



**tecnun**  
Universidad  
de Navarra

Escuela de Ingeniería

# **ANÁLISIS SÍSMICO DE ESTRUCTURAS**

## **Fundamentos teóricos**

Juan Tomás Celigüeta



## INDICE

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD</b>	<b>3</b>
<b>3</b>	<b>ESPECTROS DE RESPUESTA</b>	<b>4</b>
3.1	Espectros de diseño	7
<b>4</b>	<b>SISTEMAS CON N GRADOS DE LIBERTAD</b>	<b>10</b>
4.1	Ecuaciones del movimiento	10
4.2	Excitación	10
4.3	Frecuencias naturales y modos de vibración	11
4.4	Ecuaciones del movimiento desacopladas	12
<b>5</b>	<b>RESPUESTA DE UN SISTEMA CON N GRADOS DE LIBERTAD</b>	<b>14</b>
5.1	Factor de participación modal	14
5.2	Respuesta modal máxima	14
5.3	Respuesta máxima en desplazamiento	14
5.4	Masa sísmica de la estructura	14
5.5	Masa modal efectiva	15
<b>6</b>	<b>COMBINACIÓN DE RESPUESTAS MODALES</b>	<b>16</b>
6.1	Método de los valores absolutos	16
6.2	Método SRSS	16
6.2.1	Caso de modos agrupados	16
6.3	Método CQC	17
<b>7</b>	<b>RESPUESTA RESIDUAL</b>	<b>18</b>
<b>8</b>	<b>COMBINACIÓN DE SEÍSMOS</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>MÉTODO SIMPLIFICADO DE LA NORMA NCSE-02</b>	<b>21</b>
<b>10</b>	<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>25</b>
<b>11</b>	<b>ANEJO A</b>	<b>26</b>

# 1 INTRODUCCIÓN

Durante un seísmo se producen violentos movimientos del suelo, que afectan a las estructuras que están sujetas a él. Sobre los orígenes y la forma de propagación de estos movimientos a través de la corteza terrestre existen gran cantidad de estudios, que corresponden a la Sismología. Desde el punto de vista de la Ingeniería Mecánica, interesa conocer las deformaciones y tensiones que se producen en las estructuras debidas a los movimientos del suelo. Para ello se requiere conocer su magnitud y variación en el tiempo.

Existen varios métodos para evaluar la intensidad de un seísmo, pero el más habitual, y el que da una información más completa consiste en efectuar registros del valor de la aceleración del suelo a lo largo del tiempo de duración del seísmo, en sus tres direcciones.

La Figura 1 muestra un ejemplo de registro, correspondiente a la aceleración en dirección Norte-Sur del terremoto de El Centro (California) en 1940, de magnitud 7.1 (Valores de aceleración obtenidos de: <http://www.vibrationdata.com/elcentro.htm>).

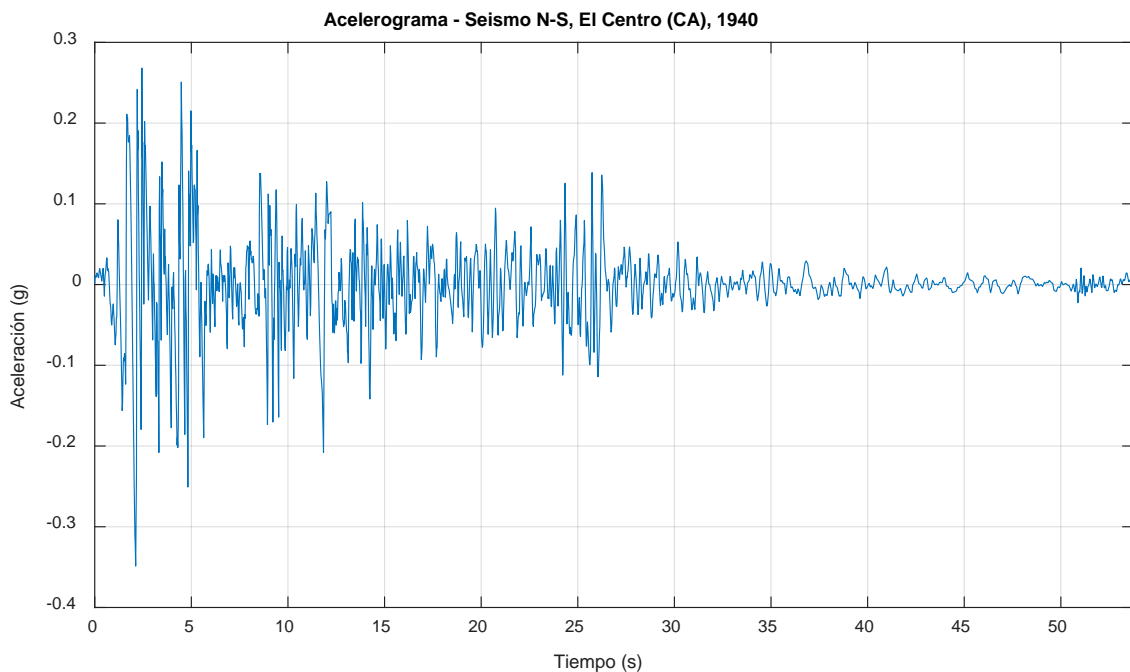


Figura 1. Acelerograma. Seísmo de El Centro, 1940

En un registro de este tipo se destacan tres magnitudes importantes: el tiempo de duración total del seísmo, su amplitud y el contenido en frecuencia del movimiento. Como amplitud se toma normalmente el valor máximo, y el contenido en frecuencia puede representarse por el espectro en frecuencia del acelerograma. El problema está en que se conocen los acelerogramas de una serie de seísmos ya ocurridos en el pasado, pero no de los que pueden ocurrir, por lo que habitualmente lo que se hace es definir en las normas un seísmo de diseño, basado en la Sismología, que se utiliza para determinar si la estructura es capaz de soportarlo manteniendo su capacidad resistente.

Los movimientos bruscos del terreno corresponden a desplazamientos relativamente pequeños, pero con grandes aceleraciones. Los movimientos del terreno son tanto horizontales como verticales, pero los horizontales suelen ser mucho más grandes que los verticales.

Las aceleraciones impuestas por el movimiento del terreno producen grandes fuerzas de inercia, sobre todo en las plantas de los edificios en altura (Figura 2). Estas fuerzas de inercia producen importantes deformaciones en las barras, que generan grandes esfuerzos de flexión y cortadura y la estructura falla por resistencia.

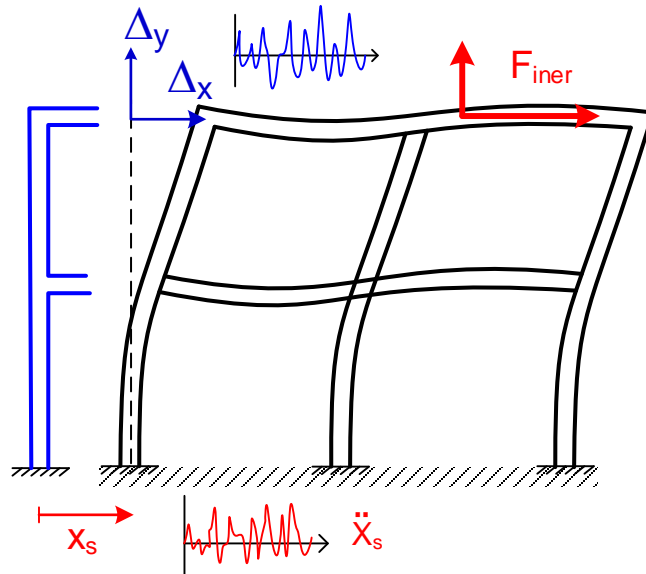


Figura 2. Acción sísmica sobre una estructura de plantas

## 2 SISTEMAS CON UN GRADO DE LIBERTAD

Se considera un oscilador elemental de un grado de libertad con masa  $m$ , rigidez  $k$  y amortiguamiento  $c$ , que se excita por su base mediante un movimiento igual al del seísmo [1].

Se denomina  $x_0(t)$  al movimiento conocido del suelo, y  $x_t(t)$  al movimiento absoluto de la masa, ambos respecto a un eje de referencia fijo (Figura 3). El movimiento relativo entre los dos extremos del muelle y del amortiguador es:

$$x(t) = x_t(t) - x_0(t) \quad (1)$$

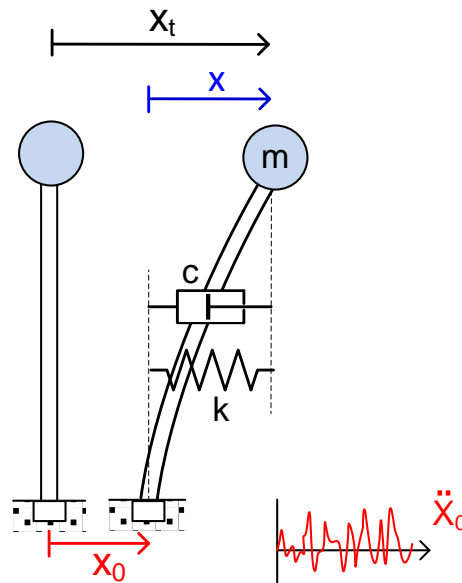


Figura 3. Oscilador de un grado de libertad con movimiento por su base

En ausencia de fuerzas exteriores, la ecuación del movimiento de la masa es:

$$m \ddot{x}_t + c (\dot{x}_t - \dot{x}_0) + k (x_t - x_0) = 0 \quad (2)$$

Introduciendo la coordenada de deformación relativa  $x$  y sustituyendo  $x_t$  por su valor se obtiene:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + k x = -m \ddot{x}_0 \quad (3)$$

Esta es la ecuación diferencial del movimiento de un sistema de un grado de libertad sobre el que actúa una fuerza de valor  $-m \ddot{x}_0(t)$ , que es la fuerza de inercia producida por el movimiento de la base. La solución de la ecuación (3) puede obtenerse mediante la integral de convolución [2]:

$$x(t) = \frac{1}{m \omega_D} \int_0^t (-m \ddot{x}_0(\tau)) e^{-\xi \omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \quad (4)$$

Siendo:

$$\text{Frecuencia natural del oscilador elemental } \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{Factor de amortiguamiento del sistema } \xi = \frac{c}{2m\omega}$$

$$\text{Frecuencia natural amortiguada del sistema } \omega_D = \omega \sqrt{(1 - \xi^2)}$$

### 3 ESPECTROS DE RESPUESTA

La ecuación (4) permite calcular la respuesta de un sistema elemental ante un seísmo dado, pero su aplicación es engorrosa ya que se necesita conocer la aceleración del suelo  $\ddot{x}_0(t)$  y con ella debe efectuarse una integración en el tiempo. Pero a efectos ingenieriles lo que normalmente importa es el valor máximo de la respuesta, que es cuando se producen los daños en la estructura, por lo que se puede tomar el valor máximo absoluto en dicha ecuación. Por tanto, queda:

$$x_{max} = \frac{1}{\omega_D} \max \left| \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \right| \quad (5)$$

Además, se puede efectuar la simplificación  $\omega_D \approx \omega$ , ya que, para valores pequeños del factor de amortiguamiento, en el orden  $\xi < 0.1$ , el error que se produce es despreciable. La deformación máxima se puede poner como:

$$x_{max} = \frac{1}{\omega} S_v(\xi, \omega) \quad (6)$$

Donde  $S_v(\xi, \omega)$  es la llamada *respuesta en pseudo-velocidad espectral* para un movimiento del suelo  $x_0(t)$ , que se define como:

$$S_v(\xi, \omega) = \max \left| \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D(t-\tau)) d\tau \right| \quad (7)$$

La Figura 4 muestra el espectro de respuesta en pseudo-velocidad obtenido mediante esta expresión para el seísmo de El Centro mostrado en la Figura 1, para dos valores del amortiguamiento  $\xi$ , empleando en abscisas el periodo del oscilador  $T = 2\pi/\omega$ .

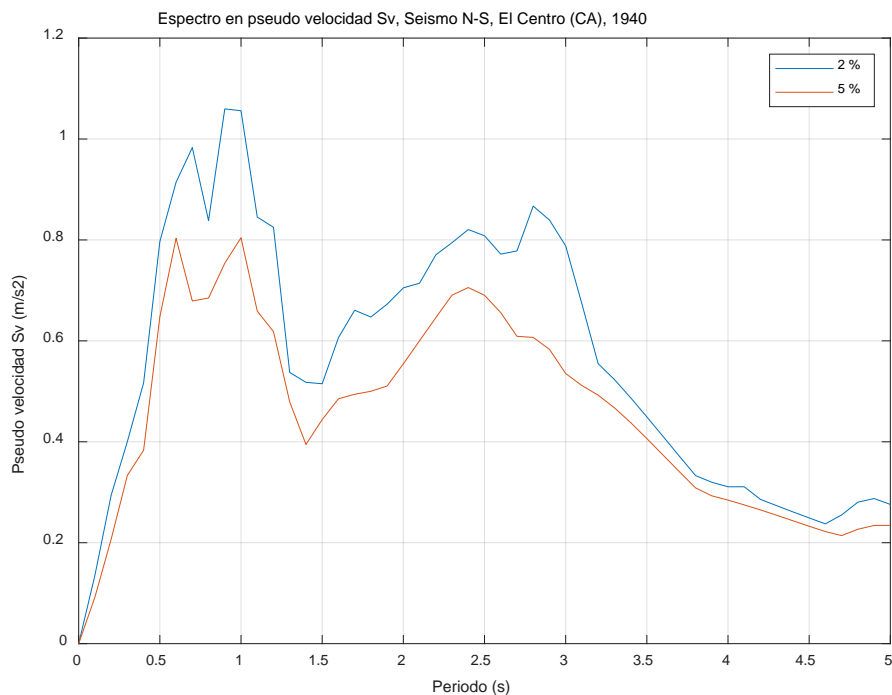


Figura 4. Espectro en pseudo-velocidad. Seísmo de El Centro, 1940

De manera análoga se puede definir el *desplazamiento espectral*  $S_d(\xi, \omega)$ , que indica la máxima respuesta en desplazamiento del oscilador elemental ante el sismo:

$$S_d(\xi, \omega) = \frac{1}{\omega} S_v(\xi, \omega) \quad (8)$$

La Figura 5 muestra el desplazamiento espectral obtenido mediante esta expresión para el sismo de El Centro mostrado en la Figura 1, para dos valores del amortiguamiento  $\xi$ , empleando en abscisas el periodo  $T = 2\pi/\omega$ .

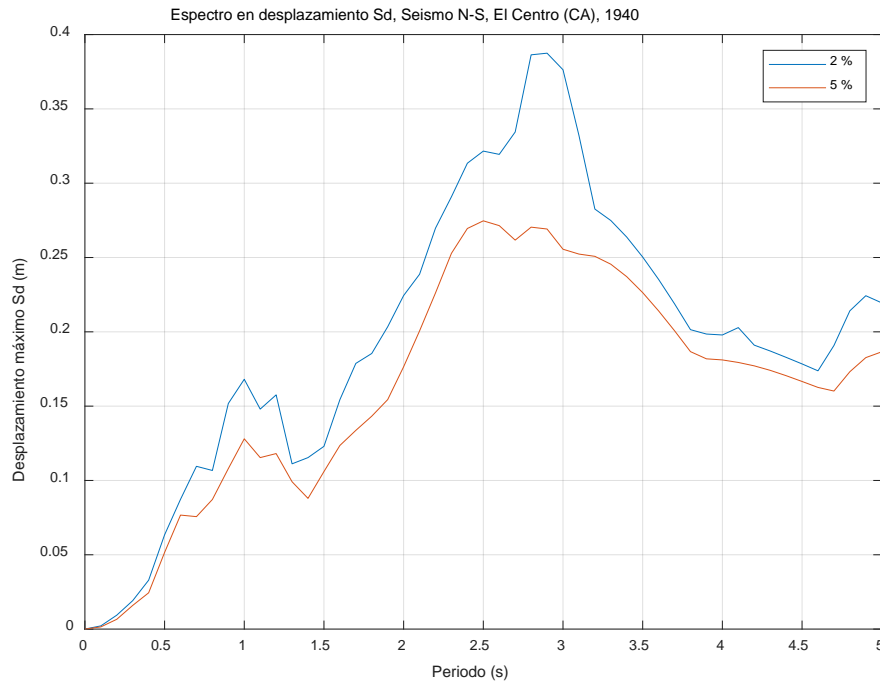


Figura 5. Espectro en desplazamiento. Seísmo de El Centro, 1940.

La respuesta máxima queda:

$$x_{max} = S_d(\xi, \omega) \quad (9)$$

Análogamente la *aceleración espectral* se define como:

$$S_a(\xi, \omega) = \omega S_v(\xi, \omega) = \omega^2 S_d(\xi, \omega) \quad (10)$$

La Figura 6 muestra la aceleración espectral obtenida mediante esta expresión para el sismo de El Centro mostrado en la Figura 1, para dos valores del amortiguamiento  $\xi$ , empleando en abscisas el periodo  $T = 2\pi/\omega$ . En el espectro de aceleración resulta relevante el valor de la aceleración de periodo cero  $ZPA = S_a(T = 0)$ , que es la aceleración que presentará un oscilador sin masa, o con una rigidez muy grande.

El código Matlab para obtener los espectros mostrados en este apartado se puede ver en el Anejo A.

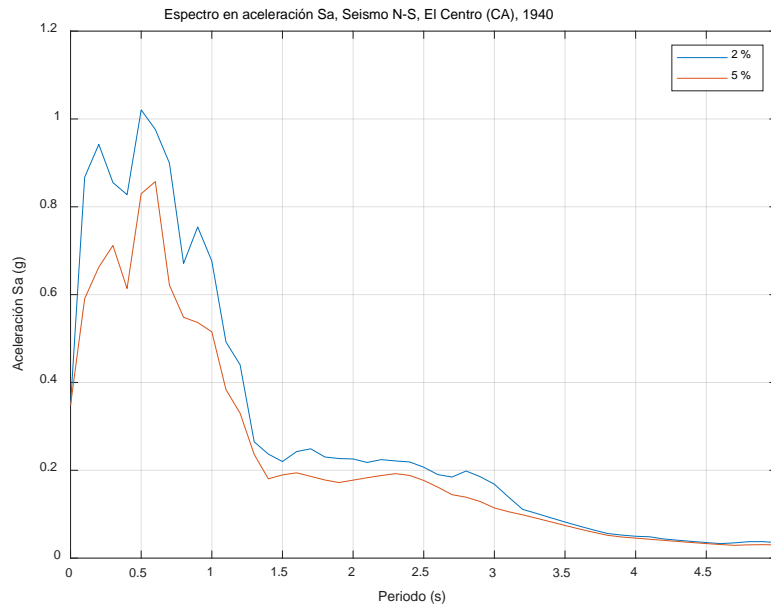


Figura 6. Espectro en aceleración. Seísmo de El Centro, 1940.

Por lo tanto, la máxima respuesta del oscilador elemental se puede expresar de cualquiera de las formas siguientes:

$$x_{max} = S_d(\xi, \omega) = \frac{1}{\omega} S_v(\xi, \omega) = \frac{1}{\omega^2} S_a(\xi, \omega) \tag{11}$$

Dadas las relaciones sencillas que existen entre los tres espectros, se suelen representar en un mismo gráfico, habitualmente en escalas logarítmicas.

En la Figura 7 se muestra el espectro del seísmo de El Centro, en 1940, en dirección N-S cuyo acelerograma está en la Figura 1. En abscisas se representa el periodo del oscilador elemental y en ordenadas el valor de la pseudo - velocidad espectral, ambos en escalas logarítmicas. Como parámetros auxiliares se pueden leer los valores de la aceleración y desplazamientos espectrales, que se distribuyen como líneas rectas en escalas logarítmicas. Los espectros así definidos representan la máxima respuesta en posición, velocidad o aceleración de toda una familia de osciladores elementales de periodo natural dado en el eje de abscisas del espectro.



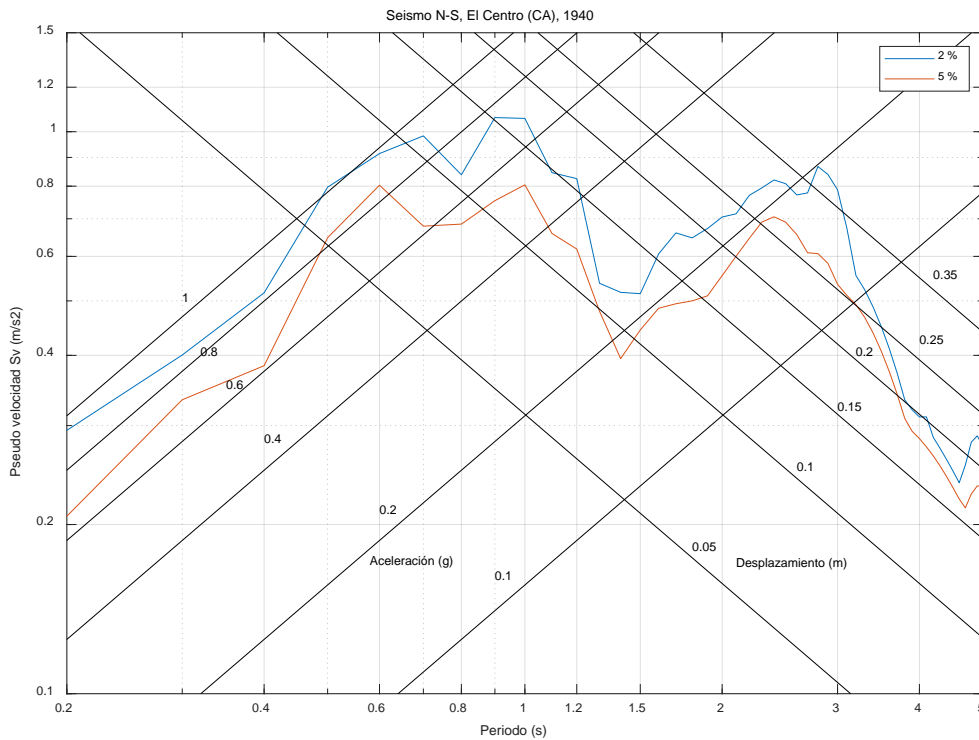


Figura 7. Espectro combinado de velocidad, desplazamiento y aceleración. Seísmo de El Centro, 1940.

El uso de los espectros de respuesta permite transformar la información del seísmo de su forma inicial como acelerograma a una forma mucho más sencilla, que tiene la ventaja de mostrar directamente la respuesta máxima en desplazamiento que se produciría en un sistema de un grado de libertad de características conocidas  $\xi$  y  $\omega$ , para dicho seísmo.

La única limitación para el uso de los espectros está en la suposición efectuada de un comportamiento elástico y lineal. Por esta razón los espectros no sirven para calcular el posible daño esperado sobre la estructura, ya que esto implica grandes deformaciones que no son ni lineales ni elásticas.

### 3.1 ESPECTROS DE DISEÑO

Los espectros son muy útiles en la etapa de diseño, para determinar cuál es la máxima tensión o deformación que aparecería en una estructura ante un seísmo dado, permitiendo por lo tanto verificar su comportamiento correcto ante dicho seísmo.

Las normas de diseño sísmico establecen los espectros de respuesta a emplear, en función de las características del terreno y del tipo de estructura. La norma española NCSE 02 establece un espectro de respuesta en aceleración horizontal para un oscilador de periodo  $T(s)$  y amortiguamiento 5% dado por:

$$S_a = \alpha a_c$$

Donde  $a_c$  es la aceleración sísmica de cálculo en la base del edificio, que tiene en cuenta la peligrosidad del lugar, la importancia de la construcción y el tipo de terreno. La magnitud  $\alpha$  es el espectro

normalizado de respuesta en aceleración horizontal que se muestra en la Figura 8. Los parámetros que lo definen dependen del tipo de terreno (C) y de la ubicación geográfica (K), definidos por la norma.

Con esta definición del espectro, se observa que la aceleración de periodo cero *ZPA* es igual a la aceleración sísmica de cálculo:

$$ZPA = S_a(T = 0) = \alpha(T = 0)a_c = a_c$$

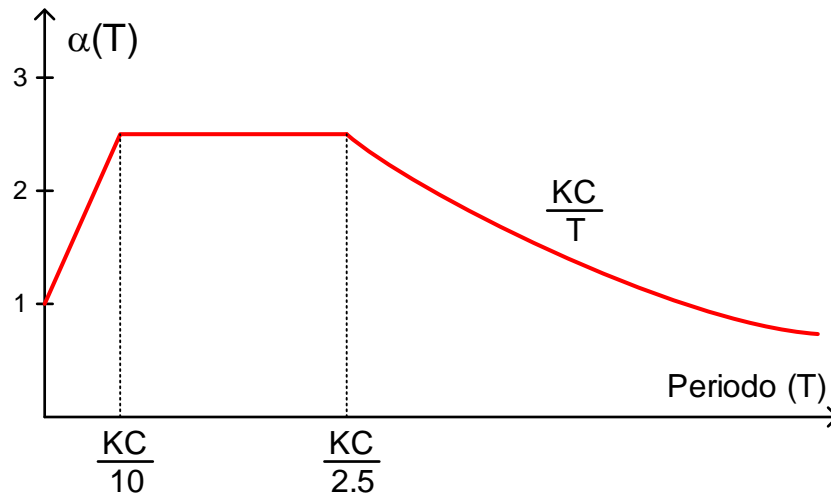


Figura 8. Espectro normalizado de NCSE 02

El Eurocódigo 8, EN 1998-1, establece un espectro de respuesta en aceleración con cuatro ramas distintas: lineal, constante,  $\frac{1}{T}$  y  $\frac{1}{T^2}$  (Figura 9).

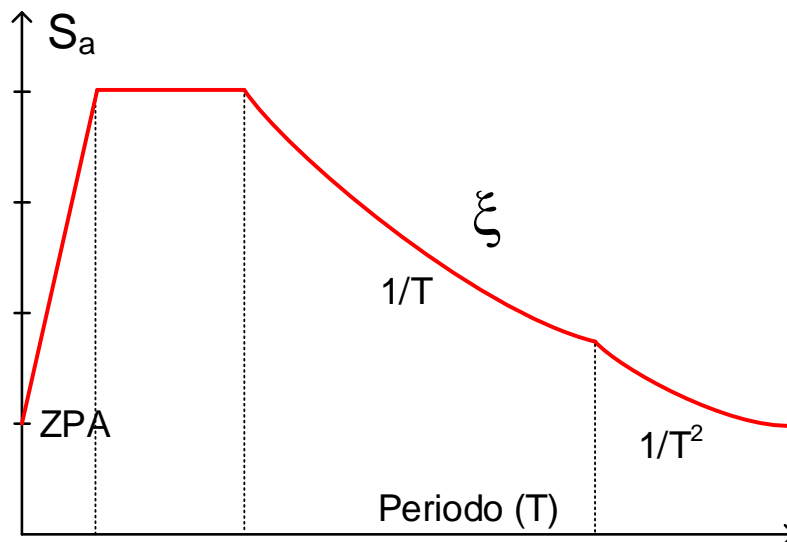


Figura 9. Espectro de respuesta en aceleración de EN 1998-1

El espectro de respuesta en aceleración tiene un significado físico claro: representa la máxima respuesta en aceleración de una familia de osciladores elementales, de periodos diferentes, cuando son excitados por el sismo.

La Figura 10 muestra este concepto, según la norma NCSE-02, para un edificio situado en un terreno con  $K = 1$  y  $C = 1.6$ .

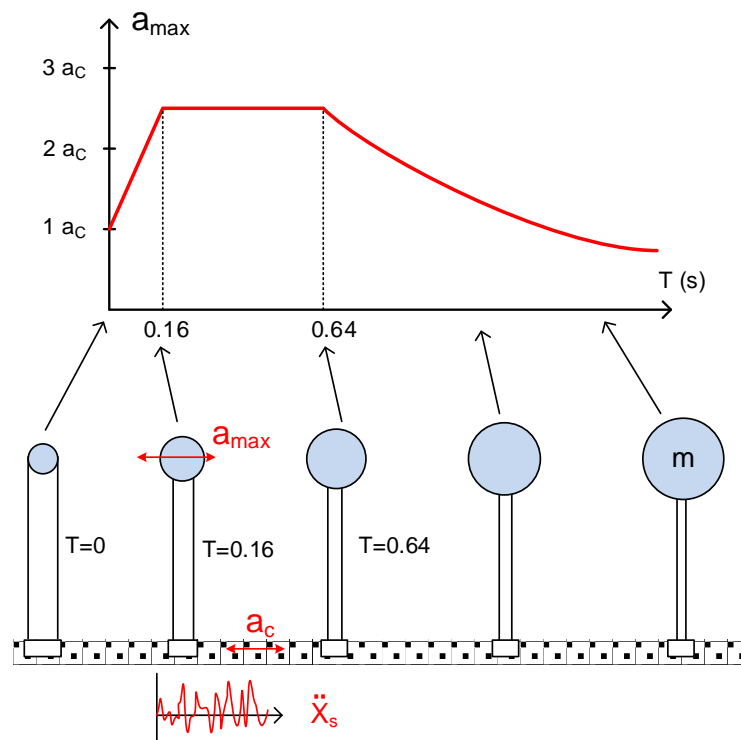


Figura 10. Significado físico del espectro de respuesta en aceleración

## 4 SISTEMAS CON N GRADOS DE LIBERTAD

En este apartado se estudia el efecto que un seísmo determinado produce sobre un sistema de varios grados de libertad. Para su análisis se tendrá en cuenta el comportamiento de un sistema de un grado de libertad que, como se ha visto en el apartado anterior, viene dado por el espectro de la respuesta.

### 4.1 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Las ecuaciones del movimiento de un sistema de  $n$  grados de libertad sometido a un movimiento de su base, suponiendo que no actúan otras fuerzas exteriores, son:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}}_t + \mathbf{C}(\dot{\mathbf{x}}_t - \dot{\mathbf{x}}_0) + \mathbf{K}(\mathbf{x}_t - \mathbf{x}_0) = 0 \quad (12)$$

Siendo  $\mathbf{x}_t$  el desplazamiento total de los grados de libertad de la estructura respecto de un sistema de referencia fijo, y  $\mathbf{x}_0$  el desplazamiento de la base, que arrastra a toda la estructura (Figura 11). Las deformaciones elásticas producidas, relativas al movimiento de la base, son:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_t(t) - \mathbf{x}_0(t) \quad (13)$$

Las matrices de rigidez  $\mathbf{K}$ , inercia  $\mathbf{M}$  y amortiguamiento  $\mathbf{C}$ , de la estructura se calculan normalmente mediante el método de los elementos finitos para sistemas continuos o mediante sus propiedades de rigidez para estructuras reticulares.

Sustituyendo en la ecuación (12) se obtiene:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = 0 \quad (14)$$

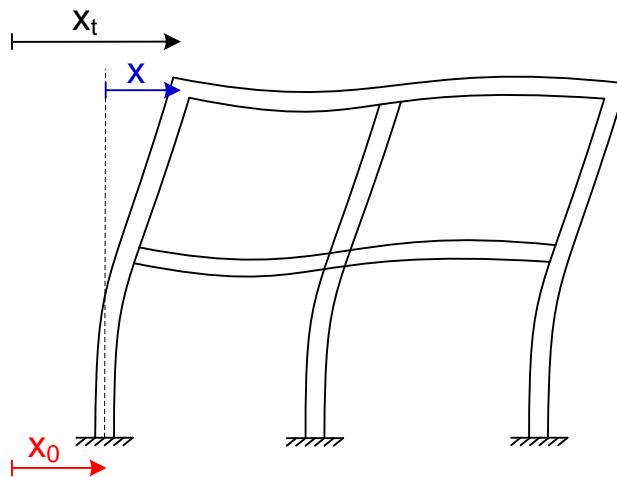


Figura 11. Sistema de  $n$  grados de libertad. Seísmo horizontal

### 4.2 EXCITACIÓN

La excitación de la estructura consiste en el movimiento de sus puntos de apoyo, definida por una función en el tiempo  $\mathbf{x}_0(t)$ . Además, se supone que todos los puntos de apoyo están sometidos al mismo valor de desplazamiento simultáneamente. Esto es equivalente a decir que la base donde se apoya la estructura es muy rígida en comparación con la propia estructura. Esto puede no ser así en

estructuras de mucha longitud, con apoyos muy separados sobre terrenos diferentes, como por ejemplo los puentes.

En general los sistemas estudiados son tridimensionales, con posibilidad de desplazarse en cualquiera de las tres direcciones. Con objeto de simplificar el análisis se considera que el movimiento de la base se efectúa en una única dirección, es decir, que se trata de un sismo unidireccional. Más adelante se tratarán los sismos actuando en varias direcciones.

El vector de desplazamientos de la base de la estructura  $\mathbf{x}_0(t)$  se puede poner en la forma:

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{d} x_0(t) \quad (15)$$

Siendo:

$\mathbf{d}$ : Vector que define la dirección de la excitación sísmica. Contiene, en cada nudo, un 1 para los grados de libertad correspondientes a la dirección de excitación y un cero en los grados de libertad no excitados.

$x_0(t)$ : Función escalar que define el movimiento de la base.

Sustituyendo la ecuación (15) en la (14) y reordenando se obtiene:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = -\mathbf{M} \mathbf{d} \ddot{x}_0(t) \quad (16)$$

Integrando esta ecuación diferencial se obtiene la respuesta de la estructura en el tiempo. Su integración requiere conocer el acelerograma de la excitación del terreno  $\ddot{x}_0(t)$ , por lo que, para las aplicaciones prácticas de diseño de estructuras, resulta más conveniente el empleo de los espectros de respuesta. Para ello es necesario efectuar un análisis modal de la estructura.

### 4.3 FRECUENCIAS NATURALES Y MODOS DE VIBRACIÓN

Las  $n$  frecuencias naturales  $\omega_i$  y los  $n$  modos de vibración  $\Phi_i$  de la estructura se obtienen resolviendo el problema de valores propios:

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = 0 \quad (17)$$

La hipótesis habitual en estructuras con bajo amortiguamiento es que el amortiguamiento es proporcional, es decir que la matriz  $\mathbf{C}$  es combinación lineal de las matrices de rigidez e inercia:

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{K} + \beta \mathbf{M} \quad (18)$$

Con esta hipótesis resulta que los modos obtenidos resolviendo el problema de autovalores anterior son también ortogonales a la matriz  $\mathbf{C}$ , al igual que lo son a las matrices  $\mathbf{K}$  y  $\mathbf{M}$  [1]. Por lo tanto, se cumple que:

$$\Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i = k_i \quad \Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i = m_i \quad \Phi_i^T \mathbf{C} \Phi_i = c_i \quad (19)$$

Siendo  $m_i, k_i, c_i$  la masa, rigidez y amortiguamiento modales asociados al modo  $\Phi_i$ , y cumpliéndose que:

$$\omega_i^2 = \frac{k_i}{m_i} \quad (20)$$

Agrupando las expresiones anteriores para todos los modos:

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \mathbf{k} \quad \Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{m} \quad \Phi^T \mathbf{C} \Phi = \mathbf{c} \quad (21)$$

Siendo las matrices diagonales de características modales:

$$\mathbf{k} = \text{diag}(k_i) \quad \mathbf{m} = \text{diag}(m_i) \quad \mathbf{c} = \text{diag}(c_i)$$

Y  $\Phi$  la matriz modal que agrupa a todos los modos por columnas:

$$\Phi = [\dots \Phi_i \dots]$$

#### 4.4 ECUACIONES DEL MOVIMIENTO DESACOPLADAS

La respuesta en deformación de la estructura  $\mathbf{x}$  se puede expresar como una combinación lineal de los modos [2]:

$$\mathbf{x} = \sum \eta_i(t) \Phi_i = \Phi \boldsymbol{\eta} \quad (22)$$

Siendo  $\Phi$  la matriz modal y  $\boldsymbol{\eta}$  el vector que agrupa a las coordenadas modales  $\eta_i$ , que representan el factor con el que cada modo interviene en la respuesta total. La Figura 12 representa a respuesta dinámica de una estructura de edificación en base a sus primeros modos de vibración.

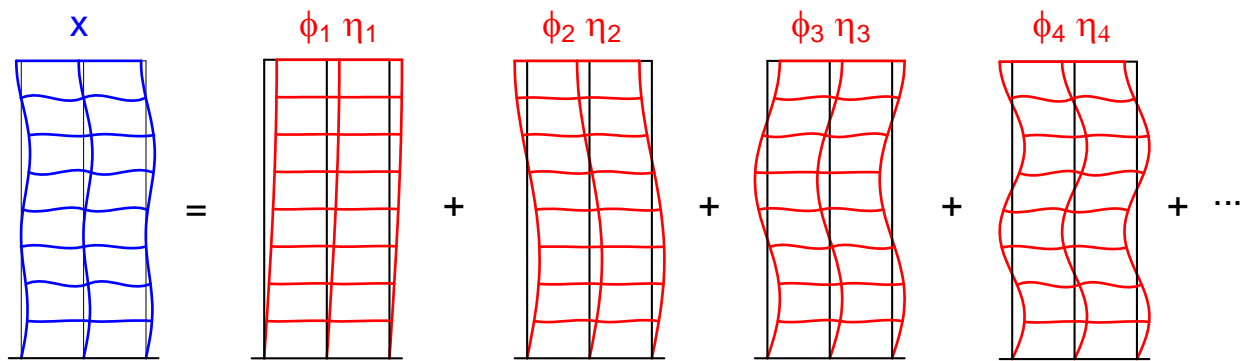


Figura 12. Respuesta de una estructura en base a sus modos de vibración

Aplicando transformación modal (22) a la ecuación (16) y teniendo en cuenta las relaciones de diagonalización (19) se obtiene:

$$m_i \ddot{\eta}_i(t) + c_i \dot{\eta}_i(t) + k_i \eta_i(t) = -\Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \ddot{x}_0(t) \quad i = 1, \dots, n \quad (23)$$

Esta expresión representa un conjunto de  $n$  ecuaciones independientes entre sí -una por cada modo- que son las ecuaciones desacopladas del sistema de  $n$  grados de libertad, y cuyas incógnitas son las coordenadas modales  $\eta_i(t)$ . Se ha convertido así el sistema inicial de  $n$  grados de libertad en  $n$  sistemas independientes de un grado de libertad cada uno.

La solución de las ecuaciones (23) se obtiene de la misma manera que se hizo para el sistema de un grado de libertad, mediante la integral de convolución con la respuesta al impulso unitario, obteniéndose en este caso:

$$\eta_i(t) = \frac{-1}{m_i \omega_{Di}} \int_0^t \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \ddot{x}_0(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) d\tau \quad (24)$$

Una vez conocidas todas las coordenadas modales  $\eta_i$  en función del tiempo, la ecuación (22) permite calcular el valor de la respuesta en desplazamiento de la estructura  $\mathbf{x}$  en función del tiempo.

## 5 RESPUESTA DE UN SISTEMA CON N GRADOS DE LIBERTAD

### 5.1 FACTOR DE PARTICIPACIÓN MODAL

Se define el factor de participación modal  $P_i$  como:

$$P_i = \frac{1}{m_i} \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (25)$$

Es un parámetro que representa la magnitud con la que el modo  $\Phi_i$  participa en la respuesta, ante un seísmo cuya dirección de excitación viene definida por el vector  $\mathbf{d}$ .

Este factor será nulo cuando el modo  $\Phi_i$  y el vector de excitación  $\mathbf{d}$  sean ortogonales sobre  $\mathbf{M}$ , y será máximo cuando ambos vectores sean coincidentes. Se observa que el factor de participación  $P_i$  no depende de la intensidad del seísmo, sino únicamente de la dirección de excitación.

Empleando el factor de participación modal, la respuesta modal puede ponerse como:

$$\eta_i(t) = -\frac{P_i}{\omega_{Di}} \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) d\tau \quad (26)$$

### 5.2 RESPUESTA MODAL MÁXIMA

Lo que interesa en la cualificación sísmica son los valores máximos de la respuesta, por eso se puede tomar el valor máximo absoluto de la ecuación (30) para obtener el valor máximo de la respuesta modal:

$$\eta_{i,max} = \frac{P_i}{\omega_{Di}} \max \left| \int_0^t \ddot{x}_0(\tau) e^{-\xi_i \omega_i (t-\tau)} \sin(\omega_{Di}(t-\tau)) d\tau \right| \quad (27)$$

La expresión del valor máximo corresponde al espectro de pseudo-velocidad, definido en las ecuaciones (5) y (6), por lo que la respuesta modal máxima se puede poner como:

$$\eta_{i,max} = \frac{P_i}{\omega_i} S_v(\xi_i, \omega_i) \quad (28)$$

También se puede expresar la respuesta modal máxima en desplazamiento en función del espectro de respuesta en aceleraciones:

$$\eta_{i,max} = \frac{P_i}{\omega_i^2} S_a(\xi_i, \omega_i) \quad (29)$$

### 5.3 RESPUESTA MÁXIMA EN DESPLAZAMIENTO

Una vez conocida la respuesta modal máxima, el valor de la respuesta máxima en desplazamiento debida al modo  $i$ , para toda la estructura, es:

$$\mathbf{x}_{i,max} = \eta_{i,max} \Phi_i = \frac{P_i}{\omega_i^2} S_a(\xi_i, \omega_i) \Phi_i \quad (30)$$

### 5.4 MASA SÍSMICA DE LA ESTRUCTURA

La masa sísmica total de la estructura en la dirección de la excitación  $\mathbf{d}$  es:



$$M_d = \mathbf{d}^T \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (31)$$

Representa la inercia que la estructura opone al movimiento de la base en la dirección de la excitación.

## 5.5 MASA MODAL EFECTIVA

La *masa modal efectiva* del modo  $i$  se define como:

$$M_{eff,i} = (P_i)^2 m_i \quad (32)$$

Esta masa modal efectiva es a la parte de la masa sísmica total  $M_d$  que corresponde al modo  $i$ , y por lo tanto indica la influencia de cada modo en la respuesta ante una cierta excitación.

La suma de las masas modales efectivas de todos los modos se puede poner en la forma matricial compacta:

$$\sum_i M_{eff,i} = \sum_i (P_i)^2 m_i = \mathbf{P}^T \mathbf{m} \mathbf{P} \quad (33)$$

El vector  $\mathbf{P}$  agrupa todos los factores de participación modales:

$$\mathbf{P} = \mathbf{m}^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d} \quad (34)$$

La matriz  $\mathbf{m}$  agrupa a todas las masas modales generalizadas:

$$\mathbf{m} = \Phi^T \mathbf{M} \Phi \quad (35)$$

Sustituyendo el valor de  $\mathbf{P}$  y de  $\mathbf{m}$ :

$$\begin{aligned} \sum_i M_{eff,i} &= \sum_i (P_i)^2 m_i = \mathbf{P}^T \mathbf{m} \mathbf{P} = (\mathbf{d}^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{m}^{-1}) \mathbf{m} (\mathbf{m}^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d}) \\ &= \sum_i M_{eff,i} = \mathbf{d}^T \mathbf{M} \Phi \mathbf{m}^{-1} \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d} \end{aligned}$$

Sustituyendo  $\mathbf{m}^{-1} = \Phi^{-1} \mathbf{M}^{-1} \Phi^{-T}$ :

$$\sum_i M_{eff,i} = \mathbf{d}^T \mathbf{M} \Phi (\Phi^{-1} \mathbf{M}^{-1} \Phi^{-T}) \Phi^T \mathbf{M} \mathbf{d} = \mathbf{d}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{d}$$

Por lo tanto, se obtiene:

$$\sum_i M_{eff,i} = \sum_i (P_i)^2 m_i = M_d \quad (36)$$

La suma de las masas modales efectivas de todos los modos es la masa sísmica total de la estructura en la dirección de la excitación.

## 6 COMBINACIÓN DE RESPUESTAS MODALES

La respuesta máxima de la estructura será la combinación de las respuestas máximas debidas a los distintos modos  $\mathbf{x}_{i,max}$  dados por la ecuación (30).

Pero esta combinación no puede hacerse por suma algebraica de las respuestas de los distintos modos, ya que durante el proceso de excitación del seísmo todos los modos no se excitan simultáneamente. Cuando uno de ellos alcanza su valor máximo, los demás estarán lejos de su máximo correspondiente. Por esta razón, una combinación por suma de las respuestas de los distintos modos llevaría a sobrestimar el valor de la respuesta total de la estructura. Existen varios métodos para efectuar la combinación de las respuestas modales.

### 6.1 MÉTODO DE LOS VALORES ABSOLUTOS

Consiste sencillamente en sumar el valor absoluto de todas las respuestas, lo cual obviamente proporciona un valor muy conservador de la misma:

$$\mathbf{x}_{max} = \sum_{i=1}^n |\mathbf{x}_{i,max}| \quad (37)$$

### 6.2 MÉTODO SRSS

Los estudios de Newmark [4] demuestran que el valor máximo de la respuesta total de la estructura puede ser calculado con suficiente aproximación mediante un promedio cuadrático de los valores de la respuesta máxima para cada modo:

$$\mathbf{x}_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \mathbf{x}_{i,max}^2} \quad (38)$$

Este método denominado SRSS (*Square Root of the Sum of the Squares*) es muy usado para el cálculo de la respuesta total de la estructura [6]. Por ejemplo, es el método indicado por la norma NCSE 02. En realidad, este método sólo se puede utilizar cuando los distintos modos tienen las frecuencias naturales suficientemente separadas entre sí, ya que en caso contrario se puede subestimar la respuesta máxima total.

#### 6.2.1 Caso de modos agrupados

Se define como *grupo de modos agrupados* a todos aquellos modos cuyas frecuencias naturales están situadas en un intervalo del 10% de la menor frecuencia del grupo. Estos grupos se determinan partiendo de la menor frecuencia del sistema y efectuando una búsqueda hacia arriba de tal manera que una frecuencia nunca pertenezca a dos grupos. A los modos cuyas frecuencias no pertenezcan a ningún grupo se les denomina modos no agrupados.

Algunos trabajos de investigación [5] han llegado a la conclusión de que, en el caso de haber frecuencias naturales agrupadas, se pueden usar tres métodos diferentes: método de agrupamiento de frecuencias, método del 10% y método de la doble suma. Los tres métodos están recogidos en la normativa para la cualificación sísmica [6] [8] [9]. Se describe a continuación el método de agrupamiento de frecuencias que es el habitualmente empleado.

En este método se procede de la siguiente manera para combinar las respuestas debidas a los distintos modos:

- Para cada grupo de frecuencias agrupadas, la respuesta total se calcula como suma de valores absolutos de las respuestas debidas a todos los modos incluidos en dicho grupo.
- La respuesta de cada grupo se combina cuadráticamente mediante el método SRSS con las respuestas debidas a los restantes grupos, incluyendo los modos no agrupados.

Este proceso puede expresarse mediante la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x}_{max} = \sqrt{\sum_{k=1}^{M_0} \mathbf{x}_k^2 + \sum_{q=1}^{N_G} \left[ \sum_{i=1}^{M_q} |\mathbf{x}|_i \right]^2} \quad (39)$$

Siendo:

- $M_0$  Número de modos no agrupados.
- $N_G$  Número de grupos de modos agrupados.
- $M_q$  Número de modos incluidos en el grupo  $q$ .

### 6.3 MÉTODO CQC

El método para efectuar la combinación de respuestas modales denominado CQC (*Complete Quadratic Combination*) [7] está basado en métodos de vibraciones aleatorias y ha demostrado ser más preciso que el SRSS.

En el método CQC el valor máximo de la respuesta combinada se obtiene mediante la siguiente combinación de las respuestas individuales de los modos:

$$\mathbf{x}_{max} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_{i,max} \rho_{ij} \mathbf{x}_{j,max}} \quad (40)$$

El coeficiente modal cruzado  $\rho_{ij}$  vale:

$$\rho_{ij} = \frac{8 \xi^2 (1+r) r^{3/2}}{(1-r^2)^2 + 4 \xi^2 r (1+r)^2} \quad (41)$$

Siendo  $r = \omega_i/\omega_j$  con  $r \leq 1$  y  $\xi$  el factor de amortiguamiento.

## 7 RESPUESTA RESIDUAL

En la práctica, para estructuras complejas con un número muy elevado de grados de libertad (varios cientos o miles), no se pueden calcular todas las  $n$  frecuencias naturales y sus correspondientes modos. En estos casos se considera un conjunto reducido de  $m$  modos de vibración, que forman una matriz de modos  $\Phi$  con  $m$  columnas.

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \dots \quad \Phi_m]$$

Las normas de cualificación sísmica obligan a tener en cuenta los  $m$  modos existentes en el rango de frecuencias excitadas por el seísmo (normalmente 0-33 Hz, o 0-50 Hz). Para los  $r = n - m$  modos restantes no se puede calcular su colaboración a la respuesta en base a las expresiones anteriores, ya que dichos modos son desconocidos.

Para todos los modos fuera del intervalo de excitación del seísmo se supone que su colaboración a la respuesta se hace de una manera estática: basándose en este hecho, es posible estimar el valor global de la respuesta producida por todos los modos no conocidos. Estos modos desconocidos se denominan genéricamente  $\Phi_i^R$ .

La fuerza que excitará estos modos desconocidos es una fuerza de inercia originada en la estructura por una aceleración de valor igual a la aceleración de periodo cero  $Z_0$ . Esta aceleración de periodo cero se define precisamente como la aceleración con la que responde ante el seísmo un oscilador elemental de frecuencia muy superior a la máxima frecuencia de excitación del seísmo (oscilador de periodo cero). El valor de esta fuerza de inercia es:

$$\mathbf{F}^Z = \mathbf{M} \mathbf{d} Z_0 \quad (42)$$

La fuerza modal debida a esta fuerza de inercia, para uno cualquiera de los modos desconocidos, se obtiene proyectándola sobre dicho modo:

$$F_i = \Phi_i^{R^T} \mathbf{F}^Z = \Phi_i^{R^T} \mathbf{M} \mathbf{d} Z_0 \quad (43)$$

La respuesta modal producida por esta fuerza, suponiendo un comportamiento estático, es:

$$\eta_i^R = \frac{F_i}{\omega_i^2 m_i} \quad (44)$$

La colaboración de este modo a la respuesta es:

$$\mathbf{x}_i^R = \Phi_i^R \eta_i^R = \Phi_i^R \Phi_i^{R^T} \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} \quad (45)$$

La respuesta en desplazamiento debida a los  $r = n - m$  modos desconocidos se obtiene sumando la expresión anterior para todos ellos:

$$\mathbf{x}^R = \sum_{i=m+1,n} \Phi_i^R \eta_i^R = \sum_{i=m+1,n} \Phi_i^R \Phi_i^{R^T} \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} \quad (46)$$

Esta expresión no se puede evaluar debido a que no se conocen los modos  $\Phi_i^R$ . Para poderla calcular se le suma y resta un término  $\mathbf{x}^Z$  definido como:

$$\mathbf{x}^Z = \sum_{i=1,m} \Phi_i \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} \quad (47)$$

Este término no es otra cosa que la respuesta residual que darían los  $m$  modos conocidos  $\Phi_i$  pero aplicándoles la aceleración de periodo cero, en lugar de su auténtica respuesta. Se obtiene:

$$\mathbf{x}^R = \sum_{i=m+1,n} \Phi_i^R \Phi_i^{RT} \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} + \sum_{i=1,m} \Phi_i \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} - \sum_{i=1,m} \Phi_i \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} \quad (48)$$

Los dos primeros sumandos de la ecuación (48) se pueden agrupar en un mismo sumatorio extendido de 1 a  $n$ , donde están presentes todos los modos de la estructura:

$$\mathbf{x}^R = \sum_{i=1,n} \Phi_i \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} - \sum_{i=1,m} \Phi_i \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} \quad (49)$$

El primer sumatorio se puede expresar en forma matricial en la forma:

$$\mathbf{x}^R = \Phi^* (\Omega^2)^{-1} \mathbf{m}^{-1} \Phi^{*T} \mathbf{M} \mathbf{d} Z_0 - \sum_{i=1,m} \Phi_i \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} \quad (50)$$

Donde  $\Phi^*$  es la matriz que agrupa a todos los modos del sistema (conocidos y no conocidos),  $\Omega^2$  es la matriz diagonal de todas las frecuencias naturales de vibración al cuadrado y  $\mathbf{m}$  es la matriz diagonal de todas las masas modales.

Si los modos están normalizados, en el primer término de la ecuación anterior se identifica la descomposición espectral de la matriz de flexibilidad  $\mathbf{K}^{-1}$ :

$$\mathbf{x}^R = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{d} Z_0 - \sum_{i=1,m} \Phi_i \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{d} \frac{Z_0}{\omega_i^2 m_i} \quad (51)$$

En el segundo término se identifica el factor de participación modal  $P_i$ , con lo que la expresión final queda:

$$\mathbf{x}^R = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M} \mathbf{d} Z_0 - \sum_{i=1,m} \Phi_i \frac{P_i Z_0}{\omega_i^2} \quad (52)$$

El primer sumando representa la respuesta en deformación de la estructura ante una fuerza de inercia producida por la aceleración de periodo cero  $Z_0$ , en la dirección del seísmo  $\mathbf{d}$ , y es muy sencilla de calcular con un cálculo estático. El segundo sumando es la respuesta que darían los  $m$  modos conocidos  $\Phi_i$  si se excitasen con dicha aceleración de periodo cero. Este método tiene la ventaja de no ser sensible a la naturaleza o composición de los modos residuales, además de su sencillez de cálculo [10].

La respuesta residual así calculada se combina con las respuestas debidas a los modos restantes mediante los métodos indicados anteriormente.

## 8 COMBINACIÓN DE SEÍSMOS

---

En todo el desarrollo anterior se ha considerado que la estructura está excitada por un movimiento en una sola dirección del espacio (seísmo unidireccional), definido por el vector  $\mathbf{d}$  que indica la dirección en la que se produce el movimiento. Con esta hipótesis se ha calculado la respuesta de la estructura, que en su forma más general se denomina  $R$  y que puede ser cualquier esfuerzo, tensión, desplazamiento, aceleración, etc.

En la realidad la excitación del seísmo no actúa en una única dirección del espacio sino en las tres, aunque con intensidad diferente en los planos horizontal y vertical. Se dispone por lo tanto de tres espectros de respuesta en las tres direcciones, dos de las cuales serán generalmente iguales.

Para cada una de las tres direcciones del espacio se calcula de forma independiente la respuesta de la estructura, siguiendo el método explicado anteriormente. Estas respuestas se denominan genéricamente  $R_x, R_y, R_z$ . La combinación de las respuestas debidas a las tres excitaciones independientes puede hacerse usando nuevamente el método SRSS:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (53)$$

Este método, propuesto por Chu, Amin y Singh [11], se basa en la consideración de que es muy improbable que los valores máximos de la respuesta en un elemento de la estructura se produzcan en el mismo instante de tiempo ante las tres componentes de excitación.

## 9 MÉTODO SIMPLIFICADO DE LA NORMA NCSE-02

La norma NCSE-02 permite emplear un método simplificado de cálculo de la acción sísmica, que es aplicable a las estructuras más habituales de edificios de plantas en altura [8]. Se basa en:

- No tener que calcular los modos de vibración de la estructura, que se sustituyen por expresiones analíticas.
- Emplear una aproximación estática para determinar las deformaciones y esfuerzos producidos en la estructura.

Este método es aplicable a estructuras de edificios de plantas con las siguientes limitaciones:

- Altura inferior a 60 m y número de plantas inferior a 20.
- Regularidad geométrica en planta y alzado, sin salientes o entrantes importantes.
- Soportes continuos hasta la cimentación, sin interrupciones ni cambios bruscos de rigidez. Distribución uniforme en planta de los soportes.
- Distribución de la rigidez y masas regular en las plantas: el centro de gravedad de todas las plantas debe estar aproximadamente en la misma línea vertical.
- La excentricidad del centro de las masas respecto del de torsión debe ser inferior al 10% de la dimensión en planta.

El método emplea un modelo estructural unidimensional, vertical, con un grado de libertad de desplazamiento horizontal por planta. La masa de cada planta se aplica de forma puntual y la fuerza de inercia debida al sismo se aplica asimismo en cada planta

Se define el periodo fundamental del edificio  $T_F$ , como el correspondiente a la primera frecuencia natural de vibración  $f_1$  (Hz). Este periodo se estima de forma aproximada en función del número de plantas del edificio  $n$ , de su altura total  $H$  y del ancho de cada vano  $B$ . Su valor en segundos, para las estructuras más habituales, es:

- Pórticos de hormigón sin pantallas rigidizadoras:  $T_F = 0.09 n$
- Pórticos rígidos de acero sin arriostrar:  $T_F = 0.11 n$
- Pórticos de hormigón con pantallas rigidizadoras:  $T_F = 0.07 n \sqrt{H/(B + H)}$
- Pórticos rígidos de acero arriostrados:  $T_F = 0.085 n \sqrt{H/(B + H)}$

Como espectro de respuesta puede emplearse un espectro normalizado simplificado (Figura 13) en el que no existe la rampa lineal inicial, y la aceleración de periodo cero es  $ZPA = 2.5 a_c$ .

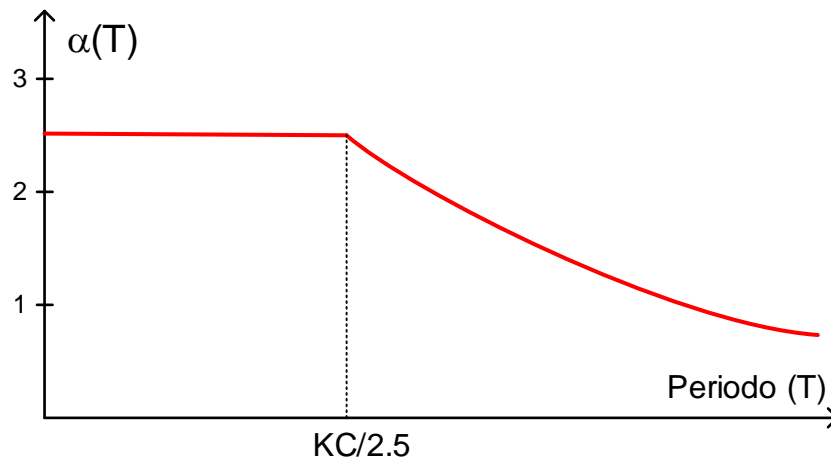


Figura 13. Espectro de respuesta simplificado según NCSE-02

El número de modos a emplear en el análisis es bajo, y se determina en función del periodo fundamental de la estructura. El valor de los periodos correspondientes a los distintos modos a emplear  $T_i$  se indica en la tabla siguiente:

$T_F$ (s)	Número de modos	$T_1$	$T_2$	$T_3$
$T_F \leq 0.75$	1	$T_F$		
$0.75 < T_F \leq 1.25$	2	$T_F$	$\frac{T_F}{3}$	
$T_F > 1.25$	3	$T_F$	$\frac{T_F}{3}$	$\frac{T_F}{5}$

Para los modos de vibración se emplean expresiones aproximadas en forma de función seno, con una longitud de onda  $\frac{4H}{2i-1}$  siendo  $i$  el número del modo (Figura 14). Es decir que las longitudes de onda para un edificio de altura  $H$  son  $4H, \frac{4H}{3}, \frac{4H}{5}$ .

Las expresiones analíticas de los modos de vibración aproximados, para la planta  $k$  situada a una altura  $h_k$  respecto de la rasante, son:

$$\Phi_k^1 = \sin\left(\frac{\pi h_k}{2H}\right) \quad \Phi_k^2 = \sin\left(3\frac{\pi h_k}{2H}\right) \quad \Phi_k^3 = \sin\left(5\frac{\pi h_k}{2H}\right)$$



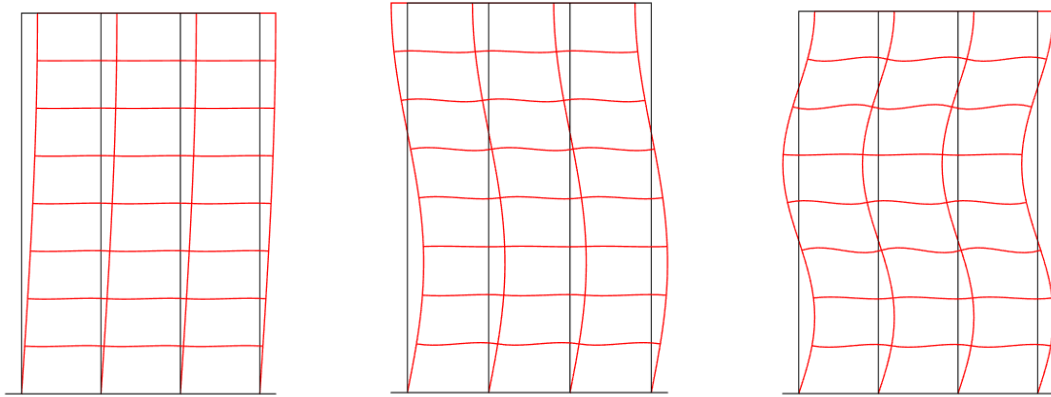


Figura 14. Modos de vibración aproximados en la norma NCSE-02

En cada planta se aplica una fuerza sísmica equivalente. Para el modo  $i$ , la fuerza en la planta  $k$  es:

$$F_k^i = \frac{m_k a_c \alpha_i}{\mu} \eta_k^i v \quad (54)$$

$m_k$ : masa asociada a la planta  $k$ , que incluye la masa permanente más una fracción de las restantes masas (sobrecargas de uso, nieve, tabiquería...).

$a_c$ : aceleración de cálculo en la base del edificio.

$\alpha_i$ : valor del espectro normalizado de respuesta en aceleración para el periodo del modo  $i$ .

$\mu$ : factor de ductilidad de la estructura ante el seísmo, que mide su capacidad para disipar la energía del seísmo por plasticidad. Su valor es  $\mu = 1$  para naves con pilares y cerchas de acero arriostradas en X;  $\mu = 2$  para pórticos con postes metálicos o de hormigón, con forjados de hormigón con losas planas, pórticos de nudos rígidos con postes y vigas de acero con losas de hormigón, con diagonales en V;  $\mu = 3$  para estructuras con triangulaciones en V o X completas o pantallas de hormigón y  $\mu = 4$  para pórticos rígidos planos de nudos dúctiles que permiten la formación de rótulas plásticas en los extremos de las vigas antes que en los postes, o pórticos con sistemas de rigidización dúctiles.

$v$ : factor de amortiguamiento de la estructura. Igual a 1 para estructuras con amortiguamiento del 5%. Para otros amortiguamientos  $v = \left(\frac{5}{\Omega}\right)^{0.4}$ , siendo  $\Omega$  el % de amortiguamiento.

$\eta_k^i$ : factor de participación (distribución) de la planta  $k$  en el modo  $i$ . Indica cuánto participa la planta  $k$  en el modo  $i$ , es decir cómo se distribuye la fuerza de inercia total de la estructura en cada planta (se emplea la variable  $\eta$  para este factor, como indica la norma, aunque no tiene nada que ver con la coordenada modal  $\eta$  empleada anteriormente).

$$\eta_k^i = \Phi_k^i \frac{\sum_j m_j \Phi_j^i}{\sum_j m_j (\Phi_j^i)^2} \quad (55)$$

El numerador y el denominador de la fracción son constantes para la estructura y sólo dependen del modo  $i$ , por lo que los factores de participación de las plantas varían con la forma de la onda seno del modo  $\Phi_k^i$ . Si todas las plantas tienen la misma masa, se simplifica  $m_j$  y los factores de participación

pueden calcularse para cada planta, empleando las expresiones analíticas de los modos. Para un edificio de 6 plantas son:

Planta	Modo 1	Modo 2	Modo 3
6	1.23	-0.20	0.33
5	1.19	-0.14	0.08
4	1.06	0.00	-0.28
3	0.87	0.14	-0.23
2	0.61	0.20	0.16
1	0.32	0.14	0.32

Es fácil comprobar que el factor de participación  $\eta_k^i$  empleado en NCSE-02 está relacionado con el factor de participación modal  $P_i$  mediante la expresión:

$$\eta_k^i = \Phi_k^i P_i$$

La deformación de la estructura asociada a cada modo de vibración  $\Delta^i$  se calcula mediante un análisis estático independiente para cada modo, aplicando las fuerzas de inercia en las plantas (Figura 15):

$$\mathbf{K} \Delta^1 = \mathbf{F}^1 \qquad \mathbf{K} \Delta^2 = \mathbf{F}^2 \qquad \mathbf{K} \Delta^3 = \mathbf{F}^3$$

Finalmente, los esfuerzos producidos por estas deformaciones se combinan por el método SRSS.

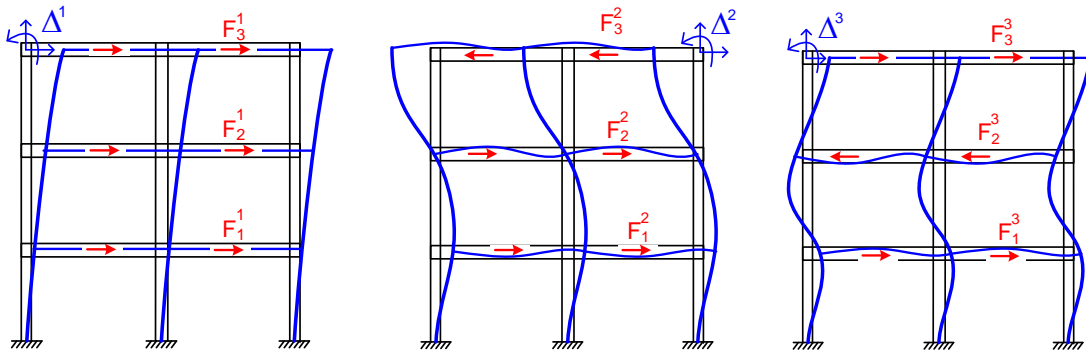


Figura 15. Deformaciones asociadas a los modos en la norma NCSE-02

## 10 BIBLIOGRAFÍA

---

1. Clough R. W. y Penzien J., "*Dynamics of Structures*", McGraw-Hill, 1975.
2. Giménez J. G., García de Jalón J., "*Teoría y Práctica del Análisis Modal, Curso Teórico-Experimental sobre Vibraciones en Estructuras*", Escuela Superior de Ingenieros Industriales de San Sebastián, 1984.
3. Fullard K., "The Modal Method for Transient Response and Its Application to Seismic Analysis", *Advanced Structural Dynamics*, editado por J. Doena, 1980.
4. Newmark N. M., "*Earthquake Engineering*", editado por Wiegel R. L., Englewood Cliffs, pag. 403, 1970.
5. Signh A. K., Chu S. L. y Singh S., "Influence of Closely Spaced Modes in Response Spectrum Method of Analysis", ASME Public., 1973.
6. U.S. Nuclear Regulatory Commission, "*Combining Modal Responses and Spectral Components in Seismic Response Analysis*", Regulatory Guide 1.92, Febrero 1976.
7. Wilson E. L., Der Kiureghian A. y Bayo E., "*A Replacement for the SRSS Method in Seismic Analysis*", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 9, pp. 187-192, 1981.
8. Norma de Construcción Sismorresistente NCSE-02. Ministerio de Fomento, 2002.
9. ASME Boiler and Pressure Vessel Code – Section III, Div. I, Apéndice N, "*Dynamic Analysis Method*".
10. Salmonte A. J., "Considerations on the Residual Contribution in Modal Analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, vol. 10, 1962.
11. Chu S. L., Amin M. and Singh S., "*Spectral Treatment of Actions of Three Earthquake Components on Structures*", *Nuclear Engineering and Design*, vol. 21 n. 1, 1972.

## 11 ANEJO A

---

Código Matlab para el cálculo numérico de los espectros de respuesta a partir de un acelerograma.

Se calcula el valor de los tres espectros, para un valor dado del periodo de oscilación y del amortiguamiento. Para obtener el espectro completo, debe ejecutarse el código dentro de bucles para los distintos valores del periodo y del amortiguamiento.

El código debe completarse con la definición de los valores de la aceleración (Variable Acel) y del tiempo (Variable Time).

```

% Cálculo de los espectros de respuesta en desplazamiento, velocidad
% y aceleración de un seísmo a partir de su acelerograma
% mediante la integral de convolución

% Acel=[   ]; % Aceleración del terreno
% Time=[   ]; % Valores del tiempo para la aceleración

NumValsAcel=length(Acel);

% Propiedades del oscilador elemental
T=1.2; % Periodo del oscilador (s)
xi=0.05; % Amortiguamiento en %1

Omega=2*pi/T; % Frecuencia (rad/s)
OmegaD=Omega*sqrt(1-xi^2); % Frecuencia amortiguada

% Respuesta en desplazamiento
Desplaz=zeros(NumValsAcel,1);

for itime=2:NumValsAcel
    % t: instante de tiempo en que se calcula la respuesta
    t=Time(itime);
    % tau: variable de tiempo auxiliar para la integración de 0 a t
    tau=Time(1:itime);
    % Y: integrando de la respuesta en desplazamiento
    Y=zeros(itime,1);
    for j=1:itime
        Y(j)=Acel(j)*exp(-xi*Omega*(t-tau(j)))*sin(OmegaD*(t-tau(j)));
    end
    % Desplazamiento en este instante de tiempo efectuando la integral
    % mediante la regla trapezoidal
    Desplaz(itime)=-trapz(tau,Y)/OmegaD;
end

% Calcular los espectros para este periodo y amortiguamiento
% Espectro en desplazamiento: máximo valor del desplazamiento
Sd=max(abs(Desplaz));
% Espectro en velocidad
Sv=Omega*Sd;
% Espectro en aceleración
Sa=Omega*Omega*Sd;

```