  $\Omega$  su

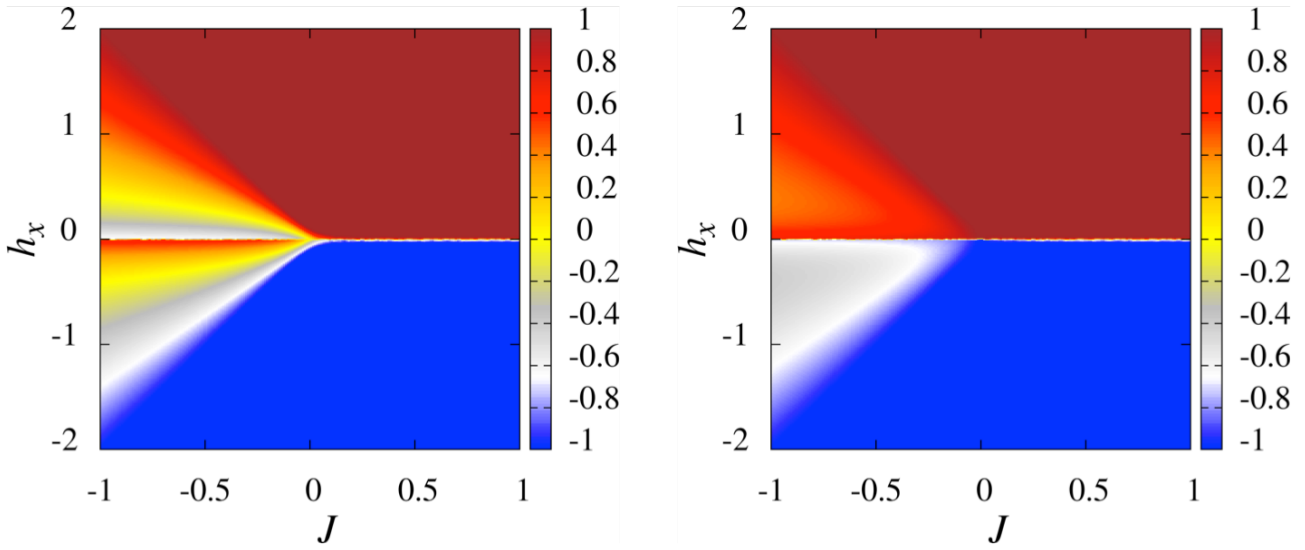
frecuencia. Usando la inversa del factor de crecimiento se puede calcular la tasa de decaimiento

característica, denotada aquí por  $\tau_c$ . Puesto que, la ecuación para  $\sigma$ , es de cuarto orden, una

forma cerrada es difícil de obtener analíticamente, y debe ser calculada numéricamente. Sin

embargo, como una primera aproximación la tasa de decaimiento característica es

$$\tau_c \approx 4 / \left[ (4(h_x + J) - \Sigma)\lambda \right].$$

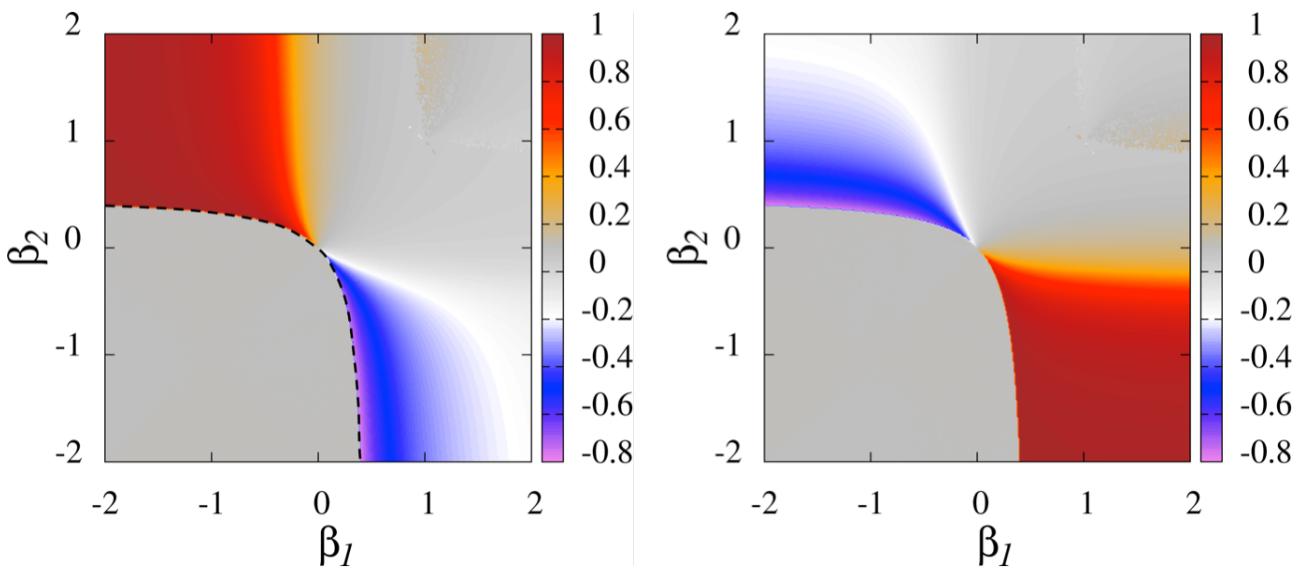


**Figura 3.6:** Diagrama de fases que muestra el valor de saturación de  $\tilde{m}_x^1$  (izquierda) y  $\tilde{m}_x^2$  (derecha) en función de  $h_x$  y  $J$ . Los parámetros fijos son:  $\beta_1 = 0.1$ ,  $\beta_2 = -0.1$  y  $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ .

Cuando  $J \rightarrow 0$  y  $\beta_1 \rightarrow \beta_2 \rightarrow -|\beta|$  el tiempo característico se reduce a  $\tau_c \rightarrow 2 / [ (|\beta| + 2h_x) \lambda ]$ , que tiene la misma estructura que la obtenida previamente en la referencia [120]. En el sistema desacoplado, cuando  $\beta$  es positivo  $\sigma_R$  pasa a ser positivo para  $\beta > 2h_x$  produciéndose una inestabilidad lineal. En nuestro caso con  $J \neq 0$ , cuando una de las constantes de anisotropía tiene signo diferente la solución siempre se descompone si  $J > 0$  y si tienen el mismo signo la condición de  $h_x > -J + \Sigma / 4$  garantiza que el sistema no sufrirá una inestabilidad lineal.

Veamos ahora a describir cómo el valor de saturación dinámico de la magnetización,  $\tilde{m}_a^j = m_a^j(\tau \rightarrow \infty)$ , cambia con los parámetros de control. La Figura 3.6 muestra dos diagramas de  $\tilde{m}_x^1$  y  $\tilde{m}_x^2$  como una función del campo externo,  $h_x$  y la constante de acoplamiento  $J$ . Cada punto en este diagrama se ha calculado numéricamente con tiempo de integración suficiente para evitar los transientes ( $\tau \gtrsim 10^8$ ) y con la condición inicial aleatoria (ICs) en las esferas  $|\mathbf{m}^1| = 1$  y  $|\mathbf{m}^2| = 1$  con el fin de obtener resultados con independencia de los ICs. Observamos que cuando la

constante de acoplamiento es positiva  $J > 0$ , la magnetización de las dos partículas tiende a  $(\pm)\hat{x}$ , dependiendo de la amplitud del campo magnético  $h_x$ . Sólo en la interface cerca  $h_x \sim 0$  la magnetización sufre perturbaciones respecto al eje x. Por otro lado, para  $J > 0$ , sólo cuando  $h_x$  es más grande que la unidad ( $|h_x| > 1$ ), la magnetización  $\mathbf{m}^1$  y  $\mathbf{m}^2$  están orientadas a lo largo del campo exterior o bien, que se orientan en otros ejes que dependen del valor de  $J$  y no están correlacionados.



**Figura 3.7:** Diagrama de fases que muestra el valor de saturación de  $\tilde{m}_x^1$  (izquierda) y  $\tilde{m}_x^2$  (derecha) en función de  $\beta_1$  y  $\beta_2$ . Los parámetros fijos son:  $h_x = 0.1$ ,  $J = -0.1$  y  $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ . La línea discontinua es un ajuste dado por la ecuación (3.17) del texto.

Además, se analiza los efectos de la anisotropía sobre dinámica de saturación de los valores. La Figura 3.7 muestra dos diagramas de  $\tilde{m}_x^1$  y  $\tilde{m}_x^2$  como una función de las constantes anisotropía  $\beta_1$  y  $\beta_2$  para valores negativos de  $J$  y pequeños campos  $h_x = 0.1$ . Esta es la zona de la figura anterior cuando la magnetización de la partícula uno no se correlaciona con la magnetización de la partícula dos. Observamos que en la región intermedia los valores de  $\tilde{m}_x^1$  y

$\tilde{m}_x^2$  están en oposición de fase, de tal manera que la línea anti-simetría es la diagonal  $\beta_1 = \beta_2$ . Por otra parte, debajo de la curva

$$\beta_2 = \begin{cases} a \tanh(b\beta_1 + c) & \beta_1 \in (-2.0, 0) \\ \tanh^{-1}(\beta_1 / a - c) / b & \beta_1 \in (0, 0.378) \end{cases} \quad (3.17)$$

tanto  $\tilde{m}_x^1$  y  $\tilde{m}_x^2$  son cero cuando  $(a, b, c) = (-0.3845, 1.3477, -0.0442)$ . De hecho, en este rango de los estados de magnetización finales están orientadas a lo largo del eje z ( $\tilde{m}_z^1 = \tilde{m}_z^2 = 1$ ), que es el eje de anisotropía. Además, se puede observar que cerca de  $\beta_1 \approx 1$  y en  $\beta_2 \gtrsim 1$  el marco izquierdo de la Figura 3.7 hay un cúmulo aislado de los puntos en los cuales  $\tilde{m}_x^a \neq 0$  con pequeña amplitud.

## Capítulo 4

### Conclusiones

Esta memoria de investigación se ha centrado en magnetismo, el cual es en general trata sobre estudio del espín, de sus efectos colectivos, como también de partículas cargadas en movimiento. En el capítulo se expuso una muy breve introducción de la evolución histórica del entendimiento y del uso que se ha dado al magnetismo. Luego se describió los tipos más comunes de comportamientos magnéticos, así como que materiales los manifiestan. En particular, se considero el caso del paramagnetismo como el caso del ferromagnetismo clásico.

En el capítulo dos se ha descrito como modelar la dinámica de partículas magnéticas en el contexto clásico cuando ellas pueden ser consideradas como mono-dominios magnéticos. Se han mostrado los dos modelos más usados para describir en contexto clásico la dinámica de la magnetización, conocidos por el modelo de Landau-Lifshitz [27] y de Landau-Lifshitz-Gilbert [28]. Se han expuesto propiedades generales de las ecuaciones de movimiento, en que casos particulares hay cantidades conservadas. Además se mostró en que casos ambas ecuaciones son equivalentes. Luego se describió los distintos tipos de interacciones. Finalmente, se estudio el caso de una partícula magnética anisotrópica en presencia de un campo externo aplicado en el límite conservativo.

En el capítulo tres se resume el trabajo de investigación original, en el cual se ha estudiado un dímero magnético clásico en presencia de un campo externo aplicado, teniendo en cuenta la energía anisotropía y la interacción de intercambio entre partículas. Se ha considerado este modelo prototipo ya que puede ser una herramienta interesante para describir moléculas magnéticas en la aproximación semiclásica [95, 96], o dos partículas magnéticas interactuando en la aproximación macroespín cuando las energías de superficie pueden ser despreciadas [105]. La evolución temporal del sistema se ha descrito en el enfoque de la ecuación de Landau-Lifshitz. Se ha analizado tanto, los regímenes conservativos y disipativos. En el caso conservativo, el



sistema se ha caracterizado principalmente a través de los exponentes de Lyapunov como una función de los parámetros y simulaciones numéricas intensivas, la computación  $10^6$  LLE en cada diagrama de dos dimensiones, se han realizado con zoom iterativos en las regiones pertinentes. En particular, se encontró que para acoplamientos positivos, el sistema es caótico en una amplia gama de valores de campo magnético si las constantes de anisotropía son iguales. La situación no es la misma cuando estas constantes tienen la misma magnitud pero diferente signo, donde aparecen regularmente regímenes caóticos para pequeños campos. Cuando la constante de acoplamiento es negativa, el escenario es completamente diferente. Para anisotropías iguales el sistema exhibe comportamientos regulares para casi todo el rango de campos magnéticos, excepto en cuatro regiones caóticas en forma de pluma ubicadas de forma simétrica con respecto al campo. Mientras tanto, para los diferentes signos de las constantes de anisotropía se encuentran múltiples transiciones de estados regulares a caóticos. Estos diagramas de Lyapunov revelan patrones complejos. En el caso de dinámica disipativa se ha calculado numéricamente la solución final estacionaria después de un transiente. Para anisotropía fija, hemos observado que la magnetización de ambos está orientada a lo largo del campo cuando la constante de cambio es positiva. Para acoplamientos negativos otras orientaciones son finalmente alcanzadas cuando  $|h_x| < 1$ . En este rango de campos, para intercambio negativo cuando se varían las anisotropías, hay una región donde el momento magnético de las partículas están en oposición de fase. Finalmente, observamos que debido a la interacción entre las partículas, se pueden observar diferentes tipos de sincronizaciones. La investigación adicional en esta dirección será presentada en futuros trabajos.

# Bibliografía

## Capítulo 1

1. J. M. D. Coey, *Magnetism and Magnetic Materials*, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.
2. W. Gilbert, *De Magnete*, Dover Publications, New York, 1991.
3. J. C. Maxwell, *Treatise on Electricity and Magnetism*, vols. 1 & 2, Dover Publications, New York, 1954.
4. S. Tomonaga (Ed.), T. Oka (Ed.), *The Story of Spin*, University Of Chicago Press, Chicago, 1998.
5. P. A. M. Dirac, Proc. R. Soc. Lond. A **117** (1928) 610.
6. M. E. Peskin, D. V. Schroeder, *An Introduction To Quantum Field Theory*, Westview Press, Colorado, 1995
7. D. C. Mattis, *The Theory of Magnetism*, vols. 1 & 2, Springer-Verlag, New York 1987.
8. J. Tejada-Palacios, Revista Española de Física, **17** (2003) 1903.
9. B. D. Cullity, C. D. Graham, *Introduction to Magnetic Materials*, Wiley-IEEE Press, New Jersey, 2009
10. E. D. Daniel (Ed.), C. Denis Mee (Ed.), M. H. Clark (Ed.), *Magnetic Recording: The First 100 Years*, Wiley-IEEE Press, New Jersey, 1998.
11. F. Nasirpour (Ed.), A. Nogaret (Ed.), *Nanomagnetism and Spintronics: Fabrication, Materials, Characterization and Applications*, World Scientific, Singapore, 2010.
12. T. Shinjo (Ed.), *Nanomagnetism and Spintronics*, Elsevier, Dordrecht, 2009.
13. S. Odenbach, *Ferrofluids: Magnetically Controllable Fluids and Their Applications*, Springer, Berlin, 2002
14. S. Odenbach, *Colloidal Magnetic Fluids: Basics, Development and Application of Ferrofluids*, Springer, Berlin, 2009.
15. D. Gatteschi, R. Sessoli, J. Villain, *Molecular Nanomagnets*, Oxford University Press, Oxford, 2011.
16. R. Bagai, G. Christou, Chem. Soc. Rev. **38** (2009) 1011.
17. G. L. Verschuur, *Hidden Attraction: The History and Mystery of Magnetism*, Oxford University Press, Oxford, 1998.
18. S. J. Blundell, *Magnetism: A Very Short Introduction*, Oxford University Press, Oxford, 2012.

19. A. Passos Guimarães, *From Lodestone to Supermagnets: Understanding Magnetic Phenomena*, Wiley-VCH, New Jersey , 2005.
20. S. Chikazumi, *Physics of Ferromagnetism*, Oxford University Press, Oxford, 2009.
21. P. Langevin, *Ann. Chemie et Physique* **5** (1905) 70.
22. M. P. Marder, *Condensed Matter Physics*, Wiley, New York, 2000.
23. P. Weiss, *Compt. Rend.* 143 (1906) 1136.
24. L. Néel, *Ann. de Physique* **18** (1932) 5.

## Capitulo 2

25. C. Ross, *Annu. Rev. Mater. Res.* **31** (2001) 203.
26. H. Zabel (Ed.), M. Farle (Ed.), *Magnetic Nanostructures: Spin Dynamics and Spin Transport*, Springer, Berlin, 2013.
27. L. Landau, E. M. Lifshitz, *Phys. Z. Sowjetunion* **8** (1935) 153.
28. T. L. Gilbert, *IEEE Trans. Mag.* **40** (2004) 3443.
29. P.E. Wigen (Ed.), *Nonlinear Phenomena and Chaos in Magnetic Materials*, World Scientific, Singapore, 1994.
30. G. Boling, D. Shijin, *Landau-Lifshitz Equations*, World Scientific, Singapore, 2008.
31. I. D. Mayergoyz, G. Bertotti, C. Serpico, *Nonlinear Magnetization Dynamics in Nanosystems*, Elsevier, Dordrecht, 2009.
32. M. Lakshmanan, *Phil. Trans. R. Soc. A* **369** (2011) 1280.
33. J. L. Garcia-Palacios, F. Lazaro, *Phys. Rev. B* **58** (1998) 14937.
34. G. Bertotti, I.D. Mayergoyz, C. Serpico, *Phys. B* **343** (2004) 325.
35. C. Serpico, I.D. Mayergoyz, G. Bertotti, *J. Appl. Phys.* **93** (2003) 6909.
36. G. Bertotti, C. Serpico, I.D. Mayergoyz, *Phys. Rev. Lett.* **86** (2001) 724.
37. G. Bertotti, I.D. Mayergoyz, C. Serpico, *Phys. B* **306** (2001) 47.
38. C. Serpico, M d'Aquino, G Bertotti, I.D Mayergoyz, *J. Magn. Magn. Mater.* **272–276** (2004) 734.
39. E. N. Lorenz, *J. Atmos. Sci.* 20 (1963) 130.
40. E. Ott, *Chaos in Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

41. J. C. Sprott, *Chaos and Time-Series Analysis*, Oxford University Press, Oxford, 2003.
42. H. Kantz, T. Schreiber, *Nonlinear Time Series Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
43. W. Horsthemke, R. Lefever, *Noise-Induced Transitions: Theory and Applications in Physics, Chemistry, and Biology*, Springer, Berlin, 2006.
44. A. Wolf, J. B. Swift, H. L. Swinney, J. A. Vastano, *Physica D* **16** (1985) 285..
45. J. A. C. Gallas, *Int. J. Bifur. Chaos* **20** (2010) 197.
46. E. Lorenz, *The Essence of Chaos*, University of Washington Press, Washington, 1993.
47. J. Gleick, *Chaos: Making a New Science*, Penguin Books, New York, 2008.
48. G. Gibson, C. Jeffries, *Phys. Rev. A* **29** (1984) 811.
49. F. M. de Aguiar, A. Azevedo, S. M. Rezende, *Phys. Rev. B* **39** (1989) 9448.
50. J. Becker, F. Rodelsperger, Th. Weyrauch, H. Benner, W. Just, and A. Cenys, *Phys. Rev. E* **59** (1999) 1622.
51. J. Cai, Y. Kato, A. Ogawa, Y. Harada, M. Chiba, T. Hirata, *J. Phys. Soc. Jpn.* **71** (2002) 3087.
52. L. F. Alvarez, O. Pla, O. Chubykalo, *Phys. Rev. B* **61** (2000) 11613.
53. D. V. Vagin, P. Polyakov, *J. Appl. Phys.* **105** (2009) 033914.
54. R. K. Smith, M. Grabowski, R. E. Camley, *J. Magn. Magn. Mater.* **322** (2010) 2127.
55. D. Laroze, J. Bragard, O. J. Suarez, H. Pleiner, *IEEE Trans. Mag.* **47** (2011) 3032.
56. J. Bragard, H. Pleiner, O. J. Suarez, P. Vargas, J. A. C. Gallas, D. Laroze, *Phys. Rev. E* **84** (2011) 037202.
57. D. Laroze, D. Becerra-Alonso, J. A. C. Gallas, H. Pleiner, *IEEE Trans Mag* **48** (2012) 3567.
58. **L. M. Pérez**, O. J. Suarez, D. Laroze, H. L. Mancini, *Cent. Eur. J. Phys.* **11** (2013) 1629.
59. D. Urzagasti, D. Laroze, D. Becerra-Alonso, **L. M. Pérez**, H. L. Mancini. En preparación.
60. M. Filipovic, C. Holmqvist, F. Haupt, W. Belzig, *Phys. Rev. B* **87**(2013) 045426.
61. Y. Nambu, *Phys. Rev. D* **7** (1973) 2405.
62. W. B. Nurdin, K. D. Schotte, *Phys. Rev. E* **61** (2000) 3579.
63. W. B. Nurdin, K. D. Schotte, *Phys. A* **308** (2002) 209.
64. P. Diaz, D. Laroze, *Int. J. Bifur. Chaos* **19** (2009) 3485.

65. N. Mukunda, E. Sudarshan, Phys. Rev. D **13** (1976) 2846.
66. T. Curtright, C. Zachos, Phys. Rev. D **68** (2003) 085001.
67. L. Takhtajan, Commun. Math. Phys. **160** (1994) 295.
68. T L. Gilbert, J.K. Kelly, Proceedings of the Pittsburg Conference on MMM, Pittsburgh, PA, 1955, p. 253. Este es solo un resumen de un congreso, nunca se presento la versión extendida. El resumen apareció también bajo la referencia "T. L. Gilbert, Phys. Rev. **100** (1955) 1243"; sin embargo esta no aparece en la base de datos de *Physical Review*. El trabajo completo sobre la disipación de Gilbert se expone en la referencia [\[28\]](#).
69. D. A. Garanin, Phys. A **172** (1991) 470.
70. F. M. Saradzhev, F. C. Khanna, S. P. Kim, M. de Montigny, Phys. Rev. B **75** (2007) 024406.
71. M. D. Stiles, W. M. Saslow, M. J. Donahue, A. Zangwill, Phys. Rev. B **75** (2007) 214423.
72. M. C. Ciornei, J. M. Rubí, J. E. Wegrowe Phys. Rev. B **83** (2011) 020410(R).
73. M. Fahnle, D. Steiauf, C. Illg, Phys. Rev. B **84** (2011) 172403.
74. A. Brataas, Y. Tserkovnyak, G. E. W. Bauer, Phys. Rev. B **84** (2011) 054416.
75. W. M. Saslow, J. App. Phys. **105** (2009) 07D315.
76. W. M. Saslow, K. Rivkin, J. Magn. Mater. **320** (2008) 2622.
77. R. Urban, G. Woltersdorf, B. Heinrich, Phys. Rev. Lett. **87** (2001) 217204.
78. H. T. Nembach, J. M. Shaw, C. T Boone, T. J. Silva, Phys. Rev. Lett. **110** (2013) 117201
79. M.A. Ruderman, C. Kittel, Phys. Rev. **96** (1954) 99.
80. T. Kasuya, Prog. Theor. Phys. **16** (1956) 45.
81. K. Yosida, Phys. Rev. **106** (1957) 893.
82. I. Dzyaloshinsky, Sov. Phys. JEPT **5** (1957) 1259.
83. T. Moriya, Phys. Rev. **120** (1960) 91.

### Capítulo 3

84. A. Ardavan, O. Rival, J. J. L. Morton, and S. J. Blundell, Phys. Rev. Lett. **98** (2007) 057201.
85. N. Leuenberger, D. Loss, Nature **410** (2001) 789.

86. M. Mannini, F. Pineider, P. Saintavit, C. Danieli, E. Otero, C. Sciancalepore, A. M. Talarico, M. A. Arrio, A. Cornia, D. Gatteschi, R. Sessoli, *Nature Mater.* **8** (2009) 194.
87. L. Bogani, W. Wernsdorfer, *Nature Mater.* **7** (2008) 179.
88. M. Manoli, R. D. L. Johnstone, S. Parsons, M. Murrie, M. Aronte, M. Evangelisti, E. K. Brechin, *Angew. Chem. Int. Ed.* **46** (2007) 4456.
89. G. Karotsis, M. Evangelisti, S. J. Dalgarno, E. K. Brechin. *Angew. Chem. Int. Ed.* **48** (2009) 9928.
90. W. Linert, M. Verdaguer (editors) *Molecular Magnets* (Springer, Berlin, 2003).
91. D. Gatteschi, L. Pardi, A. L. Barra, A. Müller, J. Doring, *Nature* **354** (1991) 463.
92. R. Sessoli, D. Gatteschi, A. Caneschi, M. A. Novak, *Nature* **365** (1993) 141.
93. D. Gatteschi, A. Caneschi, L. Pardi, R. Sessoli, *Science* **265** (1994) 1054.
94. D. Gatteschi, *Adv. Mater.* **6** (1994) 635.
95. M. Axenovich, M. Luban, *Phys. Rev. B* **63** (2001) 100407.
96. A. Bencini, D. Gatteschi, *Electron Paramagnetic Resonance of Exchange Coupled Systems*, Springer, Berlin, 1990.
97. D. Mentrup, J. Schnack, M. Luban, *Physica A* **272** (1999) 153.
98. D. V. Efremov, R. A. Klemm, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 174427.
99. M. Ameduri and R. A. Klemm, *Phys. Rev. B* **66** (2002) 224404.
100. R. A. Klemm and M. Luban, *Phys. Rev. B* **64** (2001) 104424.
101. D. Laroze and P. Vargas, *Phys. B* **372** (2006) 332.
102. D. Laroze, P. Vargas, C. Cortes, and G. Gutierrez, *J. Magn. Magn. Mater.* **320** (2008) 1440.
103. A. F. Franco, J. M. Martinez, J. L. Dujardin, and H. Kachkachi, *Phys. Rev. B* **84** (2011) 134423.
104. R. C. O'Handley, *Modern Magnetic Materials: Principles and Applications*, Wiley-Interscience, New York, 1999.
105. X. Batlle, A. Labarta, *J. Phys. D* **35** (2002) R15.
106. P. Landeros, J. Escrig, D. Altbir, D. Laroze, J. d'Albuquerque e Castro, P. Vargas, *Phys. Rev. B* **65** (2005) 094435.
107. D. V. Efremov, R. A. Klemm *Phys. Rev. B* **74** (2006) 064408.
108. J. A. J. Perenboom, J. S. Brooks, S. Hill, T. Hathaway, N. S. Dalal, *Phys. Rev. B* **58** (1998) 330.

109. E. Beaurepaire, J. C. Merle, A. Daunois, J. Y. Bigot, Phys. Rev. Lett. **76** (1996) 4250.
110. B. Koopmans, M. van Kampen, J. T. Kohlhepp, W.J.M. de Jonge, Phys. Rev. Lett. **85** (2000) 844.
111. J. Hohlfeld, E. Matthias, R. Knorren, K. H. Bennemann, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 4861.
112. O. E. Rössler, Phys. Lett. A **71** (1979) 155.
113. T. Matsumoto, L. O. Chua, K. Kobayashi, IEEE Trans. Circuits Systems, **CAS-33** (1986) 1143.
114. G. Baier, S. Sahle, Phys. Rev. E **51** (1995) R2712.
115. G. Vidal, H. Mancini, Int. J. Bifur. Chaos **19** (2009) 719.
116. G. Vidal, H. Mancini, Int. J. Bifur. Chaos **20** (2010) 885.
117. G. Vidal, *"Sincronización y control de sistemas dinámicos bajo régimen de caos espacio-temporal"*. Tesis Doctoral, Universidad de Navarra, 2010.
118. H. Gould, J. Tobochnik, *An Introduction to Computer Simulation Methods: Applications to Physical Systems*, 2nd ed., Addison-Wesley, New York, 1996.
119. W. L. Ditto, M.L. Spano, H. T. Savage, S. N. Rausero, J. Heagy, E. Otth, Phys. Rev. Lett. **65** (1990) 533.
120. M. G. Clerc, S. Coulibaly, D. Laroze, Phys. D **239** (2010) 72.