Universidad
de Navarra

LA FILOSOFÍA DE LA ARITMÉTICA EN LA *CRÍTICA DE LA RAZÓN PURA*

Jorge Luis Canarias Costanilla

Trabajo de Fin de Grado

Dirigido por el Prof. Dr. Jean-Baptiste Guillon

Pamplona, mayo de 2023

- ÍNDICE -

- INTRODUCCIÓN - Kant y las matemáticas -

La cuestión sobre la matemática y su método ha sido central a la filosofía a lo largo de toda su historia. Ya para los pitagóricos y los platónicos los números (y la ciencia que los estudia) jugaban un papel esencial en el conocimiento.

Dando un gran salto histórico y entrando en la modernidad temprana, encontramos de nuevo autores que sitúan a esta ciencia en el centro del saber (o al menos muy cerca de él). Así, por ejemplo, Descartes, al inicio de su obra *Reglas para la dirección del espíritu* (publicada póstumamente en 1701) afirma que la aritmética y la geometría son las únicas ciencias descubiertas que están libres de falsedad e incertidumbre[1]. Desde este momento, las matemáticas entran en la filosofía con gran ímpetu. Se entremezclan con las reflexiones filosóficas hasta tal punto que el pensamiento de algunos autores, como por ejemplo el de Leibniz, llegó a caracterizarse por "una curiosa mezcla de pensamiento filosófico y matemático"[2]. Algo parecido, con énfasis en el método matemático, encontramos en la obra de Spinoza *Ethica Ordine Geometrico Demonstrata* (1677).

Con este interés filosófico por la disciplina matemática comienza el siglo XVIII, donde los manuales sobre matemática de Christian Wolff adquieren gran popularidad en las aulas universitarias. Una de estas aulas, es la de Kant.

- Kant y la matemática -

Veintiséis años antes de la publicación de su *Crítica de la Razón Pura*, en 1755, Kant comienza a dar cursos de matemáticas en la universidad de Königsberg, y continúa estas clases durante al menos 15 semestres[3]. Si tenemos en cuenta esto, y añadiendo que los libros más viejos de su biblioteca personal eran de matemáticas y no tanto de filosofía[4], no podemos dejar

[1] René Descartes, *Reglas para la dirección del espíritu*, trad. Juan Manuel Navarro Cordón (Madrid: Alianza Editorial, 1984), p. 70.

[2] Norma B. Goethe, Philip Beeley, y David Rabouin, eds., *G.W. Leibniz, Interrelations between Mathematics and Philosophy*, (Springer, 2015), p. 3. Este pasaje hace referencia a la correspondencia de Leibniz con Basnage de Bauval, donde el propio Leibniz usa esta expresión.

[3] Steve Naragon, «List of Lectures (by discipline)», Kant in the classroom, 2006, https://users.manchester.edu/Facstaff/SSNaragon/Kant/Lectures/lecturesListDiscipline.htm. Consultado el 4 de enero de 2023.

[4] Podemos afirmar con seguridad estos intereses gracias al catálogo de la biblioteca personal de Kant: Arthur Warda, *Immanuel Kants Bücher* (Berlin: Martin Breslauer, 1922), p. 38.

de considerar la influencia que podría haber tenido, o el papel que podría haber jugado, esta disciplina en la filosofía kantiana. Resultaría muy extraño que un autor tuviera un conocimiento matemático suficiente como para impartir cursos universitarios durante años, y que al mismo tiempo este conocimiento no afectara en nada al resto de ámbitos de su pensamiento y obra.

- La matemática en el periodo precrítico -

Efectivamente, la matemática aparece como uno de los elementos principales en varios de los primeros escritos kantianos. Unos de los temas centrales en estas obras tempranas es el del *método* de la matemática y su contraposición al de la filosofía o metafísica. Ya en *Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas*[5], de 1747, aparece esta cuestión como clave para la resolución de la contradicción entre Descartes y Leibniz. Esta especificidad del método matemático será el punto sobre el que se apoyará la posición de Kant con respecto la naturaleza de los juicios matemáticos.

La matemática aparece también, por motivos evidentes, en el escrito titulado *Ensayo para introducir en la filosofía el concepto de magnitudes negativas*, de 1763, aunque no es aquí donde encontramos explícitamente la posición que caracteriza la filosofía de la matemática kantiana. Es en realidad durante ese mismo año[6] cuando aparece escrita públicamente por primera vez su tan famosa y discutida postura: "La matemática llega a todas sus definiciones sintéticamente". Kant afirma esto ya desde el título del primer parágrafo de la primera reflexión del breve escrito titulado *Sobre la nitidez de los principios de la teología natural y la moral*[7], elaborado para el concurso de la Real Academia de Berlín.

- La matemática en el periodo crítico -

Kant mantiene esta postura firmemente a pesar del transcurso de los años, y en 1781, en su *Crítica de la Razón Pura*[8], la defiende de nuevo, pero ahora con mucha más fuerza, pues de

[5] Ak 1:041, traducido en Immanuel Kant, *Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas*, trad. Juan Arana Cañedo-Argüelles (Berna: Peter Lang, 1988), p. 51.

[6] Sobre la fecha de publicación véase la página lxi de las *Introducions to the translations* en: Immanuel Kant, *Theoretical Philosophy: 1755 - 1770*, trad. David Walford y Ralf Meerbote, The Cambridge Edition of the Works of Immanuel Kant, I (Cambridge: Cambridge University Press, 2003).

[7] Ak 2:276.

[8] La traducción que se ha usado en este trabajo es la de Mario Caimi: Immanuel Kant, *Crítica de la razón pura edición bilingüe alemán-español*, ed. Mario Caimi (Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica, 2018). En adelante, se abreviará a *KRV*.

ello depende no solo la obra, sino la posibilidad de la metafísica. Según Kant, todos los juicios que son *propiamente metafísicos* deben ser sintéticos y a priori. Pero, visto que la metafísica, a pesar de llamarse a sí misma *ciencia primera* y *sabiduría*, no alcanza nunca un conocimiento seguro, podría cuestionarse la misma posibilidad de sus juicios sintéticos a priori[9].

Aquí es donde entra la matemática, ya que, si bien no podemos todavía decir que la metafísica sea una ciencia *real*, el gran éxito de la matemática como ciencia nos da completa seguridad de la posibilidad de los juicios sintéticos a priori en general. Por tanto, la matemática y la naturaleza de sus juicios son un elemento central para todo el proyecto crítico.

Tal era la importancia de este punto para Kant y su filosofía, que incluso en sus cartas le encontramos defendiendo y argumentando a favor de la sinteticidad de las matemáticas[10].

Además, es importante notar que la distinción entre juicios analíticos y sintéticos fue introducida en la filosofía por el propio Kant. Es cierto que se pueden rastrear ideas similares en algunos filósofos anteriores como Locke y Leibniz, pero la distinción en los términos en que Kant la define es original suya. Esto significa que antes de Kant no era posible una postura a favor de la analiticidad o sinteticidad de los juicios matemáticos, ya que esta distinción no existía todavía.

- Rechazo de la postura de Kant –

Sin embargo, parece que todos los esfuerzos de Kant por explicar su postura fueron en vano, pues incluso sus contemporáneos encontraron dificultades en aceptarla. Desde su discípulo predilecto, Johann Schultz, hasta los grandes logicistas de los siglos XIX y XX, como Frege o Russell, un número considerable de grandes autores discreparon con Kant. Y esta discrepancia no es de ningún modo trivial ni puntual, pues estamos hablando de autores que dieron mucha importancia a la matemática y le dedicaron gran tiempo de su vida: Schultz era matemático, Frege también, y Russell orientó durante mucho tiempo sus esfuerzos filosóficos a la fundamentación de la matemática. Por tanto, deberían tener razones suficientes para no aceptar

[9] Kant explica esta cuestión con notable claridad en la Cuestión general de los Prolegómenos: Ak 4:271-275. Traducido al español en: Immanuel Kant, *Prolegómenos a toda metafísica que haya de poder presentarse como ciencia (Bilingüe)*, ed. y trad. Mario Caimi, Colección Fundamentos, 153 (Berna: Itsmo, 1999).

[10] La carta en la que esta cuestión aparece más explícitamente es la dirigida a su discípulo Johann Schultz fechada a 25 de noviembre de 1788, traducida en Immanuel Kant, «Carta a Johann Schultz del 25 de noviembre de 1788», trad. Rogelio Rovira, *Logos. Anales del Seminario de Metafísica* 37 (2004): 49-53, y correspondiente a Ak 10:554-558.

lo que el filósofo de Königsberg defiende, ya que es un punto fundamental para el desarrollo tanto de la matemática y de su método, como de la filosofía y la metafísica.

Además, los detractores no se limitan a rechazar la proposición, sino que cuestionan la capacidad de Kant de expresar sus propios pensamientos, señalando incluso posibles contradicciones en la *KRV* [11], y llegando hasta el punto de acusarle de falta de conocimiento matemático suficiente[12]. Si estas acusaciones resultan compatibles con el hecho de que él diera cursos de matemáticas en la universidad durante tanto tiempo es una cuestión aparte del objetivo de este trabajo. Y, por otro lado, el grado de conocimiento avanzado de matemáticas no es algo relevante al tratarlas en un contexto filosófico, donde lo que interesa no es tanto sus avances concretos, sino su estructura, método, límites, etcétera.

- Objetivo de este trabajo -

Como se ha mencionado antes, la filosofía moderna pone a la ciencia matemática en el epicentro de la investigación. Siendo Kant uno de los principales filósofos de esta época, y de los más influyentes en la historia de la filosofía, resulta de gran interés filosófico su posición con respecto a esta ciencia.

Por el papel tan central que toma en el proyecto crítico, comprender este aspecto de la filosofía kantiana es esencial para comprender el conjunto de la tarea que Kant emprendió. Además, una interpretación sólida de esta cuestión ayudará a explicar el desarrollo posterior de la filosofía de la matemática, que en gran medida ha sido en contra de la postura kantiana. A este respecto resulta especialmente llamativo el hecho de que la misma posición de Kant ha sido más fácil de aceptar en lo que se refiere a la geometría, y no tanto en lo que se refiere a la aritmética[13]. Es de un interés claro, por tanto, investigar qué es lo que Kant piensa sobre la aritmética y por qué piensa esto.

---

[11] Lewis White Beck, *Studies in The Philosophy of Kant* (New York: The Bobbs-Merrill Company Inc, 1965), p. 89.

[12] Con respecto a esta cuestión, Naragon cita: Hans-Joachim Waschkies, *Physik und Physikotheologie des jungen Kant. Die Vorgeschichte seiner Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels* (Amsterdam: B. R. Grüner, 1987); y Reinhard Brandt, «Kant in Königsberg», en *Studien zur Entwicklung preußischer Universitäten (Ed. Brandt y Euler)* (Wiesbaden: Harrasowitz Verlag, 1999), p. 294. Steve Naragon, «List of Lectures (by discipline)», Kant in the classroom, consultado el 4 de enero de 2023.

[13] Daniel Sutherland, «Kant's Philosophy of Arithmetic - An Outline of a New Approach», en *Kant's Philosophy of Mathematics Vol I (Ed. Posy y Rechter)* (Cambridge: Cambridge University Press, 2020), p. 249.

El objetivo de este trabajo va a ser, por tanto, una interpretación rigurosa de la postura kantiana basada fundamentalmente en los textos de Kant, y centrada en la *KRV*. Esto se hará analizando en profundidad gran parte de los pasajes principales en los que la filosofía de la aritmética kantiana se deja ver. A lo largo de este análisis se tratará de esclarecer el papel que tienen nociones como la de *intuición*, el concepto de *número* o la distinción entre juicios *analíticos* y *sintéticos*. Para ello será necesario acudir ocasionalmente a otros textos, cuando la *KRV* no explicite todos los aspectos de la postura de Kant o deje nociones sin explicar.

En definitiva, la cuestión será la siguiente: ¿Por qué Kant afirma que la aritmética es sintética? y ¿Lo es en el mismo sentido que la geometría?

– LA FILOSOFÍA DE LA ARITMÉTICA EN LA *CRÍTICA DE LA RAZÓN PURA* –

Como ya se ha dicho, la matemática aparece en la obra de Kant desde relativamente pronto. Por ello, un estudio completo de la postura kantiana respecto a la matemática a lo largo de todos sus escritos sería muy interesante, pero al mismo tiempo muy extenso. Para cumplir con la extensión que este trabajo requiere, la presente exposición se va a basar en la filosofía de la matemática que aparece en la *Crítica de la Razón Pura*, y otras obras serán utilizadas solamente a modo de apoyo.

Así pues, este escrito trata de esclarecer la postura de Kant, basándose en los fragmentos de la *KRV*[14] en que la aritmética aparece de forma explícita. Los puntos principales que se van a tocar son: en el apartado I, la cuestión de la matemática como disciplina que ha encontrado el camino seguro de la ciencia. En el apartado II, se tratará la distinción *analítico*/*sintético*, orientada a la aritmética. En el apartado III se profundizará en el modo en que Kant considera el método de la aritmética. En el apartado IV se trata brevemente la posibilidad de la intuición *empírica* en la aritmética. Y en el apartado V se tratará de esclarecer la cuestión del concepto de *número* que maneja Kant.

De este modo, se podrá elaborar en la conclusión de este trabajo una interpretación relativamente completa y fundamentada de la posición de Kant: las proposiciones aritméticas son sintéticas y *a priori*.

I – *Prólogo a la Segunda Edición*: la matemática y el camino seguro de la ciencia

En el prólogo a la segunda edición de la *KRV*, Kant muestra que el éxito de una disciplina en la obtención de conocimiento es un buen indicador para determinar si esa disciplina se puede considerar una ciencia o no[15]. Siguiendo este criterio, analiza qué ámbitos del saber han alcanzado el estatus de ciencia, y qué es lo que les ha permitido lograrlo.

Tras dejar de lado la lógica, por no ser una ciencia en el sentido estricto, sino el "*vestíbulo*" de éstas[16], comienza el análisis de la matemática y de su éxito:

[14] También se pondrá atención a otros escritos para complementar los huecos o cuestiones que pudieran quedar sin tratar en la *KRV*.

[15] *KRV* B-VII.

[16] *KRV* B-IX.

> La *matemática* y la *física* son los dos conocimientos teóricos de la razón que deben determinar *a priori* sus *objetos*; la primera, de manera enteramente pura; la segunda, de manera pura al menos en parte, luego empero también de conformidad con otras fuentes de conocimiento que aquélla de la razón[17].

Quedan de este modo diferenciadas la matemática y la física, como aquellos saberes que *determinan* su objeto a priori, en contraposición a aquellos que buscan hacerlo "*efectivamente real"*. Introduce, además, el término "*puro*", punto en el que la matemática se distingue de la física. La física no es totalmente pura porque necesita de la experimentación[18] para avanzar en su conocimiento, por tanto, tiene un factor *empírico* inevitable. Así, desde el inicio queda claro uno de los elementos principales de la posición kantiana: la *aprioricidad* de la matemática.

Inmediatamente después, continuando en B-X y en B-XI, encontramos el fundamento sobre el que Kant basa su concepción de las matemáticas: el método específico de la ciencia matemática. Para Kant cada una de las ciencias es definida por su método específico. Mejor dicho, cada disciplina necesita de una revolución metódica suficiente que la oriente hacia el camino seguro de la ciencia, y la matemática no es una excepción en este aspecto. En el caso de la matemática, la revolución metódica se asigna al descubrimiento de Tales[19]:

> El primero que demostró el triángulo isósceles (ya se haya llamado Tales, o como se quiera) tuvo una iluminación; pues encontró que no debía guiarse por lo que veía en la figura, ni tampoco por el mero concepto de ella, para aprender, por decirlo así, las propiedades de ella; sino que debía producirlas por medio de aquello que él mismo introducía *a priori* con el pensamiento según conceptos y exhibía (por construcción) [en ella]; y que, para conocer con seguridad algo *a priori*, no debía atribuirle a la cosa nada más que lo que se seguía necesariamente de aquello que él mismo había puesto en ella según su concepto.[20]

Antes de mostrar cuál es el método que dio el estatus de ciencia a la matemática, se deben rechazar otros métodos que no han dado resultado en el pasado. Antes de la "feliz idea" de

[17] *KRV* B-X.

[18] La experiencia y lo empírico puede también aparecer en cierto modo en la matemática, pero esto se tratará más adelante en el apartado IV, pp. 24-26.

[19] La cuestión histórica de quién hizo este descubrimiento no es interesante para Kant en este aspecto: "la leyenda que nos transmite Diógenes Laercio", *KRV* B-XI.

[20] *KRV* B-XI – BXII.

Tales, la matemática tanteaba sin seguridad aplicando esos métodos anteriores: el empírico, que simplemente se dejaría guiar por lo que *ve* en la figura, en algún ejemplo sensible de la figura; y el filosófico, que se dejaría guiar solamente por el *concepto* de la figura para aprender sus propiedades[21]. Ninguno de estos métodos hace que la matemática avance de modo seguro. ¿Cuál es, entonces, el método que ha de seguir la investigación matemática? La respuesta de Kant es: el de la *construcción*.

No sería conveniente elaborar más a fondo esta cuestión sin aclarar un punto sobre la interpretación del fragmento citado. El problema es que en el texto alemán se da una pequeña ambigüedad con respecto a qué es lo que se *produce*: las propiedades, o la figura. Es importante aclarar esta cuestión para comprender correctamente cuál es el método matemático, ya que éste no puede limitarse a la simple producción de la figura del concepto inicial (ya que así no avanzaría nada en el conocimiento), sino que tiene que, precisamente, ir más allá de ella. La amplia variedad de reestructuraciones que el texto ha sufrido, tanto en las traducciones como en las ediciones alemanas[22], a causa de esta ambigüedad es realmente notable[23]. Si siguiéramos alguna de esas reformulaciones nos resultaría imposible comprender lo que Kant está queriendo decir realmente[24], por ello conviene tener en mente el texto original alemán:

> *Dem ersten, der den gleichschenklichten Triangel demonstrierte, (er mag nun Thales oder wie man will geheißen haben,) dem ging ein Licht auf; denn er fand, daß er nicht dem, was er in der Figur sahe, oder auch dem bloßen Begriffe derselben nachspüren und gleichsam davon ihre Eigenschaften ablernen, sondern*

[21] La cuestión del método matemático y el método filosófico se trata con más profundidad en el apartado IV de este trabajo pp. 24-26.

[22] Timmermann recoge tres variaciones: la propuesta por Hartenstein (1838) "sondern sie durch das"; la de Erdmann (1878) "sondern diese durch das"; y la de Adicke (1889) "sondern das". Immanuel Kant, *Kritik der reinen Vernunft*, ed. Timmermann (Hamburg: Felix Meiner, 1998), p. 18.

[23] Me refiero a traducciones como la de Pedro Ribas (en Immanuel Kant, *Crítica de la razón pura*, trad. Pedro Ribas, 14.ª ed. (Madrid: Alfaguara, 1998)), donde el pasaje dice así: "(…) sino extraer éstas a priori por medio de lo que él mismo pensaba y exponía (por construcción) en conceptos", p. 17. Traducido de este modo, el sentido cambia de forma radical, o a menos introduce ambigüedad, al poder interpretarse que la presentación sea *en conceptos*, y no *según conceptos*.

[24] A diferencia del resto de traductores, Mario Caimi indica en una nota al pie las distintas posibilidades de interpretación: "Es decir, producir las mencionadas propiedades. Pero también podría entenderse «producirla», es decir, producir la figura", Kant, *Crítica de la razón pura edición bilingüe alemán-español*, p. LXXIII nota 27.

durch das, was er nach Begriffen selbst a priori hineindachte und darstellte, (durch Konstruktion) hervobringen müsse, und daß er, um sicher etwas a priori zu wissen, der Sache nichts beilegen müsse, als was aus dem notwendig folgte, was er seinem Begriffe gemäß selbst in sie gelegt hat[25].

Parece que, teniendo en cuenta la nota de Caimi y la traducción de Smith, aquí los términos *hineindachte* y *darstellte* no se refieren en realidad ni a las propiedades ni a la figura explícitamente. Kant simplemente parece estar diciendo (manteniendo la estructura original): "porque descubrió que no seguía (…) sino a través de aquello, que él mismo según conceptos a priori imaginó y presentó, (por construcción) extraer debía". Adaptado a sintaxis española, se podría expresar así: "porque descubrió que (…) debía extraer lo que él mismo imaginó y presentó a priori (por construcción) según conceptos".

La diferencia entre esta traducción y la de Caimi es que en esta no se introduce la cuestión de qué es lo que se presenta y qué es lo que se extrae. Parece ser que el texto de Kant tampoco hace referencia a esto y, por tanto, no debe modificarse al traducirlo. Para afirmar esto sirve de apoyo la traducción de Smith[26], no hace referencia alguna a las propiedades ni a la figura, si bien altera completamente la formulación, lo cual le permite, por otro lado, mayor claridad en el contenido.

De este modo, el método de la matemática parte de una presentación *a priori*, según conceptos. Esto no quiere decir que lo que se presenta sea el mero concepto, sino que se presenta una instancia (que Kant llamará más adelante[27] *intuición*) que cumple todo el conjunto de propiedades que formaban el concepto. Y de esa instancia el geómetra debe extraer las propiedades que no estaban explícitas en el concepto inicial, pero se siguen del mismo.

---

[25] Immanuel Kant, *Critik der reinen Vernunft Zweyte bin und wieder berbefferte Auflage* (Riga, 1787), texto recogido de la edición de Timmermann, p. 18.

[26] Immanuel Kant, *Immanuel Kant's Critique of Pure Reason*, trad. Norman Kemp Smith (Edinburgh: Macmillan and Co., Limited, 1929), p. 19: "(…), but to bring out what was necessarily implied in the concepts that he had himself formed a priori, and had put into the figure in the construction by which he presented it to himself".

[27] La intuición aparece referida a la aritmética por primera vez en la *Introducción*: *KRV* B-15, y se analiza en la página 18 de este trabajo.

Además, para que se alcance conocimiento cierto y *a priori* de esta manera, el matemático debe limitarse a extraer de la figura solamente aquello que se sigue *necesariamente*[28] de sus propiedades iniciales.

Si bien el propio Kant no nos indica esto de forma directa en la *KRV*, comentadores posteriores (y en particular Jaakko Hintikka[29]) han sabido identificar en este pasaje el método geométrico que aparece en los *Elementos* de Euclides. El análisis de los pasos concretos del método euclídeo y su comparación meticulosa con la postura kantiana es, desde luego, algo que resultaría de gran interés, pero queda fuera el objetivo de este escrito. Sin embargo, es notable el hecho de que podemos saber que Kant se está refiriendo al método de Euclides, al menos en este pasaje, gracias a un error en la copia para la imprenta de la segunda edición de la *KRV*. Como indica Michael Friedman[30], en una carta a Christian Gottfried Schutz, Kant propone añadir la siguiente anotación para advertir de la errata:

> "En el Prefacio, p. xi, la tercera línea desde abajo contiene un error de copia, ya que está escrito triángulo "equilátero" en vez de "equiangular". (Elementos de Euclides, Libro I, Prop.5.)"[31].

Por tanto, es evidente que Kant tiene en mente la obra de Euclides al tratar el descubrimiento del método de la geometría. Y, si observamos otro de los lugares en los que el geómetra es mencionado en el corpus kantiano, hallaremos que Kant considera que los *Elementos* es un libro de referencia en esta área del saber. Esta otra mención es la del anuncio de las lecciones del curso 1765 – 1766:

---

[28] Se explicará más adelante, en el apartado IV cómo el conocimiento resultante de este proceso puede ser necesario y universal (p. 26).

[29] Jaakko Hintikka, «Kant's 'New Method of Thought' and His Theory of Mathematics», en *Knowledge and the Known*, Synthese Historical Library (Dordecht: Springer Dordrecht, 1991), 126-34, https://doi.org/10.1007/978-94-010-2217-0.

[30] Michael Friedman, *Kant & the Exact Sciences* (Cambridge: Harvard University Press, 1992) p. 91.

[31] Kant, *Correspondence* p.261, o Ak 10:489, el tercer párrafo de la carta a Schutz con fecha del 25 de junio de 1787.

> (…) Hasta que se me muestre un libro de sabiduría mundana al que pueda referirme, como Polibio para explicar una circunstancia de la historia, o Euclides para explicar un teorema de la teoría de la magnitud (…)[32].

De este modo, del prólogo a la segunda edición de la *KRV* podemos extraer lo siguiente respecto a la matemática:

1 - La matemática es una ciencia que determina su objeto *a priori*.

2 - El método de la matemática no es el empírico (que acude a la experiencia) ni el filosófico (que se quedaría en el concepto), sino el de la *construcción*.

3 - El método de la *construcción*, al menos en la geometría, es el que encontramos en los *Elementos* de Euclides.

Hasta este punto, los textos examinados hacen referencia a la matemática en general, y usan ejemplos propios de la geometría. Todo lo anterior era indispensable para comprender la postura de Kant de manera completa, pero es necesario acercarse poco a poco a los lugares donde la aritmética aparece de forma explícita. El siguiente paso, antes de llegar a su tratamiento específico, es aclarar la distinción entre juicios *analíticos* y *sintéticos*.

[32] Immanuel Kant, *Kant's gesammelte Schriften Band II* (Berlín: Druck un Verlag con Georg Reimer, 1912), p. 307 = Ak 2:307.

II – *Introducción a la segunda edición* (1): la sinteticidad y los juicios aritméticos

El asunto sobre la distinción entre juicios analíticos y sintéticos es por sí mismo causa de gran debate y discusión en la literatura filosófica. Si bien es cierto que es uno de los temas centrales del presente escrito, sería imposible abarcar en éste toda la complejidad de la cuestión contemporánea. Por ello se van a analizar a continuación solamente los pasajes en los que esta distinción resulta relevante para la comprensión de la postura de Kant con respecto a la ciencia matemática.

Antes de mencionar la sinteticidad de los juicios matemáticos[33] por primera vez (en la *Introducción a la segunda edición*, B-14), Kant presenta la distinción entre juicios analíticos y sintéticos en A-6/B-10 – A-7/B-11:

> En todos los juicios en los que se piensa la relación de un sujeto con el predicado (…) esta relación es posible de dos maneras. O bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo que está contenido (ocultamente) en ese concepto A; o bien B reside enteramente fuera del concepto A, aunque está en conexión con él. En el primer caso, llamo analítico al juicio; en el otro, sintético.

Esta es la primera aparición de esta distinción tal y como la entendemos en la historia de la filosofía. Es cierto que hay algunos filósofos anteriores, como Leibniz, Locke y Hume, que manejan nociones parecidas[34], pero la versión de Kant es la que más importancia ha tenido en el desarrollo posterior del pensamiento.

De este fragmento se debe extraer, en primer lugar, que Kant restringe esta distinción a aquellos juicios en que se asigna un predicado a un sujeto. Y, en segundo lugar, hay que tener en cuenta que la definición que Kant da en este pasaje es muy clara, y se basa en la relación de continente/contenido entre el concepto del predicado y el concepto del sujeto: si el predicado pertenece al concepto del sujeto, el juicio es analítico; si el predicado reside fuera del concepto del sujeto, el juicio es sintético.

A esto Kant añade:

[33] Que, como se dijo en la introducción de este trabajo, es el punto central de la filosofía de la matemática kantiana.

[34] Véase el apartado 1.4 *Antecedents of Containment Analyticity*, en R. Lanier Anderson, *The Poverty of Conceptual Truth* (Oxford: Oxford University Press, 2015), p. 32-39.

> Los juicios analíticos son, por tanto, aquellos en los cuales la conexión del predicado con el sujeto es pensada por identidad; pero aquellos en los que esta conexión es pensada sin identidad, deben llamarse juicios sintéticos. (…) aquéllos [los analíticos], con el predicado, no añaden nada al concepto del sujeto, sino que solamente lo desintegran, por análisis, en sus conceptos parciales, que estaban pensados ya en él (aunque de manera confusa); por el contrario, los últimos [los sintéticos] añaden al concepto del sujeto un predicado que no estaba pensado en él, y que no habría podido obtenerse mediante ningún análisis de él[35].

Las precisiones que esto introduce son: a) La conexión entre sujeto y predicado es pensada con identidad en los juicios analíticos y sin identidad en los sintéticos. b) Los juicios analíticos no añaden nada al sujeto, sino que muestran los *conceptos parciales* que lo forman; mientras que los sintéticos sí le añaden algo que no estaba pensado en él.

Además, ha aparecido en este párrafo la noción clave para comprender a qué se refiere Kant cuando habla de que un concepto esté contenido en otro o no lo esté[36]. Esta noción es la de *concepto parcial*, *Theilbegriffe*. El significado de este nuevo término se explica en parte en el ejemplo que Kant ofrece inmediatamente después, donde afirma que al hacer un juicio analítico:

> (…) no necesito salir del concepto (…); sino que [necesito] solamente descomponer aquel concepto, es decir sólo [necesito] hacerme consciente de lo múltiple que siempre pienso en él, para encontrar en él ese predicado; (…)[37].

Pero queda mejor explicado todavía si a esto se añade un pasaje de la *Lógica Jäsche*[38], y se tiene en cuenta también el final del pasaje conocido como *Stufenleiter* (escala o jerarquía), que volveremos a tratar más adelante con más detalle[39]:

> El conocimiento humano es por parte del entendimiento *discursivo*; es decir, ocurre mediante representaciones, que convierten aquello que es común a varias cosas en

[35] *KRV* A-7 / B-10 a 11.

[36] Lo que en el párrafo citado anterior aparecía como "pertenece (…) como contenido" y "reside enteramente fuera".

[37] *KRV* A-7 / B-11, los añadidos son de Caimi.

[38] Immanuel Kant, *Lógica de Immanuel Kant: Un manual de lecciones (Edición original de G. B. Jäsche)*, trad. María Jesús Vázquez Lobeiras (Madrid: Akal, 2000). Esta obra fue editada en el año 1800 por Jäsche a petición del propio Kant, basándose en el manual que éste usaba para dictar sus lecciones de lógica.

[39] En el apartado III, p. 18.

> fundamento cognoscitivo. Ocurre por tanto *mediante notas* en cuanto tales. Reconocemos cosas, en suma, sólo *mediante notas* (…)
>
> Una *nota* es *en una cosa aquello* que constituye una *parte del conocimiento de la misma* o, lo que es lo mismo, una *representación parcial en tanto que se considera como fundamento cognoscitivo de la totalidad de la representación*. En virtud de lo cual todos los conceptos son notas y todo *pensamiento* no es otra cosa que un representar mediante notas.
>
> Toda nota se puede considerar desde dos puntos de vista: (…) como representación en sí misma, (…) [o] como perteneciente en tanto que concepto parcial a la representación total de una cosa y por ello como fundamento cognoscitivo de la cosa misma[40].

Y de la *Stufenleiter* se extraía que, al igual que la *intuición* (como veremos más adelante), el concepto es una *representación* con conciencia referida a un objeto y es, por tanto, *conocimiento*; pero que se distingue de la *intuición* en que:

> Aquélla se refiere inmediatamente al objeto, y es singular; éste, mediatamente, por medio de una característica que puede ser común a muchas cosas[41].

El término que aparece en la *Lógica Jäsche* y que Vázquez Lobeiras traduce como *nota* es el mismo que Caimi traduce como *característica* en la *KRV*, y en el original alemán es: *Merkmal*. Recuperando todo lo que ha aparecido en estos párrafos podemos concluir que lo específico de los conceptos es que se refieren al objeto de forma mediada, a través de una *característica* o *nota* (*merkmal*) que puede ser una representación (un concepto) en sí misma, o parte de otro concepto; es decir, un *concepto parcial* (*Theilbegriffe*).

Por tanto, los *conceptos parciales* son las *características* o *notas* que forman el concepto principal, esa multiplicidad que siempre se piensa en cada concepto, y que se descubre al hacer juicios de análisis sobre él.

De este modo, un juicio será analítico cuando el predicado que se atribuye al sujeto consista en una *nota* o *característica* que ya estuviera en el concepto del sujeto como un *concepto parcial*. El juicio será sintético cuando el predicado atribuido sea una nota o característica que

[40] Ak 9:058, página 118 en la edición de Vázquez Lobeiras.

[41] *KRV* A-320 / B-377.

no se encontraba ya en el sujeto como *concepto parcial*. Como aquella nota o característica no se encuentra en el concepto del sujeto, se debe acudir a alguna otra instancia para poder atribuírsela.

Para terminar de precisar esta cuestión, Kant hace una distinción entre dos tipos de *notas* en la *Lógica Jäsche*:

> Notas *analíticas* o *sintéticas*. – Aquellas que son conceptos parciales de mi concepto *real* (que yo pienso ya dentro de él); éstas, por el contrario, son conceptos parciales del concepto total meramente *posible* (que deberá resultar de una síntesis de diversas partes). *Las primeras* son todas ellas *conceptos de la razón*, las últimas pueden ser *conceptos de experiencia*[42].

Es decir, todas aquellas *notas* o *conceptos parciales* que forman parte de un concepto desde su inicio, y que se descubren mediante el análisis, son *notas analíticas*. Y todas las *notas* que se añaden al concepto *real*, que no son directamente los *conceptos parciales* que lo forman y que, por tanto, no se pueden descubrir mediante el análisis, son *notas sintéticas*.

Volviendo al hilo de la exposición de la *KRV*, ahora Kant combina esta distinción entre analítico y sintético con la distinción entre conocimientos *a priori* y conocimientos *a posteriori*. Comienza, pues, comentando los juicios de experiencia (los juicios *a posteriori*)[43]:

> *Los juicios de experiencia, como tales, son todos sintéticos*. Pues sería absurdo fundar un juicio analítico en la experiencia, porque no preciso salir de mi concepto para formular el juicio, y por tanto, no necesito ningún testimonio de la experiencia para ello[44].

De este modo, todos los juicios que acudan a la experiencia son sintéticos. Y, por el mismo motivo, las *notas* que estos juicios puedan añadir al concepto del sujeto serán siempre *sintéticas*. En contraposición, todos los juicios analíticos son *a priori*, precisamente porque no necesitan recurrir a la experiencia, y esto hace que todas las notas que puedan predicar del concepto del sujeto sean *notas analíticas*. Estas dos combinaciones que surgen del cruce de las dos

---

[42] Kant, *Lógica de Immanuel Kant: Un manual de lecciones (Edición original de G. B. Jäsche)*, p. 119, o Ak 9:059.

[43] La distinción entre conocimientos a priori y a posteriori se hace al inicio de la Introducción, concretamente en B-2.

[44] KRV B-12.

distinciones son las más directamente reconocibles: los juicios sintéticos *a posteriori*, y los juicios analíticos *a priori*.

Las otras dos combinaciones posibles a partir de estas distinciones serían: los juicios analíticos *a posteriori*, y los juicios sintéticos *a priori*. La primera de estas dos combinaciones que da eliminada desde el principio: los juicios analíticos no pueden ser *a posteriori*, pues el predicado o *nota* que se atribuye al sujeto se encuentra ya en el mismo concepto del sujeto (es una *nota analítica*), y no hace falta buscarlo en la experiencia. Queda, por tanto, por examinar la posibilidad de los juicios sintéticos *a priori*, es decir, aquellos que añaden algo que no se encuentra en el concepto del sujeto (una *nota sintética*), pero que tampoco recurren a la experiencia sensible Se tratará de explicar cómo esto es posible más adelante[45].

De todos modos, ya con estas distinciones establecidas, es posible adelantar de cuál de estos tipos serán los juicios de la aritmética, si se tiene en cuenta lo que ya se ha presentado sobre ellos en las conclusiones del apartado anterior. Sabíamos ya que la matemática en general debe ser *a priori*, por tanto, no necesita recurrir a la experiencia. Sin embargo, del hecho de que no necesite tomar nada de la experiencia no podemos concluir directamente que la matemática sea analítica, pues decíamos que Tales descubrió que tampoco debía quedarse en el mero concepto de la figura. Parece, por tanto, que los juicios de la aritmética son *a priori* pero no analíticos, sino sintéticos. Es decir, tienen que ser independientes de la experiencia, pero añadir al concepto del sujeto una *nota* que no estaba ya en él, una *nota sintética*.

Las conclusiones que hemos podido extraer sobre la aritmética hasta ahora son:

1a - La matemática es una ciencia que determina su objeto *a priori*.

1b - Por tanto, no acude a la experiencia.

2a - El método de la matemática no es el empírico (que acude a la experiencia) ni el filosófico (que se quedaría en el concepto), sino el de la *construcción*.

2b - Por tanto, las proposiciones o juicios aritméticos no son *a posteriori*, pero tampoco analíticos, sino que son sintéticos *a priori*.

3 - El método de la *construcción*, al menos en la geometría, es el que encontramos en los *Elementos* de Euclides.

[45] En el apartado IV, pp. 24-26.

4a – Los conceptos están formados por *conceptos parciales* o *notas* (*características*).

4b – Las *notas* pueden ser *analíticas* o *sintéticas*, dependiendo de si están contenidas en el concepto principal como *conceptos parciales* (que se hallan por análisis), o si residen fuera de él (hallándose mediante la síntesis).

Esclarecer el modo en que esto (los juicios sintéticos a priori) es posibles es, precisamente, una de las tareas principales de la *KRV*. También es la tarea central de este trabajo resolver esa misma cuestión, orientada específicamente a los juicios aritméticos. Esto se irá haciendo paulatinamente a lo largo del trabajo, pero ahora es el momento de central la atención en el método específico de la aritmética.

III – *Introducción a la segunda edición* (2): el método de la aritmética

Quizá sea esta exposición sobre las proposiciones aritméticas (la que encontramos en la *Introducción*) la versión más problemática para la discusión contemporánea. Esto se debe no tanto a la complejidad del contenido del pasaje, sino a la forma de presentación del mismo. De hecho, a pesar de que este texto es de los más famosos y citados en el asunto de la filosofía de la matemática kantiana, si se toma aislado no ayuda a entenderla en absoluto.

Tras presentar en el apartado IV de la *Introducción* la distinción entre juicios sintéticos y analíticos, Kant pasa a mostrar cómo "todas las ciencias puras de razón contienen juicios sintéticos a priori como principios"[46]. Las ciencias que aparecen en este pasaje son de nuevo la matemática y la física, aunque Kant añade al final un apartado sobre cómo la metafísica consiste también en proposiciones sintéticas a priori.

El objetivo de Kant en la ahora es presentar el tema o problema principal de la *KRV*: el de los juicios sintéticos a priori. Si, al analizar ciencias como la matemática y la física, que ya han encontrado el camino seguro y son suficientemente sólidas, logra mostrar cómo contienen juicios de este tipo, la posibilidad de estos juicios quedaría probada de manera irrefutable. Así pues, comienza con la matemática:

> 1) *Los juicios matemáticos son todos sintéticos*. Esta proposición parece haber escapado hasta ahora a las observaciones de los analistas de la razón humana, (…) Pues como se halló que las inferencias de los matemáticos procedían según el principio de contradicción (lo que es requerido por la naturaleza de toda certeza apodíctica) se llegó a la convicción de que también los principios se conocerían a partir del principio de contradicción; en lo cual se equivocaron; pues una proposición sintética puede, por cierto, ser entendida según el principio de contradicción, pero sólo si se presupone otra proposición sintética de la cual aquélla puede ser deducida, nunca, empero, en sí misma.

Ya desde el primer punto del pasaje aparecen problemas para la interpretación: en B-16, Kant parece contradecirse directamente, al afirmar que "Algunos pocos principios que presuponen los geómetras son, por cierto, efectivamente analíticos y se basan en el principio de

[46] KRV B-14.

contradicción". Así lo considera Norman Kemp Smith en su *Comentario a la Crítica de la Razón Pura de Kant*[47].

Por ahora, lo importante de este texto es que las proposiciones matemáticas pueden ser entendidas según el principio de contradicción, sólo cuando se presupone otra proposición sintética. De este modo, las inferencias matemáticas sí son acordes al principio de contradicción, pues esto es una condición necesaria para todos los juicios que pretendan ser verdaderos. Pero esto no significa que los matemáticos puedan valerse del principio de contradicción y de nada más al hacer sus inferencias, sino que necesitarán otras proposiciones, otros principios, que sí sean sintéticos.

Tras repetir el punto sobre la aprioricidad de la matemática en general, poniendo énfasis en la matemática pura, comienza el famoso pasaje en el que Kant trata, por fin, de la aritmética por sí misma e independientemente de la geometría:

> Se podría pensar, de entrada, que la proposición 7 + 5 = 12 es una simple proposición analítica, que se sigue, de acuerdo con el principio de contradicción, del concepto de suma de siete y cinco. Pero, si se observa más de cerca, se advierte que el concepto de suma de siete y cinco no contiene otra cosa que la unión de ambos números en uno solo, con lo cual no se piensa en absoluto cuál sea ese número único que sintetiza los dos. El concepto de doce no está todavía pensado en modo alguno al pensar yo simplemente dicha unión de siete y cinco. Puedo analizar mi concepto de esa posible suma el tiempo que quiera, pero no encontraré en tal concepto el doce[48].

El modo de argumentar de Kant en este fragmento ha creado cierto ambiente de insatisfacción y confusión entre los intérpretes contemporáneos. Así, por ejemplo, Lanier Anderson lo encuentra "frustrantemente enigmático"[49]. Es el uso de expresiones como "si se

[47] Norman Kemp Smith, *A Commentary to Kant's «Critique of Pure Reason»* (Londres: Macmillan and Co., Limited, 1918), p.64. Kemp Smith se refiere más bien a que Kant en realidad no piensa que *todos* los juicios matemáticos sean sintéticos, pues algunos de los principios que se usan en el proceso que lleva a cabo el método de la matemática son analíticos; y no se refiere tanto a que en el pensamiento de Kant haya una contradicción explícita.

[48] *KRV* B-15.

[49] R. Lanier Anderson, «The Introduction to the Critique: Framing the Question», en *The Cambridge Companion to Kant's "Critique of Pure Reason"* (Cambridge: Cambridge University Press, 2010), pp. 75-92.

observa más de cerca", y "puedo analizar mi concepto (…) el tiempo que quiera", lo que parece introducir un aspecto poco técnico en la explicación. Incluso aceptando que probablemente la expresión no sea perfecta, quizá es demasiado argumentar, como Anderson, que todo lo que se está haciendo aquí es "aporrear la mesa". Hay un punto muy claro bajo el lenguaje enfático de Kant, y es que:

> Hay que ir más allá de esos conceptos y acudir a la *intuición* correspondiente a uno de los dos, los cinco dedos de nuestra mano, por ejemplo, o bien (como hace Segner en su Aritmética) cinco puntos, e ir añadiendo sucesivamente al concepto de siete las unidades del cinco dado en la intuición.[50]

Como se había anunciado antes, aparece aquí de forma central la *intuición*. Es el punto clave y la base de la filosofía de la matemática kantiana. No debe proseguirse el análisis, por tanto, sin considerar qué es exactamente lo que Kant entiende por *intuición*, *Anschauung*.

Para este tipo de tareas, las de comprender términos técnicos de la filosofía kantiana a través de los textos originales, resulta de especial utilidad el recientemente publicado *The Cambridge Kant Lexicon*, de Julian Wuerth[51]. Ahí, la voz para *Intuition (Anschauung, Intuitus)* nos refiere en primer lugar al pasaje ya citado[52] de la *KRV* conocido como *Stufenleiter*, es decir, *escala* o *jerarquía*:

> (…) no nos faltan denominaciones exactamente adecuadas a cada especie de representación, sin que nos sea necesario echar mano de lo que es propiedad de otra. El género es *representación* en general (*repraesentatio*). Bajo él está la representación con conciencia (*perceptio*). Una *percepción* que se refiere solamente al sujeto, como modificación del estado de él es *sensación* (*sensatio*); una percepción objetiva es *conocimiento* (*cognitio*). Este es o bien *intuición*, o bien *concepto* (*intuitus vel conceptus*). Aquélla se refiere inmediatamente al objeto, y es singular, éste, mediatamente, por medio de una característica que puede ser común a muchas cosas.[53]

[50] *KRV* B-15. El énfasis es mío.

[51] Julian Wuerth, ed., *The Cambridge Kant Lexicon* (Cambridge: Cambridge University Press, 2021).

[52] En el apartado II, p. 14.

[53] *KRV* A-320 / B-377.

De este fragmento se extrae que la *intuición* es una *representación* con conciencia referida a un objeto (por tanto, es *conocimiento*, *Erkenntnis*), se refiere al objeto de forma inmediata y, además, es singular.

Otro texto esencial citado por el *Lexicon* es el siguiente fragmento del escrito *Los progresos de la metafísica desde Leibniz y Wolff*:

> Por la intuición que es conforme a un concepto, el objeto es *dado*; sin ella, es meramente *pensado*. Por esta mera intuición sin concepto el objeto es dado, sí, pero no pensado; por el concepto sin la correspondiente intuición el objeto es pensado, pero no dado; en ninguno de los dos casos, por consiguiente, es conocido. Si a un concepto se le puede añadir a priori la intuición correspondiente, se dice: este concepto es *construido*; si es sólo una intuición empírica, se llama a eso un mero ejemplo del concepto; la acción de añadir la intuición al concepto se llama, en ambos casos, exhibición (*exhibitio*) del objeto, sin la cual (ya sea que ocurra mediata o inmediatamente) no puede haber conocimiento alguno.[54]

Por tanto, podemos concluir que mediante la *intuición* los objetos son *dados* conforme a conceptos, independientemente de que esto constituya por sí conocimiento o no. Además, Kant llama a este proceso de adición de la intuición al concepto *construcción de conceptos*, cuando se hace *a priori*. Es decir, en la matemática, lo que se hace es exhibir la intuición correspondiente a un concepto, y esto es *construcción*, pues se hace *a priori*[55].

Si se analiza bajo esta luz el pasaje anterior que hacía referencia a Tales, queda claro que allí el método que se descubre es este, el de la *construcción*, ya que lo que él hacía era "extraer lo que él mismo imaginó y presentó a priori (por *construcción*) según conceptos". Es decir, Tales se presenta *a priori* la intuición correspondiente al concepto del triángulo, y esto le permite operar sobre él, prolongando líneas, situando puntos, y cualquier otra operación que permita la intuición. De este modo, a partir de la intuición según el concepto, es capaz de extraer propiedades (*notas* o *características*) que no se encontraban en el mero concepto, pero que se siguen de él necesariamente. Por tanto, estas *notas* serán *notas sintéticas*, y no *notas analíticas*.

[54] Ak 20:325, traducido en: Immanuel Kant, *Los progresos de la metafísica (edición bilingüe alemán-español)*, trad. Mario Caimi (México, D. F.: Fondo de Cultura Económica, 2008).

[55] El asunto de la *aprioricidad* se comentó ya al analizar el *Prólogo a la Segunda Edición* (*KRV* B-X).

La cuestión llegados a este punto del análisis es: ¿Cómo se aplica esto en la aritmética? ¿Qué papel juega la intuición en ella? En primer lugar, considero importante analizar algo que Kant dice en este mismo fragmento en que introduce la intuición. Me refiero a la alusión que hace a Segner, y al modo en que él busca dicha intuición: "(o bien como hace Segner en su Aritmética) cinco puntos".

El célebre comentador Hans Vaihinger[56] identifica esto como una referencia a la segunda edición de la obra de Segner *Anfangsgründe der Arithmetik*[57], traducida del original en latín. Concretamente, Vaihinger señala las dos ilustraciones que se pueden ver en la *Figura 1*.

La localización de estas ilustraciones es un avance notable para la comprensión de lo que Kant va a explicar en el siguiente párrafo, pero resulta frustrante no encontrar el ejemplo concreto de la suma en ninguna de las figuras de la *Anfangsgründe*[58].

---

[56] Hans Vaihinger, *Commentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft* (Stuttgart: Verlag von W. Spemann, 1881), p 299.

[57] Johann Andreas von Segner, *Anfangsgrunde der Arithmetic, Geometrie, un der Geometrische Berendungen* (Magdeburg: Regnerischen Buchhandlung, 1773).

[58] Son representaciones de la multiplicación, y la regla $(a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$, y se encuentran en la *Tabla 1*.

Sin embargo, Marco Sgarbi[59] muestra que, en realidad, Kant probablemente estaba pensando en la edición latina[60] de la obra, donde las ilustraciones (figura 2) referentes a la aritmética son mucho más numerosas y esclarecedoras para la interpretación, pues contienen un ejemplo explícito de una suma, concretamente en la ilustración número 5.

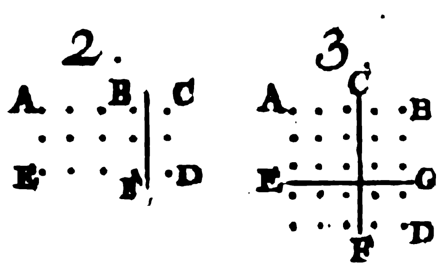

Figura 1

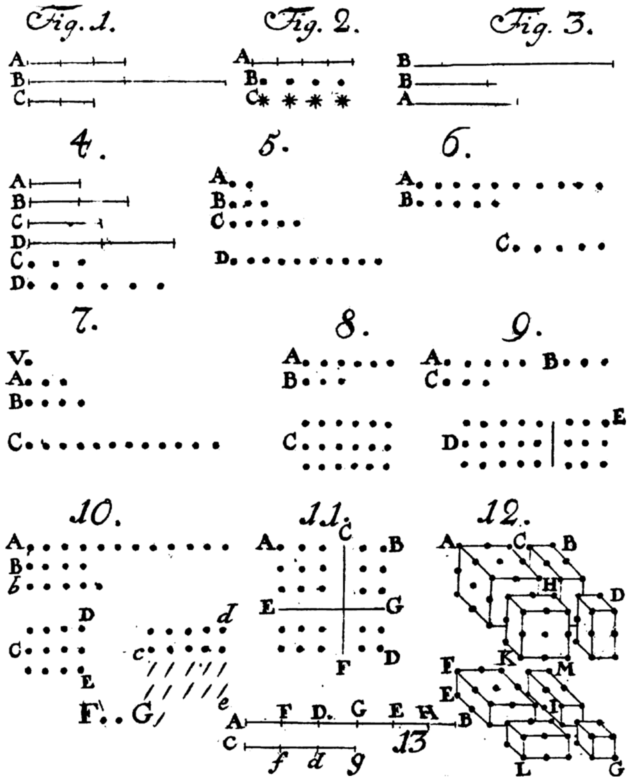

Figura 2

Téngase en mente la ilustración 5 de la *Figura 2* al leer el siguiente pasaje, que culmina la exposición de la matemática que encontramos en la *Introducción*.

> Pues tomo primeramente el número 7 y, tomando como ayuda, como intuición, para el concepto de 5, los dedos de mi mano añado ahora poco a poco al número 7, en aquella imagen mía, las unidades que antes reuniera para formar el número 5, y veo así surgir el número 12. Que 7 *tenía* que ser añadido a 5 ya lo había pensado yo, ciertamente, en el concepto de la suma = 7 + 5; pero no que esta suma fuese igual al número 12. La proposición aritmética es, por tanto, siempre sintética; lo que se

---

[59] Marco Sgarbi, «Matematica e filosofia trascendentale in Kant. Note a margine di una fonte dimenticata della Kritik der reinen Vernunft», *Philosophical Readings* II, n.º 1 (2010): 209-224.

[60] Johann Andreas von Segner, *Elementa Arithmeticae Et Geometriae; Elementa Arithmeticae Et Geometriae In Usus Avditorum* (Goettingae Christ, Henr. Cvnonem, 1739), digitalizado en el Göttinger Digitalisierungszentrum: https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN595930735.

> torna más nítido cuando se toman números un poco mayores; pues entonces se pone de manifiesto claramente que por más vueltas que demos a nuestros conceptos, nunca podemos encontrar la suma mediante el mero análisis de nuestros conceptos, sin recurrir al auxilio de la intuición.[61]

Para interpretar con algún éxito este texto es necesario poner en juego todas las nociones auxiliares que se han presentado hasta ahora, ya que, como Kemp Smith[62] indica muy enfáticamente varias veces, el fragmento aislado no es tan claro y explicativo como se podría desear.

En primer lugar, Kant dice "*tomo* primero el número 7" (*Denn ich nehme zuerst die Zahl 7*). En ningún momento anterior ha usado este verbo, *nehme*, para hablar de la matemática, al menos no lo hace en absoluto en el pasaje de Tales. Y de este modo no queda claro si lo que se toma es simplemente el concepto del número 7, solamente su intuición, o ambos, concepto e intuición. En el primer caso el 7 solo sería *pensado*, en el segundo solo *dado*, y en el tercero sería *construido*[63]. Sin embargo, esta ambigüedad se resuelve muy fácilmente al recordar la ilustración de Segner. En ella todos los números que van a ser sumados aparecen como intuición; como puntos en este caso. Se justifica, por tanto, entender este *tomo* como *construyo el concepto del número 7 añadiéndole su intuición*.

Según Kant, el siguiente paso es acudir a la *intuición* del número 5, es decir, los cinco puntos, e ir añadiendo cada uno de ellos a la *intuición* del 7. Esto no se podía hacer mediante análisis de conceptos del mismo modo que Tales no podía prolongar los laterales del triángulo simplemente pensándolo (limitándose al concepto), ya que solo la intuición permite este tipo de operaciones. Al terminar de añadir los puntos del 5 a los del 7, nos queda la intuición que corresponde al concepto del número 12.

Lo que aquí ha hecho Kant es, por tanto, presentar a priori el concepto de la suma 7 + 5 añadiéndole su intuición correspondiente (es decir, ha construido el concepto de 7 + 5), la cual es exactamente la misma que la del número 12. Como Kant explica a Johann Schultz en una de sus cartas:

---

[61] *KRV* B-15 – B-16.

[62] Smith, *A Commentary to Kant's «Critique of Pure Reason»* p. 65.

[63] De acuerdo con lo visto en Kant, *Los progresos de la metafísica (edición bilingüe alemán-español)*.

> Los dos conceptos [en este caso, el de 7 + 5 y el de 12] deben ser absolutamente recíprocos y objetivamente idénticos, (…) Esta construcción presenta el concepto de la composición de dos números en una intuición *a priori*, a saber, un único contar hacia arriba. (…) Pues la idea de que la unión de [7] y [5], considerados como conceptos de magnitud distintos, podría rendir el concepto de una *única* cantidad era solo un pensamiento[64].

Esto mismo es lo que se está señalando en la siguiente afirmación del fragmento de la introducción: "Que 5 tenía que ser añadido a 7 lo he pensado ciertamente en el concepto de suma = 7 + 5, pero no que tal suma fuera igual a 12". En conclusión, el pensamiento del concepto de la suma no nos lleva hasta su resultado, esto sólo puede conseguirse mediante la construcción de ese mismo concepto (el de la suma) en la intuición. Como representarse el concepto mediante el entendimiento no es suficiente, es necesario acudir a la intuición, donde se puede ir más allá del concepto, de modo que lo que se hace es una *síntesis*. Así, el resultado es una *nota sintética* respecto del concepto de la suma, aunque el concepto de la suma y el del resultado son objetivamente idénticos. Es decir, son conceptos distintos en cuanto al modo de referirse al número 12, ya que uno es el mismo número 12, y el otro es una operación que lo tiene como resultado; pero objetivamente son idénticos, porque se refieren al mismo número. Así, el resultado de la construcción del concepto de la suma es el concepto del número 12, ya construido como tal, pues consiste simplemente (como se verá más adelante, en el apartado V), en esta agregación determinada de lo homogéneo múltiple.

Con todo, hay que seguir teniendo en mente que esta es una de entre otras posibles interpretaciones del texto kantiano. Sin embargo, en este trabajo se defiende que, en un nivel o en otro, la esencia de la interpretación que se ha presentado resulta imprescindible y definitoria para la postura de Kant sobre la aritmética.

La esencia de la interpretación que aquí se propone es: la intuición consiste en una representación tal y como Kant la describe (y como se ha mostrado anteriormente), que tiene la particularidad de que permite la operación y manipulación de esa misma representación. Esto se puede mantener incluso si se acepta una propuesta interpretativa como la que hace Daniel Sutherland:

[64] Ya citada en la nota 11, la carta del 25 de noviembre de 1788, Ak 10:554-558.

> Comienzo con siete, y entonces, basándome en mi memorización de la secuencia de los primeros numerales, digo "ocho, nueve, diez, once, doce," tocando cada uno de mis cinco dedos en orden mientras avanzo. (…) Empiezo con el conocimiento de que los números de mi mano son cinco, y el conocimiento de que si toco cada uno una vez y solo una, sé que haré esto sólo cinco veces, diciendo mientras avanzo "8, 9, 10, 11, 12.".[65]

Salta a la vista que la intuición de la que aquí se estaría hablando no es en ningún modo una intuición *pura*, sino una *empírica*, basada en el número de mis dedos que he tocado de hecho en cada instante concreto. Pero, en la base de este contar *empírico*, debe haber un contar que se de en la intuición. Es decir, ese conocimiento de que los números de la mano son cinco consistiría en una intuición *pura* del número cinco (que se puede interpretar al estilo Segner, como cinco puntos), de la que se irían retirando unidades conforme avanzara el contar *empírico*.

Si "detrás" del contar *empírico* no se diera un contar *intuitivo*, Kant no podría decir que la aritmética es *a priori*, porque sus proposiciones y juicios se basarían solamente en la experiencia. Esto haría a la aritmética sea irremediablemente *a posteriori*. Lo cual significa que, al menos en una lectura estricta, la interpretación propuesta por Sutherland no se puede sostener sin sostener al mismo tiempo, y como base, un papel principal de la intuición.

Sí es cierto que la interpretación de Sutherland tiene una ventaja: sortea la dificultad causada por el uso del verbo *nehme* (tomo) al principio del párrafo en B-15 – B-16. Y consigue esto comprendiendo todo el pasaje como un ejemplo de la suma entendida como avance en la escala ordinal de los números naturales. En esta clave interpretativa, el verbo "tomar" podría significar simplemente "empezar desde".

De todos modos, incluso si lo que se representara en la intuición fuera la escala de los números naturales, y la operación que se efectuara fuera el avance a lo largo de ésta; sería necesaria una intuición más básica del número concreto de "escalones" que se necesita avanzar, y que fuera descendiendo o aumentando conforme se fuera avanzando en la escala. Así, incluso una interpretación puramente ordinal necesitaría el tipo de intuición que se está defendiendo en este trabajo.

---

[65] Daniel Sutherland, «Kant's Conception of Number», *Philosophical Review* 126, n.º 2 (2017), https://doi.org/DOI:10.1215/00318108-3771988, p. 165, traducción propia del original en inglés.

Otra cuestión que aparece en el fragmento es las de la afirmación que hace Kant al decir que cuanto más grande es el número que se presenta en la intuición, más claro resulta que era necesario acudir a ella. El problema que se origina con este fragmento es que, si la interpretación que se ha hecho de la intuición siguiendo el ejemplo de Segner es correcta, Kant estaría afirmando que resulta más claro que la proposición aritmética es sintética cuanto más grande es el número. Es decir, que tratar de representarnos 1.000 puntos en la intuición deja más clara la necesidad de acudir a la intuición que tratar de representarnos sólo 5 puntos. ¿Está pretendiendo Kant, por tanto, que uno represente 1.000, o 1.000.000 de puntos individuales en la intuición? Lo más probable es que no pretendía esto.

Sin embargo, para resolver este problema es necesario acudir a la distinción que Kant hace entre intuición *pura* e intuición *simbólica*, la cual juega un papel esencial en las operaciones de números mayores de 10 (o del sistema de unidades que se use en cada caso). Tratar este tipo de intuición a fondo conllevaría acudir a otros textos, especialmente a la *Crítica de la facultad de juzgar*, y hacer una interpretación significativa de esta obra se sale de los objetivos de este trabajo.

De este modo, si no nos dejamos llevar por los modos de expresión que dan a este texto de *KRV* un tono poco técnico, e incluso teniendo en cuenta distintas posibles interpretaciones, podemos acercarnos a la verdadera postura kantiana sobre la sinteticidad de la aritmética.

Hasta ahora, hemos podido extraer de los textos las siguientes conclusiones:

1a - La matemática es una ciencia que determina su objeto *a priori*.

1b - Por tanto, no acude a la experiencia.

1c - Porque la intuición a la que acude no es *empírica*, sino *pura*.

2a - El método de la matemática no es el *empírico* (que acude a la experiencia) ni el *filosófico* (que se quedaría en el concepto), sino el de la *construcción*.

2b - Por tanto, las proposiciones o juicios aritméticos no son a posteriori (porque no se basan en la experiencia), pero tampoco *analíticos* (porque no se basan en el mero concepto), sino que son *sintéticos a priori*.

2c – El método consiste, por tanto, en la presentación del concepto en la intuición *pura*, de modo que se pueda ir más allá de él.

3a - El método de la *construcción*, al menos en la geometría, es el que encontramos en los *Elementos* de Euclides.

3b - El método de la *construcción*, en la aritmética, es el que se apoya en la intuición de modo similar a como se ve en la ilustración de los *Elementa Arithmeticae et Geometriae* de Segner.

4a – Los conceptos están formados por *conceptos parciales* o *notas* (*características*).

4b – Las *notas* pueden ser *analíticas* o *sintéticas*, dependiendo de si están contenidas en el concepto principal como *conceptos parciales* (que se hallan por análisis), o si residen fuera de él (hallándose mediante la síntesis).

5a - Los juicios matemáticos son acordes al principio de contradicción, pero no se siguen solamente de la aplicación de éste.

5b - Sino que necesitan otra proposición *sintética* anterior sobre la que basarse.

6 - El hecho de que haga falta recurrir a la intuición indica que se necesita ir más allá de los conceptos iniciales. Y esto hace que los juicios matemáticos sean *sintéticos*.

IV – *La doctrina del método: Intuición pura e intuición empírica*

Una cuestión que había quedado pendiente en los apartados anteriores (y que ha tomado protagonismo al final del apartado III) es la de la posibilidad de que la experiencia o la intuición *empírica* jugara algún papel en la matemática y, en concreto, en la aritmética.

Para resolver esto se va a abordar otro de los pasajes que más atención han recibido en el ámbito de la filosofía de la matemática de Kant: *La disciplina de la razón pura*, que es parte de la *Doctrina del método*. Tras hablar brevemente sobre cómo la matemática es el mejor ejemplo de la razón pura ampliándose por sí misma, presenta las diferencias entre el método matemático y el método filosófico:

> El conocimiento *filosófico* es el *conocimiento racional* por *conceptos*; el matemático [es el conocimiento] por *construcción* de los conceptos. *Construir* un concepto significa: exhibir *a priori* la intuición que le corresponde. Para la construcción de un objeto se requiere, pues, una intuición *no empírica*, que por consiguiente, como intuición, es un objeto *singular*, pero que sin embargo, como construcción de un concepto ([como construcción] de una representación universal) debe expresar, en la representación, validez universal con respecto a todas las intuiciones posibles que hayan de estar bajo ese concepto.[66]

Lo que diferencia y hace particular a la matemática, por tanto, es que llega al conocimiento mediante la *construcción* de conceptos. Se confirma de este modo lo que veníamos diciendo a lo largo de este trabajo[67] sobre la intuición que es necesaria para toda operación y juicio matemáticos. Se confirma, además, que Kant está pensando en una intuición como una representación singular[68], *no empírica*[69].

También podemos extraer de este fragmento dos cuestiones que habían aparecido ya al inicio de este trabajo: la cuestión de la universalidad y la necesidad, y la cuestión del papel de la experiencia en la aritmética[70]. La intuición es universal, en tanto que construcción de un

[66] A-713 / B-741.

[67] La *construcción* de conceptos ha aparecido como método de la matemática desde la página 8 de este trabajo, donde se analizaba el pasaje de Tales en B-XI – B-XII.

[68] Tal y como la tratamos aquí en los apartados II y III.

[69] Como se mostró en este trabajo al final del apartado III, la intuición en las matemáticas debe ser pura.

[70] La cuestión de la universalidad y la necesidad, junto con la referente a la intuición *empírica* aparecieron ya en el apartado I, p. 10.

concepto que, por tanto, funciona o es válida para todos los objetos o representaciones que ese objeto contenga (en el sentido de abarcar, no de su composición de *conceptos parciales*). Kant añade que la universalidad de la intuición no es menoscabada, ni siquiera cuándo ésta es *empírica*:

> (..) porque en esta intuición empírica se atiende siempre sólo a la acción de construcción del concepto, por el cual muchas determinaciones, p. ej. [las] del tamaño, de los lados y de los ángulos, son enteramente indiferentes; y por consiguiente se hace abstracción de estas diferencias, que no alteran el concepto del triángulo[71].

De este modo, queda claro que sí se puede recurrir a la experiencia y a la intuición *empírica* al construir el concepto, pero sólo si se cumple la condición de que lo que se está haciendo es simplemente construir el concepto tal y como se haría en la intuición pura. Es decir, sin tener en cuenta todas aquellas que no estuvieran incluidas en el concepto inicial que se construye. Esto es lo que haría Tales si, por ejemplo, dibujara con un palo las figuras de sus teoremas en la arena.

Para resolver el asunto de la universalidad y necesidad en la aritmética, o en la matemática en general, conviene adelantar hasta el siguiente párrafo de la *KRV*, donde Kant concluye:

> El conocimiento filosófico considera, pues, lo particular sólo en lo universal; el matemático, lo universal en lo particular, e incluso en lo singular; y sin embargo [lo hace] *a priori* y por medio de la razón, de manera que tal como esté determinado esto singular bajo ciertas condiciones universales de la construcción, así debe ser pensado, como universalmente determinado, el objeto del concepto al cual eso singular le corresponde sólo como esquema de él[72].

Este pasaje se podría interpretar de varios modos, pero considero que la manera en que lo entiende Caimi en su edición es probablemente el más cercano a lo que Kant quería expresar: "que las determinaciones obtenidas a partir de las condiciones universales de la construcción son a la vez determinaciones del objeto, y así permiten un conocimiento sintético *a priori* de

[71] *KRV* A-714 / B-742.
[72] *KRV* A-714 / B-742

éste (en la matemática)"[73]. Es decir, si la construcción es propiamente tal, y es conforme a las reglas de la intuición, lo que se obtenga de ella determina al objeto del que ella es construcción.

Así, la proposición o el juicio matemáticos se construyen añadiéndoles la intuición, con la cual se puede operar de acuerdo a las reglas de la construcción para conseguir determinaciones o propiedades que sean verdaderas no sólo de la intuición, sino también del objeto al cual se referían tanto la intuición como el concepto inicial.

Estos párrafos, por tanto, completan y confirman el método de la aritmética que se extrajo en el apartado III del texto de la *Introducción*. Además, concuerdan con el protagonismo que desde el inicio se ha dado al método como característica esencial de cada ciencia[74]. En realidad, este último punto se capta mucho más claramente si se tienen en cuenta las afirmaciones del párrafo siguiente. En él, Kant argumenta que no es el objeto de estudio, sino el método lo que hace diferentes a la filosofía y a la matemática. Afirma:

> La forma del conocimiento matemático es la causa de que éste sólo pueda dirigirse a *quanta*. Pues sólo el concepto de cantidades se puede construir, es decir, se puede exponer a priori en la intuición; (…)[75].

De este modo, lo característico de la matemática es que procede mediante la *construcción* de conceptos, que sólo es posible para los conceptos de cantidades (*quanta*). Por tanto, la matemática sólo trata sobre las *cantidades*, y no sobre las *cualidades* como podrían ser los colores.

Queda, por tanto, claro que el método matemático es el de la construcción de cantidades o *quanta* en la intuición. Pero todavía no se ha tratado con profundidad precisamente esta noción de *quanta*, de cantidad, o de número, que sin embargo se ha tratado hasta ahora con naturalidad. Esta profundización se hará en el apartado V.

A partir del contenido de este apartado se pueden hacer los siguientes ajustes a las conclusiones que ya teníamos:

1a - La matemática es una ciencia que determina su objeto *a priori*.

1b - Por tanto, no acude a la experiencia.

---

[73] Kant, *Crítica de la razón pura edición bilingüe alemán-español*, nota 1281, en la p. CLXXI.

[74] Esta centralidad del método ha sido tratada explícitamente desde el apartado I, en la página 10.

[75] *KRV* A-715 / B743.

1c - Porque la intuición a la que acude no es *empírica*, sino *pura*.

2a - El método de la matemática no es el *empírico* (que acude a la experiencia) ni el *filosófico* (que se quedaría en el concepto), sino el de la *construcción*.

2b - Por tanto, las proposiciones o juicios aritméticos no son *a posteriori* (porque no se basan en la experiencia), pero tampoco *analíticos* (porque no se basan en el mero concepto), sino que son *sintéticos a priori*.

2c – El método consiste, por tanto, en la presentación del concepto en la intuición *pura*, de modo que se pueda ir más allá de él.

2d – Se puede ir más allá del concepto mediante la manipulación o transformación de los elementos de la intuición del concepto construido conforme a las reglas de la intuición

2e – En la intuición pura sólo pueden presentarse mediante la *construcción* los conceptos de *cantidades* o *quanta*.

3a - El método de la *construcción*, al menos en la geometría, es el que encontramos en los *Elementos* de Euclides.

3b - El método de la *construcción*, en la aritmética, es el que se apoya en la intuición de modo similar a como se ve en la ilustración de los *Elementa Arithmeticae et Geometriae* de Segner.

3c – Los puntos en que se puede apoyar la aritmética en la intuición no tienen ninguna *cualidad*, sino sólo *cantidad*.

4a – Los conceptos están formados por *conceptos parciales* o *notas* (*características*).

4b – Las *notas* pueden ser *analíticas* o *sintéticas*, dependiendo de si están contenidas en el concepto principal como *conceptos parciales* (que se hallan por análisis), o si residen fuera de él (hallándose mediante la síntesis).

5a - Los juicios matemáticos son acordes al principio de contradicción, pero no se siguen solamente de la aplicación de éste.

5b - Sino que necesitan otra proposición *sintética* anterior sobre la que basarse.

6 - El hecho de que haga falta recurrir a la intuición indica que se necesita ir más allá de los conceptos iniciales. Y esto hace que los juicios matemáticos sean *sintéticos*.

V – El concepto del número

Como se dijo al final del apartado anterior, a lo largo de todo este escrito se ha usado con naturalidad la noción de conceptos de números, pero esta noción no ha sido examinada a fondo todavía. Por ello, el objetivo de este apartado va a ser tratar de esclarecer los términos que Kant utiliza al referirse a los números y a las cantidades en distintos contextos.

Del mismo modo que se hizo al tratar la noción de *intuición*, resulta especialmente útil acudir al *Kant Lexicon*, a la voz *Magnitude (Größe)*. Ahí Daniel Sutherland comienza por presentar los dos sentidos de magnitud que Kant distingue: *quantum* y *quantitas*; siendo la magnitud como *quantum* algo relativamente concreto, y la magnitud como *quantitas* como el tamaño del *quantum* y en algún sentido más abstracto[76].

Para la explicación del *quantum*, Sutherland remite a la *Analítica Trascendental*, donde Kant afirma:

> (…) la conciencia de lo homogéneo múltiple en la intuición en general, en la medida en que mediante ella se hace, primeramente, posible la representación de un objeto, es el concepto de una cantidad (*quanti*).[77]

Es decir, el concepto de una cantidad, o *quanti*, es la conciencia de lo homogéneo múltiple en la intuición, mediante la cual se hace posible la representación de un objeto. "Lo homogéneo múltiple" quiere decir una multiplicidad de elementos que, siendo idénticos en cuanto a sus cualidades o características (o *notas*), son numéricamente distintos. Para esta noción de lo *homogéneo múltiple*, Sutherland señala el siguiente pasaje de la *KRV*:

> (…) la pluralidad numérica es dada ya por el espacio mismo, como condición de los fenómenos externos. Pues una parte del espacio, aunque sea enteramente semejante e igual a otra, está sin embargo, fuera de ella, y precisamente por eso es una parte diferente de la primera, a la que se añade para constituir un espacio mayor; y por eso, esto debe valer para todo aquello que es simultáneo en los múltiples lugares del espacio, por mucho que ello sea, en otros respectos, semejante e igual.[78]

---

[76] Wuerth, *The Cambridge Kant Lexicon*, p. 280-281.

[77] *KRV* B-203 / A-162.

[78] *KRV* A-264 / B-320.

De este modo, las unidades que forman un *quantum* determinado son en todos los respectos idénticas excepto en que son distintas, están separadas, es decir, son numéricamente distintas entre sí. Tanto el tiempo como el espacio son *homogéneos múltiples*, pero son magnitudes indeterminadas hasta que el entendimiento los compone en una unidad conceptual:

> (…) mediante la síntesis de lo múltiple, por la cual se generan las representaciones de un espacio o de un tiempo determinados, es decir, mediante la composición de lo homogéneo y la conciencia de la unidad sintética de este múltiple (homogéneo).[79]

Por otro lado, Kant distingue dos tipos de magnitudes determinadas entendidas como *quanta*: las magnitudes *extensivas* y las magnitudes *intensivas*. Sobre las *extensivas*, Sutherland cita el siguiente texto:

> Llamo cantidad extensiva a aquella en la que la representación de las partes hace posible la representación del todo (y por consiguiente, precede necesariamente a ésta).[80]

Y sobre las *intensivas*, cita:

> (…) y por consiguiente [es posible] también una síntesis de la generación de la cantidad de una sensación, desde su comienzo, la intuición pura = 0, hasta una cantidad cualquiera de ella. Y como una sensación en sí, no es una representación objetiva, y en ella no se encuentran ni la intuición del espacio, ni la del tiempo, entonces le corresponderá, no una cantidad extensiva, pero sí una cantidad (…), y por consiguiente una *cantidad intensiva*, en correspondencia con la cual a todos los objetos de la percepción, en la medida en que ésta contiene sensación, se les debe atribuir una *cantidad intensiva*, es decir, un grado de influjo sobre el sentido.[81]

Sutherland recoge el área de un triángulo y la intensidad de la luz como ejemplos paradigmáticos de la magnitud *extensiva* e *intensiva* respectivamente. Con estos ejemplos queda claro que los nombres de estos dos tipos de magnitud son bastante explicativos por sí mismos: la magnitud *extensiva* es aquella que tiene que ver con la *extensión*, con la cantidad de elementos

[79] *KRV* B-203 / A-162.

[80] Ibid.

[81] *KRV* B-208.

numéricamente distintos que forman el número o el *quantum*; mientras que la magnitud *intensiva* está relacionada con la intensidad, con el grado de aumento de un fenómeno.

Un poco antes de este último párrafo citado, Kant pone en relación la magnitud *extensiva* con la ciencia matemática, y en concreto con la geometría:

> (…) todos los fenómenos son intuidos ya como agregados (multitud de partes previamente dadas), lo que no es el caso de toda especie de cantidad, sino solamente de aquellas que nos representamos y aprehendemos *extensivamente* como tales.
>
> Sobre esta síntesis sucesiva de la imaginación productiva en la generación de las figuras, se basa la matemática de la extensión (Geometría) con sus axiomas, que expresan las condiciones de la intuición sensible *a priori*, (…). Éstos son los axiomas que conciernen propiamente sólo a cantidades (*quanta*) como tales.[82]

De este fragmento podemos extraer para nuestra interpretación que no todas las especies de cantidad son agregados, es decir, que no todas las cantidades se pueden entender como la síntesis de la multitud de partes, sino que esto conviene solamente a las cantidades *extensivas*. Esto concuerda con lo que aparecía en los párrafos citados anteriormente.

Pero lo realmente interesante para nuestro tema es la relación de las cantidades *extensivas* con la geometría: ésta, con sus *axiomas*, se basa en aquéllas. Este es el primer texto de los tratados en este trabajo en el que aparecen los *axiomas*. Por ello, es necesario mostrar a qué se refiere Kant con este término exactamente.

Conviene, pues, poner atención a otro pasaje en el que Kant muestra de nuevo las diferencias entre el método matemático y el método filosófico: *La doctrina del método*, concretamente en *La disciplina de la razón pura*. Con el objetivo de mostrar cómo el método matemático no se puede aplicar en la filosofía, y el de la filosofía no se puede aplicar en la matemática:

> La rigurosa exactitud de la matemática se basa en definiciones, axiomas, demostraciones. Me limitaré a mostrar que la filosofía no puede ofrecer nada de esto, en el sentido en que lo toma el matemático, ni puede imitarlo. Que el geómetra, con su método, no produce, en filosofía, más que castillos de naipes; [y que] el

[82] *KRV* A-163 / B204.

> filósofo, con el suyo, sólo puede provocar, en la parte de la matemática, mero parloteo; (…).[83]

Habiendo presentado el tema de este modo, Kant pasa a explicar en qué consisten las *definiciones*, los *axiomas* y las *demostraciones*. Cito resumidamente los tres puntos por ser todos ellos interesantes:

> 1. De las **definiciones**. Definir, (…) sólo exponer originariamente el concepto detallado de una cosa, dentro de los límites de él.* [* El *carácter detallado* significa la claridad y la suficiencia de las notas[84]; los *límites* [significan] la precisión: que [las notas] no son más que las que pertenecen al concepto detallado; *originariamente* [significa] que esa determinación de los límites no está deducida de cualquier parte (…)].
>
> 2. De los **axiomas**. Éstos son principios sintéticos *a priori* que son inmediatamente ciertos. Ahora bien, un concepto no se puede enlazar con otro sintéticamente y sin embargo de manera inmediata, porque para que podamos salir del concepto, se necesita un tercer conocimiento mediador. (…), la matemática es capaz de [tener] axiomas, porque ella, por medio de la construcción de los conceptos, puede conectar *a priori*, y de manera inmediata, en la intuición del objeto los predicados de éste; (…)
>
> 3. De las **demostraciones**. Sólo una prueba apodíctica, en la medida en que es intuitiva, puede llamarse demostración. (…) Por tanto, sólo la matemática contiene demostraciones, porque ella no deduce sus conocimientos a partir de conceptos, sino a partir de la construcción de éstos, es decir, en la intuición, que puede ser dada *a priori* de manera correspondiente a los conceptos.[85]

Por tanto, los *axiomas* son principios sintéticos *a priori* que se caracterizan por ser inmediatamente ciertos. Y la matemática puede tenerlos porque es capaz de realizar *a priori* y de manera inmediata las conexiones entre el concepto del sujeto y el concepto del predicado, construyéndolos en la intuición. Así, se puede entender el fragmento en el que Kant hablaba

[83] *KRV* A-726 / B-754 – A-727 / 755.

[84] Curiosamente, en esta ocasión, Caimi ha traducido *Merkmale* por *notas*, en vez de por *características*, como había hecho en A-320 / B-377 (tal y como se ha comentado en el apartado II, p. 14).

[85] *KRV* A-727 / B-756 – A-735 / 763

sobre la geometría y sus axiomas: la geometría y sus axiomas se basan en esa aprehensión de los agregados, es decir, en la magnitud *extensiva* dada en la intuición. Y, por ello mismo, a estos *axiomas* les corresponden solamente los *quanta* como tales. Los ejemplos paradigmáticos que Kant usa para estos *axiomas* son: "entre dos puntos es posible sólo una línea recta", y dos líneas rectas no encierran un espacio"[86].

Los axiomas de la geometría son, por esta estrecha relación que tienen con la intuición, y por lo tanto con los fenómenos, expresión de las condiciones de la intuición sensible *a priori*. Esto ayuda a entender, también, cómo es posible que en la geometría o en las matemáticas en general se pueda alcanzar la universalidad y necesidad en las demostraciones y proposiciones. Se consigue alcanzar, pues, porque los axiomas de la ciencia matemática en general son las mismas condiciones de la intuición, que son condición de posibilidad, y en cierto sentido forma, de toda experiencia posible, de todo fenómeno posible.

Hasta aquí se han analizado los *quanta* y sus tipos, pero ya al inicio de este apartado se veía cómo Kant distingue entre dos tipos de magnitud: *quantum* y *quantitas*. Es el momento, pues, de pasar a analizar la *quantitas*. Kant comienza el párrafo inmediatamente posterior afirmando que la *quantitas* es la respuesta a la pregunta ¿cuán grande es algo?, y continúa:

> no hay para ella axiomas en sentido propio (…). Por el contrario, las proposiciones evidentes de la relación numérica son, por cierto, sintéticas, pero no universales como las de la Geometría, y precisamente por eso no son tampoco axiomas, sino que pueden ser llamadas fórmulas numéricas.[87]

Es decir, las proposiciones de relación numérica concretas, de relación entre dos números determinados (que son las que corresponden a la aritmética), no son *axiomas* como lo eran las de la geometría, sino que son más bien reglas para el pensamiento, o como aquí ha indicado Kant: *fórmulas numéricas*.

Para explicar esto, Kant trae de nuevo el ya famoso ejemplo de 7 + 5 = 12:

> Que 7 + 5 sea = 12 no es una proposición analítica. Pues ni en la representación de 7, ni en la de 5, ni en la representación de la composición de ambas, pienso el número 12 (aquí no se trata de que tengo que pensarlo a éste en la *adición de los*

[86] *KRV* A-163 / B-204.

[87] *KRV* A-164 / B-205.

> *otros dos*; pues en la proposición analítica sólo se pregunta si pienso efectivamente al predicado en la representación del sujeto)[88].

Así, en la representación del concepto de la suma 7 + 5, es decir, al pensarlo simplemente, no se encuentra en él el resultado "12". Porque el concepto de la suma, la relación entre las dos cantidades es solamente una indicación de lo que el pensamiento tiene que hacer para llegar a la tercera cantidad. Por eso es que Kant las llama *fórmulas numéricas* y se pueden entender como reglas del pensamiento.

Pero que en el mero análisis del concepto de la suma se halle que han de unirse las dos cantidades no es suficiente para que se piense inmediatamente la cantidad resultante de dicha unión. Porque la cuestión, cuando se trata de las proposiciones analíticas, es lo que *de hecho* se piensa en el concepto, y lo que se encuentra en él al descomponerlo (sus *conceptos parciales*), pero no lo que se *debería* pensar. Esto es exactamente lo que aparecía en la carta del 25 de noviembre de 1788, Ak 10:554-558, ya citada en este trabajo[89].

Kant prosigue, añadiendo algún aspecto más:

> Pero aunque sea sintética, esta proposición es sólo singular. En la medida en que aquí sólo se atiende a la síntesis de lo homogéneo (de las unidades), la síntesis aquí sólo puede tener lugar de una única manera, aunque el *uso* de estos números, luego, sea universal. (…) el número 7 es posible sólo de una única manera, y así también el número 12, que es generado mediante la síntesis del primero con 5.

Esto es lo que explica verdaderamente por qué son distintas las proposiciones de la aritmética y las de la geometría. Las proposiciones geométricas se cumplen abstrayendo del tamaño determinado de sus elementos. Es decir, la *Proposición 5* de Euclides se cumple para todos triángulos isósceles, independientemente del tamaño de sus lados y de sus ángulos. Pero las relaciones entre números determinados, es decir, las proposiciones de la aritmética, se cumplen solamente para cada relación de números concretos. Por ello en cada relación de números determinados la síntesis puede tener lugar solamente de una única manera. Son, por tanto, proposiciones singulares, y no axiomas.

En este apartado hemos analizado, pues, mediante diferentes pasajes de la *KRV* los conceptos de cantidad y las diferencias entre los distintos tipos de cantidades y magnitudes. Pero Kant no

[88] Ibid.

[89] En la página 21.

ha dado todavía una explicación de su concepción de número. Para ello hay que recurrir a dos pasajes en los que sí encontramos esta concepción. El primero de ellos dice así:

> (...) de todas las intuiciones ninguna es dada *a priori*, salvo la mera forma de los fenómenos, espacio y tiempo; y un concepto de éstos, como *quanta*, se puede exhibir *a priori* en la intuición, es decir, [se puede] construir, ya sea juntamente con la cualidad de ellos (la figura de ellos) ya también [se puede exhibir *a priori* en la intuición, o construir] meramente la cantidad de ellos (la mera síntesis de lo homogéneo) mediante el número.[90]

Invirtiendo el orden expositivo de este pasaje, se obtiene que el número es aquello mediante lo cual se puede exhibir *a priori* en la intuición la mera cantidad, la mera síntesis de lo homogéneo. Y en el segundo de estos pasajes Kant afirma:

> (…) el *esquema* puro *de la cantidad* (*quantitatis*), como [esquema] de un concepto del entendimiento, es el *número*, que es una representación que abarca la adición sucesiva de lo uno a lo uno (homogéneos). Por tanto, el número no es otra cosa que la unidad de la síntesis de lo múltiple de una intuición homogénea en general, de modo tal, que produzco el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición.[91]

Con estos dos textos queda claro, por fin, a qué se refiere Kant cuando habla de un número: el *número* es el *esquema* puro *de la cantidad*, es una representación que abarca la adición sucesiva de lo uno a lo uno.

Para comprender esto, se debe definir lo que son los *schemata* para Kant. Según Ulrich Schloesser[92], que cita pasajes de esta misma sección de la *KRV*, los *schemata* son el “tercero”:

> que debe estar en homogeneidad, por una parte, con la categoría, y por otra parte, con el fenómeno, y que hace posible la aplicación de la primera al último. Esta representación mediadora debe ser pura (sin nada empírico), pero [debe ser], por una parte, *intelectual*, y por otra parte, *sensible*.[93]

---

[90] *KRV* A-720 / B-748.

[91] *KRV* A-142 / B182.

[92] En Wuerth, *The Cambridge Kant Lexicon*, voz *Schema*, en las páginas 397-399.

[93] *KRV* A-138 / B-177.

Es decir, los *schemata* son el tercer elemento entre las *categorías* (o *conceptos puros del entendimiento*), y los *objetos*. Por eso son en parte *intelectuales* y en parte *sensibles*. Y por ello permiten la aplicación de aquéllas a estos.

En conclusión, el *número* es la representación de la síntesis de lo homogéneo que permite la aplicación del *concepto puro del entendimiento* "*cantidad*" a los objetos.

Con esto se puede ver la gran diferencia que hay entre el *número*, que es un *schema*, y las proposiciones de la aritmética, que son *fórmulas numéricas*. Si bien es cierto que los conceptos de estas *fórmulas* contienen como *notas* o *conceptos parciales* a números determinados, no por ello son ellas mismas un número determinado. Se podría decir que sí apuntan a una cantidad, pero que no se puede llegar a esa cantidad determinada mediante el análisis, pues en él sólo encontraremos a las otras cantidades mediante la relación de las cuales se apuntaba al resultado.

Tras este apartado, que es el último del trabajo antes de las conclusiones finales, hemos obtenido lo siguiente:

1a - La matemática es una ciencia que determina su objeto *a priori*.

1b - Por tanto, no acude a la experiencia.

1c - Porque la intuición a la que acude no es *empírica*, sino *pura*.

2a - El método de la matemática no es el *empírico* (que acude a la experiencia) ni el *filosófico* (que se quedaría en el concepto), sino el de la *construcción*.

2b - Por tanto, las proposiciones o juicios aritméticos no son a posteriori (porque no se basan en la experiencia), pero tampoco *analíticos* (porque no se basan en el mero concepto), sino que son *sintéticos a priori*.

2c – El método consiste, por tanto, en la presentación del concepto en la intuición *pura*, de modo que se pueda ir más allá de él.

2d – Se puede ir más allá del concepto mediante la manipulación o transformación de los elementos de la intuición del concepto construido conforme a las reglas de la intuición

2e – En la intuición *pura* sólo pueden presentarse mediante la *construcción* los conceptos de *cantidades* o *quanta*.

3a - El método de la *construcción*, al menos en la geometría, es el que encontramos en los *Elementos* de Euclides.

3b - El método de la *construcción*, en la aritmética, es el que se apoya en la intuición de modo similar a como se ve en la ilustración de los *Elementa Arithmeticae et Geometriae* de Segner.

3c – Los puntos en que se puede apoyar la aritmética en la intuición no tienen ninguna *cualidad*, sino sólo *cantidad*.

4a – Los conceptos están formados por *conceptos parciales* o *notas* (*características*).

4b – Las *notas* pueden ser *analíticas* o *sintéticas*, dependiendo de si están contenidas en el concepto principal como *conceptos parciales* (que se hallan por análisis), o si residen fuera de él (hallándose mediante la síntesis).

5a - Los juicios matemáticos son acordes al principio de contradicción, pero no se siguen solamente de la aplicación de éste.

5b - Sino que necesitan otra proposición *sintética* anterior sobre la que basarse.

6 - El hecho de que haga falta recurrir a la intuición indica que se necesita ir más allá de los conceptos iniciales. Y esto hace que los juicios matemáticos sean *sintéticos*.

7a – Para las proposiciones aritméticas, el concepto que ha de construirse en la intuición es el que se sigue de la *fórmula* que relaciona varias cantidades.

7b – Por tanto, lo que se presenta son los *conceptos parciales* del concepto de la operación, que son los números que la componen.

7c – Los números son la *síntesis* de lo *múltiple homogéneo*.

- CONCLUSIONES -

Lo único que queda por hacer ahora es sintetizar la lista de conclusiones que se ha ido formando conforme avanzaba la interpretación de los textos:

En primer lugar, la matemática en general (al igual que cualquier otra ciencia) se define y es delimitada a sus objetos por su método. Desde Tales, este método no es el *empírico* ni el *filosófico*, sino el de la *construcción*. La *construcción* consiste en la representación del concepto en la *intuición* pura, en unir el concepto con su intuición correspondiente.

Los conceptos están formados por *conceptos parciales* o *notas*. De estas notas, algunas están contenidas en el concepto inicial, y son por ello *analíticas* otras no están contenidas en el concepto inicial, aunque sí pueden ser predicadas de éste mediante la síntesis, y son, por tanto, *sintéticas*.

Por tanto, lo que se construye inicialmente en la intuición son las *notas* que corresponden al concepto inicial. Los conceptos que se *construyen* en la aritmética son los conceptos de las operaciones de números. Por tanto, en el caso de la aritmética, los *conceptos parciales* son los *números* que se encuentran relacionados en la proposición aritmética. Una vez construida, esta representación en la intuición es, por ser tal, susceptible de manipulación y transformación de sus distintos elementos conforme a las reglas de la intuición. De este modo, mediante la manipulación que permite la intuición, se puede efectuar la síntesis (la operación), de la cual el concepto inicial sólo era la *fórmula*, la indicación.

Por ello, toda proposición aritmética debe ser sintética, porque para hacer efectiva la operación que prescribe se debe efectuar una síntesis de los dos conceptos numéricos que en esa proposición se relacionan.

Quizá se podría resumir, pues, la posición kantiana sobre la aritmética en lo siguiente: cada concepto de número es una síntesis distinta de lo homogéneo múltiple, y cada proposición aritmética relaciona al menos dos conceptos de números distintos: el de la operación, donde los números aparecen como *conceptos parciales* que apuntan a otro número, que es el número del resultado. Una relación entre conceptos distintos es siempre, por definición, sintética.

BIBLIOGRAFÍA

Anderson, R. Lanier. «The Introduction to the Critique: Framing the Question». En *The Cambridge Companion to Kant's "Critique of Pure Reason"*, 75-92. Cambridge: Cambridge University Press, 2010.

———. *The Poverty of Conceptual Truth*. Oxford: Oxford University Press, 2015.

Beck, Lewis White. *Studies in The Philosophy of Kant*. New York: The Bobbs-Merrill Company Inc, 1965.

Brandt, Reinhard. «Kant in Königsberg». En *Studien zur Entwicklung preußischer Universitäten*, de Reinhard Brandt y Werner Euler. Wiesbaden: Harrasowitz Verlag, 1999.

Descartes, René. *Reglas para la dirección del espíritu*. Traducido por Juan Manuel Navarro Cordón. Madrid: Alianza Editorial, 1984.

Friedman, Michael. *Kant & the Exact Sciences*. Cambridge: Harvard University Press, 1992.

Goethe, Norma B., Philip Beeley, y David Rabouin, eds. *G.W. Leibniz, Interrelations between Mathematics and Philosophy*. Archimedes 41. Springer, 2015.

Hintikka, Jaakko. «Kant's 'New Method of Thought' and His Theory of Mathematics». En *Knowledge and the Known*, 126-34. Synthese Historical Library. Dordecht: Springer Dordrecht, 1991. https://doi.org/10.1007/978-94-010-2217-0.

Kant, Immanuel. «Carta a Johann Schultz del 25 de noviembre de 1788». Traducido por Rogelio Rovira. *Logos. Anales del Seminario de Metafísica* 37 (2004): 49-53.

———. *Correspondence*. Editado y traducido por Arnulf Zweig. The Cambridge Edition of the Works of Immanuel Kant, XIV. Cambridge: Cambridge University Press, 1999.

———. *Crítica de la razón pura*. Traducido por Pedro Ribas. 14.ª ed. Madrid: Alfaguara, 1998.

———. *Crítica de la Razón Pura*. Traducido por Mario Caimi. Colihue, 2006.

———. *Crítica de la razón pura edición bilingüe alemán-español*. Editado por Mario Caimi. Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica, 2018.

———. *Critik der reinen Vernunft Zweyte bin und wieder berbefferte Auflage*. Riga, 1787.

———. *Critique of Pure Reason Unified Edition (with All Variants from the 1781 and 1787 Editions)*. Traducido por Werner S. Pluhar. Hackett Publishing, 1996.

———. *Immanuel Kant's Critique of Pure Reason*. Traducido por Norman Kemp Smith. Edinburgh: Macmillan and Co., Limited, 1929.

———. *Kant's gesammelte Schriften Band II*. Berlín: Druck un Verlag con Georg Reimer, 1912.

———. *Kritik der reinen Vernunft*. Editado por Timmermann. Philosophische bibliothek band 505. Hamburg: Felix Meiner, 1998.

———. *Lógica de Immanuel Kant: Un manual de lecciones (Edición original de G. B. Jäsche)*. Traducido por María Jesús Vázquez Lobeiras. Madrid: Akal, 2000.

———. *Los progresos de la metafísica (edición bilingüe alemán-español)*. Traducido por Mario Caimi. México, D. F.: Fondo de Cultura Económica, 2008.

———. *Pensamientos sobre la verdadera estimación de las fuerzas vivas*. Traducido por Juan Arana Cañedo-Argüelles. Berna: Peter Lang, 1988.

———. *Prolegómenos a toda metafísica que haya de poder presentarse como ciencia (Bilingüe)*. Editado y traducido por Mario Caimi. Colección Fundamentos, 153.0. Madrid: Itsmo, 1999.

———. *Theoretical Philosophy: 1755 - 1770*. Traducido por David Walford. The Cambridge Edition of the Works of Immanuel Kant, I. Cambridge: Cambridge University Press, 2003.

Naragon, Steve. «List of Lectures (by discipline)». Kant in the classroom, 2006. https://users.manchester.edu/Facstaff/SSNaragon/Kant/Lectures/lecturesListDiscipline.htm.

Segner, Johann Andreas von. *Anfangsgrunde der Arithmetic, Geometrie, un der Geometrische Berendungen*. Magdeburg: Regnerischen Buchhandlung, 1773.

———. *Elementa Arithmeticae Et Geometriae; Elementa Arithmeticae Et Geometriae In Usus Avditorum*. Goettingae: Christ, Henr. Cvnonem, 1739.

Sgarbi, Marco. «Matematica e filosofia trascendentale in Kant. Note a margine di una fonte dimenticata della Kritik der reinen Vernunft». *Philosophical Readings* II, n.º 1 (2010): 209-24.

Smith, Norman Kemp. *A Commentary to Kant's «Critique of Pure Reason»*. Londres: Macmillan and Co., Limited, 1918.

Sutherland, Daniel. «Kant's Conception of Number». *Philosophical Review* 126, n.º 2 (2017). https://doi.org/DOI:10.1215/00318108-3771988.

———. «Kant's Philosophy of Arithmetic An Outline of a New Approach». En *Kant's Philosophy of Mathematics Vol I (Ed. Posy y Rechter)*, 248-66. Cambridge: Cambridge University Press, 2020.

Vaihinger, Hans. *Commentar zu Kants Kritik der reinen Vernunft*. Stuttgart: Verlag von W. Spemann, 1881.

Warda, Arthur. *Immanuel Kants Bücher*. Bibliographien und studien 3. Berlin: M. Breslauer, 1922.

Waschkies, Hans-Joachim. *Physik und Physikotheologie des jungen Kant. Die Vorgeschichte seiner Allgemeinen Naturgeschichte und Theorie des Himmels*. Amsterdam: B. R. Grüner, 1987.

Wuerth, Julian, ed. *The Cambridge Kant Lexicon*. Cambridge: Cambridge University Press, 2021. https://doi.org/10.1017/9781139018159.