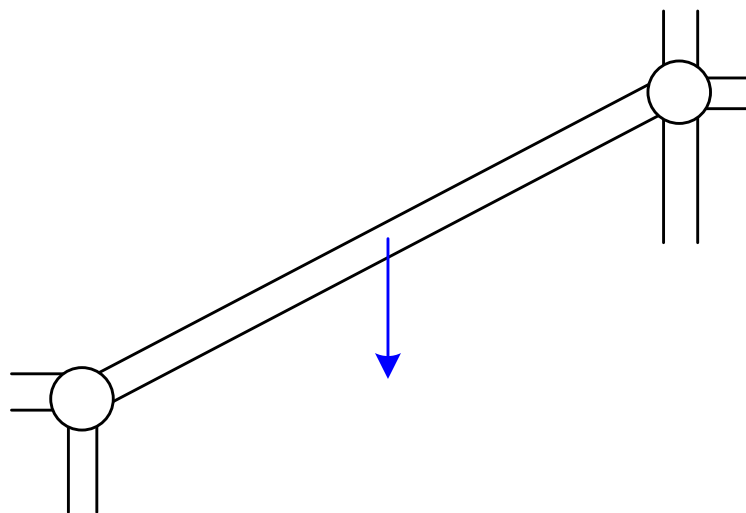




## Estudio de la barra articulada plana



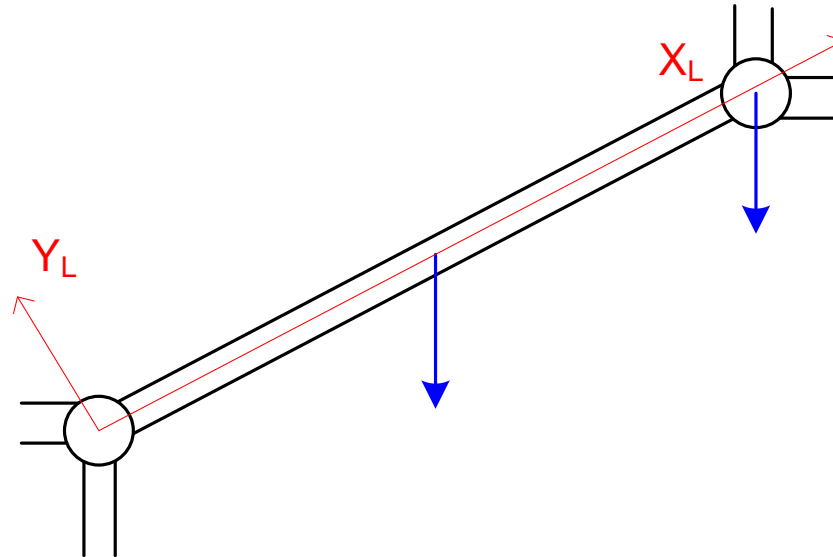
# Introducción

Pieza prismática esbelta recta **articulada en ambos extremos**

Elemento estructural constituyente de las **celosías planas**

Fuerzas en los nudos (lo más habitual), o sobre la propia barra.

Estudio en su **sistema local**



# Estática de la barra articulada plana (1)

Barra sin fuerzas aplicadas sobre ella:

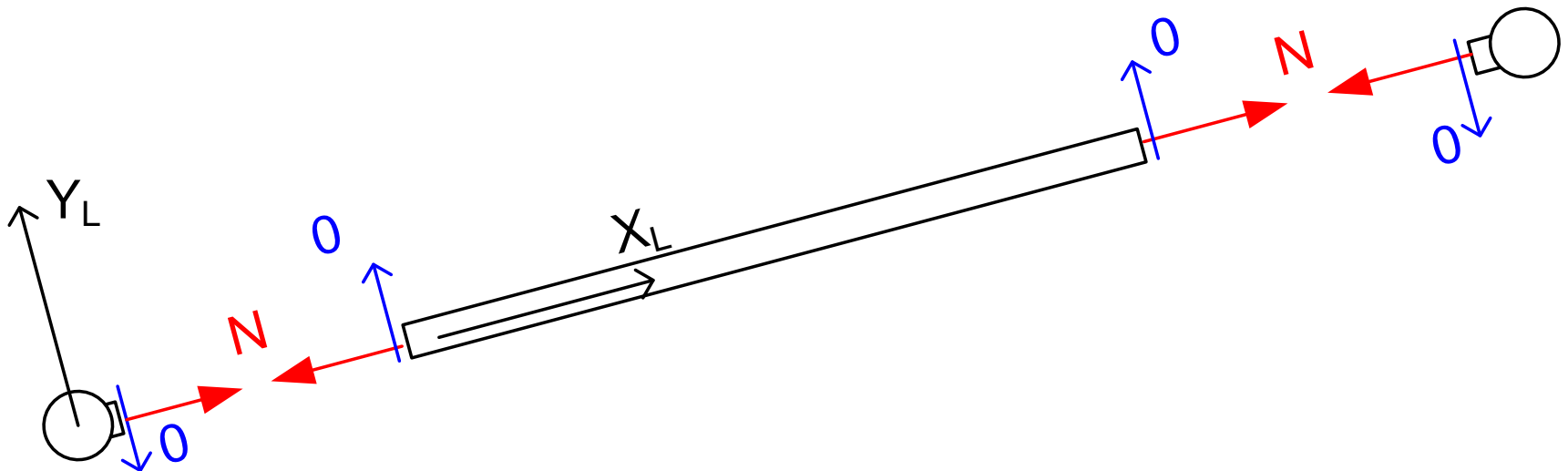
$$\Sigma F_{Y_L} = 0 \quad \Sigma M_P = 0 \quad \rightarrow \quad V_1 = 0 \quad V_2 = 0 \quad \text{Cortantes nulos}$$

$$\Sigma F_{X_L} = 0 \quad \rightarrow \quad N_1 = N_2 \equiv N \quad \text{Axial desconocido}$$

Esfuerzo axial  $N$  uniforme en la barra

La barra no proporciona el valor de  $N$

Tensión uniforme  $\sigma = \frac{N}{A}$



# Estática de la barra articulada plana (2)

Barra con fuerzas aplicadas sobre ella:

$$\Sigma F_{YL} = 0 \quad \Sigma M_P = 0 \quad \rightarrow \quad \text{Cortantes} \quad V_1 \neq 0 \quad V_2 \neq 0$$

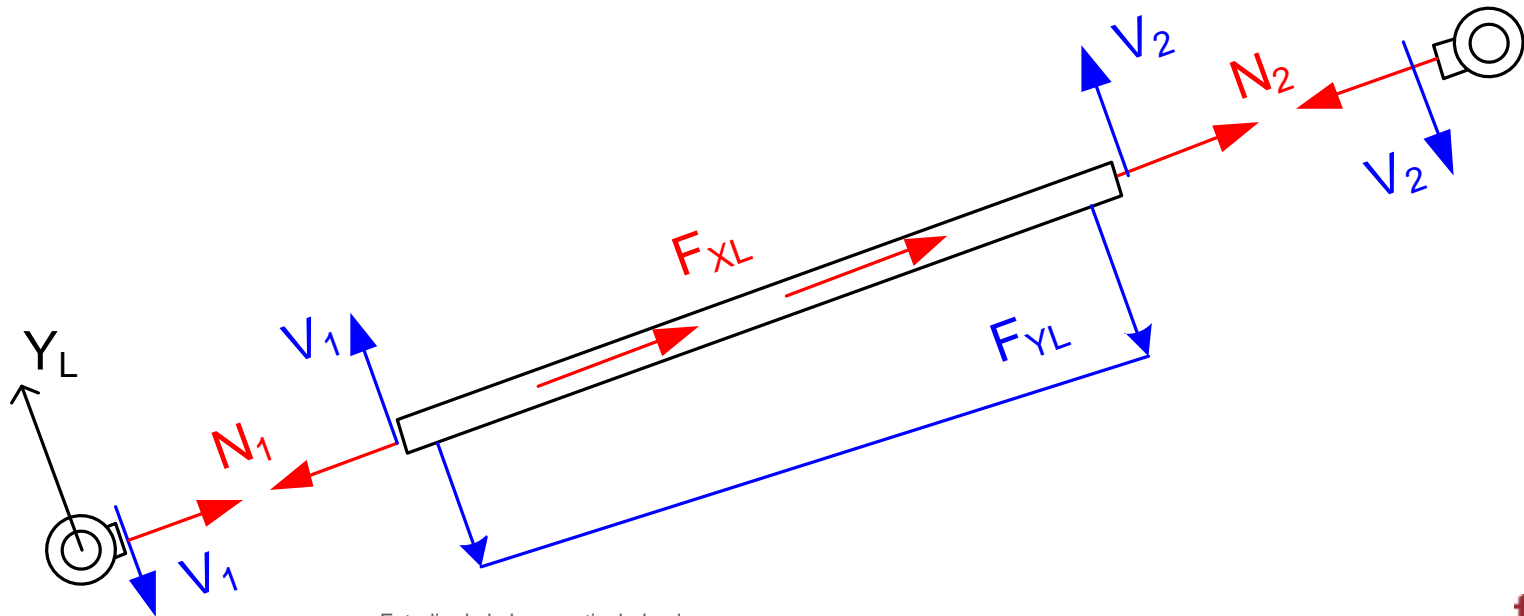
Cortantes conocidos, no nulos, función de las fuerzas exteriores.

La barra **proporciona** los valores de M y V en su interior

$$\Sigma F_{XL} = 0 \quad \rightarrow \quad N_2 + F_{XL} = N_1$$

Esfuerzos axiales pueden ser diferentes si hay fuerzas exteriores en X

La barra **no proporciona** los axiales, sólo su diferencia



# Deformación de la barra articulada plana (1)

Deformaciones en los nudos extremos (sistema local):  $\delta_{x1}$   $\delta_{y1}$   $\delta_{x2}$   $\delta_{y2}$

Pequeñas deformaciones:

Traslación axial:  $\delta_{x1}$

Alargamiento:  $\Delta_L = \delta_{x2} - \delta_{x1}$

Traslación lateral:  $\delta_{y1}$

Rotación:  $\theta = \frac{\delta_{y2} - \delta_{y1}}{L}$  No produce cambio de longitud

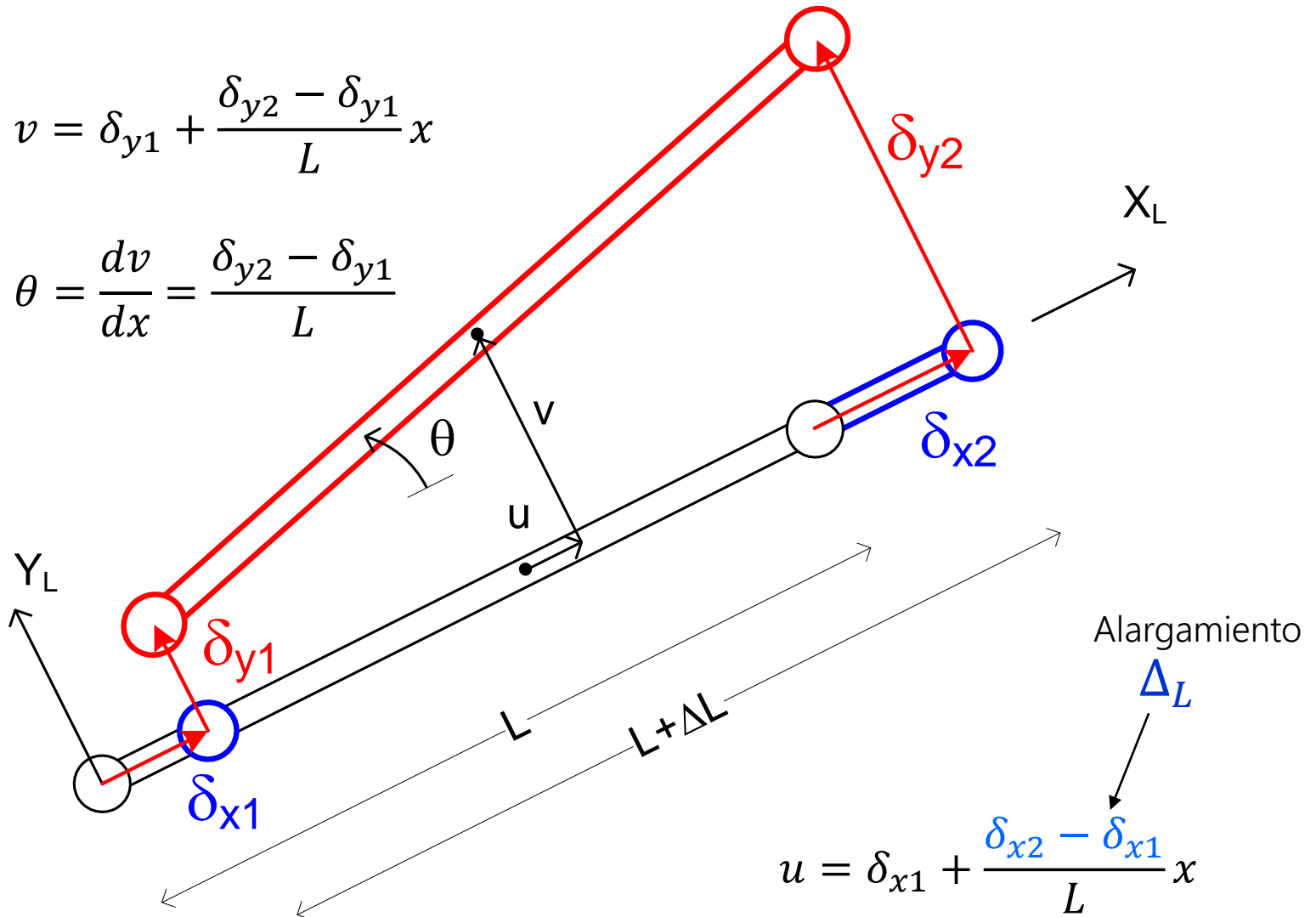
Sólo válido para barras sin fuerzas sobre la barra, sólo en los nudos

Deformación lineal entre los extremos deformados:

$$u = \delta_{x1} + \frac{\delta_{x2} - \delta_{x1}}{L} x \qquad v = \delta_{y1} + \frac{\delta_{y2} - \delta_{y1}}{L} x$$

Rotación constante:  $\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{\delta_{y2} - \delta_{y1}}{L}$

# Deformación de la barra articulada plana (2)



# Deformación de la barra articulada plana (3)

En sus sistema de ejes local

Centro de gravedad G:

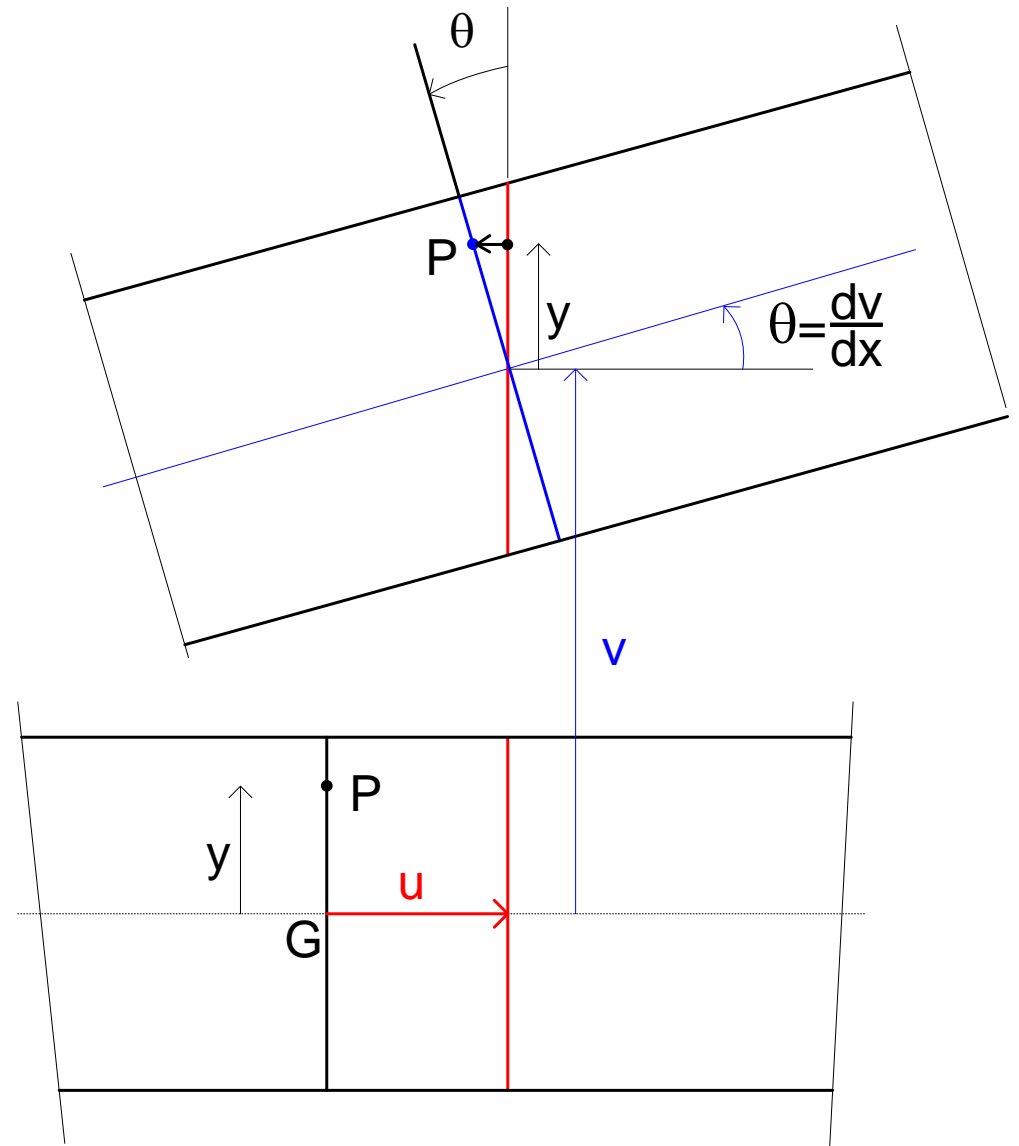
$$u(x) \quad v(x)$$

Punto P cualquiera:

$$u_P = u - \theta y = u - \frac{dv}{dx} y$$

$$v_P = v$$

Se supone:  $\theta \approx \tan \theta = \frac{dv}{dx}$



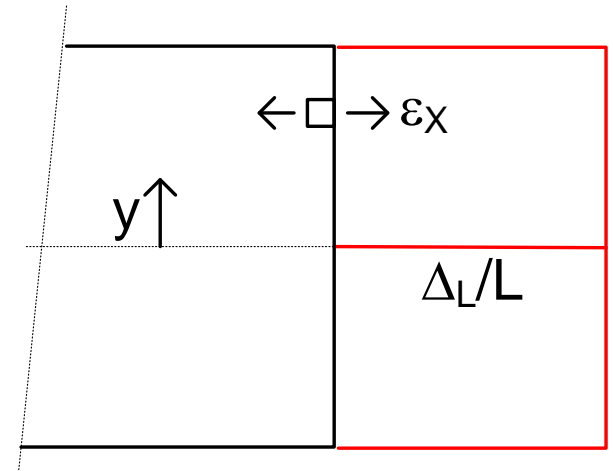
# Deformaciones unitarias de la barra articulada plana

Punto P cualquiera:

$$\epsilon_x = \frac{\partial u_P}{\partial x} = \frac{du}{dx} - \frac{d^2v}{dx^2} y = \frac{\delta_{x2} - \delta_{x1}}{L} = \frac{\Delta_L}{L}$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_P}{\partial y} = 0$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_P}{\partial y} + \frac{\partial v_P}{\partial x} = -\frac{dv}{dx} + \frac{dv}{dx} = 0$$



- Deformación unitaria  $\epsilon$  **uniforme** en toda la barra, debida sólo a su alargamiento  $\Delta_L$

$$\epsilon = \frac{\Delta_L}{L}$$

- La deformación lateral  $v$  y la rotación  $\theta$  no producen deformaciones unitarias



# Ecuación constitutiva: material lineal con temperatura

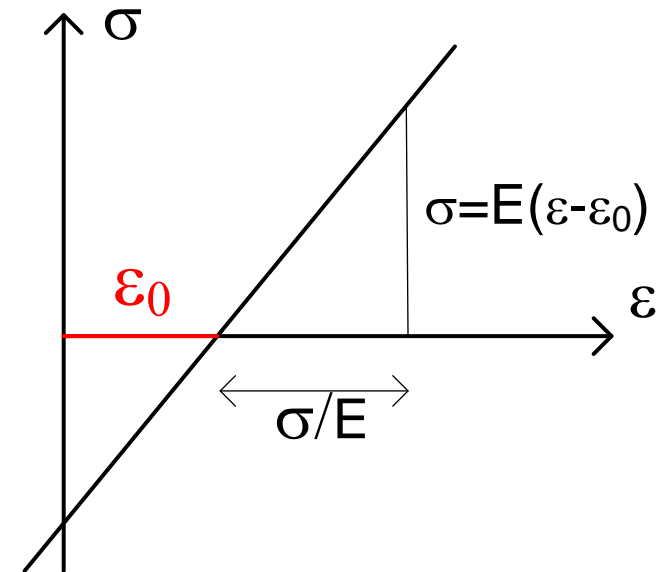
Relación entre la tensión  $\sigma$  y la deformación unitaria  $\epsilon$

Deformaciones iniciales térmicas  
(con  $\sigma = 0$ ):

$$\epsilon_0 = \alpha T$$

Relación tensión – deformación unitaria:

$$\sigma = E(\epsilon - \alpha T)$$



Deformación unitaria total: suma de deformación unitaria  
térmica  $\alpha T$  y la debida a la tensión  $\frac{\sigma}{E}$

$$\epsilon = \alpha T + \frac{\sigma}{E}$$

# Comportamiento N- $\Delta$ de la barra articulada

Fuerza interior axial:  $N = \sigma A$

Sustituyendo la ecuación del material:  $N = E(\epsilon - \alpha T)A$

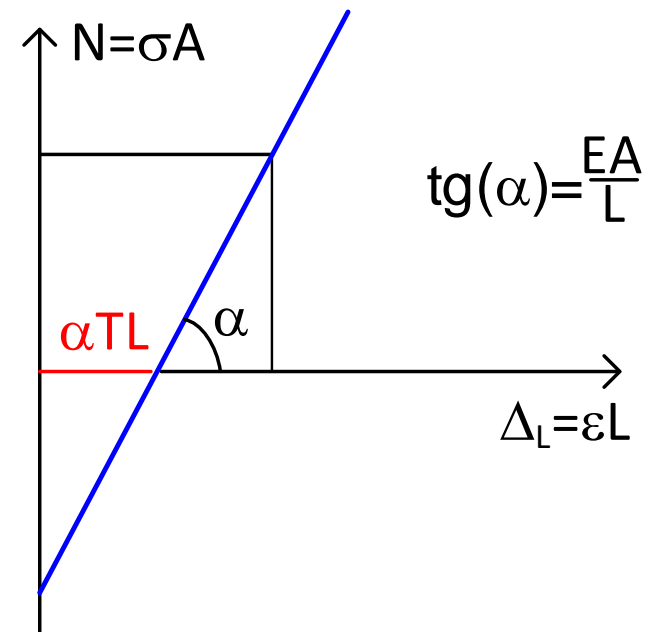
Sustituyendo la deformación unitaria  $\epsilon = \frac{\Delta_L}{L}$

$$N = E \left( \frac{\Delta_L}{L} - \alpha T \right) A$$

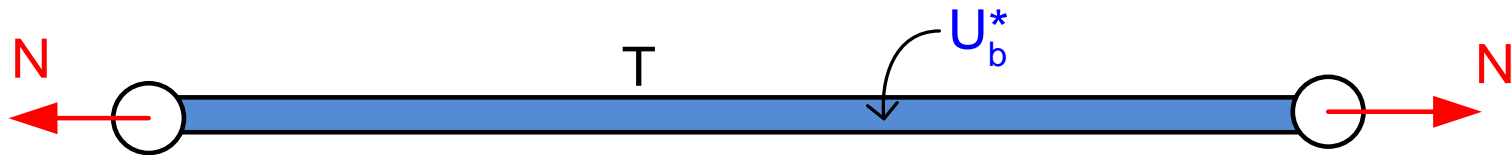
$$N = \frac{E A}{L} (\Delta_L - \alpha T L)$$

$\frac{E A}{L}$ : rigidez axial

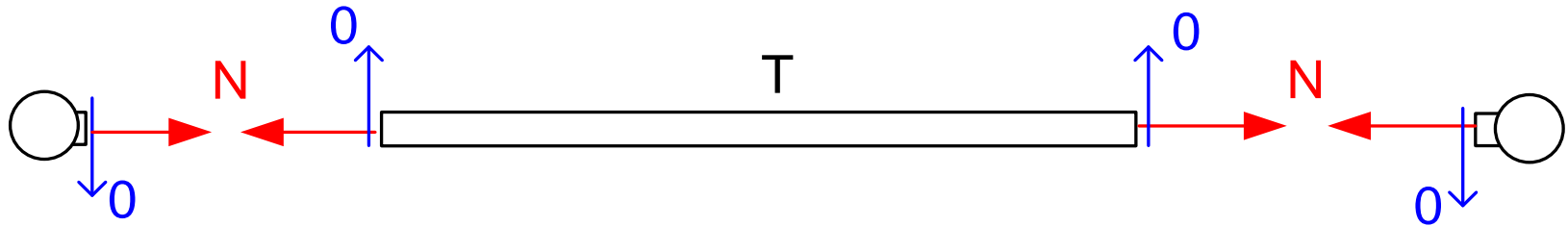
$\alpha T L$ : alargamiento inicial  
debido a T, con N nulo



# Energía acumulada en una barra articulada



# Comportamiento de la barra articulada



Fuerza interior axial:  $N$

Tensión axial:  $\sigma = \frac{N}{A}$

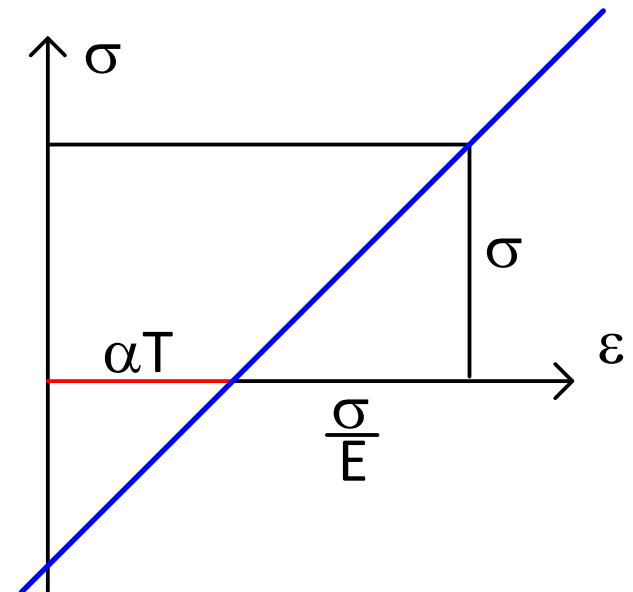
Deformación unitaria constante:  $\epsilon = \frac{du}{dx} = \frac{\delta_{x2} - \delta_{x1}}{L} = \frac{\Delta L}{L}$

Material elástico lineal con temperatura:

$$\sigma = E(\epsilon - \alpha T)$$

Deformaciones iniciales térmicas:

$$\epsilon_0 = \alpha T$$



# Densidad de energía de deformación complementaria

Se define como:  $U_0^*(\sigma) = \int_0^\sigma \epsilon d\sigma$

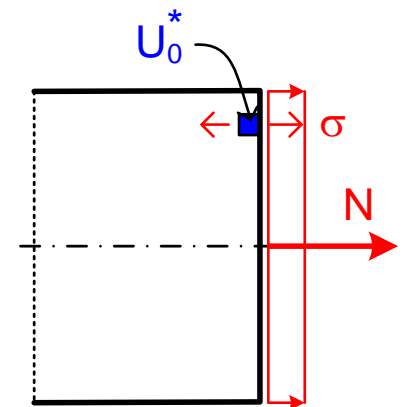
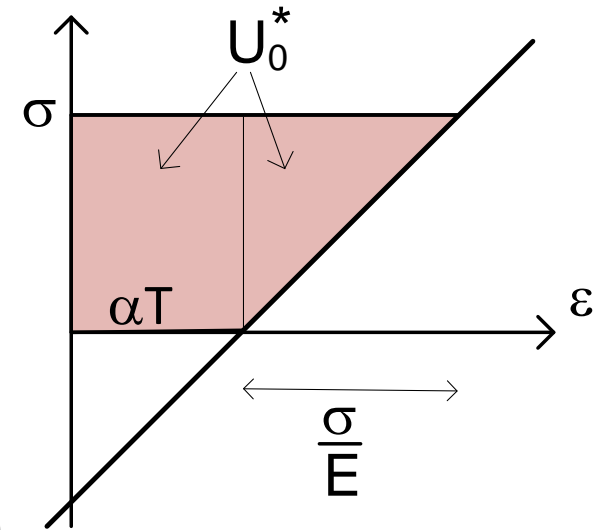
Con la condición de que sea función sólo del estado final de tensiones (independiente del camino).

Existe si el **material es elástico** (lineal o no)

**Energía** elástica complementaria **por unidad de volumen** ( $J/m^3$ )  
Representa el trabajo complementario (por unidad de volumen) efectuado por las deformaciones al tensionarse el sólido.

Material lineal, con temperatura:  $\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha T$

$$U_0^* = \int_0^\sigma \left( \frac{\sigma}{E} + \alpha T \right) d\sigma = \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha T \sigma$$



# Energía de deformación complementaria en una barra $U^*$

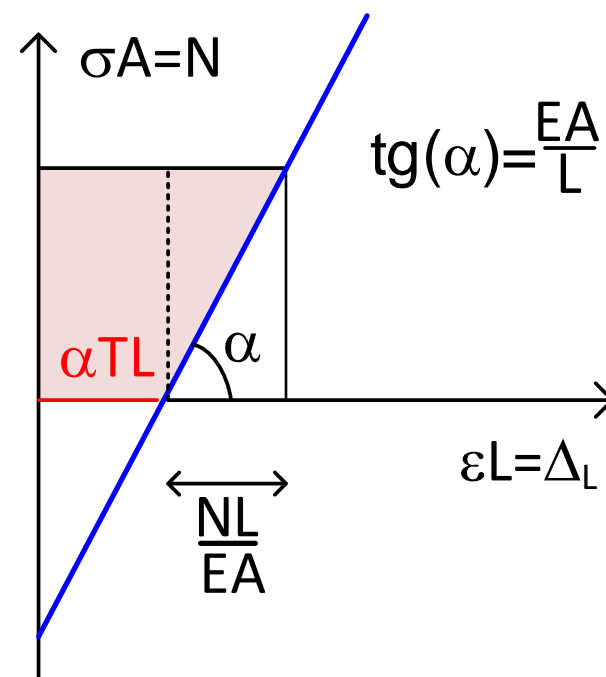
Integrando: 
$$U_b^* = \int_v U_0^* dv = \int_L \left( \frac{\sigma^2}{2E} + \alpha T \sigma \right) A dx$$

Sustituyendo: 
$$\sigma = \frac{N}{A}$$

$$U_b^* = \int_L \frac{N^2}{2EA} dx + \int_L \alpha T N dx$$

Propiedades uniformes:

$$U_b^* = \frac{N^2}{2} \frac{L}{EA} + \alpha T L N$$



$\frac{L}{EA}$ : flexibilidad axial

$\frac{EA}{L}$ : rigidez axial



# Cálculo de celosías planas hiperestáticas

## Método general de flexibilidad

# Punto de partida

Energía complementaria. Propiedades uniformes:

$$U_b^* = \frac{N^2 L}{2EA} + \alpha TLN$$

$$U^* = \sum_b U_b^*$$

2º Teorema de Engesser

$$\frac{\partial U^*}{\partial N_j} = 0 \quad \forall N_j$$

Teorema de Crotti- Engesser:

$$\Delta_i = \frac{\partial U^*}{\partial P_i} \quad i = 1, n$$



# 1. Fase previa

1. Clasificar la celosía:

$$b+r > 2n \rightarrow \text{hiperestática} \rightarrow h=(b+r)-2n$$

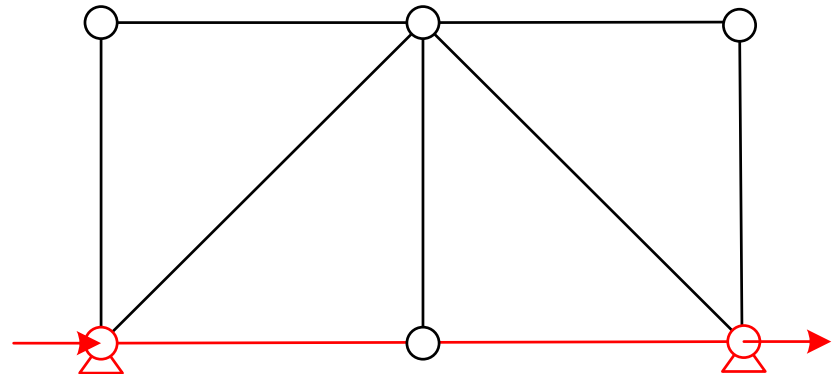
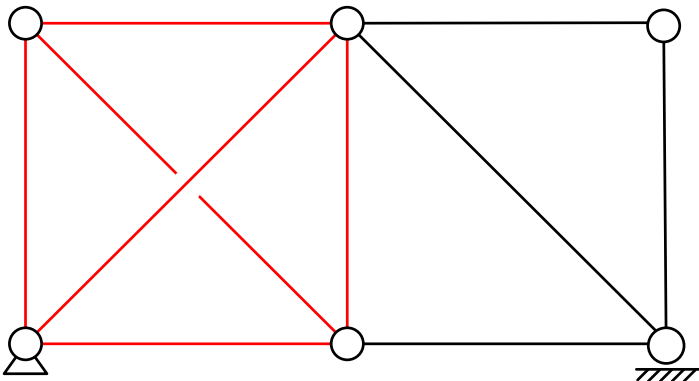
2. Elegir  $h$  incógnitas hiperestáticas  $X_j$  Pueden ser:

Reacciones exteriores  $X_j = R_i$

Esfuerzos interiores en las barras  $X_j = N_i$

Punto crítico. Heurístico. No hay un método universal

No dependen del sistema de cargas exteriores



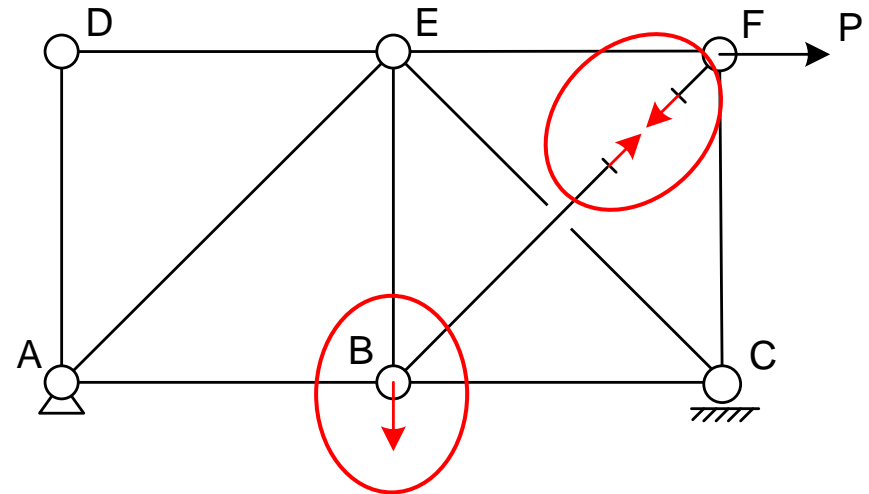
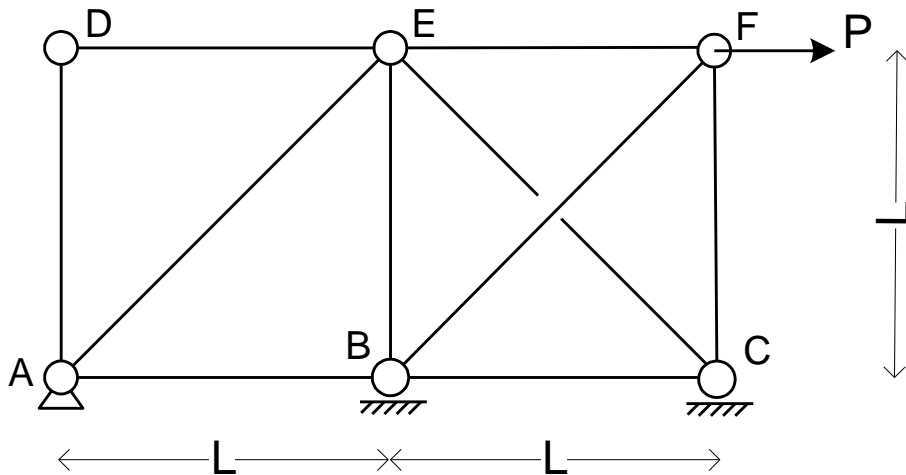
# 1. Fase previa. Ejemplo

1. Hallar  $h$   $b=10$   $r=4$   $n=6$   $h=(10+4)-2*6=2$

2. Elegir 2 incógnitas hiperestáticas  $X_1=R_{BY}$   $X_2=N_{BF}$

Vale cualquier esfuerzo de EFCB.

Valen las reacciones verticales. No valen  $N_{DE}$   $N_{DA}$



$L=400$  cm  $P=10000$  kg

$E=2 \cdot 10^6$  kg/cm<sup>2</sup>  $A=10$  cm<sup>2</sup>

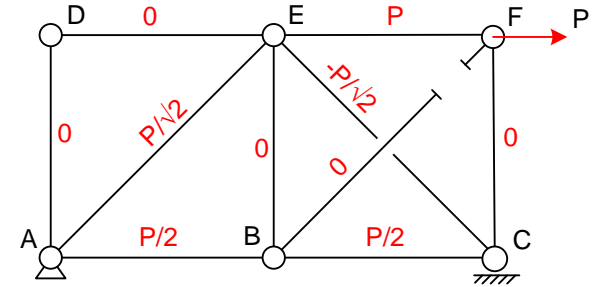
Todas las barras igual  $E A$

## 2. Superposición de 1+ h casos isostáticos

1. Eliminar las h incógnitas hiperestáticas: si  $X_j$  están bien elegidas se obtiene una celosía isostática y estable
2. Superposición de 1+h casos, todos ellos isostáticos

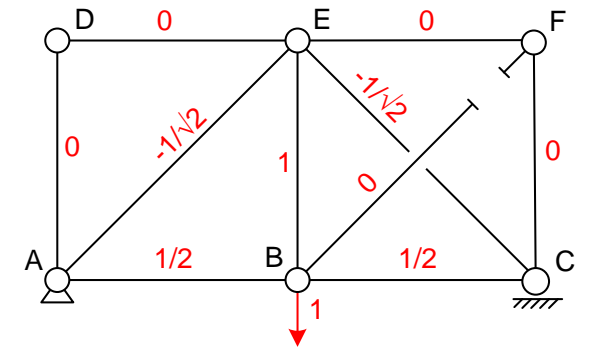
Caso 0: sólo las fuerzas exteriores

Esfuerzos  $N^0$



Casos 1 a h: sólo valor unidad de la incógnita  $X_j$

Esfuerzos  $N^j$



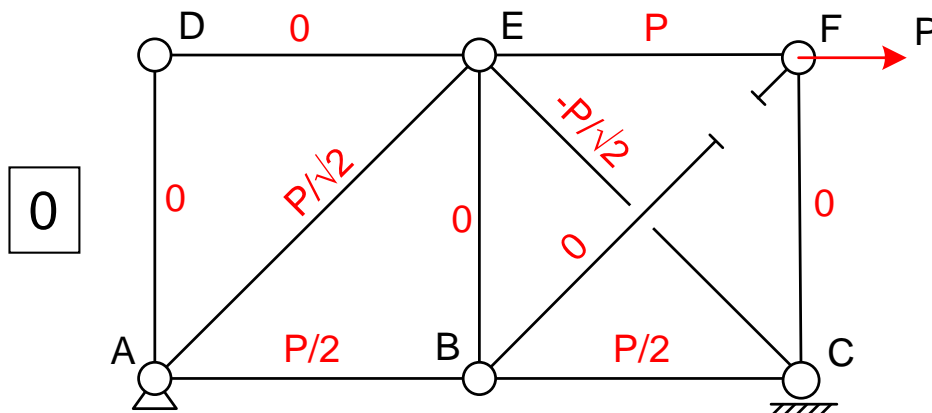
Esfuerzo real 
$$N_i = N_i^0 + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j$$

# Ejemplo. Esfuerzos en los 1+h casos isostáticos

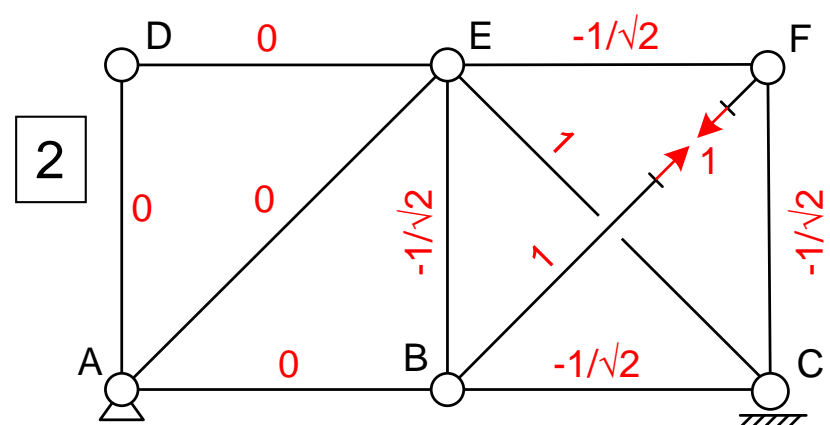
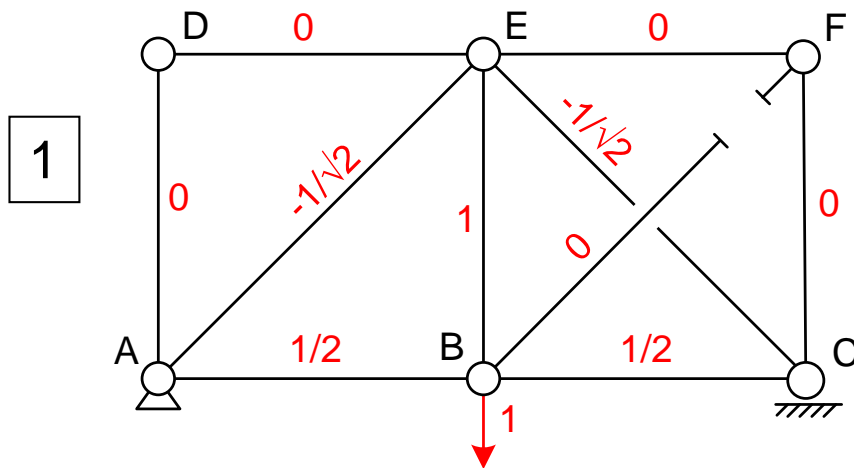
Siempre es posible calcularlos: son casos isostáticos.

Si no se puede: la incógnita  $X$  está mal elegida

Puede ser una celosía simple, compuesta o compleja



$$N_i = N_i^0 + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j$$



### 3. Condiciones de compatibilidad. Planteamiento

$X_j$  es una reacción en un punto fijo:  
(Teorema de Crotti - Engesser)

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_i} \equiv \frac{\partial U^*}{\partial R_i} = \Delta_i = 0$$

$X_j$  es un esfuerzo interior:  
(2º Teorema de Engesser)

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} \equiv \frac{\partial U^*}{\partial N_j} = 0$$

Siempre es del tipo:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$

Nota: se estudiará más adelante el caso de que exista una deformación de valor conocido impuesto (no nulo) en la dirección de la reacción

### 3. Condiciones de compatibilidad. Desarrollo (I)

$$U^* = \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{2 E A_i} + \alpha T_i L_i N_i \qquad N_i = N_i^0 + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j$$

h ecuaciones de compatibilidad

$$\Rightarrow \frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \qquad j = 1, h$$

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \sum_i \frac{L_i}{E A_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial X_j} + \sum_i \alpha T_i L_i \frac{\partial N_i}{\partial X_j} = 0 \qquad \frac{\partial N_i}{\partial X_j} = N_i^j$$

$$\sum_i \frac{L_i}{E A_i} N_i N_i^j + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j = 0 \qquad j = 1, h$$

No es útil así.  
Sustituyendo  $N_i$

### 3. Condiciones de compatibilidad. Desarrollo (II)

$$\sum_i \frac{L_i}{EA_i} \left( N_i^0 + \sum_{k=1,h} X_k N_i^k \right) N_i^j + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j = 0 \quad j = 1, h$$

Reordenando  $\Sigma$

$$\sum_{k=1,h} X_k \left( \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^j N_i^k \right) = - \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^0 N_i^j - \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j \quad j = 1, h$$
$$\sum_{k=1,h} X_k f_{jk} = D_j \quad j = 1, h$$

Sistema de  $h$  ecuaciones con  $h$  incógnitas  $X_j$

### 3. Condiciones de compatibilidad. Aplicación

$$\sum_k f_{jk} X_k = D_j \quad j = 1, h \quad \mathbf{fX} = \mathbf{D}$$

*Coeficiente de flexibilidad cruzado entre  $X_j$  y  $X_k$*

$$f_{jk} = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^j N_i^k$$

*Término de carga para  $X_j$*

$$D_j = - \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^0 N_i^j - \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j$$

- Matriz de coeficientes de flexibilidad  $[\mathbf{f}]$ 
  - Tamaño  $h \times h$ , simétrica
  - Definida positiva si las  $X_j$  están bien elegidas (linealmente independientes)

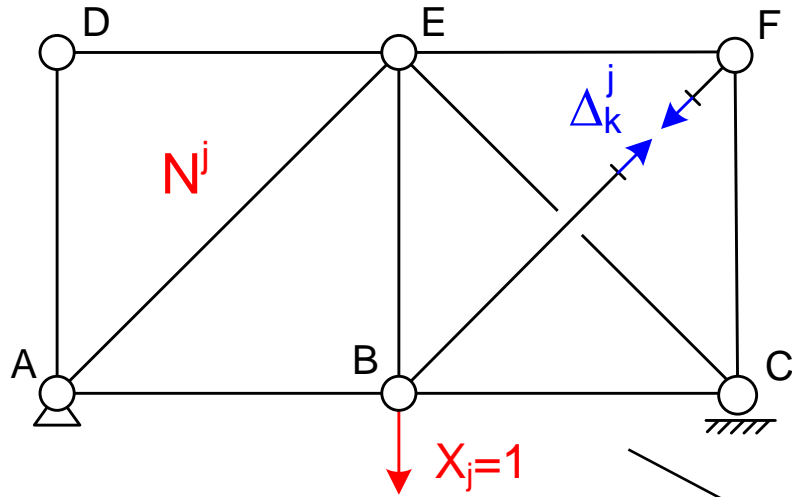


# Significado físico de los coeficientes $f_{jk}$ (1)

Caso j: calculamos

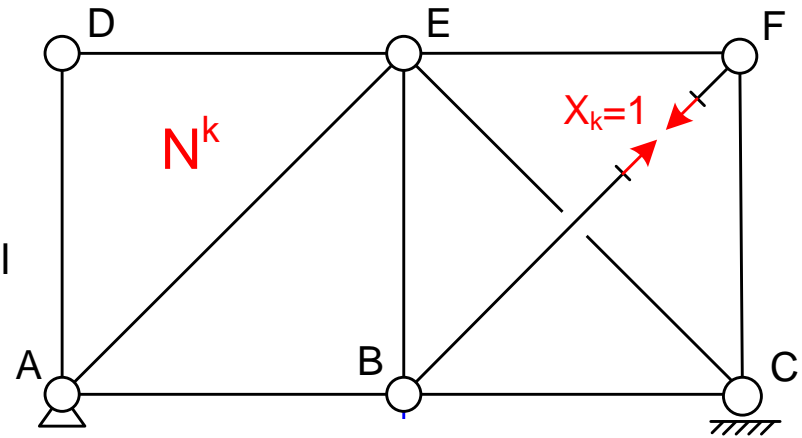
$$\Delta_k^j$$

j  
Real



Planteamos un caso virtual

k  
Virtual



Este caso virtual es el caso k !

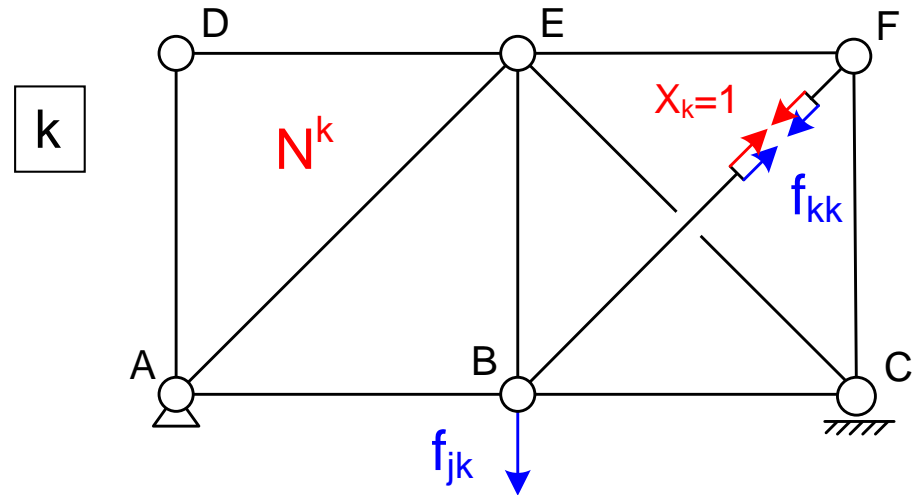
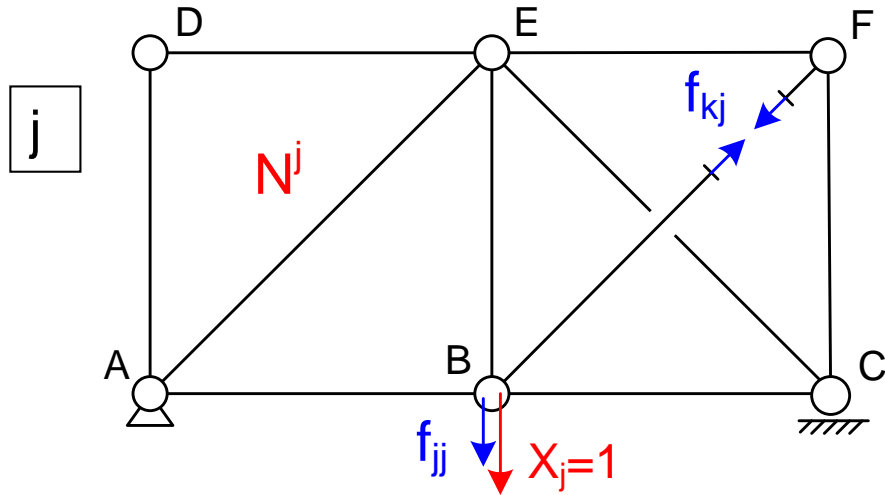
$$\Delta_k^j = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^V$$

Caso real: es el caso j  $N \rightarrow N^j$

Caso virtual: es el caso k  $N^V \rightarrow N^k$

$$\Delta_k^j = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^j N_i^k = f_{kj}$$

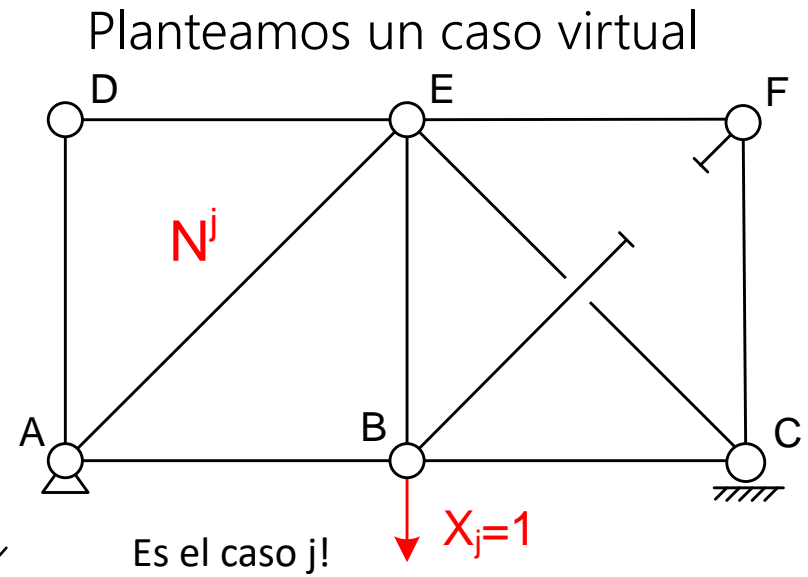
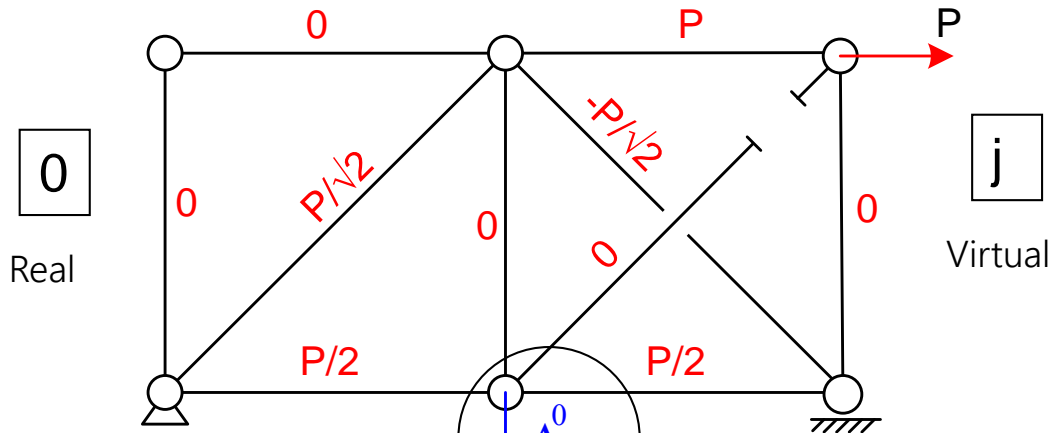
# Significado físico de los coeficientes $f_{jk}$ (y 2)



$$\Delta_k^j = f_{kj}$$

$f_{kj}$  = Deformación en la dirección de  $X_k$ , en el caso  $j$

# Significado físico de los coeficientes $D_j$



Calculamos  $\Delta_j^0$

$$\Delta_j^0 = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^V + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^V$$

Esfuerzos reales: los del caso 0  $N \rightarrow N^0$

Esfuerzos virtuales: los del caso j  $N^V \rightarrow N^j$

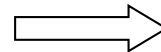
$$\Delta_j^0 = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^0 N_i^j + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j = -D_j$$

# Significado físico de las ecuaciones de compatibilidad

$$\sum_k X_k f_{jk} = D_j$$

$$f_{jk} = \Delta_j^k \quad D_j = -\Delta_j^0$$

$$\sum_k X_k \Delta_j^k + \Delta_j^0 = 0$$

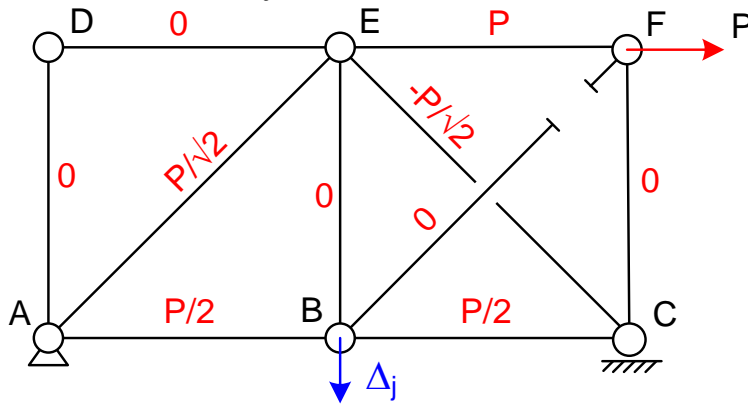


$$\Delta_j^{total} = 0$$

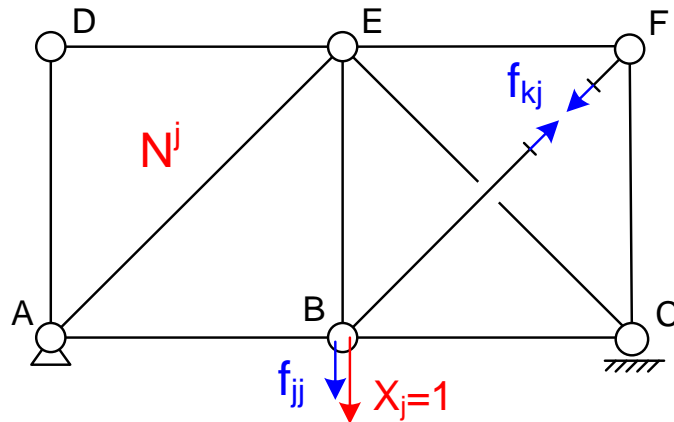
Deformación total en la dirección de  $X_j = 0$ .

Auténticas ecuaciones de compatibilidad de deformaciones

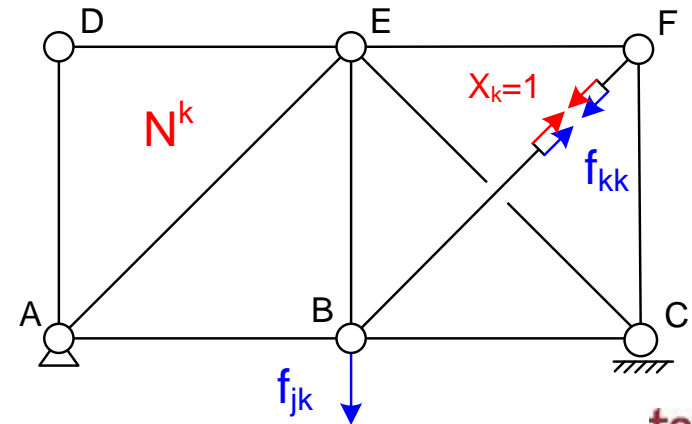
0



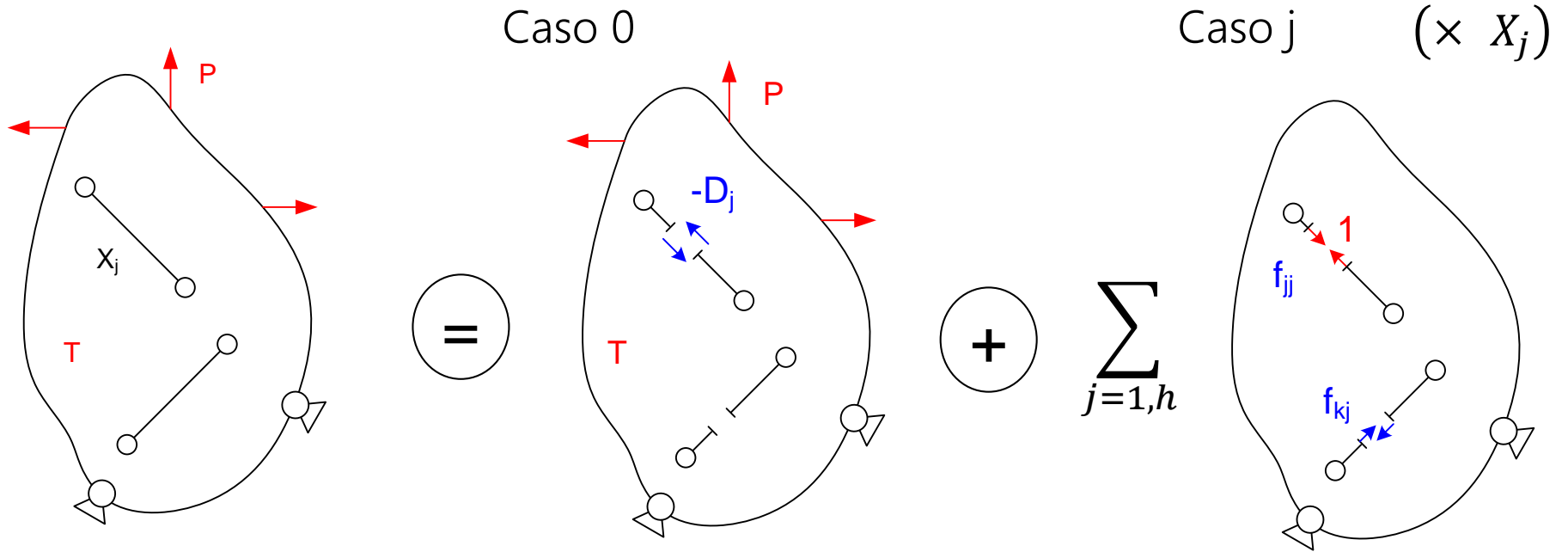
j



k



# Resumen general



$$N_i = N_i^0 + \sum_{j=1, h} X_j N_i^j$$

$$+ \frac{\partial U^*}{\partial X_j} = 0 \quad j = 1, h$$

$$\sum_k f_{jk} X_k = D_j \quad j = 1, h$$

# Unidades

Esfuerzos caso 0: fuerza  $|N^0| = F$

Esfuerzos casos  $j=1,h$ . Adimensional

Esfuerzos en las barras **por cada unidad de fuerza** aplicada en la incógnita hiperestática

$$|N^j| = \frac{F}{F} = 1$$

Coeficientes de flexibilidad  $f_{jk}$   $|f_{jk}| = |N^j| \left| \frac{L}{EA} \right| |N^k| = (1) \left( \frac{L}{F} \right) (1) = \frac{L}{F}$

Término de "carga"  $D_j$ : es una deformación

$$|D_j| = |N^0| \left| \frac{L}{EA} \right| |N^j| = (F) \left( \frac{L}{F} \right) (1) = L$$

$$|D_j| = |\lambda| |N^j| = |\alpha TL| |N^j| = (T^{-1}TL)(1) = L$$

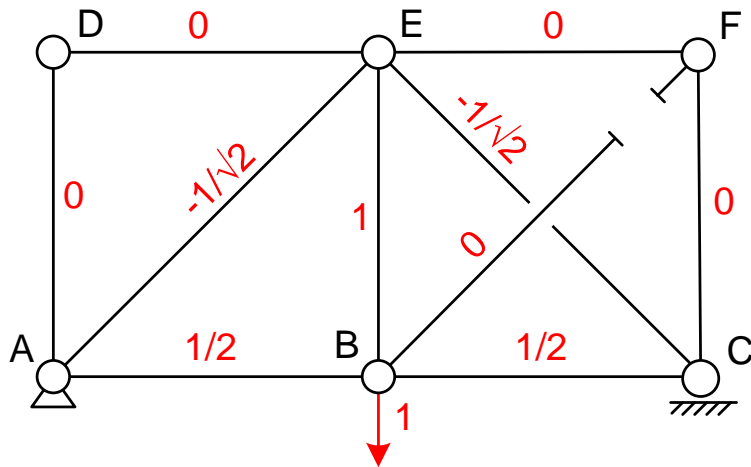
# Ejemplo. Condiciones de compatibilidad (1)

$$f_{11} = \sum \frac{L_i}{EA_i} N_i^1 N_i^1 = 2.9142 \frac{L}{EA} = 0.5820 \cdot 10^{-4} \frac{cm}{kg}$$

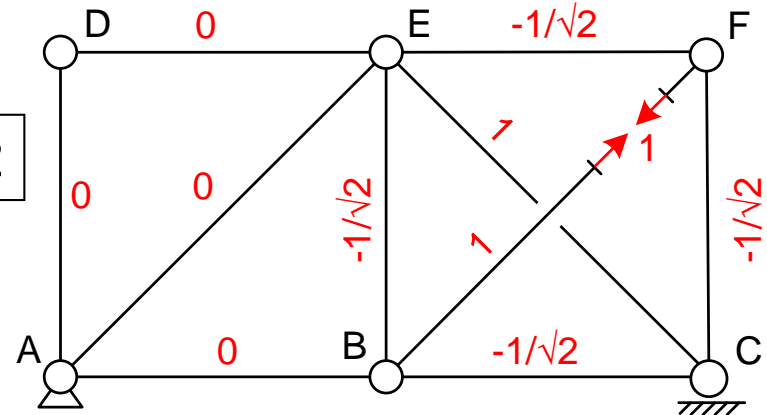
$$f_{12} = \sum \frac{L_i}{EA_i} N_i^1 N_i^2 = -2.0607 \frac{L}{EA} = -0.4121 \cdot 10^{-4} \frac{cm}{kg}$$

$$f_{22} = \sum \frac{L_i}{EA_i} N_i^2 N_i^2 = 4.8284 \frac{L}{EA} = 0.9657 \cdot 10^{-4} \frac{cm}{kg}$$

1



2



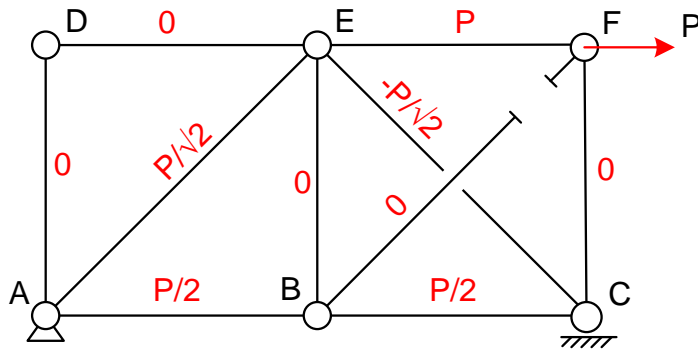
L=400 cm   P=10000 kg   E=2 · 10<sup>6</sup> kg/cm<sup>2</sup>   A=10 cm<sup>2</sup>

# Ejemplo. Condiciones de compatibilidad (2)

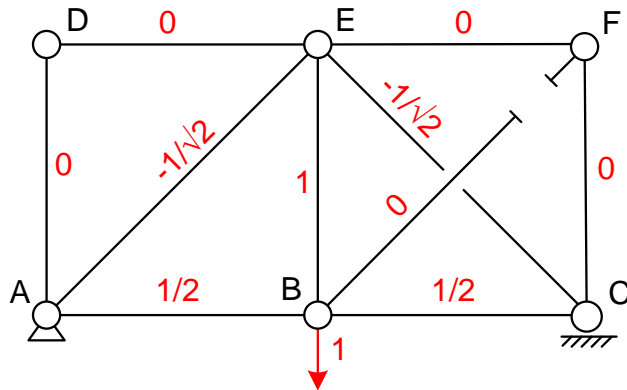
$$D_1 = \sum \frac{L_i}{EA_i} N_i^0 N_i^1 = -0.5 \frac{PL}{EA} = -0.1 \text{ cm}$$

$$D_2 = \sum \frac{L_i}{EA_i} N_i^0 N_i^2 = 2.0607 \frac{PL}{EA} = 0.4121 \text{ cm}$$

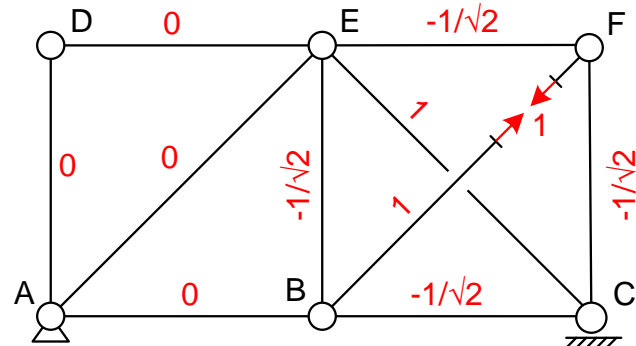
0



1



2





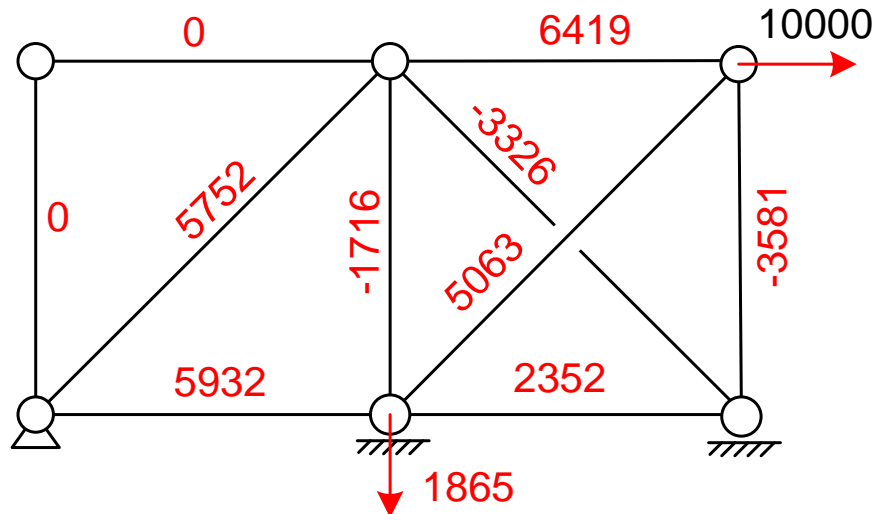
# Ejemplo. Esfuerzos finales

$$\begin{aligned} f_{11}X_1 + f_{12}X_2 &= D_1 \\ f_{21}X_1 + f_{22}X_2 &= D_2 \end{aligned}$$

$$X_1 = R_{BY} = 1864.8 \text{ kg}$$

$$X_2 = N_{BF} = 5063.6 \text{ kg}$$

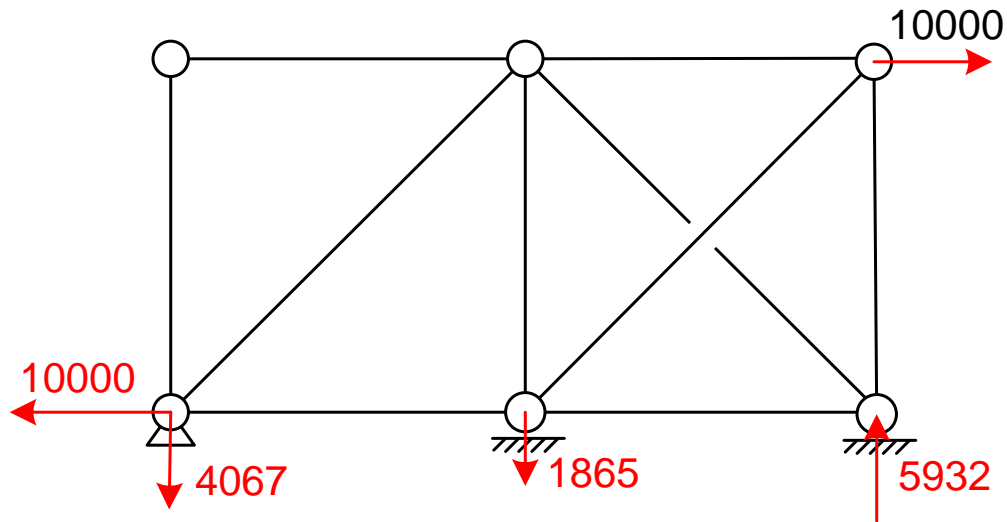
$$N_i = N_i^0 + 1864.8 N_i^1 + 5063.6$$



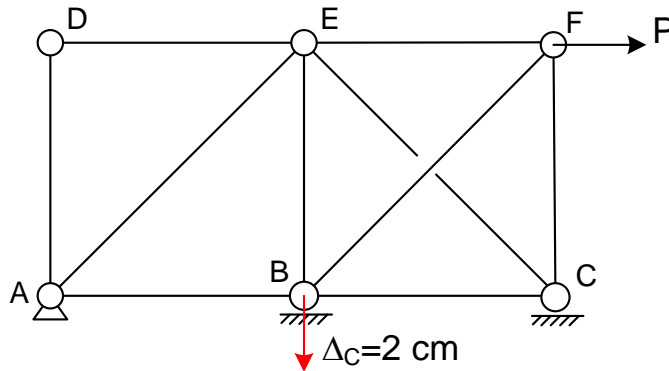
# Ejemplo. Reacciones

Cálculo por estática del conjunto.

$R_{BY} = 1865$  ya conocida.



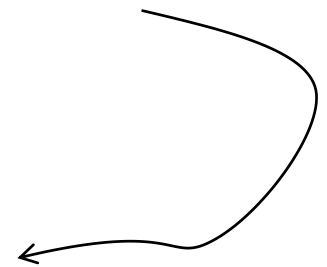
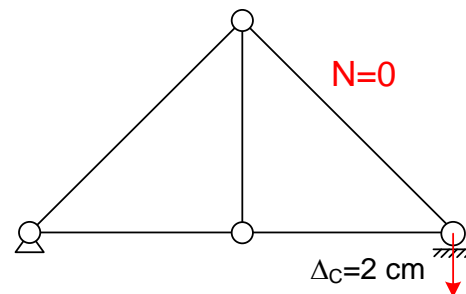
# Deformaciones impuestas en los apoyos



$$X_j \equiv R_j$$

Elegir como incógnita hiperestática  $X$  a la reacción en la dirección de la deformación impuesta

- Siempre se puede si la reacción es hiperestática
- Si no se puede (la reacción es isostática): la deformación impuesta en el apoyo no produce esfuerzos en la estructura



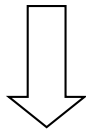
# Deformaciones impuestas en los apoyos

Ecuación de compatibilidad: deformación conocida en el apoyo. Teorema de Crotti-Engesser:

$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} \equiv \frac{\partial U^*}{\partial R_j} = \Delta_{cj}$$

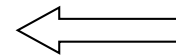
$$U^* = \sum_i \frac{N_i^2}{2} \frac{L_i}{EA_i} + \lambda_i N_i$$

Mismo desarrollo que para apoyos sin deformación



$$\frac{\partial U^*}{\partial X_j} = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i \frac{\partial N_i}{\partial X_j} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial N_i}{\partial X_j} = \Delta_{cj}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial X_j} = N_i^j$$



# Deformaciones impuestas en los apoyos

$$\sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^j + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j = \Delta_{Cj}$$

$$\sum_i \frac{L_i}{EA_i} \left( N_i^0 + \sum_{k=1,h} X_k N_i^k \right) N_i^j + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j = \Delta_{Cj}$$

Reordenando los  $\Sigma$

$$\sum_{k=1,h} X_k \left( \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^j N_i^k \right) = \Delta_{Cj} - \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i^0 N_i^j - \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j$$

$$\sum_{k=1,h} X_k f_{jk} = \Delta_{Cj} + D_j$$

Ecuación de compatibilidad para la deformación conocida



# Cálculo de deformaciones en celosías planas.

## Método de flexibilidad

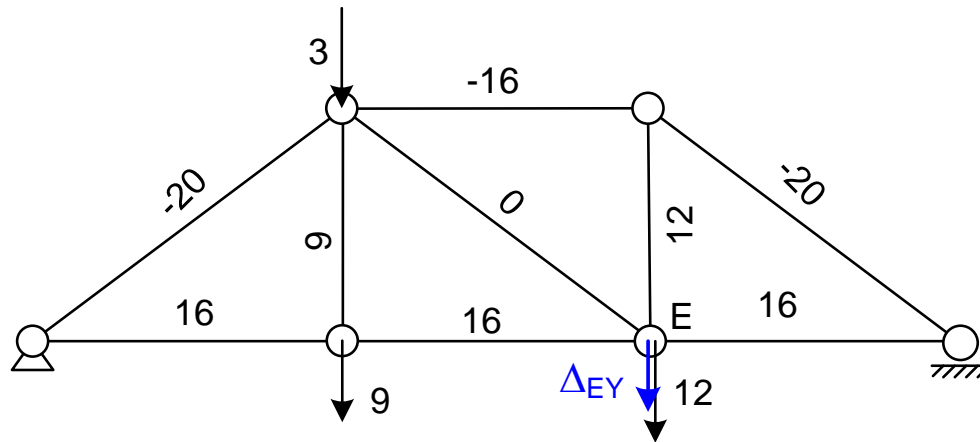
### Parte 1. Celosías isostáticas

# Punto de partida

Estructura ya calculada:

Fuerzas exteriores  $P$  (valores numéricos)

Esfuerzos interiores  $N$  conocidos (valores numéricos)



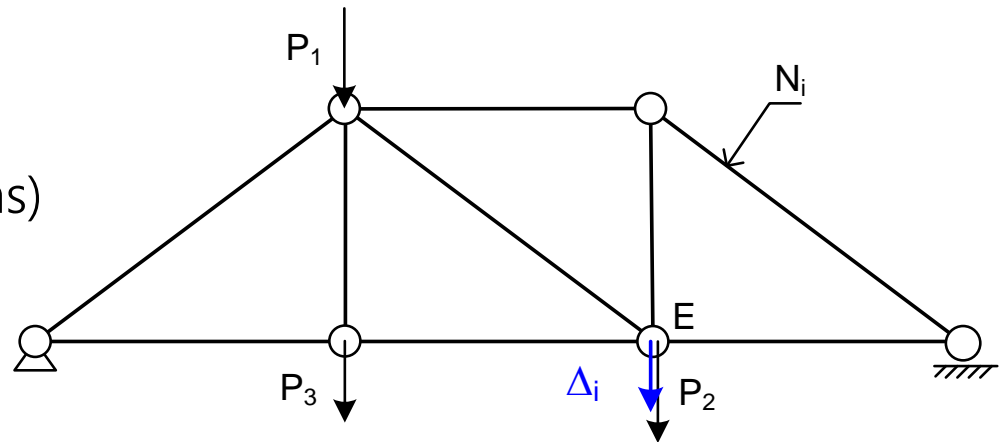
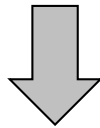
Deseamos calcular una deformación cualquiera

Energía acumulada (propiedades uniformes):

$$U^* = \sum_i \frac{N_i^2 L_i}{2 EA_i} + \sum_i \alpha T_i L_i N_i$$

# Fundamento teórico

Estructura elástica, sometida a un conjunto de fuerzas (y temperaturas) cualquiera



$$\Delta_r = \frac{\partial U}{\partial P_r} \quad \forall r$$

Segundo Teorema de C. A. Castigliano (1879)

$$\Delta_r = \frac{\partial U^*}{\partial P_r} \quad \forall r$$

Teorema de F. Crotti (1888) - Engesser (1889)

Basado en el PT Virtual → Representa el equilibrio

No se conoce  $U$  en función de  $P$ , luego no se puede derivar.

Puede que no haya una  $P_r$  en la dirección  $\Delta_r$ .



1847-1884

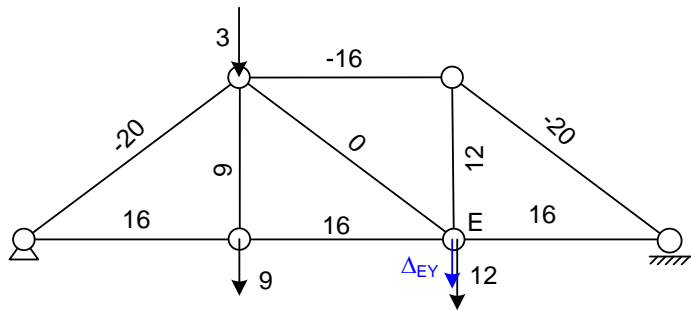


# Planteamiento práctico

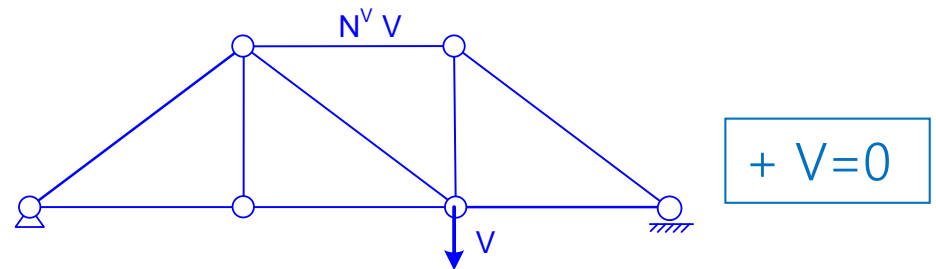
Añadir al sistema una fuerza virtual  $V$ , en la dirección de la deformación buscada, para poder derivar  $U^*(V)$  respecto a ella, y luego hacer  $V=0$ .

Nuevo sistema modificado  $RV = R + V$

Caso real



Caso virtual



$N^V$ : esfuerzos para  $V=1$

Energía en el caso  $R + V$ :

$$U^{*RV} = \sum_i \frac{(N_i + N_i^V V)^2}{2} \frac{L_i}{EA_i} + \sum_i \alpha T_i L_i (N_i + N_i^V V)$$

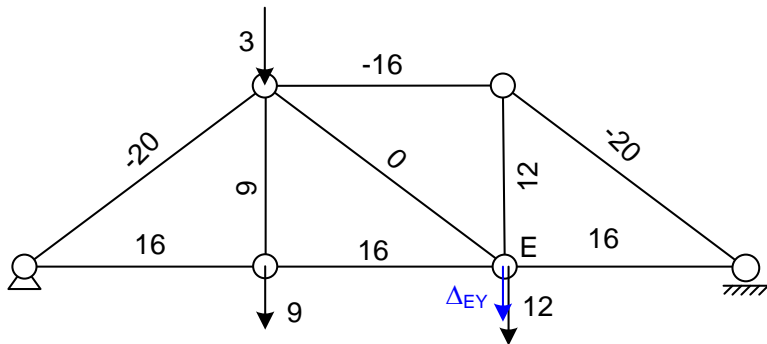
# Resultado

Deformación buscada en la estructura real (V=0):

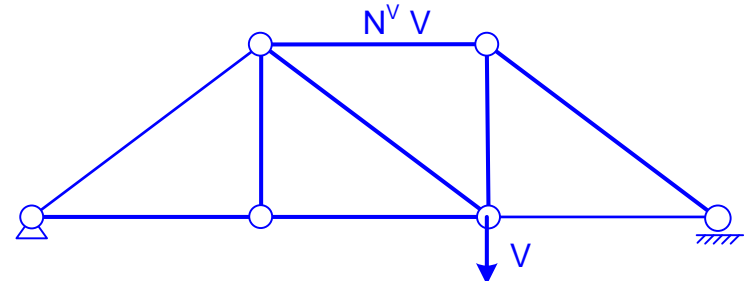
$$\Delta_r = \left( \frac{\partial U^{*RV}}{\partial V} \right)_{V=0} = \left( \sum_i \frac{L_i}{EA_i} (N_i + N_i^V V) N_i^V + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^V \right)_{V=0}$$

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^V + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^V$$

Esfuerzo real (N)



Esfuerzo en el caso virtual con V=1



Nuevo caso a resolver: caso V (con V=1)  
Se calcula igual que la estructura original.

# Cálculo de deformaciones en celosías planas

## Parte 2. Celosías hiperestáticas $h=1$

# Deformaciones en celosías hiperestáticas h=1

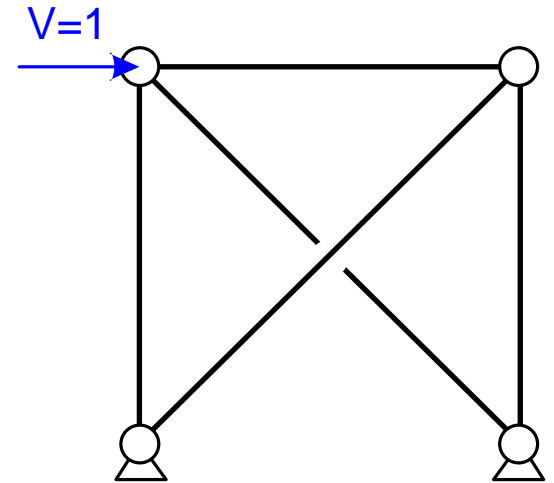
Expresión general:

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^V + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^V$$

Ahora el caso V es hiperestático ☹

Para resolverlo deberíamos aplicar el método general para grado h=1

No queremos repetirlo para cada deformación que queramos hallar



Haciendo el desarrollo de forma teórica:  $N_i^V = N_i^{0V} + X_1 N_i^1$

Elegimos cualquier incógnita  $X_1$

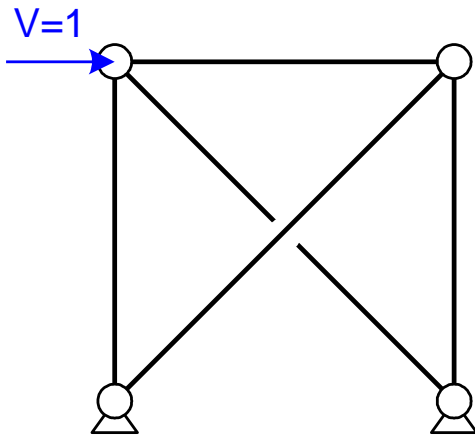
Caso 0V: isostático con la carga exterior V=1. Nuevo

Caso 1: ya resuelto cuando se calculó la celosía

# Deformaciones en celosías hiperestáticas h=1

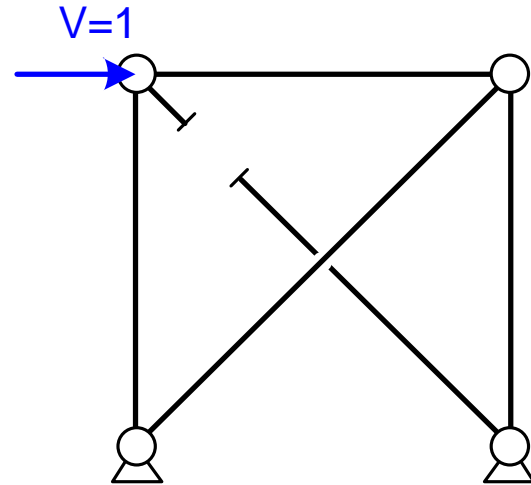
$$N_i^V = N_i^{0V} + X_1 N_i^1$$

Caso V



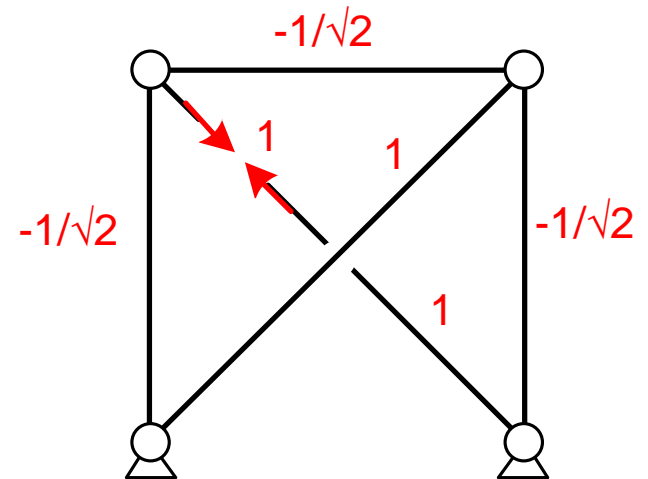
=

0V

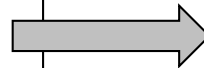


+

1



Caso 1: ya calculado cuando se calcularon los esfuerzos en la estructura



# Deformaciones en celosías hiperestáticas h=1

Expresión general: 
$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^V + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^V$$

Sustituyendo 
$$N_i^V = N_i^{0V} + X_1 N_i^1$$

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i (N_i^{0V} + X_1 N_i^1) + \sum_i \alpha T_i L_i (N_i^{0V} + X_1 N_i^1)$$

Reordenando los  $\Sigma$

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^{0V} + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^{0V} + X_1 \left( \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^1 + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^1 \right)$$

Siempre = 0

Condición de compatibilidad de  $X_1$ .

# Deformaciones en celosías hiperestáticas h=1

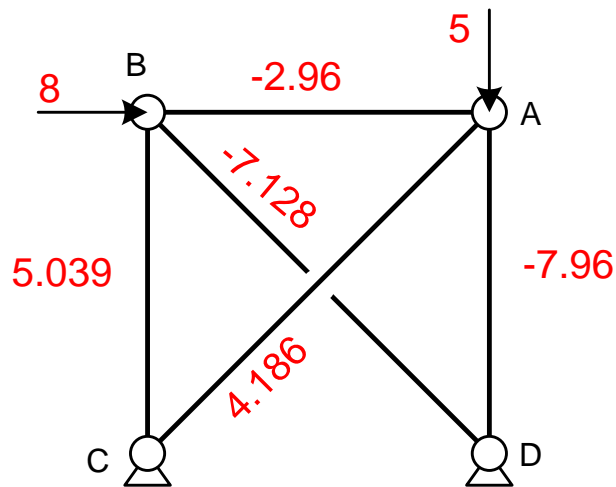
$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^{0V} + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^{0V}$$

No hace falta hallar  $N^V$ , que es hiperestático.

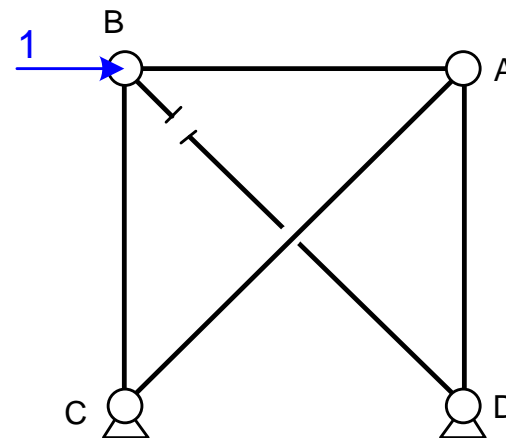
Basta con hallar los  $N^{0V}$

Caso 0V fácil (isostático)

Caso real (N)



Caso 0V (isostático)



# Cálculo de deformaciones en celosías planas

## Parte 3. Cualquier grado $h$



# Deformaciones en celosías hiperestáticas

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^V + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^V$$

El caso V es hiperestático. Para resolverlo se aplica el método general para grado h

Descomposición en casos: 0, 1, 2, ... h

Elegimos cualquier incógnita  $X_j$

$$N_i^V = N_i^{0V} + \sum_{j=1, h} X_j N_i^j$$

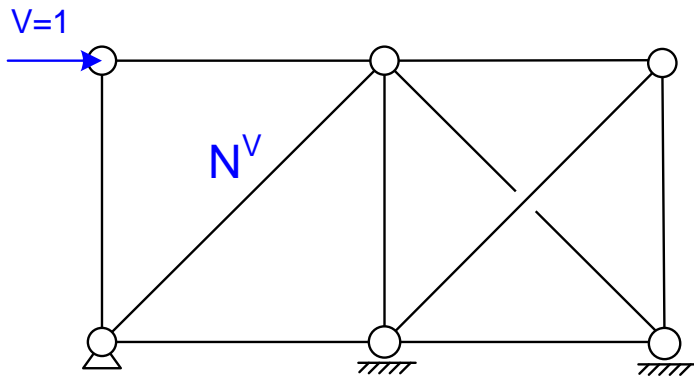
Caso 0V: Isostático con la carga exterior V=1. Nuevo

Casos 1, 2, ... h: ya resueltos cuando se calculó la celosía

# Deformaciones en celosías hiperestáticas

$$N_i^V = N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j$$

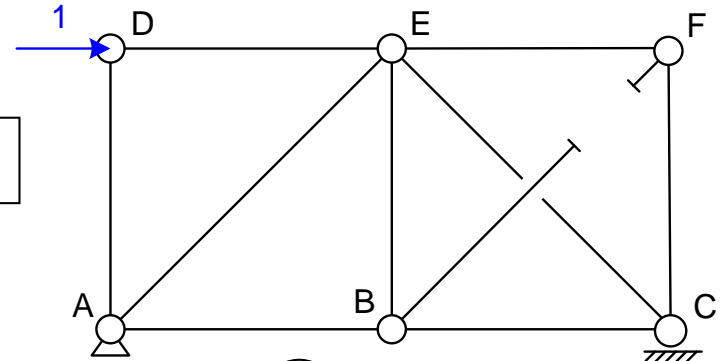
Caso V



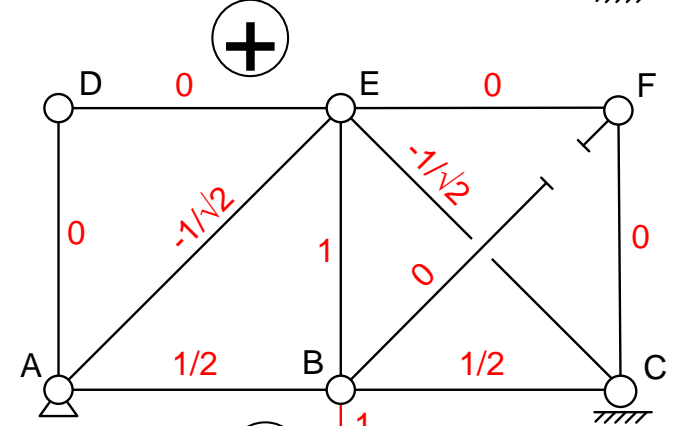
Casos 1, 2, ... h ya resueltos cuando se calcularon los esfuerzos en la estructura

≡

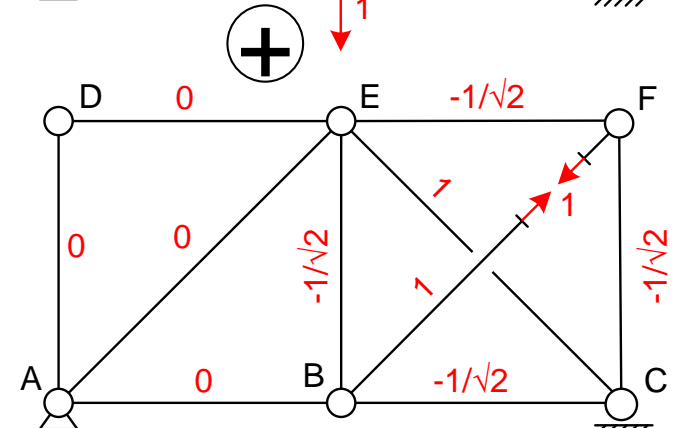
0V



1



2



# Deformaciones en celosías hiperestáticas

Expresión general: 
$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^V + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^V$$

Sustituyendo  $N_i^V$  
$$N_i^V = N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j$$

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i \left( N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j \right) + \sum_i \alpha T_i L_i \left( N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j N_i^j \right)$$

Reordenando los  $\Sigma$

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^{0V} + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^{0V} + \sum_{j=1,h} X_j \left( \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^j + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^j \right)$$

Siempre =0

Condición de compatibilidad de  $X_j$ .

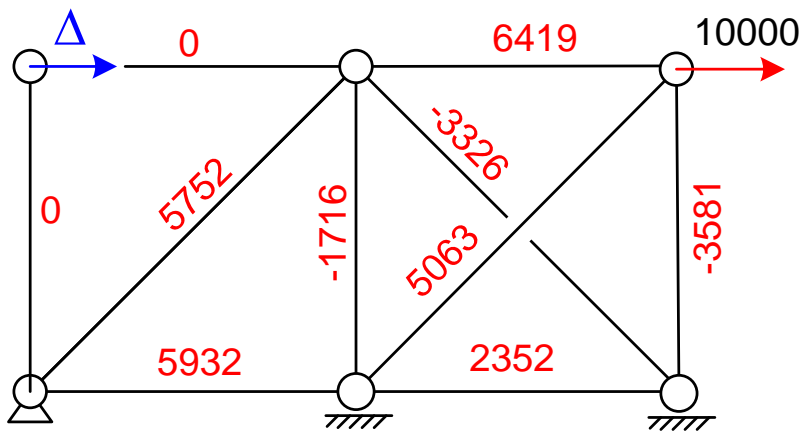
# Deformaciones en celosías hiperestáticas

$$\Delta_r = \sum_i \frac{L_i}{EA_i} N_i N_i^{0V} + \sum_i \alpha T_i L_i N_i^{0V}$$

No hace falta hallar  $N^V$ . Basta con hallar los  $N^{0V}$

Caso 0V fácil (isostático)

Caso real (N)



Caso 0V (isostático)

