



Universidad de Navarra

Facultad de Ciencias

Convección en Medios Granulares Vibrados

José Martín Pastor Gutiérrez

Servicio de Publicaciones de la Universidad de Navarra

ISBN 978-84-8081-365-5



Universidad de Navarra
Facultad de Ciencias

Convección en Medios Granulares Vibrados

Memoria presentada por **D. José Martín Pastor Gutiérrez** para aspirar al grado de Doctor por la Universidad de Navarra

El presente trabajo ha sido realizado bajo nuestra dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada y autorizamos que sea presentado ante el Tribunal que lo ha de juzgar.

Pamplona, 4 de mayo de 2010

Dr. Angel Garcimartín Montero

Dr. Diego Martín Maza Ozcoidi

Declaración:

Por la presente yo, **D. José Martín Pastor Gutiérrez**, declaro que esta tesis es fruto de mi propio trabajo y que en mi conocimiento, no contiene ni material previamente publicado o escrito por otra persona, ni material que sustancialmente haya formado parte de los requerimientos para obtener cualquier otro título en cualquier centro de educación superior, excepto en los lugares del texto en los que se ha hecho referencia explícita a la fuente de la información.

De igual manera, autorizo al Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, la distribución de esta tesis y, si procede, de la "fe de erratas" correspondiente por cualquier medio, sin perjuicio de los derechos de propiedad intelectual que me corresponden.

Pamplona, 4 de mayo de 2010

D. José Martín Pastor Gutiérrez

© José Martín Pastor Gutiérrez

Derechos de edición, divulgación y publicación:

© Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra

A mi tía Paca,

Agradecimientos

En el tiempo que he dedicado a este trabajo, he contado con la valiosa ayuda de muchas personas e instituciones. Razón de más para dar mi más sincero agradecimiento a todos ellos. Empezando por mis directores de tesis, Diego Maza y Ángel Garcimartín, e Iker Zuriguel. Ellos me han enseñado a trabajar de la manera más correcta posible. No caben en esta página mis palabras de agradecimiento hacia ellos. A mis antiguos compañeros del Grupo de Medios Granulares, Roberto Arévalo, Álvaro Janda y Cristian Mankoc, sin olvidarme de Alberto de la Torre y Maxi Giuliani, gracias por toda vuestra ayuda y los buenos ratos juntos. Igualmente, quiero agradecer a todos los miembros del Departamento de Física de la Universidad de Navarra la atención e interés que siempre han mostrado conmigo.

También quiero agradecer a Iñaki Pérez de Landazábal, Cristina Gómez Polo, Vicente Recarte, y a todo el grupo de Propiedades Físicas y Aplicaciones de Materiales de la Universidad Pública de Navarra la confianza que han depositado en mí, al igual que la ayuda que me han prestado para poder finalizar esta tesis.

A Jean-François Boudet agradezco haberme permitido usar los equipos de su laboratorio durante unos días en 2004.

A Nicolas Vandewalle, Stéphane Dorbolo y a todos los miembros del GRASP agradezco la acogida y la financiación que hicieron posible la estancia de los tres primeros meses del año 2006 en su grupo.

A Yves Garrabos y Pierre Evesque agradezco la oportunidad de participar con ellos en varias campañas de vuelos parabólicos en microgravedad en los años 2007 y 2009.

A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra agradezco la ayuda económica que recibí del año 2003 al 2008.

Quiero agradecer a la familia Maza-Cuello que me hayan hecho hueco entre ellos. A todos mis amigos, gracias por haberme dado siempre vuestra mejor sonrisa.

Sobre todo, quiero agradecer a mi familia todo lo que he recibido de ellos: a mi tío Dioni, a mi tío Rafa y mi tía Ceci, a mis primos Rafita y Noelia, José Antonio y Montse, más que una hermana. Mi mayor agradecimiento es para mi padre, quien lo ha dado todo por mí, para mi tía Paca, que no me ha dejado de cuidar, y para mi madre que siempre la tengo presente.

Por último, quiero agradecer a Andrea toda la fuerza que me ha transmitido en la etapa más dura de esta tesis, su apoyo ha sido esencial para llevar a puerto este proyecto.

Índice general

Prólogo	xi
1 Introducción	1
1.1 Características de los medios granulares	1
1.2 ¿Sólido, líquido o gas?	2
1.3 Inestabilidades en medios granulares vibrados. Convección granular.	7
1.4 Origen de la convección granular	9
1.5 Inestabilidades espaciales y temporales	13
2 Sistema Experimental	21
2.1 Medio granular	21
2.2 Sistema mecánico y vibrador	22
2.3 Sistema de medida	24
2.4 Medida del tiempo de vuelo	25
2.5 Medida de la posición de los granos cerca de las paredes laterales	28
3 Movimiento del centro de masas	37
3.1 Dinámica del centro de masas	37
3.2 Influencia de la profundidad de la capa granular	40
3.3 Efecto del gas intersticial	43
3.4 Una extensión del modelo de la bola inelástica	45
3.5 Influencia de la relación de aspecto	56
4 Movimiento convectivo	59
4.1 Escala lenta. Velocidad de convección	63
4.2 Escala rápida. Dinámica microscópica	71

Conclusiones y perspectivas 89

Bibliografía 95

Prólogo

Los *medios granulares* son, en realidad, materiales comunes y corrientes conocidos por todos. Los áridos de construcción, el azúcar o simplemente el tráfico de vehículos son ejemplos paradigmáticos de este tipo de medios, en los que el material de que están constituidos se presenta en porciones o granos. En ellos y en su diversa fenomenología se basan multitud de aplicaciones industriales. Se utiliza arena de sílice mezclada con arcilla y agua para elaborar moldes de fundición en los que se vierten coladas de metales fundidos para conseguir piezas metálicas de la forma deseada. Estos moldes son excelentes no sólo por las extraordinarias propiedades refractarias, sino también porque son suficientemente porosos como para dejar escapar los gases que se producen al enfriarse la colada. En el pulido y abrillantado de hebillas metálicas o utensilios de cocina se emplean materiales sintéticos o simplemente arena: unas máquinas similares a lavadoras centrifugan estos elementos recién fundidos para eliminar las rebabas que se originan en su proceso de fabricación. Aunque estos sean dos ejemplos elegidos al azar, se pueden encontrar otros muchos en los se hace uso de alguna de las múltiples propiedades que exhiben los medios granulares. Un efecto muy habitual es el de las nueces de Brasil: cuando se transportan frutos secos de distintas variedades, las vibraciones que se producen en los vehículos provocan que esas nueces, mayores que las demás, aparezcan siempre en la parte superior de los embalajes. A diario nos encontramos con este efecto en las bolsas de pipas (las más grandes se encuentran al principio de la bolsa) o en nuestras mochilas o bolsos (que los objetos más pequeños están en el fondo). Se hace uso de este mismo fenómeno para extraer las esquirlas resultantes de los procesos de pulido antes mencionados: al hacer vibrar la máquina, las partículas más grandes suben hacia la superficie mientras las pequeñas se quedan en el fondo de la máquina y se pueden seleccionar con facilidad. A estos procesos de separación de granos se les llama segregación.

Es fácil adivinar que tan variada fenomenología no ha escapado al estudio de sus propiedades físicas. Una de las primeras observaciones de la física de los medios granulares

que nos ha llegado de la antigüedad se debe al filósofo y poeta Lucrecio, quien hacia el año 55 a.C. asemejaba el flujo de semillas de adormidera al de un líquido. Posteriormente, en pleno renacimiento italiano, Leonardo da Vinci diseñó un experimento con arena para estudiar la fricción entre los cuerpos. Pero no fue hasta finales del siglo XVIII cuando C.A. Coulomb cimentó la física de los medios divididos con un estudio de la estabilidad de estructuras arquitectónicas que resulta de la fricción entre las piedras [1]. Ya en el siglo XIX, tanto E. Chladni como C. Öersted, de manera independiente, estudiaron el diferente comportamiento de distintos polvos sobre la superficie de un violín, teniendo en cuenta el tamaño y densidad de las partículas y estableciendo una clasificación que perdura hasta hoy día: los patrones de Chladni. También M. Faraday [2] reportó las inestabilidades hidrodinámicas que aparecen en un medio granular al que se le somete a vibración, y O. Reynolds [3] describió cómo un medio muy compactado se dilata cuando es sometido a una compresión mecánica. Este fenómeno se conoce como dilatación de Reynolds, y es la causa de que al caminar por la arena mojada ésta se seque en torno al pie.

El fenómeno que se estudia en la presente memoria es la convección granular. Esta aparece al agitar dentro de un recipiente un conjunto suficientemente numeroso de partículas, que se mueven de modo parecido al que lo haría un fluido calentado desde abajo. El problema convectivo se lleva estudiando desde hace más de un siglo pero todavía quedan tantas incógnitas que no pasa un mes sin que aparezcan artículos en revistas especializadas que aportan más datos o nuevos argumentos. En el caso del presente trabajo, es obligado reseñar que cuando comencé mi doctorado ya funcionaba un experimento en el laboratorio del Departamento de Física de la Universidad de Navarra, y en él habían trabajado previamente A. Garcimartín, D. Maza, I. Zuriguel y J.L. Ilquimiche [4]. Ellos habían estudiado la velocidad de convección y las estructuras espaciales en función de la aceleración adimensional a la que se somete el sistema y de otros parámetros experimentales. Sin embargo, no estaban claras cuáles eran las causas del movimiento de convección. Partiendo de las descripciones del movimiento que habían hecho, la investigación que se planteó fue relacionar la dinámica de todo el sistema considerado como una única partícula (dinámica macroscópica) con la que posee cada partícula individual (dinámica microscópica) con el fin de poder elucidar el origen del movimiento convectivo. De este estudio han surgido dos publicaciones y la presente memoria para optar al título de doctor. En la primera de estas publicaciones [5] se resolvió en el tiempo el movimiento individual de los granos y se comparó con el del centro de masas del sistema. Posteriormente, se publicó un artículo de revisión en el que se resumía el conocimiento que habíamos adquirido sobre este problema

hasta aquella fecha. También, participé en dos experimentos más: el primero sobre atascos [6] y el segundo sobre flujos [7] de silos que se descargan por gravedad.

Espero que con el trabajo de estos años haya podido contribuir a que este fenómeno de la convección en medios granulares se conozca con más detalle. En esta memoria se presentan los experimentos y los trabajos numéricos que se han realizado, y que nos han permitido entender mejor el comportamiento de los medios granulares en estas condiciones. Para ello ha resultado de vital importancia resolver el movimiento de escalas temporales inferiores al periodo de la excitación externa; dispusimos de una cámara rápida, sin la cual hubiese sido poco menos que imposible llevar a cabo ese estudio.

A continuación se describe cómo se ha estructurado la presente memoria. En el capítulo introductorio se brinda un resumen de los fenómenos más característicos que exhiben los medios granulares en función de la energía que se les aporte, pues se comportan a modo de sólidos, líquidos o gases. También se describirán las inestabilidades que aparecen en medios granulares vibrados, especialmente la inestabilidad convectiva. Se desarrollará además el modelo de la bola inelástica, del que se hará uso en capítulos posteriores. En el siguiente capítulo se expondrá el sistema experimental que se ha utilizado. Este capítulo se divide en dos partes, la primera dedicada a las técnicas que se han empleado en el estudio de la dinámica del centro de masas del sistema, y la segunda a las herramientas de análisis de imagen desarrolladas para obtener la dinámica microscópica de cada grano. Los resultados obtenidos se presentan en los dos capítulos siguientes. El primero de estos dos está dedicado al estudio detallado del movimiento del centro masas y de los granos individualmente en función de los distintos parámetros experimentales. El siguiente se subdivide en dos secciones, una dedicada a la dinámica lenta (convección) y otra a la rápida (conexión entre el movimiento macroscópico y microscópico). Finalmente, en el último apartado se recopilan las conclusiones y se enuncia cuál es el origen del movimiento convectivo según nuestro trabajo da a entender.

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se describirán algunas de las principales propiedades que distinguen a lo que habitualmente se denomina “materia granular”. Dentro de la variedad de fenómenos característicos de este tipo de medios, este capítulo se centrará principalmente en los sistemas vibrados verticalmente. También se mencionarán algunas de las inestabilidades espacio temporales que están íntimamente relacionadas con el objeto de estudio de la presente memoria.

1.1 Características de los medios granulares

Existen varias definiciones de lo que se suele llamar en el lenguaje corriente *medio granular*. Todas tienen en común que consideran los materiales granulares como un agregado de sólidos divididos, cuyas partes están lo suficientemente próximas como para interactuar entre sí básicamente mediante fuerzas de contacto.

Atendiendo a la clasificación de Nedderman [8], pueden distinguirse diferentes tipos en función de sus propiedades cohesivas. Los polvos ultra-finos y super-finos son muy cohesivos, debido a que la fuerza electrostática es del mismo orden o mayor que el propio peso de los constituyentes individuales. Por otra parte, la humedad ambiente puede formar puentes líquidos entre ellos, lo cual aumenta aun más su cohesión. En el otro extremo de esta lista se encuentran los sólidos divididos, en los que las fuerzas de interacción entre partículas sólo existen si se da un contacto efectivo y cuya magnitud es a lo sumo una fracción de su peso. Otros autores [9], en cambio prefieren introducir una clasificación basada en criterios más complejos de cuantificar, como por ejemplo su “fluidificación” bajo la acción de diferentes clases de esfuerzos externos.

Por lo que respecta a los resultados de esta memoria, únicamente se tendrá en cuenta

en los sólidos granulares (según la descripción de Nedderman), es decir, se trabajará con tamaños de grano suficientes como para desprestigiar interacciones de origen electrostático o los efectos de la humedad ambiente (las fuerzas cohesivas).

Debido a que la energía térmica de las partículas, $k_B T$ – donde k_B es la constante de Boltzman y T la temperatura – es muy pequeña en comparación con la energía mecánica, a los medios granulares se les suele denominar sistemas *atérmicos*. En consecuencia, no resulta sencillo elaborar un tratamiento de su fenomenología desde el punto de vista de la física estadística.

Podría pensarse, sin embargo, que un tratamiento mecanicista del problema pudiera ser adecuado para describir alguno de sus comportamientos. No obstante, la secuencia de choques entre las partículas de un sistema (aunque su número fuera reducido) puede llegar a ser muy compleja, debido – en parte – a la extrema sensibilidad del problema a los parámetros que gobiernan la interacción entre las partículas. Además, el carácter disipativo de estas interacciones, hace que los comportamientos dinámicos colectivos de un sistema de granos sean un ejemplo paradigmático de sistema complejo.

1.2 ¿Sólido, líquido o gas?

A menudo, en la literatura [10] se pueden encontrar referencias a sólidos, líquidos, o gases granulares. Se denominan así algunos comportamientos que “recuerdan” los diferentes estados de agregación que puede presentar cualquier sustancia. Un medio granular formado por esferas de acero, por ejemplo, puede ser considerado como sólido, líquido o gas en función de las propiedades de movilidad de sus partículas y de la fracción de volumen que ocupen las partículas que constituyen el sistema. En general, estas dos propiedades vienen determinadas por el tipo de sollicitación externa a la que se someta el medio. A continuación, se hará una pequeña revisión de las propiedades más notables según sea el estado de agregación de la materia granular.

Problemas estáticos. Sólidos granulares

Se suele hablar de sólido granular cuando las partículas que lo constituyen mantienen distancias fijas unas respecto de otras. Otra condición que se debe cumplir es que los constituyentes estén en contacto entre sí. A diferencia de un sólido ordinario, los sólidos granulares pueden adquirir la forma del recipiente que los contiene. Aun en este extremo, no existe un formalismo satisfactorio de la mecánica del continuo que extraiga relaciones

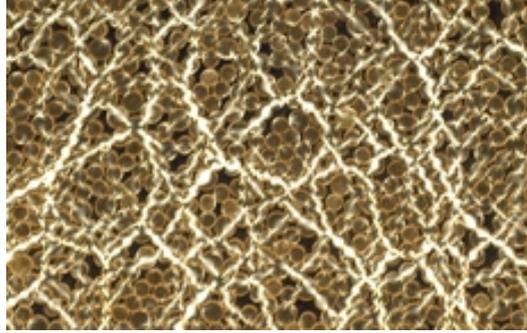


Figura 1.1: Al colocar un medio granular entre dos polarizadores con sus ejes cruzados e iluminarlo desde un costado, por el otro se ven más brillantes los granos en los que se acumula el esfuerzo, debido a la birrefringencia inducida por la presión, quedando así plasmadas las cadenas de fuerza. Imagen cortesía de I. Zuriguel.

constitutivas capaces de describir adecuadamente el comportamiento colectivo del grupo de partículas.

El ejemplo más típico lo constituye una pila de arena: al formar un talud, los granos se van acumulando de forma estable hasta superar cierto ángulo. Si se siguen apilando granos, llega un momento en que éstos se deslizan, formando avalanchas que transportan parte del material, condicionando, en definitiva, la forma final que tendrá el apilamiento de partículas.

Es también una característica distintiva de la materia granular su alta anisotropía cuando se los somete a diferentes tipos de esfuerzos. En el caso de la pila granular resultante luego de finalizadas las avalanchas, el peso de los granos no se transmite uniformemente hacia abajo, sino que aparecen cadenas de granos que están en contacto entre sí, en ocasiones denominadas “cadenas de fuerza” (figura 1.1). La existencia de estas estructuras explica por qué la presión producida por un apilamiento granular presenta en general un mínimo en su centro [11].

Cuando un sólido granular está dentro de un recipiente, la presión en la base del recipiente ejercida por el peso de los granos es menor que la presión hidrostática (calculada con la fórmula válida para los líquidos). Este es el efecto Janssen [12, 13]. Por ejemplo, la presión en la base de un recipiente cilíndrico no crece monótonamente al aumentar la profundidad del medio granular, si no que satura a un valor constante con la siguiente dependencia

$$P = P_0(1 - \exp(-h/\Lambda)) \quad (1.1)$$

donde P es la presión en la base, P_0 es el valor al que tiende la presión, h la profundidad

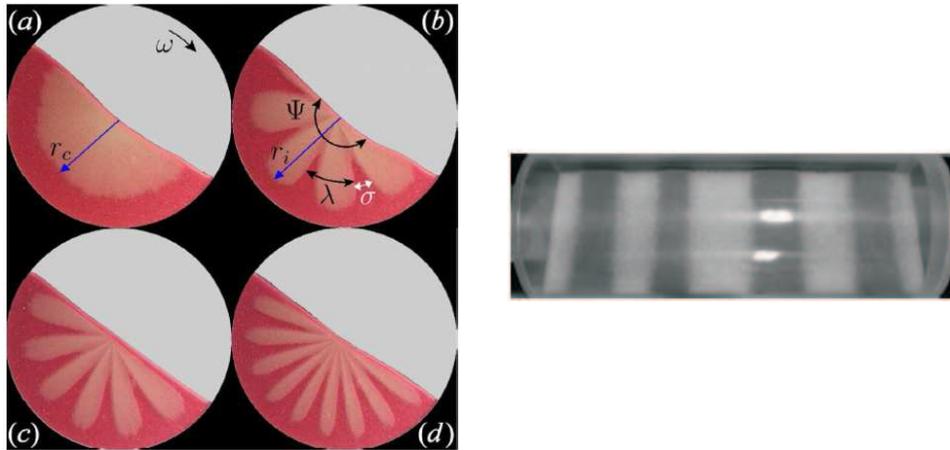


Figura 1.2: Figura de la izquierda, segregación radial obtenida de [14]. Figura de la derecha, segregación axial obtenido de [15]. En ambos casos, los granos de distinta naturaleza se agrupan en bandas.

del medio granular, y Λ un parámetro que depende de la geometría del recipiente y de los granos. Esta dependencia se puede explicar debido a que la distribución espacial de cadenas de fuerza no tiene una componente vertical privilegiada, por lo que parte de la presión se dirige hacia las paredes. Son, pues, éstas las que soportan parte del peso del medio granular, siendo la presión del material en la base menor que la presión hidrostática, es decir, la que se obtendría si el recipiente estuviera ocupado por un único sólido con la misma masa que todo el medio granular.

Problemas dinámicos. Líquidos granulares

Cuando a un medio granular se le aporta la suficiente energía, puede fluir. Desde un punto de vista muy simplificado, se considera que un medio granular fluye cuando existe un movimiento colectivo de las partículas que lo constituyen a la par que éstas interactúan localmente entre sí.

Debido a la disipación de energía en estas colisiones, es imprescindible un aporte externo de energía para que el material permanezca fluyendo. Existen varias maneras de hacerlo, como por ejemplo la agitación o rotación del contenedor. Otra forma obvia es la acción de la fuerza de la gravedad. Así, cualquier grano que está apoyado sobre otros tiene más energía que éstos y cualquier perturbación puede hacer “fluir” al material. Existen otros muchos ejemplos, donde aparecen combinados varios tipos de esfuerzos externos: formación de dunas (en las que el viento aporta la energía [16]); flujo de granos en silos y tolvas [17]; o simplemente las avalanchas que se producen cuando un medio granular cae en un plano

inclinado.

Cuando un medio granular está fluyendo y las partículas que componen el material tienen características diferentes – sea tamaño, densidad o rugosidad – se observa una segregación. Es decir, las partículas idénticas tienden a agruparse entre sí, separándose de las que son distintas. Aunque no serán descritos aquí, dos casos representativos de este efecto pueden observarse en la figura 1.2.

Existen situaciones donde sólo fluye una parte del sistema mientras que el resto se comporta a la manera de un sólido, como por ejemplo un silo que se descarga por gravedad a través de un orificio en su base [18]. En este caso, el flujo de partículas está gobernado por la energía potencial de los granos.

Gases granulares.

En el límite de baja densidad, la interacción entre partículas puede considerarse instantánea y a pares, pues los choques entre más de dos granos son altamente improbables. Bajo estas condiciones, los supuestos centrales de la teoría cinética de los gases podrían resultar aplicables [19, 20]. El aporte de energía en este caso se hace a través de las paredes del recipiente. Haciendo uso de estas analogías, muchas situaciones en las que el material granular está muy diluido pueden englobarse bajo la denominación de *gas granular*. Desafortunadamente, aun en este extremo, los gases granulares no cumplen la hipótesis del caos molecular [21] debido a la existencia de correlaciones relacionadas con la inelasticidad de las colisiones entre partículas. Se ha construido toda una teoría hidrodinámica basada en la ecuación de Boltzmann–Enskog [22] que intenta reproducir los fenómenos observados en sistemas fluidos (gases y líquidos; más adelante se expondrá la conexión entre la hidrodinámica y la agitación en capas gruesas y delgadas). A partir de esta teoría se pueden obtener las ecuaciones de conservación para la masa, el momento y la energía similares a las ecuaciones de Navier–Stokes para los fluidos convencionales, a excepción de un término disipativo (referencias [23–25]). Estas ecuaciones son las siguientes, respectivamente:

$$\frac{D\nu}{Dt} = -\nabla \cdot \mathbf{u} \quad (1.2)$$

$$\nu \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \nu \mathbf{g} \quad (1.3)$$

$$\nu \frac{DT}{Dt} = -\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\gamma}} - \nabla \cdot \mathbf{q} - \xi \quad (1.4)$$

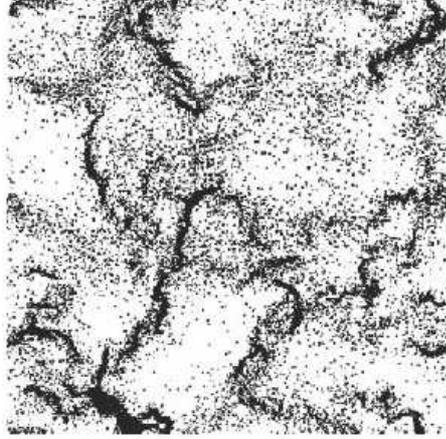


Figura 1.3: Clustering de un gas enfriado homogéneamente obtenido de [26].

donde ν es la densidad del medio granular normalizada con la densidad de los granos, $D/Dt = \partial_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)$ es la derivada material, \mathbf{u} el campo de velocidades, σ el tensor de tensiones, \mathbf{g} la aceleración de la gravedad, T es la temperatura granular que se define como $T = (\langle \mathbf{u}\mathbf{u} \rangle - \langle \mathbf{u}^2 \rangle)/2$ en el que los símbolos $\langle \rangle$ representa el valor promedio, $\dot{\gamma}$ el tensor de deformaciones, \mathbf{q} el flujo de energía, ξ la razón de disipación de energía por colisiones inelásticas y el símbolo $:$ denota el producto interno de matrices ($\sigma : \dot{\gamma} = \text{tr}(\sigma^T \dot{\gamma})$). La importancia de estas ecuaciones estriba en que desarrollan la idea de “temperatura granular” (definida en términos de fluctuaciones de energía) hasta límites macroscópicos. Un ejemplo de esto se da en la formación de agregados en un gas granular que se enfría lentamente [26]. A diferencia de los gases moleculares, la naturaleza disipativa de las colisiones hace que tras cada choque la energía inicial de dos partículas sea menor, y por tanto la probabilidad de colisión entre dos partículas cualesquiera aumente. Al aumentar el número de colisiones, las partículas pierden energía más rápidamente hasta que se quedan quietas y próximas unas de las otras formando agregados en lo que se conoce como “clustering” (figura 1.3).

Otra extensión natural de este tipo de ecuaciones sería su aplicación a situaciones que presenten un claro análogo hidrodinámico, como por ejemplo la aparición de estructuras espaciales en sistemas fluidizados. En la próxima sección se expondrán algunos de los resultados más notables sobre la formación de estructuras espaciales en medios granulares fuera del equilibrio.

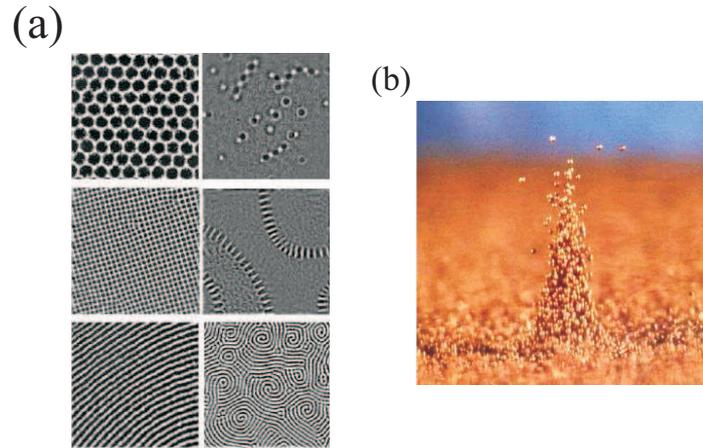


Figura 1.4: (a) Patrones en capas delgadas obtenido de [27]. (b) Oscilón (obtenido de [28]).

1.3 Inestabilidades en medios granulares vibrados. Convección granular.

A continuación se describirán algunas de las inestabilidades que aparecen en una capa granular agitada verticalmente. Se distinguen entre dos casos principalmente: capas delgadas o de pequeña relación de aspecto, y capas gruesas. Se consideran capas delgadas aquellas cuya profundidad es menor que una decena de granos, y gruesas el resto.

En el caso de capas delgadas, la fenomenología se restringe a modos superficiales en los que no aparece movimiento convectivo, que es el tema del presente trabajo. De todos los posibles fenómenos observados cabe resaltar los patrones formados por ondas estacionarias [29–31], o los oscilones reportados en [28], donde la energía se concentra en regiones muy pequeñas, como se muestra en la figura 1.4.

Cuando un medio granular agitado es lo suficientemente profundo, se desarrolla un movimiento colectivo y ordenado de las partículas que lo constituyen, comúnmente denominado *convección granular*. El caso paradigmático corresponde a un recipiente cilíndrico agitado por una vibración armónica en la dirección de la gravedad. Bajo estas condiciones, el movimiento que presentan los granos es similar al movimiento convectivo que presentaría un líquido en el mismo recipiente si fuera calentado desde abajo. Fue M. Faraday el primero que reportó un comportamiento de este tenor [2], al observar cómo agitando un montón de polvo, los granos ascendían por el centro y caían por los lados del talud que se formaba (figura 1.5).

Para que exista un movimiento convectivo en el seno de un medio granular, es necesario

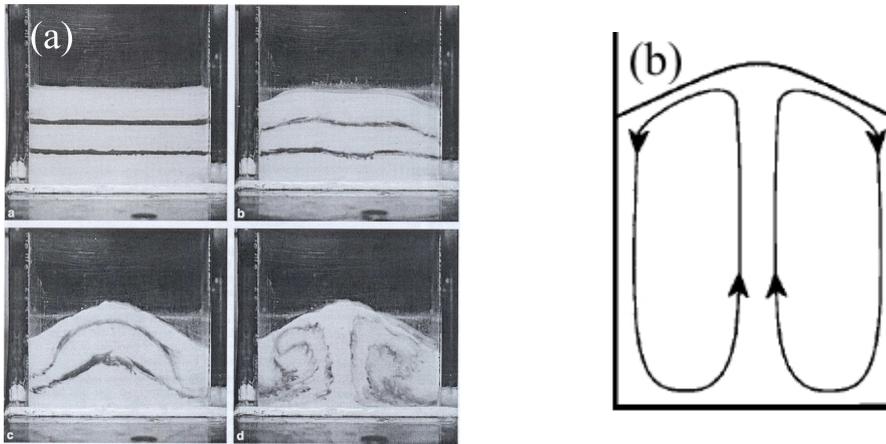


Figura 1.5: (a) Secuencia de imágenes en las que se aprecia la evolución temporal de un medio granular, inicialmente estratificado, sometido a una vibración sinusoidal de frecuencia 50 Hz. Arriba izquierda $t = 0$ s; arriba derecha $t = 6$ s; abajo izquierda $t = 10$ s; abajo derecha $t = 14$ s [34]. (b) En este esquema se puede apreciar cómo los granos ascienden por el centro de la celda y descienden cerca de las paredes deformando la superficie libre del medio.

que éste se encuentre “fluidizado”. El estado fluidizado no es el mismo en todos los sistemas que estudia la física de los medios granulares. Por ejemplo, no es el mismo estado fluidizado el que aparece en un medio granular que está fluyendo a través del orificio de descarga de un silo [32], donde los granos próximos al orificio se mueven a una velocidad mucho mayor que el resto, que la fluidización de una capa delgada que al ser agitada vigorosamente presenta patrones superficiales [33] (sección 1.5), donde son únicamente los granos de la superficie los que se mueven respecto del resto de la capa. En el caso del movimiento convectivo se habla de fluidización cuando está permitido el movimiento relativo de un grano respecto a otro.

Para fluidizar el medio se suelen utilizar dos tipos de excitaciones: “*tapping*” (golpes o pulsos) y vibración. Los “*taps*” consisten en pulsos breves y bruscos de la posición del contenedor del medio granular. El tiempo entre excitaciones consecutivas suele ser mayor que el tiempo de relajación (tiempo tras el cual las posiciones relativas de los granos cambian muy poco). Por el contrario, en la vibración las oscilaciones del contenedor siguen a una función sinusoidal y la excitación es continua en el tiempo

$$z(t) = A \sin(\omega t)$$

donde A es la amplitud de la oscilación, y $\omega = 2\pi f$ siendo f la frecuencia.

De todas las posibles variables que intervienen en el problema convectivo, se ha observado – tanto experimental como numéricamente – que el parámetro de control es la

aceleración adimensional, Γ , que se define como el cociente entre la aceleración máxima que proporciona la excitación y la aceleración de la gravedad. Cuando la excitación es sinusoidal,

$$\Gamma = \frac{|a_{max}|}{g} = \frac{A\omega^2}{g} \quad (1.5)$$

Existe un valor crítico para el parámetro de control [35] a partir del cual aparece convección en el medio granular: cuando la aceleración máxima de la oscilación forzante supera la gravedad, es decir, a partir de $\Gamma = 1$. Por encima de este valor, la energía suministrada por la excitación es suficiente como para que algunas zonas del medio granular estén fluidizadas y se organice un movimiento colectivo de los granos, que es capaz de deformar la superficie libre del medio (figura 1.5 (b)).

1.4 Origen de la convección granular

A continuación se describen algunas ideas que dan razón de los posibles orígenes de la convección en un medio granular. A pesar de la gran cantidad de trabajos y de los esfuerzos que se han dedicado a comprender este movimiento colectivo, no existe un acuerdo sobre la causa que lo origina. Este es un problema centenario aún sin resolver.

Influencia de las paredes en el movimiento convectivo

Los primeros indicios sobre el origen del movimiento convectivo en un medio agitado verticalmente vinieron de la mano de P. Evesque y J. Rajchenbach en 1989. Estos autores, estudiando la formación de taludes de arena [36], propusieron que en un ciclo de excitación se podían diferenciar dos regímenes:

Régimen pasivo Cuando la celda se mueve hacia arriba, el medio granular está compactado, siendo imposible el movimiento relativo entre las partículas. Este comportamiento permite considerar el medio como un sólido.

Régimen activo Cuando la celda se mueve hacia abajo con una aceleración, a , mayor que g , la compactación es menor, por lo que el movimiento relativo entre los granos está permitido. El sistema en este caso se considera fluidizado. La aceleración que sienten los granos cerca de las paredes laterales del contenedor no es la de la gravedad, sino una gravedad aparente, g_a , que es la aceleración del contenedor, a , menos la aceleración de la gravedad.

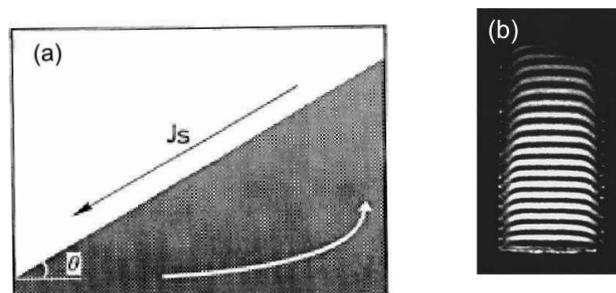


Figura 1.6: (a) Un talud se forma porque los granos ascienden cerca de las paredes del contenedor y descienden en avalanchas por la superficie libre inclinada [36] (b) Imagen de obtenida por técnicas de resonancia magnética nuclear de una capa de semillas de amapola que ha sido agitada una vez. La deformación de las partes brillantes se debe al movimiento descendente de los granos próximos a las paredes del recipiente [37].

$$g_a \sim a - g$$

Esta aceleración aparente tiene sentido contrario a la gravedad en el régimen activo, proporcionando una fuerza que hace que los granos suban cerca de las paredes y caigan en avalanchas por el talud que se forma (figura 1.6 (a)) y que se muevan hacia abajo por la pared opuesta.

Posteriormente, experimentos llevados a cabo por E. Clément *et al.* en medios granulares bidimensionales [38] mostraron la importancia de la existencia de paredes en el sistema para generar el movimiento convectivo. Utilizaron un contenedor formado por dos cilindros concéntricos cuya separación era un poco mayor que el tamaño de las partículas del medio granular. Esta geometría impone condiciones de contorno periódicas en un sistema bidimensional, por lo que se puede suponer que no existe pared lateral en el experimento. De esta manera, al agitarlo con una aceleración mayor que la gravedad no observaron ningún movimiento convectivo en el medio. Sin embargo, al insertar una pared lateral que consiste en una varilla entre las dos cilindros concéntricos aparece movimiento relativo entre partículas.

El conocido como “grupo de Chicago” publicó en 1995 [37] y en 1997 [39] resultados experimentales (utilizando técnicas de resonancia magnética nuclear) que demostraban que era la existencia de paredes laterales la que provocaban el movimiento convectivo (figura 1.6 (b)). En el citado trabajo de 1997 se demuestra que al variar la inclinación de la pared lateral, se puede lograr que los granos suban o bajen por la pared lateral.

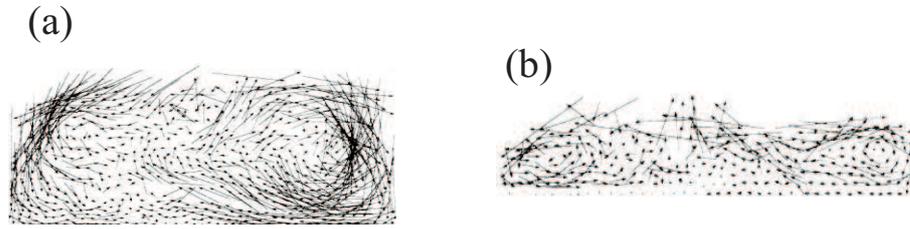


Figura 1.7: Campo de velocidades de un medio granular bidimensional vibrado verticalmente obtenidos por simulaciones numéricas. (a) Cuando los granos tienen rozamiento. (b) Cuando no tienen rozamiento [40]. Se puede observar que el tamaño de las estructuras convectivas es menor en el caso sin rozamiento.

Otros trabajos, como el de H.J. Herrmann [40], demuestran numéricamente que incluso para granos ideales sin fricción se encuentran patrones convectivos en un medio granular vibrado verticalmente (figura 1.7).

Con estos ejemplos se pretende indicar que el hecho de que los granos bajen o suban por la pared en el experimento que se describe en esta tesis no es algo que se pueda deducir a priori. La interacción entre granos y pared es notablemente complicada, y aunque en la mayoría de los casos los granos descienden cerca de la pared lateral si el recipiente está vibrando, también puede suceder que asciendan. Algo parecido ocurre con la segregación por vibración: también se da un efecto de las nueces de Brasil inverso, dependiendo de las circunstancias particulares del experimento [41].

Influencia del aire en el movimiento convectivo

C. Laroche y sus colaboradores estudiaron la deformación de la superficie libre asociado al movimiento convectivo que aparece al vibrar sinusoidalmente un medio granular [42]. Además observaron que a presiones del aire ambiente del orden de 10^{-5} Torr desaparecía dicha deformación. Este hecho señala indirectamente la presencia del gas ambiente como causa del movimiento convectivo. Para estos autores, la fricción de los granos próximos a la pared hace que disminuya la fracción de empaquetamiento¹ en esta región. Consecuentemente la porosidad del medio granular (recíproco de la fracción de empaquetamiento) cerca de la pared es mayor que en regiones alejadas. Cuando $\Gamma \geq 1$ la capa granular comienza un vuelo libre. Durante la porción del ciclo de vibración en la que el medio se aleja de la base, se forma un “gap” (una “brecha”) entre la capa de granos y la base. Éste se llena del gas atmosférico que pasa sobre todo a través de la región cercana a la pared lateral. El flujo del gas entrante arrastra los granos hacia abajo en esta parte del ciclo.

¹La fracción de empaquetamiento es el cociente entre el volumen ocupado por granos y el volumen ocupado por el medio granular

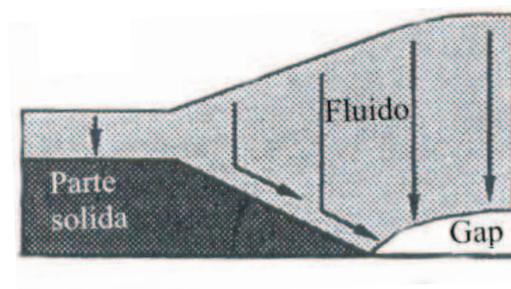


Figura 1.8: La parte sólida avanza en el medio granular como un frente de compactación formando un talud sólido que desvía el flujo de partículas de la zona fluidizada hacia el centro de la capa [42].

Cuando el estrato granular comienza a caer, son los granos próximos a la pared los que primero entran en contacto con la base, ya que han sido arrastrados hacia abajo anteriormente. Se forma así una región sólida (no fluidizada) que progresa hacia dentro del medio granular como un frente de compactación que obliga a los granos de la región fluidizada a desviar su trayectoria hacia el centro de la capa granular (figura 1.8). La forma del “*gap*” es irregular, ya que su espesor es menor cerca de las paredes laterales y mayor en el centro de la capa. Además, el gas atmosférico encerrado tiende a salir por el centro de la capa por estar esta zona todavía fluidizada (la porosidad es mayor que en la región sólida) arrastrando los granos hacia arriba.

Después de un ciclo de excitación, los granos cercanos a las paredes han sido arrastrados hacia abajo y los que están en el centro de la capa granular hacia arriba, formando así un rollo convectivo (figura 1.5). Por este motivo, se puede suponer que el flujo de aire es un posible origen de la convección granular.

Convección térmica.

Mediante analogías con sistemas hidrodinámicos, muchos autores han intentado construir un marco formal en el que interpretar los comportamientos a gran escala de los medios granulares. Se han elaborado distintos modelos en torno al concepto de la *temperatura granular*. Esta se suele definir a partir de la energía cinética de los granos en la capa granular, de modo análogo a como se hace en la teoría cinética de gases [21]. En este tipo de modelos se suele incluir un suministro de energía a las partículas mediante una pared “caliente”, la cual aumenta la velocidad de los granos que chocan con ella. La energía se difunde en el medio mediante choques entre granos, generándose así un gradiente de temperatura granular desde la pared térmica hacia el interior del medio. Ideas de este

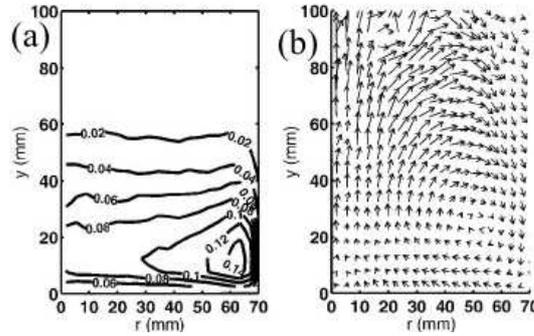


Figura 1.9: (a) Perfil de la compactación y (b) campo de velocidades en una sección transversal de un cilindro vibrado en tres dimensiones utilizando técnicas de emisión de positrones (obtenido de [44]).

estilo se suelen utilizar en el estudio numérico y teórico de medios granulares diluidos, en los que se tienen pocas partículas, y se consigue predecir cualitativamente cuál va a ser el comportamiento del medio granular [43].

En el problema convectivo es necesario que aparezca en el medio un gradiente negativo de temperatura granular y variaciones en la fracción de compactación, de manera similar a lo que ocurre con la temperatura y la densidad en la convección de fluidos. R.D Wildman *et al.* utilizando técnicas de emisión de positrones [44], midieron el campo de velocidades y la fracción de empaquetamiento (figura 1.9) en un medio granular, confirmando las hipótesis teóricas que fundamentan los modelos hidrodinámicos.

1.5 Inestabilidades espaciales y temporales

Al agitar un material granular, ya sea mediante “taps” ya sea mediante vibración sinusoidal, el sistema puede experimentar una rica variedad de inestabilidades más allá del umbral convectivo. En 1989, S. Douady *et al.* mostraron experimentalmente que a partir de un cierto valor crítico de la aceleración adimensional, Γ_c , el sistema sufre una bifurcación por duplicación de periodo, esencialmente igual a la que sufre un sólido inelástico sometido a vibración [29], que se expondrá en la siguiente sección. Las propiedades disipativas de un medio granular lo convierten en un cuerpo perfectamente inelástico. Un modelo sencillo, conocido como modelo de la bola inelástica, ha sido utilizado tanto para estudiar la dinámica temporal de capas granulares delgadas (que no presentan convección aunque sí formación de estructuras en su superficie [33]) como para la dilatación de una capa gruesa de material granular [45].

Además, como el sistema se encuentra espacialmente extendido también puede pre-

sentar inestabilidades espaciales asociadas a una ruptura de simetría traslacional entre diferentes regiones, cuya frontera se conoce como un “*kink*” [33].

Inestabilidades temporales. Modelo de la bola inelástica

Las inestabilidades temporales que aparecen en un medio granular vibrado verticalmente se pueden describir con el modelo de la bola inelástica (en adelante se denotará por IBBM de las siglas en inglés *Inelastic Bouncing Ball Model*). Este modelo fue usado por primera vez por E. Fermi en un contexto completamente distinto al de los medios granulares (para estudiar el origen de la radiación cósmica [46]), siendo profusamente empleado en el contexto de la dinámica no lineal y el caos (ver referencias [47], [48] [49] y [50]) en el último cuarto del siglo pasado.

El modelo consiste en una bola inelástica colocada sobre una superficie plana que vibra sinusoidalmente. Cuando la aceleración de la base es igual a la gravedad², $-g$, la bola se despega, iniciando un vuelo parabólico. Termina el vuelo en una colisión completamente inelástica con la base. Tras la colisión la bola queda pegada a la base (figura 1.10 (a)) si la aceleración de ésta en el instante de la colisión es mayor que la gravedad, o bien inicia otro vuelo parabólico (figura 1.10 (b)) en caso contrario.

A continuación se describe detalladamente la secuencia temporal de la dinámica de la bola completamente inelástica.

Despegue

Al principio de la secuencia, la bola se encuentra sobre la base vibrante y se mueve solidariamente con ella. Las ecuaciones que describen su posición, z , velocidad, v , y aceleración, a son las mismas para ambas:

$$z(t) = A \sin(\omega t) \quad ; \quad \begin{cases} v(t) = \dot{z}(t) = A\omega \cos(\omega t) \\ a(t) = \ddot{z}(t) = -A\omega^2 \sin(\omega t) \end{cases} \quad (1.6)$$

En el instante, t_0 , en el que la aceleración de la base vibrante es igual a la gravedad, $-g$, la bola se despega de la base.

$$a(t_0) = -g \quad \Rightarrow \quad -g = -A\omega^2 \sin(\omega t_0) \quad (1.7)$$

A partir de la definición de la aceleración adimensional en el caso de vibración sinusoidal

²Se hace notar que se ha elegido la gravedad con sentido negativo, siendo su valor -9.81 ms^{-2}

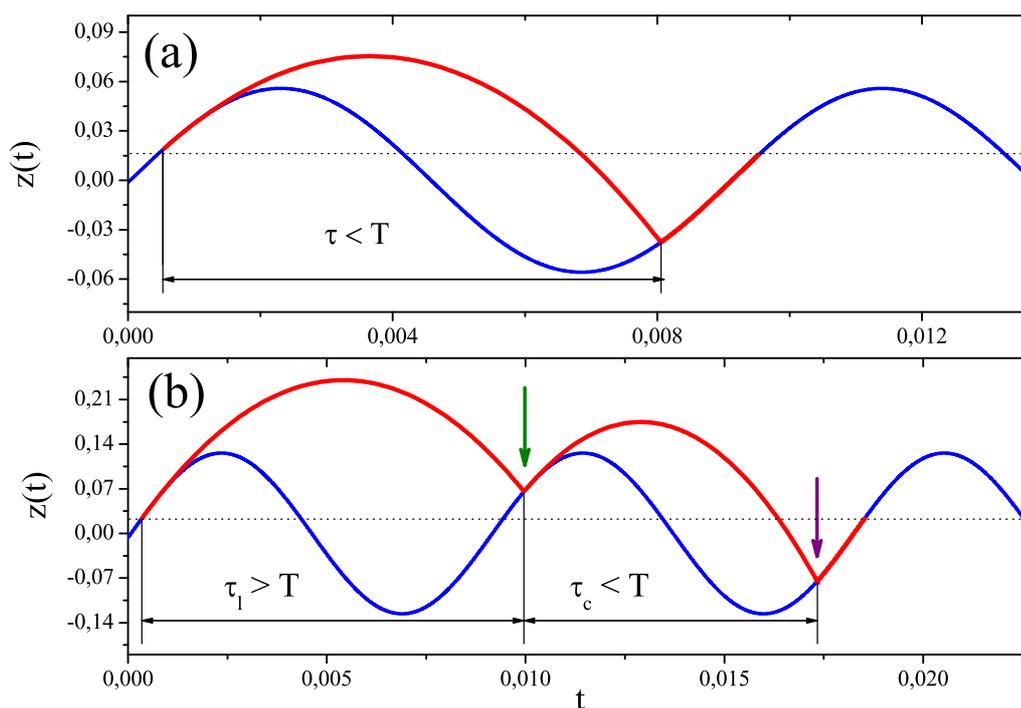


Figura 1.10: Esquema del IBBM. En azul está representada la posición de la base y en rojo la de la bola inelástica. La línea discontinua representa la posición (o la altura) a la cual la base tiene una aceleración igual a $-g$. Se pueden dar dos casos **(a)** La bola realiza un vuelo parabólico durante un tiempo $\tau < T$. Al caer de nuevo sobre la base, choca inelásticamente con ella y queda pegada hasta emprender un nuevo vuelo, porque la aceleración de la base en el instante de la colisión es menor que la gravedad. **(b)** Si tras un primer vuelo de duración $\tau_1 > T$ la bola choca inelásticamente contra la base en un instante que la aceleración de la base es menor que $-g$ (flecha verde), inicia inmediatamente un segundo vuelo cuya duración es $\tau_c < T$. Tras un segundo choque inelástico la bola se queda pegada a la base (flecha violeta), pues en esta colisión la aceleración de la base es menor que la gravedad.

(1.7), el instante en el que la bola inicia el vuelo es

$$t_0 = \frac{1}{\omega} \arcsin(\Gamma^{-1}) \quad (1.8)$$

Nótese que si $\Gamma < 1$ esta ecuación no tiene solución.

Vuelo parabólico

El movimiento que inicia la bola tras despegar de la base es un vuelo parabólico, ya que se encuentra sometida a la gravedad.

$$z(t - t_0) = z_0 + v_0(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (1.9)$$

siendo z_0 y v_0 la posición y velocidad inicial de la base en t_0 :

$$\begin{cases} z_0 = A \sin(\omega t_0) = A\Gamma^{-1} = \frac{g}{\omega^2} \\ v_0 = A\omega \cos(\arcsin(\Gamma^{-1})) \end{cases} \quad (1.10)$$

Si ahora se sustituye (1.10) en (1.9) se obtiene la ecuación para la posición de la bola durante el vuelo en función de los parámetros de la vibración:

$$z(t - t_0) = \frac{g}{\omega^2} + A\omega \cos(\arcsin(\Gamma^{-1}))(t - t_0) - \frac{1}{2}g(t - t_0)^2 \quad (1.11)$$

Reescribiendo (1.11) en términos de la fase de vibración, $\phi = \omega t$:

$$z(\phi - \phi_0) = \frac{g}{\omega^2} [1 + \Gamma \cos(\arcsin(\Gamma^{-1}))(\phi - \phi_0) - \frac{1}{2}(\phi - \phi_0)^2] \quad (1.12)$$

Colisión con la base

Se puede calcular utilizando métodos numéricos la fase correspondiente al instante en que la bola choca con la base, ϕ^* , igualando las expresiones para la posición de la base (1.6) y la de la bola (1.12):

$$\Gamma \sin(\phi^*) = 1 + \Gamma \cos(\arcsin(\Gamma^{-1}))(\phi^* - \phi_0) - \frac{1}{2}(\phi^* - \phi_0)^2 \quad (1.13)$$

Tras la colisión inelástica, la bola pierde toda su energía y queda pegada a la base. En función de la aceleración de la base, $a(\phi^*)$, puede ocurrir:

$\mathbf{a}(\phi^*) > -\mathbf{g}$ La bola queda pegada a la base hasta que de nuevo la aceleración de ésta sea mayor que la de la gravedad, iniciando entonces otro vuelo parabólico (figura 1.10(a)). El tiempo de vuelo, τ , en este caso es

$$\tau = \frac{1}{\omega}(\phi^* - \phi_0) \quad (1.14)$$

$\mathbf{a}(\phi^*) \leq -\mathbf{g}$ Inmediatamente tras la colisión, la bola inicia un nuevo vuelo con posición y velocidad inicial iguales a las de la base en el instante del golpe, definido por la fase $\phi_0^* = \phi^*$ (se ha indicado con una flecha verde en la figura 1.10(b)).

$$\begin{cases} z_0 = \frac{\Gamma g}{\omega^2} \sin(\phi_0^*) \\ v_0 = \frac{\Gamma g}{\omega} \cos(\phi_0^*) \end{cases} \quad (1.15)$$

Sustituyendo (1.15) en (1.9) e igualando a la posición de la base, se obtiene la fase en la que termina el vuelo, ϕ^{**} , que se inició en ϕ_0^* (se ha indicado con una flecha violeta en la figura 1.10(b)).

$$\sin(\phi^{**}) = \sin(\phi_0^*) + \cos(\phi_0^*)(\phi^{**} - \phi_0^*) - \frac{1}{2\Gamma}(\phi^{**} - \phi_0^*)^2 \quad (1.16)$$

Siendo ahora τ

$$\tau = \frac{1}{\omega}(\phi^{**} - \phi_0^*) \quad (1.17)$$

Diagrama de bifurcaciones en el IBBM

Se ha calculado el tiempo de vuelo, τ , de la bola inelástica en función del parámetro de control, Γ . El resultado de este cálculo se ha representado en la figura 1.11. Se puede observar que al aumentar Γ aparece una bifurcación de tipo “*saddle node*” cuando τ es igual al periodo de vibración, T . De todas las trayectorias accesibles, el sistema elige la más estable, que en este caso corresponde a un vuelo de duración igual a un periodo. Si aumenta aún más Γ , aparece una nueva bifurcación por duplicación de periodo dando lugar a una rama de vuelos largos, cuya duración es mayor que un periodo, y otra de vuelos cortos, por ser su duración inferior al periodo. La bola, tras realizar un vuelo de duración mayor que T , colisiona con la base vibrante en un instante en que su aceleración es menor que $-g$, iniciando inmediatamente tras la colisión otro vuelo de duración inferior a T . Al aterrizar de nuevo, se queda pegada a la base.

Llegados a este punto se debe hacer una matización: no es equivalente variar la amplitud de oscilación, A , o la frecuencia, ω , para variar el parámetro de control, $\Gamma = \frac{A\omega^2}{g}$. En las expresiones para la posición y velocidad inicial del vuelo parabólico (ecuaciones (1.10) y (1.15)) aparece una doble dependencia en los parámetros ω y Γ . Se ha elegido mantener constante ω y variar A para calcular el tiempo de vuelo en función del parámetro de control Γ .

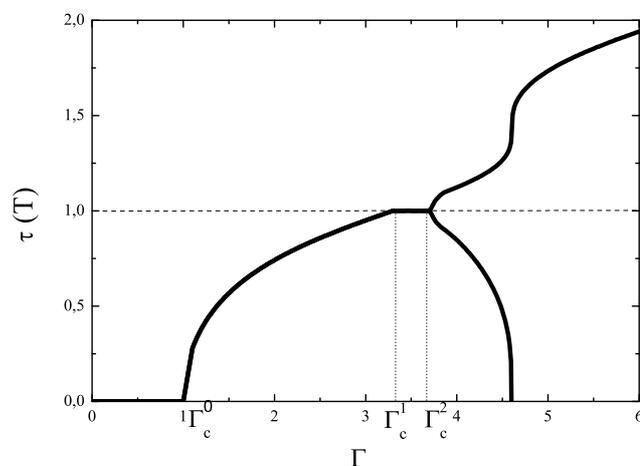


Figura 1.11: Tiempo de vuelo en unidades del periodo de vibración de una bola completamente inelástica en función del parámetro de control Γ . Para calcular el valor de τ se dejó transcurrir un transitorio de cincuenta oscilaciones.

A continuación se analizará en detalle el diagrama de bifurcaciones de la figura 1.11 en función de Γ .

$$0 \leq \Gamma < \Gamma_c^0$$

Para estos valores del parámetro de control la bola no puede despegar de la base e iniciar un vuelo libre porque en ningún instante la aceleración de la base es menor que $-g$. Por tanto el tiempo de vuelo, τ , es cero.

$$\Gamma_c^0 \leq \Gamma < \Gamma_c^1$$

En este caso el tiempo de vuelo es único, puesto que $a(\phi^*) > -g$ para todos los valores de Γ y la bola, tras la colisión, queda pegada a la base un cierto tiempo. El tiempo de vuelo τ es menor que el periodo T .

Cuando $\Gamma = \Gamma_c^1$ el tiempo de vuelo es igual a un periodo. Γ_c^1 corresponde a la primera región de estabilidad [49], cuyo valor es

$$\Gamma_c^1 = \pi \sqrt{n^2 + \frac{1}{\pi^2}} \Big|_{n=1} = 3,2969 \quad (1.18)$$

$$\Gamma_c^1 \leq \Gamma \leq \Gamma_c^2$$

Por encima de Γ_c^1 el sistema sufre una bifurcación de tipo “*saddle node*” donde la rama estable corresponde a $\tau = T$. El sistema evoluciona hasta alcanzar esta rama ajustando la fase en la que empieza y termina el vuelo, ϕ_0 y ϕ^* respectivamente. De tal manera que el tiempo de vuelo después de muchos ciclos de vibración tiende a T para todos los valores de Γ en esta región.

Γ_c^2 corresponde al primer punto fijo del modelo[51], cuyo valor es

$$\Gamma_c^2 = \pi \sqrt{n^2 + \frac{4}{\pi^2}} \Big|_{n=1} = 3,7242 \quad (1.19)$$

$$\Gamma > \Gamma_c^2$$

Para estos valores del parámetro de control, la bola, tras despegar en ϕ_0 , realiza un vuelo largo, τ_l , de duración mayor que un periodo. Cuando choca con la base en ϕ_l^* , su aceleración satisface

$$a(\phi_l^*) < -g \quad (1.20)$$

de modo que inicia inmediatamente otro vuelo de duración τ_c , de duración inferior al periodo. Aparece entonces una bifurcación en el tiempo de vuelo por duplicación de periodo.

Puesto que el vuelo corto empieza inmediatamente después de terminar el largo, para no inducir a error con la notación se empleará $\phi_c = \phi_l^*$ para denotar la fase inicial donde empieza el vuelo corto y $\phi_l = \phi_0$ para la fase inicial del vuelo largo.

La bifurcación por duplicación de periodo se debe a que la velocidad inicial del vuelo largo, $v_l = v(\phi_l)$, es mayor que la velocidad inicial del vuelo corto, $v_c = v(\phi_c)$. Esta afirmación es sencilla de demostrar puesto que $\tau_l > T$, de modo que

$$\phi_c = \phi_l^* = \phi_0 + \omega\tau_l = \phi_l + \omega\tau_l \Rightarrow \phi_c \text{ mód } 2\pi > \phi_l \text{ mód } 2\pi \quad (1.21)$$

Tanto ϕ_l como ϕ_c son menores que $\pi/2$. A partir de la figura 1.10 puede ser que

$$\frac{d}{d\phi} \sin(\phi) \Big|_{\phi_l, \phi_c} > 0 \Rightarrow \cos \phi_l > \cos \phi_c \quad (1.22)$$

usando entonces la ecuación 1.15, se deduce

$$v_l > v_c \quad (1.23)$$

La altura máxima que se alcanza en el vuelo es

$$h^{max} = \frac{v_0^2}{2g} \quad (1.24)$$

siendo v_0 la velocidad inicial. De esta manera, la altura máxima que alcanza la bola en el vuelo (relativa a la posición inicial) es mayor en el vuelo largo, h_l^{max} , que en el corto, h_c^{max} :

$$h_l^{max} > h_c^{max} \quad (1.25)$$

y por tanto

$$\tau_l > \tau_c \quad (1.26)$$

Al aumentar más el parámetro de control, Γ , τ_l crece y τ_c disminuye simultáneamente. De esta manera la rama inferior de la bifurcación (la de los vuelos cortos) se anula, quedando sólo la rama superior (la de los vuelos largos). Para valores todavía mayores de Γ aparecen nuevas bifurcaciones cuando $\tau = 2T$ (no están representadas en la figura 1.11).

En el siguiente capítulo se explicará el método experimental que se ha empleado para medir el tiempo de vuelo de una capa granular vibrada verticalmente. Esta determinación experimental no es la única que se ha realizado, puesto que se ha obtenido también la trayectoria resuelta en el tiempo de los granos próximos a las paredes para intentar dilucidar el origen del movimiento convectivo.

Capítulo 2

Sistema Experimental

El experimento que se ha realizado consiste en someter un medio granular a una vibración vertical. El medio granular utilizado, que son bolas de vidrio, se coloca dentro de un recipiente cilíndrico, el cual se agita verticalmente mediante un vibrador electromagnético (figura 2.1). En este sistema se han realizado dos tipos de mediciones (ver esquema del experimento en la figura 2.2). La primera consiste en hallar el tiempo de vuelo de una capa granular a partir de la de aceleración medida en la base del recipiente. En la segunda se obtiene la posición de los granos cerca de las paredes resuelta en el tiempo, gracias a la técnica de *particle tracking*, a partir de secuencias de imágenes grabadas con una cámara rápida.

2.1 Medio granular

Como medio granular se han utilizado del orden de 10^4 esferas de vidrio de aproximadamente 0.5 mm de diámetro. Es necesario utilizar tan elevado número de partículas en el experimento para que se manifieste un movimiento colectivo del medio granular y no aparezcan otros efectos característicos de las capas delgadas, tal como se explicó en la introducción.

Para asegurarse cierta uniformidad en el tamaño de las bolas, se han cribado entre dos tamices cuyas luces de malla son $400\ \mu\text{m}$ y $560\ \mu\text{m}$, tomando la precaución de realizar este proceso con la suficiente antelación a cualquier experimento para evitar acumular en las bolas electricidad estática generada en el tamizado. A partir de medidas de su tamaño hechas con una lupa binocular se obtiene un diámetro de $0,43 \pm 0,06$ mm siendo entonces la polidispersidad en tamaños del 14%.

La forma de las bolas es más parecida a un elipsoide de revolución que a una esfera.

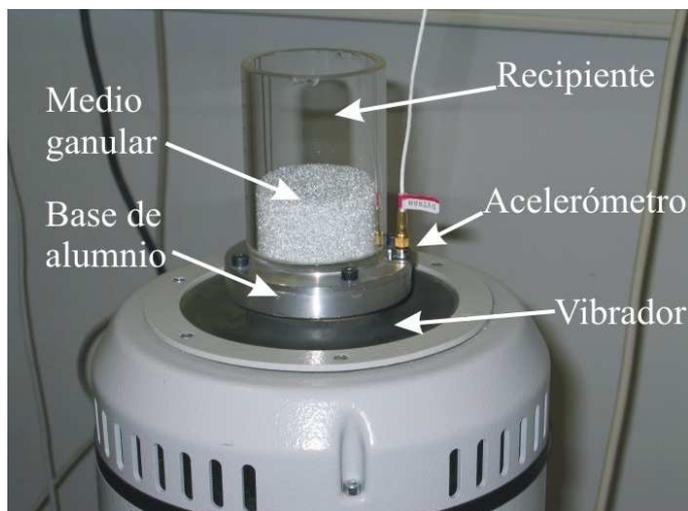


Figura 2.1: Imagen del recipiente, con el medio granular, unido al vibrador. A la derecha de la imagen se puede observar el acelerómetro.

Sin embargo, medidas similares a las de estos experimentos hechas con arena han proporcionado los mismos resultados. Por tanto la polidispersidad en forma y tamaño no parece que sean parámetros relevantes en el experimento.

La geometría de la capa de material granular se caracteriza por la altura de la capa, h , normalizada con el diámetro de una bola, d_b ,

$$N = h/d_b$$

El rango explorado va desde $N = 20$, que corresponde a 30 g de material granular, hasta $N = 100$, que corresponde a 150 g.

2.2 Sistema mecánico y vibrador

Como recipiente se ha utilizado un cilindro de vidrio (borosilicato) para reducir la carga electrostática generada por el rozamiento de las bolas con el contenedor. El diámetro exterior es de 60.0 mm, el interior de 51.6 mm y la pared tiene un espesor de 4.2 mm. La base es un disco del mismo material y tiene un espesor de 3 mm. La altura de la pared lateral del contenedor cilíndrico se varía en función de la altura de la capa de granos para reducir las resonancias inducidas por la vibración en el sistema. Se ha utilizado un altura máxima de 80 mm y una mínima de 30 mm. A fin de reducir la carga electrostática generada se ha rociado con un spray antiestático el contenedor cada vez que se ha iniciado un nuevo experimento.

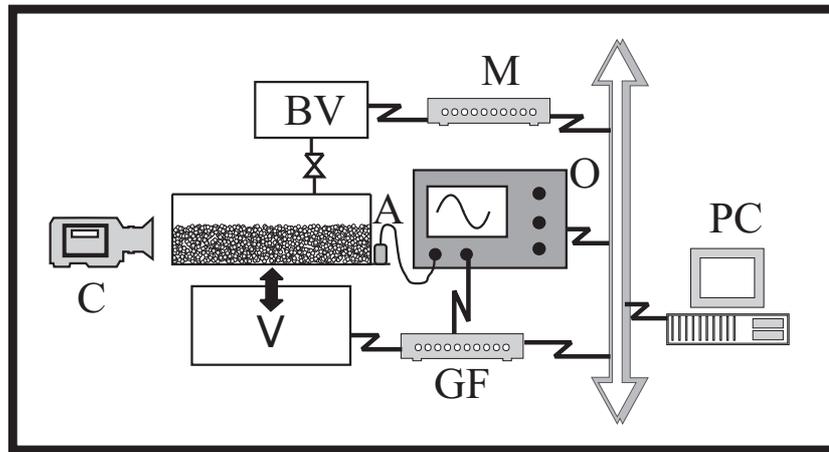


Figura 2.2: Esquema del montaje experimental. Las abreviaturas empleadas corresponden a C: cámara; V: vibrador; A: acelerómetro; GF: generador de funciones; O: osciloscopio; BV: bomba de vacío; M: multímetro; PC: ordenador personal

La base del contenedor y la pared cilíndrica están pegadas entre sí con un pegamento de cianocrilato o de resina epoxi indistintamente. A su vez, base y pared están pegadas a una placa de aluminio que se sujeta al vibrador mediante tornillos. Se ha puesto especial cuidado para que el contenedor de vidrio y la base de aluminio estén bien centrados y así evitar resonancias al ser sometidos a vibración.

Una vez preparada la celda de convección se coloca sobre el vástago de un vibrador electromagnético (modelo Tira Vib 52110, *V* en el esquema de la figura 2.2). Este instrumento es capaz de suministrar una aceleración de hasta quince veces la aceleración de la gravedad a una masa de 1 kg con una distorsión menor del 1% y una aceleración transversal residual de menos de 0.05 *g*. Para asegurarse que el sistema está alineado con la vertical, se nivela con una precisión de $\pm 0,2^\circ$.

El vibrador se comanda con un generador de funciones (Stanford Research DS345, *GF* en el esquema de la figura 2.2) mediante una señal sinusoidal de frecuencia 110 Hz y amplitud variable. Se ha seleccionado este valor de frecuencia para evitar ruidos introducidos por la red eléctrica (múltiplos de 50 Hz) y la aparición de otras inestabilidades como la formación de patrones en la superficie del material que aparecen a frecuencias más bajas (figura 1.4) y con capas más delgadas. Experimentos previos [4] han demostrado que en el rango de frecuencias entre 80 Hz y 300 Hz el comportamiento de la capa granular es cualitativamente similar, sin que influya la frecuencia.

Se ha dispuesto de un equipo para realizar vacío dentro de la celda de convección,

a la que se le añade en este caso una tapa conectada a un conducto (no aparece en la figura 2.1) por el que se puede evacuar el aire. El equipo está compuesto por una bomba rotatoria (Edwards ED50) que alcanza hasta de 10^{-2} Torr y un sensor Piranni (Edwards M7B C024-17-000) para medir la presión dentro del sistema (*BV* en la figura 2.2).

2.3 Sistema de medida

Para medir la amplitud que suministra el vibrador se ha utilizado un acelerómetro (Endevco 256-100, *A* en el esquema de la figura 2.2), con sensibilidad nominal de 100 mV/g . El acelerómetro se fija con cianocrilato a la base sobre la que está pegada la celda de borosilicato (figura 2.1). Se ha elegido el cianocrilato por ser un pegamento muy rígido cuando cura que no distorsiona la medida de la aceleración.

La señal del acelerómetro se registra conectándolo (previa etapa de amplificación que no se muestra en el esquema de la figura 2.2) a un osciloscopio digital (Hewlett-Packard HP54510, *O* en el esquema de la figura 2.2). Con este instrumento también se registra la señal sinusoidal que produce el generador de funciones para alimentar el vibrador.

El nivel de vacío alcanzado se mide a partir de la señal eléctrica que devuelve el Piranni. Para ello se usa un multímetro (Hewlett-Packard HP 3478A, *M* en el esquema de la figura 2.2). Esta señal va desde 0 mV cuando $P = 760 \text{ Torr}$ hasta 500 mV cuando $P = 10^{-2} \text{ Torr}$.

El generador de funciones, el osciloscopio y el multímetro están conectados mediante un bus GPIB a un ordenador (*PC* en el esquema de la figura 2.2). De esta manera se pueden adquirir datos y controlar todos los instrumentos simultáneamente.

Se ha utilizado una cámara de alta velocidad (Photron Fastcam – 1024PCI 100k, *C* en el esquema de la figura 2.2). Usando un objetivo de microscopio de cuatro aumentos y los adaptadores adecuados, se ha podido grabar la posición de los granos próximos a la pared lateral de la celda a 10000 imágenes por segundo. Para mejorar la calidad de la adquisición se ha utilizado un sistema de iluminación consistente en una fuente de luz fría de intensidad controlada. La luz se guía hasta el experimento con una fibra óptica cuya sección transversal es de 5 mm . De esta manera se consigue una iluminación muy homogénea y constante en el tiempo.

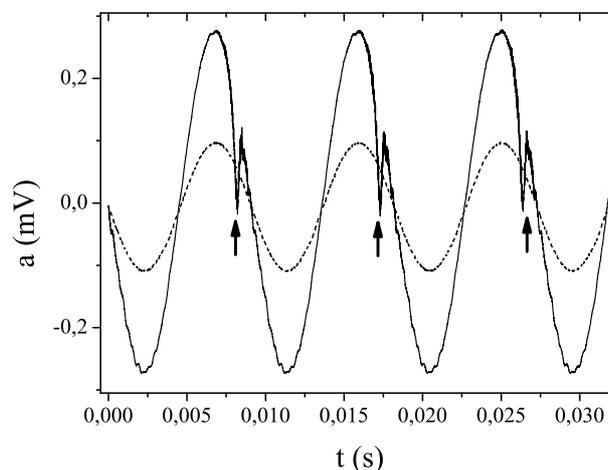


Figura 2.3: Aceleración medida en la base del contenedor. La línea continua corresponde a $\Gamma = 3,31$ y la discontinua a $\Gamma = 0,95$. El medio granular tiene una altura de $N = 33$ ($m = 50g$). Las flechas señalan el instante donde aparece el pico causado por la colisión de los granos contra la base del recipiente cuando $\Gamma > 1$.

2.4 Medida del tiempo de vuelo

Tal como se indicó en la introducción, una capa granular suficientemente gruesa se puede considerar un medio completamente inelástico. Cuando la aceleración adimensional de la excitación, Γ , es mayor que uno, la capa puede realizar un vuelo parabólico durante un tiempo τ . El objetivo es medir experimentalmente este tiempo de vuelo.

Observaciones experimentales demuestran que la señal de la aceleración en la base de la celda medida con el acelerómetro, cuando $\Gamma < 1$, es perfectamente sinusoidal. Pero al incrementar el parámetro de control aparece un pequeño pico para $\Gamma \geq 1$ (figura 2.3). Este pico se debe a la colisión entre los granos y la base de la celda cuando el medio granular aterriza al terminar el vuelo. Midiendo la fase en la que se produce el impacto, y asumiendo que la capa se despega cuando la aceleración del recipiente es igual a la de la gravedad, se puede conocer el tiempo de vuelo.

Adquisición de datos

Para medir la fase a la que se produce el impacto se registra la señal de aceleración procedente del acelerómetro. El proceso de adquisición es el siguiente:

- Con el generador de funciones se excita el vibrador con una señal sinusoidal de frecuencia 110 Hz y una cierta amplitud que determina el valor de Γ .
- Se ha comprobado por inspección visual que el flujo demora aproximadamente un minuto en estabilizarse. Para asegurarse que el flujo ha llegado a un estado estacionario se esperan quince minutos. De este estado transitorio no se registran datos.
- Se registra con el osciloscopio la señal del acelerómetro durante un tiempo que abarca más de tres periodos de oscilación (figura 2.3).

Al estar tanto el osciloscopio como el generador de funciones conectados a un ordenador, es posible establecer un protocolo de control y adquisición de datos que automatiza el proceso de medida. De esta manera se puede barrer automáticamente la amplitud de la oscilación en cierto rango de valores, y registrar la aceleración de la manera indicada.

Análisis de los datos

Se han analizado las señales de la aceleración registradas con el sensor situado en la base de la celda. El análisis se hace con el siguiente procedimiento (figura (2.4)):

- Para obtener una medida precisa de la amplitud, A , y la frecuencia de oscilación, f , que permita conocer con exactitud el valor de la aceleración adimensional, Γ , es necesario reconstruir la aceleración que suministra el vibrador al medio granular.

Para ello se ajustan los puntos de la señal medida (en azul en las gráficas superiores de la figura 2.4), excluyendo a los picos debido al impacto de la capa con la base del contenedor, a la siguiente función,

$$a^*(t) = A_0 + A \sin(2\pi ft + \phi_0) \quad (2.1)$$

donde $a^*(t)$ es la aceleración reconstruida (rojo en las gráficas superiores de la figura 2.4), A_0 da cuenta de cualquier *offset* que pudieran tener los instrumentos, A la amplitud de la oscilación, f la frecuencia de oscilación y ϕ_0 el desfase que pueda tener la señal. En el ajuste todos estos parámetros son libres.

- Con los parámetros que se obtienen en el ajuste, A_0 , A , f y ϕ_0 , se calcula la diferencia, $\delta(t)$, entre la aceleración instantánea, $a(t)$, y la aceleración reconstruida, $a^*(t)$.

$$\delta(t) = a(t) - a^*(t) = a(t) - (A_0 + A \sin(2\pi ft + \phi_0)) \quad (2.2)$$

Esta diferencia se ha representado en azul en las gráficas inferiores de la figura 2.4.

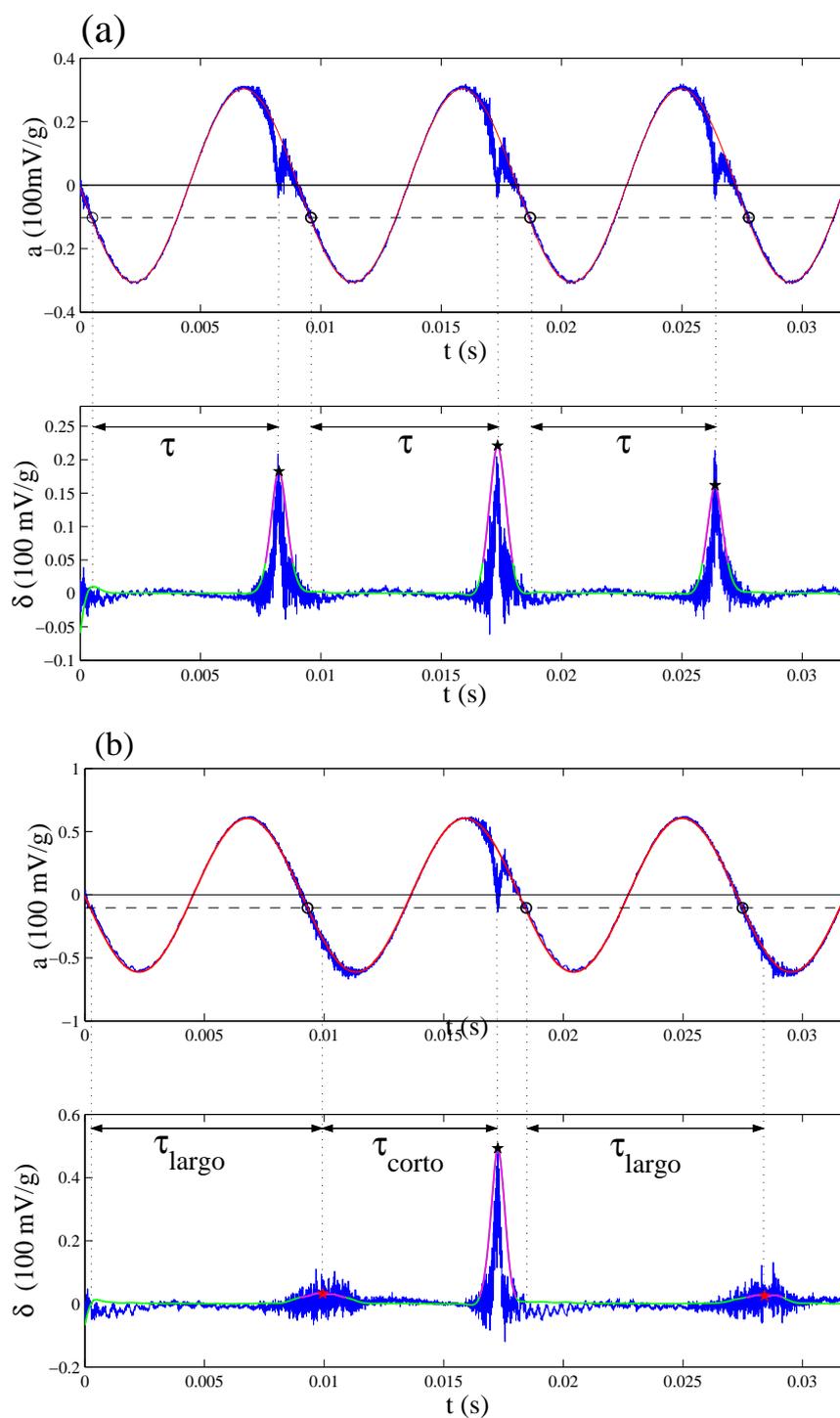


Figura 2.4: Señal de la aceleración medida en la base de la celda antes (a) y después (b) de la duplicación de periodo. Arriba está representada la señal medida, $a(t)$, en azul, y el ajuste de una senoide, $a^*(t)$, en rojo. La línea discontinua horizontal representa $-g$ y los círculos marcan el momento donde la señal de la aceleración es $-g$. Abajo en azul está representada la diferencia $\delta(t)$ entre la señal medida y el ajuste. En verde aparece la señal filtrada que queda por debajo del umbral y en magenta la que queda por encima. Las estrellas señalan el instante donde se produce la colisión.

- Se suaviza la señal $\delta(t)$ aplicando un filtro Butterworth de tercer orden. El resultado se representa en las gráficas inferiores de la figura 2.4 en verde y magenta. La parte magenta representa la señal correspondiente al impacto y se ha seleccionado eligiendo los puntos que han superado cierto umbral. Este umbral se escoge por inspección visual.
- Calculando el promedio de la señal de impacto, se puede determinar con una precisión del 3% el instante, t_c , donde ha ocurrido la colisión entre la capa y la base. Se ha representado con estrellas en las gráficas inferiores de la figura 2.4 el instante donde se produce la colisión entre los granos y la base del recipiente.
- A partir de los datos experimentales se determina en qué instante, t_0 , la aceleración de la base alcanza el valor $-g$, que es el momento en que la capa despega, iniciando el vuelo. También se puede obtener t_0 a partir de los parámetros obtenidos en el ajuste, A_0 , A , f , y ϕ_0 , imponiendo la condición $a^*(t_0) = -g$. Se ha marcado con círculos en las gráficas superiores de la figura 2.4 el instante en el que la capa despega.
- El tiempo de vuelo, τ , se calcula restando ambos tiempos, obteniéndose

$$\tau = t_c - t_0$$

antes de la bifurcación de periodo, y

$$\begin{cases} \tau_{largo} = t_c - t_0 \\ \tau_{corto} = t_c - t_{largo} \end{cases}$$

tras la bifurcación de periodo.

2.5 Medida de la posición de los granos cerca de las paredes laterales

Uno de los objetivos de este trabajo es caracterizar el movimiento resuelto en el tiempo de los granos que están próximos a las paredes laterales de la celda cuando aparece un movimiento convectivo. Para ello se han utilizado técnicas de análisis de imágenes aplicadas a una filmación de alta velocidad.

Los granos, al ser iluminados, focalizan la luz en un único punto debido a su forma esférica. Haciendo uso de esta propiedad, se puede lograr que cada grano próximo a la pared lateral refleje un único punto muy brillante al ser iluminados con un haz rasante

proveniente de una fuente de luz extensa¹. La intensidad de esta fuente es variable y se ajusta para que el reflejo de los granos sature la intensidad del sensor de la cámara. Se han empleado distintas velocidades para la adquisición de las secuencias de imágenes (1000, 2000, 4000 ó 10000 imágenes por segundo).

El tipo de objetivo elegido consta de una lente de microscopio de cuatro aumentos y con un diámetro de 5 mm. Haciendo uso de los adaptadores adecuados se puede obtener una imagen ampliada de los granos en la pared con mucha resolución espacial (la máxima resolución espacial que se ha alcanzado es de 120 pixels/mm). Debido a que este objetivo es una sola lente y no posee ningún diafragma adicional, la profundidad de campo que se alcanza está limitado por el propio tamaño de la lente. Como la superficie del recipiente es curva, sólo se puede utilizar una pequeña parte del campo que se registra. Dicho de otra manera, muchos de los granos aparecen desenfocados en la imagen. En general, el número de puntos brillantes en cada imagen no supera los cincuenta.

Simultáneamente, se ha empleado el mismo montaje experimental que se ha usado para medir el tiempo de vuelo con el fin de monitorizar la amplitud de oscilación.

“Particle tracking”

La técnica que se ha utilizado para obtener la posición de los granos resuelta en el tiempo a partir de las secuencias de imágenes se conoce como “*particle tracking*” (seguimiento de partículas). Este tipo de técnicas de análisis están diseñadas para seguir la trayectoria de objetos en movimiento que aparecen a lo largo de una secuencia de imágenes; en el caso que aquí se describe, la posición de los granos próximos a las paredes laterales de la celda cuando se encuentran en movimiento convectivo.

Al hablar de *particle tracking*, habitualmente se hace referencia a toda una familia de métodos. Se ha elegido una variante específicamente pensada para medios que están poco sembrados (aparecen pocas partículas en las imágenes) y la frecuencia de adquisición de imágenes (la tasa de muestreo) es elevada.

Cuando se fotografían objetos en movimiento, uno de los factores a tener en cuenta es el tiempo de exposición. Si el tiempo de exposición es largo, las imágenes aparecen deformadas y dejan trazos. En cada adquisición, se ha utilizado el mínimo tiempo de exposición que permite que los puntos brillantes continúen saturando el sensor de la cámara (figura 2.5), y que no provoca la deformación de su imagen.

¹Precisamente debido a esta propiedad, los granos utilizados en el experimento se usan habitualmente para la señalización horizontal de las vías de tráfico rodado, mezclados con la pintura blanca.



Figura 2.5: Izquierda, imagen de los granos en la pared. En el borde derecho de esta imagen aparece una escala graduada que se emplea para calcular la fase correspondiente a cada imagen. Derecha, imagen de la escala exterior para la conversión pixel–distancia.

En la parte exterior de la celda se ha colocado una escala graduada con divisiones cada medio milímetro y cuyo origen coincide con la base de la celda. Esta escala tiene un doble objetivo. Haciendo que la imagen de esta aparezca enfocada, se puede obtener el factor de conversión píxel–longitud de cada secuencia de imágenes. Además, como el origen de la escala coincide con la base de la celda, se puede conocer la coordenada vertical de cualquier punto brillante en el sistema de referencia del laboratorio (figura 2.5, derecha).

Tras obtener una imagen de esa escala, se enfocan los puntos brillantes moviendo el conjunto de la cámara y el objetivo. Al mover todo el sistema no varía la distancia focal. De esta manera el factor de conversión píxel–longitud sigue siendo válido. En la parte interior de la celda (figura 2.5, izquierda), se ha colocado también una pequeña escala graduada que servirá para conocer el instante preciso de tiempo, y con ello la fase, en el que se ha tomado esa imagen. Esto se explicará más adelante.

El proceso de adquisición de imágenes es muy sencillo. Tras seleccionar el área de interés, y con la celda en reposo, se ilumina la pared lateral tomando la precaución de que cada bola refleje un solo punto brillante de luz y que la intensidad de éste sature el sensor de la cámara. Se ajusta el tiempo de exposición de la cámara para que sea el mínimo posible siempre que se satisfaga la última condición. Después se acciona el vibrador con una frecuencia y amplitud determinada. Tras esperar un tiempo razonable (aproximadamente 15 minutos), se lleva cabo la adquisición de la secuencia de imágenes. El propio software de la cámara digitaliza y almacena la secuencia grabada con formato AVI.

Utilizando las herramientas del Image Processing Toolbox de MATLAB[®] se ha elaborado un programa para implementar esta técnica específica de “*particle tracking*” A

continuación se explicará brevemente en qué consiste este proceso.

Binarización Para detectar la posición de cada partícula se va a elegir el centroide del punto brillante producido por el reflejo de la luz como se aprecia en la figura 2.6(a). Las imágenes obtenidas directamente desde la cámara están codificadas en 256 niveles de gris. Es necesario binarizarlas, esto es, asignar a todos los píxeles de cada imagen dos únicos posibles valores de intensidad, para poder detectar esas regiones de interés. A tal fin se elige empíricamente para cada secuencia un umbral de niveles de gris, i_g , tal que los valores de intensidad de los puntos brillantes sea mayor que éste. De este modo, la imagen original en escala de grises, $i = i(x, y) \in [0, 255]$ se transforma otra en blanco, $i'(x, y) = 1$, que corresponden a las regiones más luminosas de la imagen, y negro, $i'(x, y) = 0$, que corresponden al resto.

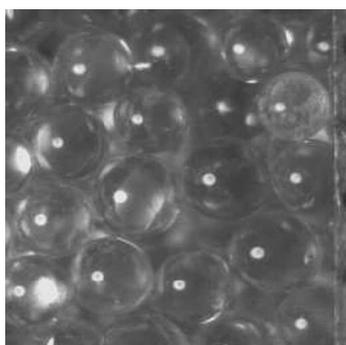
$$i = i(x, y) \in [0, 255]; \quad i'(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } i_g \leq i(x, y) \\ 0 & \text{si } i(x, y) < i_g \end{cases} \quad (2.3)$$

Se puede ver el resultado de este proceso en la figura 2.6(b).

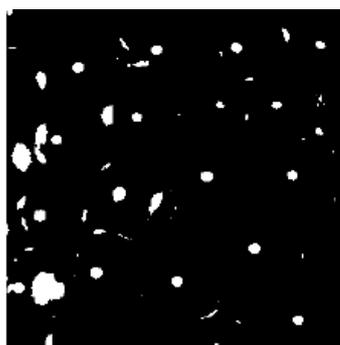
Análisis morfológico De todas las regiones blancas que se han obtenido, se seleccionan sólo las que cumplan ciertos criterios. Como se puede apreciar en la figura 2.6(a), las regiones iluminadas que corresponden al reflejo de la fuente extensa son aproximadamente circulares y tienen un tamaño parecido entre sí. Aparecen otros muchos reflejos de intensidad suficiente como para saturar el sensor de la cámara. Para poder discriminar unos de otros, se ha llevado a cabo un análisis morfológico de las áreas iluminadas. Con este análisis se puede obtener, entre otros, el área, A , y la excentricidad, e , de cada región. Estimando un área mínima, A_m , y otra máxima, A_M , de las regiones de interés, se utilizarán estas cotas para discriminar los puntos brillantes. También se ha impuesto una cota máxima para la excentricidad, E a fin de seleccionar regiones circulares.

$$\begin{cases} A_m \leq A \leq A_M \\ E \leq e \end{cases} \quad (2.4)$$

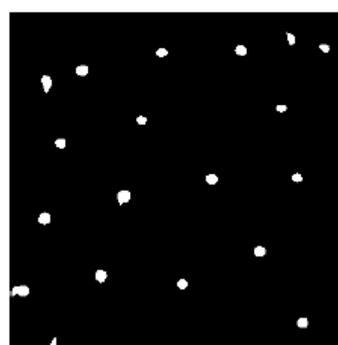
Así, de todas las regiones que aparecen en la imagen binarizada, se escogen de manera automática los puntos brillantes que más fielmente representen el reflejo que produce cada partícula, como puede comprobarse en la figura 2.6(c). Se calcula el centroide



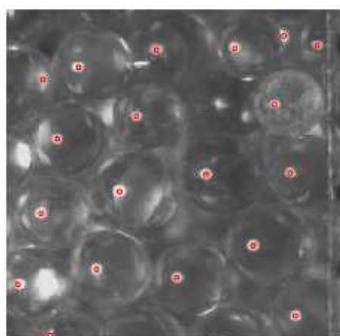
(a) Imagen tomada directamente de la secuencia



(b) Imagen binarizada.



(c) Selección de las regiones brillantes en función de parámetros morfológicos.



(d) Centroides de las regiones brillantes marcados con círculos rojos.

Figura 2.6: Esquema del proceso de *particle tracking*.

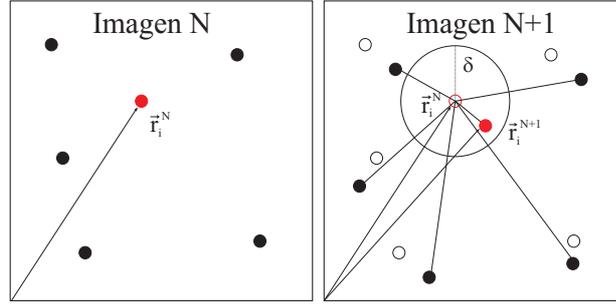


Figura 2.7: Esquema del proceso de construcción de las trayectorias. (a) Esquema de la situación de centroides de la imagen N de la secuencia. El que está marcado con rojo es el que se está siguiendo. (b) Esquema de la situación de centroides de la imagen $N + 1$ (símbolos solidos) y los de la imagen N (símbolos huecos). El círculo hueco que está marcado en rojo es la posición de la partícula en la imagen N . La posición de la partícula en la imagen $N + 1$ es el círculo sólido marcado en rojo dentro de la circunferencia de radio δ

de la regiones blancas seleccionadas usando la relación:

$$\vec{r}_c = (x_c, y_c) = \frac{\int_A i \vec{r} d\vec{r}}{\int_A i d\vec{r}} = \left(\frac{\sum x \cdot i(x, y)}{\sum i(x, y)}, \frac{\sum y \cdot i(x, y)}{\sum i(x, y)} \right) \quad (2.5)$$

De esta manera se consigue una resolución mejor que el tamaño del pixel de la cámara en la determinación del centroide de las regiones brillantes. Se puede ver el resultado de este proceso en la figura 2.6(d) en la que se ha representado con puntos rojos el centroide de cada partícula.

El hecho de que el centroide del punto brillante no coincida con el centro de las partículas, como ocurre en numerosas ocasiones, no invalida este método. Se ha comprobado que durante varios ciclos de vibración el reflejo que produce una partícula no se mueve respecto al centro de ésta, ni tampoco cambia de forma. Esto implica que aunque no se conozca la posición del centro de los granos, sí se ha determinado con mucha precisión la posición de un punto arbitrario (centroide del punto brillante) que no se mueve respecto al centro del grano. De esta manera, aunque en la determinación de la posición de las partículas se puede cometer un pequeño error, tanto el desplazamiento como la velocidad y la aceleración se conoce con gran precisión y exactitud mediante la determinación de estos puntos arbitrarios.

Trayectorias Una vez se han analizado todas las imágenes pertenecientes a la secuencia, se reconstruyen las trayectorias. De la imagen N se elige el centroide i –ésimo de una de las regiones brillantes, \vec{r}_i^N . En la imagen $N + 1$, se localizan todos los centroides que están en un círculo de radio δ alrededor de \vec{r}_i^N . El valor de δ es

de aproximadamente cinco veces la distancia que se mueve un centroide entre dos imágenes consecutivas. Si en esta imagen existe un solo centroide \vec{r}_i^{N+1} dentro del círculo, tanto \vec{r}_i^N como \vec{r}_i^{N+1} se concatenan en la misma trayectoria (figura 2.7). Este proceso se itera con todas las imágenes de la secuencia hasta que:

1. Se llega al final de la secuencia de imágenes
2. No existe ningún nuevo centroide en el círculo de radio δ en la imagen $N + 1$
3. Aparece más de un centroide en el círculo de radio δ en la imagen $N + 1$. En ese caso alguno de los centroides es espurio. Al no poderse resolver la indeterminación se detiene la iteración.

Cuando se llega al final de este proceso, se puede decir que se ha obtenido la trayectoria de cada grano. Esta consta de dos series de datos, una que corresponde al número de imagen de la secuencia donde aparece el centroide y la otra que son sus coordenadas x_i e y_i . Una vez elaborada la trayectoria del centroide \vec{r}_i^N desde la imagen N , se elige, si existe, otro centroide en la imagen N y se repite el proceso. En caso contrario, se elige un centroide en la imagen $N + 1$ que todavía no pertenezca a ninguna trayectoria. Si no existiera, se continuaría con la imagen $N + 2$, etc.

Escala A la derecha de las imágenes de la secuencia aparece una pequeña parte de la escala pegada en la pared interior del recipiente (figura 2.5, izquierda). Para poder obtener la fase precisa del movimiento de la celda es necesario conocer la posición de cada una de las bandas oscuras de la escala en la secuencia completa de imágenes. Para detectar estas bandas oscuras, se binariza la parte de la imagen que ocupa la escala con un sólo nivel de gris i_g con la siguiente condición:

$$i = i(x, y) \in [0, 255]; \quad i'(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq i(x, y) \leq i_g \\ 0 & \text{si } i(x, y) > i_g \end{cases} \quad (2.6)$$

De este proceso resulta una imagen con sólo dos niveles de intensidad. En esta imagen binarizada no es necesario hacer ningún análisis morfológico adicional por la sencillez del caso para seleccionar las regiones de interés. De nuevo se calcula el centroide de estas regiones usando la ecuación 2.5.

Fase de vibración A partir de los datos de la posición de la escala lateral pegada en la parte interior de la celda, se sigue el mismo proceso de concatenación que se ha seguido para los centroides de las regiones brillantes. De esta manera se obtiene la

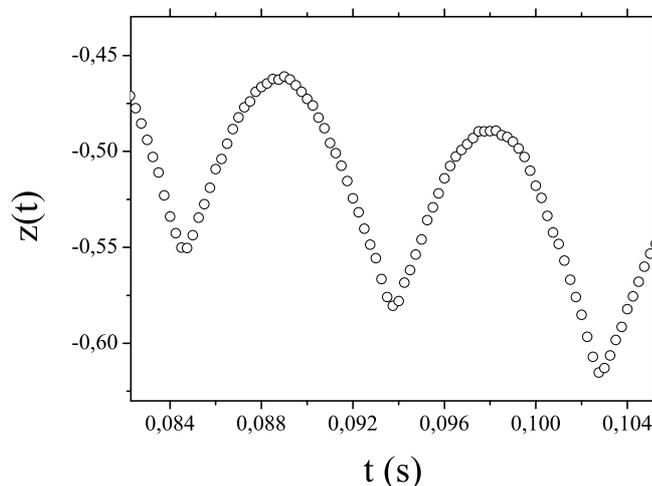


Figura 2.8: Coordenada vertical de la posición de una bola próxima a la pared lateral.

posición de la celda para cada instante de tiempo. La trayectoria que sigue es una senoide $y_b(i) = y_0 + A \cdot \sin(2\pi f \frac{i}{FR} + \phi_0)$ donde i es el número correlativo de la imagen en la secuencia, y_0 una constante, A la amplitud de vibración en píxeles, f es la frecuencia de vibración, FR es la tasa de adquisición de imágenes (abreviatura de “*Frame Rate*”), y ϕ_0 es la fase inicial del movimiento.

Cambio de unidades A partir del parámetro de conversión pixel-longitud, la relación entre alturas relativas a la base, y la tasa de adquisición de imágenes, se pueden convertir las unidades en las que se ha obtenido la trayectoria de los puntos brillantes (píxeles) en unidades de longitud.

De esta manera se consigue medir la trayectoria resuelta en el tiempo de las bolas que están próximas a las paredes laterales con una resolución menor que el tamaño del pixel (figura 2.8). Respecto a los errores en el proceso de medida hay varias fuentes que no se pueden controlar: el tamaño y forma de las regiones brillantes no es el mismo para todas las bolas, diferencias en la iluminación en cada grano, . . . Se ha acotado el margen de error que se comete en la determinación de la posición de los centroides. De aquí en adelante se supondrá que el error en la determinación de la posición de las partículas próximas a las paredes es menor que el 5% para cualquier tasa de adquisición de imágenes.

Los códigos en los que se encuentra implementado este algoritmo están disponibles públicamente en el repositorio de MATLAB[®] Central² y se pueden encontrar con la referencia #13840.

²<http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/13840-simple-particle-tracking>.

Capítulo 3

Movimiento del centro de masas

Cuando la aceleración con la que se fuerza una capa vibrada, a , iguala o supera la gravedad, todo el medio comienza un vuelo libre. A priori, nada indica que pudiera producirse ningún movimiento relativo entre las partículas que componen el medio; sin embargo, aparece la inestabilidad convectiva. Esta consiste en un flujo colectivo y ordenado con geometría toroidal de las partículas que componen el medio, que se da tras superarse el valor el umbral de aceleración adimensional $\Gamma = 1$.

El estudio de dicha inestabilidad se ha abordado en dos partes. Primeramente se ha estudiado la dinámica del centro de masas de todo el sistema, y posteriormente, se ha obtenido con elevada resolución espacio-temporal el movimiento de los granos en las paredes laterales del contenedor. El primer aspecto se trata en este capítulo, mientras que el último punto se ha desarrollado en el capítulo siguiente.

3.1 Dinámica del centro de masas

A continuación se detallará la dinámica del centro de masas de la capa granular. Para reducir la dinámica de todo el conjunto de partículas que componen el medio granular a un punto, al que se adjudica la masa de todo el medio, cuya posición es el centro de masas del sistema, se deben hacer las siguientes hipótesis:

1. Debido al pequeño valor del coeficiente de restitución de los medios granulares ($\epsilon \approx 0$) la capa se puede considerar completamente inelástica.
2. Tras el final del vuelo libre, la transferencia de momento lineal puede considerarse simplemente como una perturbación de la cantidad de movimiento total, puesto que $M_{vibrador} \gg m_{granular}$.

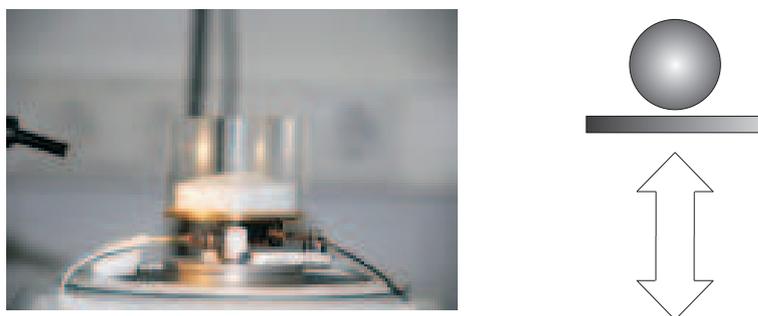


Figura 3.1: Como paradigma de una capa granular se toma una bola inelástica si únicamente se considera el centro de masas.

3. La anchura y altura de la capa granular son irrelevantes en el movimiento del centro de masas del sistema.

Con estas hipótesis, el movimiento de toda la capa se reduce al de una partícula completamente inelástica vibrada armónicamente (figura 3.1). Para estudiar la dinámica de este sistema se hará uso del tiempo de vuelo de la capa vibrada, medido según se explicó en el capítulo 2.4. A fin de comprobar si existe histéresis en el fenómeno, el tiempo de vuelo se ha medido primeramente aumentando la aceleración adimensional, Γ , y después disminuyéndola. Para ello se ha mantenido constante la frecuencia de vibración, $f = 110\text{Hz}$, y se ha variado la amplitud de vibración. Además, se ha tomado la precaución de dejar pasar más de quince minutos cada vez que se variaba Γ , de modo que se alcanzaba un estado estable antes de realizar la medida de $\tau(\Gamma)$.

En la figura 3.2 se muestran el tiempo de vuelo medido para una capa granular de 30 g de peso (equivalente a una altura de 20 diámetros de partícula) y el predicho por el IBBM (que es independiente de la masa de la bola). El tiempo de vuelo, τ , es cero para valores de $\Gamma < 1$. Al aumentar el parámetro de control el tiempo de vuelo también aumenta monótonamente hasta que se hace igual al periodo de vibración en $\Gamma = 4,9 \pm 0,1$, apareciendo entonces una bifurcación por duplicación de periodo. A partir de este valor existen dos tiempos de vuelo distintos para cada Γ . La capa se despega cuando la aceleración del contenedor es $-g$, realizando un vuelo que es más largo que un periodo de vibración; al terminarlo la aceleración de la base es de nuevo menor que $-g$, de tal manera que la capa despega inmediatamente después de chocar con el contenedor, realizando un segundo vuelo, esta vez más corto que un periodo. Que el segundo vuelo sea más corto que el primero se debe a que la velocidad con la que la capa se despega de la base tras la colisión es menor que cuando inicia el primer vuelo. Al aumentar Γ aun más, tanto la rama superior de la

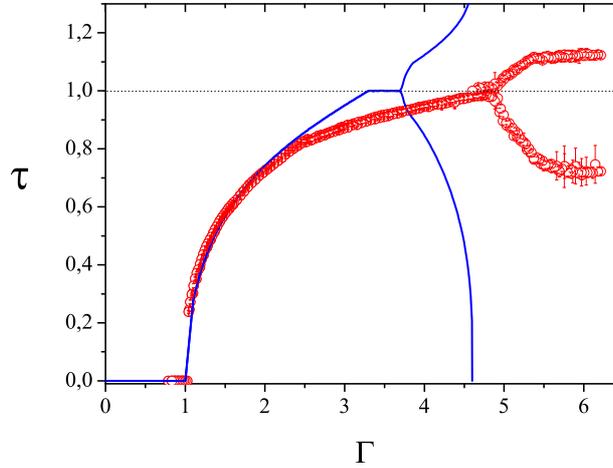


Figura 3.2: Diagrama de bifurcaciones para una capa de 30 g (cuyo espesor equivale a unos 20 diámetros de grano) y las predicciones del IBBM.

bifurcación (la correspondiente a los vuelos largos) como la inferior (la que corresponde a vuelos cortos) saturan. En la figura 3.2 se han representado los tiempos de vuelo para las series de mediciones en las que se aumenta Γ junto con las series en que se va reduciendo; como se puede apreciar, no hay ningún tipo de histéresis.

Se han explorado valores del parámetro de control de hasta $\Gamma \approx 6,5$. Más allá de este valor eventualmente puede aparecer una bifurcación de tipo espacial, en forma de dos rollos convectivos longitudinales que sustituyen a la circulación toroidal [4]. El movimiento de los dos rollos está en oposición de fase, es decir, mientras un rollo está haciendo un vuelo largo el otro hace uno corto, y viceversa. Por esta razón la información del instante en que los rollos colisionan con la base aparece mezclada, siendo imposible resolver la duración de vuelo de cada rollo a partir de la señal de aceleración adquirida.

Como se puede apreciar en la figura 3.2, aparecen diferencias significativas entre el modelo y las medidas experimentales. Se enumeran a continuación:

1. Desde $\Gamma \approx 2,5$ hasta que aparece la duplicación de período, los resultados experimentales y las predicciones difieren, siendo en todos los casos el tiempo de vuelo medido en los experimentos más pequeño que el predicho.
2. Aunque pareciera existir un intervalo previo a la duplicación de período en el que el tiempo de vuelo se diría que es igual a T , las mismas medidas realizadas en otras condiciones experimentales (aquí no se muestran), apuntan que esa pequeña meseta

puede provenir de una limitación experimental.

3. Las ramas de la bifurcación tienen un comportamiento claramente distinto del esperado. Tanto la rama que corresponde a los vuelos largos como la de los vuelos cortos saturan, mientras que el modelo predice que la primera debe seguir creciendo para dar lugar a otras duplicaciones y la segunda tender a cero.

Las desviaciones de los resultados obtenidos experimentalmente respecto al modelo utilizado son notables. Para intentar elucidar su origen se han realizado diversas pruebas cambiando las condiciones del experimento, que se describen a continuación.

3.2 Influencia de la profundidad de la capa granular

Una de la hipótesis que cobra a fuerza para explicar este comportamiento anómalo es el efecto de la fricción que ejercen los granos sobre las paredes laterales del recipiente. Efectivamente, al desarrollar el modelo de la bola inelástica no se tuvo en cuenta el rozamiento que pudiera sufrir la bola durante el vuelo. Tal como se explicó en el capítulo introductorio, a diferencia de los fluidos ordinarios, donde toda la presión se ejerce sobre la base del recipiente que los contiene, la existencia de cadenas de fuerza en el interior de los medios granulares, hace que parte del peso de la capa se dirija hacia las paredes laterales del contenedor. Esa fuerza ejercida contra los laterales es la fuerza normal que por fricción sólida resulta en la aparición una fuerza de rozamiento de los granos con el recipiente. Al aumentar la altura de la capa granular, la presión neta ejercida sobre la pared lateral es cada vez mayor, y ,por tanto, también será mayor la fuerza de rozamiento entre el medio granular y el recipiente.

Para corroborarlo, se ha obtenido el tiempo de vuelo para capas de distintas profundidades, variando su masa desde 30 gramos hasta 150 gramos, lo que equivale a variar la profundidad desde 7 hasta 36 mm. En la figura 3.3 se han representado los tiempos de vuelo para capas de diferentes profundidades. A continuación se detallan las principales apreciaciones.

1. Para aceleraciones previas a la duplicación de periodo, aumentar la profundidad de la capa implica una pequeña disminución de su tiempo de vuelo.
2. La aceleración a la que aparece la duplicación de periodo es levemente mayor para capas más estrechas. El valor preciso de aceleración en el que ocurre la bifurcación está mejor definido en las capas más estrechas ($N = 20$). En el caso de capas grandes

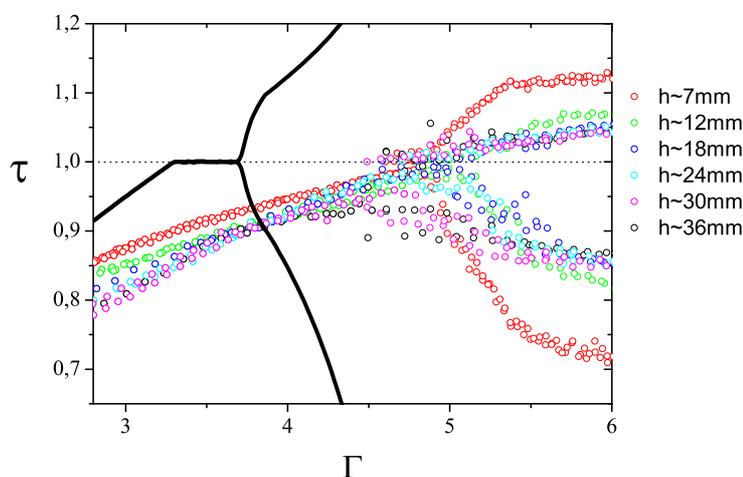


Figura 3.3: Diagrama de bifurcaciones para capas de distintas alturas. Van desde 7 mm (30 gramos) hasta 36 (150 gramos). La línea sólida corresponde al IBBM.

resulta sumamente dificultoso determinar el punto exacto en el que aparece esta bifurcación.

3. Para capas por encima de los 10 mm las ramas tienen comportamientos semejantes y se separan lentamente. En el caso de la capa más estrecha (7 mm de profundidad) sin embargo, las ramas se separan de forma bien acusada.

En el caso de capas que se podrían calificar de muy profundas, por encima de 25 mm, se pierde coherencia en el instante en el que las diferentes partes de la capa terminan el vuelo, haciéndose muy difícil determinar la aceleración a la que se produce la duplicación de periodo. Adicionalmente, a la vista de la figura 3.3, el tiempo de vuelo para el que se produce la bifurcación parece ser inferior a un periodo de vibración. Debido a las dificultades que presenta la determinación precisa del tiempo de vuelo se ha decidido prescindir del estudio sistemático de capas cuya altura sea más de la mitad del diámetro de la celda ($m > 100$ g).

Una de las hipótesis que podrían explicar el efecto de la disminución del tiempo de vuelo al aumentar la profundidad de la capa para aceleraciones menores que la crítica es el incremento de la fricción al que está sometido todo el medio, pues es mayor la superficie de contacto con las paredes laterales del contenedor. Pero el cambio de altura también afectará a la permeabilidad de la capa granular, de manera que resulta sumamente complejo separar los efectos que provoca un cambio en la profundidad de la capa sobre su tiempo de vuelo.

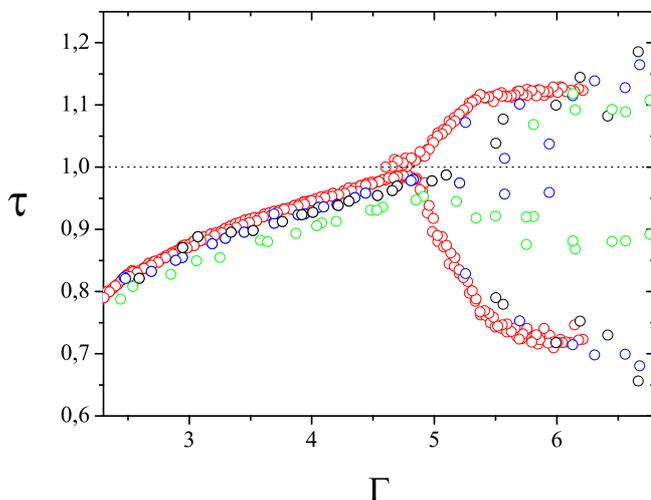


Figura 3.4: Diagrama de bifurcaciones para capas con distintas propiedades de fricción ($m = 30$ g, $N = 20$ capas). Rojo, celda de vidrio; verde, celda con granos adheridos en la pared lateral; azul, celda de acero pulido; negro, granos con grafito.

El tema de la permeabilidad se desarrollará más adelante.

Una forma de desacoplar (al menos a primer orden) estos dos efectos es cambiar la rugosidad de las paredes y estudiar si esto redundaría en una variación significativa en la dinámica observada. Para ello se ha modificado la interacción entre las partículas y las paredes utilizando:

- Celda de vidrio.
- Celda de acero pulido.
- Celda de acero rayado (grabando surcos en las paredes laterales y en la base).
- Celda con granos pegados a la pared lateral.
- Partículas rociadas con polvo de grafito como lubricante.

Como se puede apreciar en la figura 3.4, el efecto en el tiempo de vuelo de cambiar la naturaleza de las paredes del contenedor es mucho menos apreciable que el cambio de profundidad de la capa: el punto de bifurcación apenas varía, las ramas de la bifurcación sólo se ven afectadas en el caso de la celda con granos adheridos y el tiempo de vuelo antes de la duplicación de periodo apenas se ve afectado.

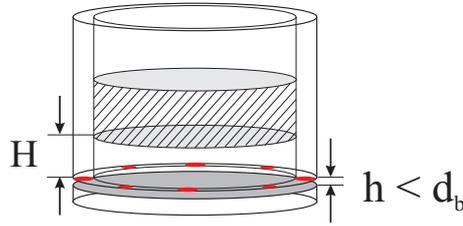


Figura 3.5: Esquema del montaje de la celda con rendija inferior. Los círculos rojos representan las partes en las que se colocó cera como pegamento.

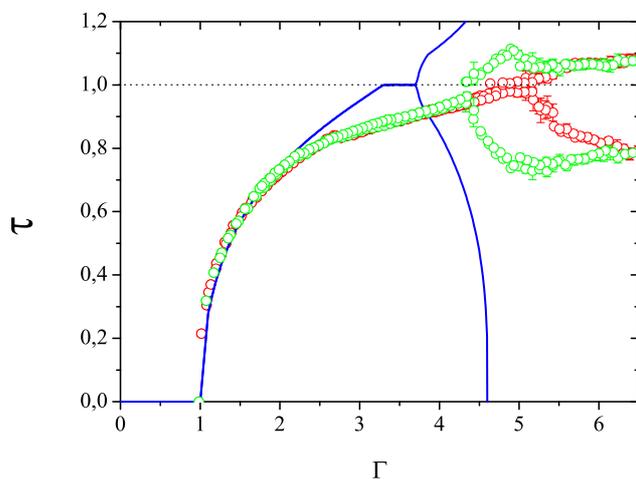
La conclusión que se desprende de esta exploración es que la rugosidad de las paredes no afecta de manera significativa la dinámica del centro de masas, aunque sí que influye en la velocidad del movimiento de convección como se demostrará en la sección 4.1.

3.3 Efecto del gas intersticial

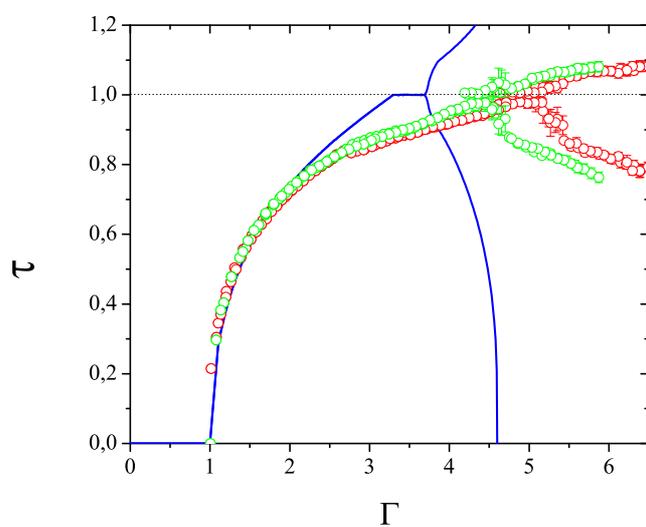
Durante el vuelo de la capa granular (cuando $\Gamma > 1$) se desarrolla un “*gap*” o brecha entre la base de la celda y la parte inferior de la capa. El volumen de este espacio varía a lo largo del ciclo de vibración, lo que fuerza un flujo de aire a través de la capa granular. Así, durante el vuelo, la capa en su conjunto se asemeja a un pistón poroso a través del cual permea el gas intersticial, generándose un gradiente de presión entre las superficies libres de la capa.

Para estudiar este efecto sobre la dinámica del centro de masas se modificó el dispositivo experimental de dos maneras alternativas. Primeramente se construyó una celda donde era posible generar vacío mediante una bomba mecánica, y en segundo lugar se ha usado una celda en la que se ha separado ligeramente la base de la pared lateral (figura 3.5). La rendija que queda es un poco menor que el tamaño de un grano ($d_b \sim 500\mu m$) para evitar que durante el experimento se reduzca la masa del sistema.

Los resultados de estos experimentos se han recogido en la figura 3.6. En ambos casos, los tiempos de vuelo son similares entre sí y prácticamente indistinguibles del comportamiento en presencia de aire. Esta similitud se mantiene hasta que se produce la duplicación de período. No obstante, la aceleración crítica a la que se produce la bifurcación es algo menor que la determinada a presión atmosférica ($\Gamma_{aire} \sim 4,9$ mientras que $\Gamma_{vacio} \sim 4,5$). En esta región sí que se aprecian diferencias entre la celda en la que se practica el vacío y aquella con la rendija. En el primer caso la bifurcación es bien marcada y parece tener lugar para tiempos de vuelo levemente inferiores al período de oscilación. En la celda con la



(a) Comparación entre el caso normal y el que se ha practicado vacío



(b) Comparación entre el caso normal y el que la celda tiene una rendija inferior

Figura 3.6: Tiempo de vuelo (en unidades del periodo) en diversas condiciones experimentales con una capa de altura $N = 33$. En ambas figuras la línea continua representa la predicción del IBBM y los puntos rojos el caso de la celda normal. En (a) los puntos verdes son para el caso en que se ha practicado vacío y en (b) para el caso en que la celda tiene una rendija inferior.

rendija la bifurcación no está bien definida, existiendo una zona de transición donde podría observarse una pequeña meseta en los tiempos de vuelo iguales al periodo. No obstante, la dispersión de los datos en esta región hace muy difícil extraer conclusiones.

Más allá de la bifurcación, las ramas tienen un comportamiento diferente en uno y otro caso. Cuando se ha hecho vacío en la celda, las ramas primero se apartan de $\tau = 1$ más que para el caso normal, convergiendo después a esos valores para Γ más elevado. Cuando se ha utilizado la celda con rendija, las ramas son similares a las de la celda normal (figura 3.6). No se conoce ningún argumento convincente para explicar por qué en el caso del vacío se abren las ramas tras la bifurcación de manera diferente al caso normal, o por qué se produce antes la bifurcación.

De estos resultados se puede concluir que practicar el vacío en la celda o abrir una rendija cerca de la base por la que pase el aire produce efectos similares en la dinámica del centro de masas, puesto que se minimizan los efectos del gradiente de presión dentro de la capa. Sin embargo, al hacer vacío se elimina el papel lubricante que tiene el aire en el movimiento convectivo de las partículas. Este último efecto no se ha estudiado sistemáticamente en la presente memoria.

Hasta aquí se han analizado experimentalmente los efectos que tanto las paredes como el aire intersticial presentan sobre el movimiento del centro de masas del sistema. Pero las leves diferencias observadas no son suficientes para que el experimento y el modelo coincidan de manera satisfactoria. A continuación se describen algunas modificaciones introducidas en el IBBM para intentar reproducir la dinámica observada.

3.4 Una extensión del modelo de la bola inelástica

La simplicidad de la hipótesis de las que parte el modelo de la bola inelástica hace imposible que pueda reproducir la dinámica de un sistema tan complejo como es un medio granular vibrado. Se recuerdan las diferencias que se aprecian entre las predicciones del modelo y las observaciones experimentales (figura 3.2).

1. Hasta $\Gamma \simeq 2,5$ los datos experimentales ajustan muy bien con los predichos por el modelo. Sin embargo, a partir de este valor los datos del tiempo de vuelo medidos son menores que los calculados.
2. El tiempo de vuelo medido crece monótonamente hasta el punto donde se produce la bifurcación. No se observa en ninguno de los casos estudiados una saturación en

el tiempo de vuelo para una región finita del parámetro de control. En síntesis, en el experimento no aparece la bifurcación “*saddle node*” predicha por la teoría (sección 1.5).

3. El valor de aceleración adimensional donde aparece la bifurcación por duplicación de periodo en los datos experimentales, $\Gamma_{exp} \simeq 5$, es sistemáticamente superior al predicho por el IBBM, $\Gamma_{IBBM} = 3,7242$.
4. Las ramas de los vuelos largos y cortos saturan, mientras que en el modelo la que corresponde a los vuelos largos crece y la de los vuelos cortos se anula. No se tiene acceso experimental a los tiempos de vuelo para $\Gamma \gtrsim 6,5$ por aparecer una segunda bifurcación espacial.

A la vista de las diferencias entre el IBMM y los resultados experimentales, deben introducirse una serie de modificaciones en el modelo para reproducir adecuadamente las observaciones. Cada una de las modificaciones que se presentarán a continuación se basa en los parámetros explorados anteriormente: existencia de gas intersticial, los efectos de fricción, y duración finita de la colisión entre el medio granular y el recipiente

Existencia del gas intersticial

Esta primera modificación pretende añadir una fuerza de frenado debida a la existencia de gas intersticial en el medio. El medio granular se modeliza como un pistón poroso utilizando las ideas y aproximaciones propuestas por Kroll [52]. Según este modelo, al vibrar verticalmente un medio granular se pueden hacer las siguientes hipótesis:

1. El medio se mueve como un pistón poroso con porosidad φ , constante.
2. La colisión entre el pistón y la base es inelástica.
3. La fricción del pistón con las paredes laterales es despreciable.
4. El aire, que se considera incompresible ¹, puede permear a través del pistón según la ley de Darcy:

$$u = \kappa \left(\frac{\partial P}{\partial z} \right) \quad (3.1)$$

donde u la velocidad del flujo de aire, κ la permeabilidad del pistón, P la presión del aire en el pistón, y z la coordenada vertical.

¹Este modelo se puede mejorar tomando el aire como un gas compresible [53]. No se ha utilizado por la gran dificultad computacional que supone implementarlo.

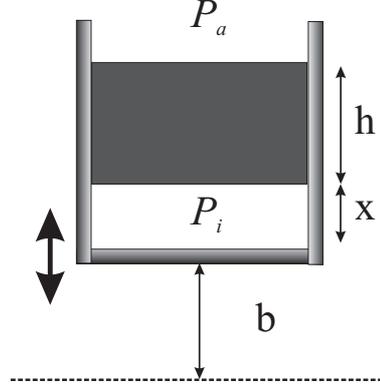


Figura 3.7: Esquema del movimiento de un pistón poroso: x es la posición del pistón en el sistema de referencia de la celda, $b = A \sin(\omega t + \phi_0)$ es la posición de la celda, P_a es la presión atmosférica, P_i la presión en el interior del intersticio, y h la altura del pistón [54].

Eligiendo el sistema de referencia del laboratorio, la posición del pistón, z' , es

$$z' = x + b = x + A \sin(\omega t + \phi_0) \quad (3.2)$$

donde x corresponde a la posición del pistón en un sistema de referencia centrado en la base de la celda, y $b = A \sin(\omega t + \phi_0)$ es la posición de la celda (figura 3.7).

Cuando el pistón está en vuelo, las fuerzas a las que está sometido son dos: la gravedad y la debida a la diferencia de presión entre la parte superior e inferior (donde aparece el intersticio). De esta manera la *ecuación de movimiento para el pistón* se escribe [54]:

$$\ddot{x} + (P_a - P_i) \frac{S}{M} = -\ddot{b} - g \quad (3.3)$$

donde P_a es la presión atmosférica, P_i la presión en el interior del intersticio que se forma entre el pistón y la celda, M la masa del pistón y S el área de la base del pistón.

Como el aire se supone incompresible,

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{P_a - P_i}{h} \quad (3.4)$$

donde h es la altura del pistón. Entonces se puede reescribir la ley de Darcy (3.1) así:

$$\dot{x} = \kappa \left(\frac{P_a - P_i}{h} \right) \quad (3.5)$$

Introduciendo (3.5) en (3.3), se obtiene para la ecuación de movimiento

$$\ddot{x} + \frac{hS\mu}{M\kappa} \dot{x} = A\omega^2 \sin(\omega t + \phi_0) - g \quad (3.6)$$

Para deducir la permeabilidad, κ , de un medio granular formado por partículas esféricas de diámetro d_b se utiliza el siguiente argumento: mediante análisis dimensional, y suponiendo que el aire sea un gas incompresible, el gradiente de presiones que aparece en la ley de Darcy (3.1) es proporcional a

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \gamma \frac{\mu u}{d_b^2} \quad (3.7)$$

donde μ es la viscosidad del aire y γ la constante de proporcionalidad. Esta constante aparece deducida en los textos de mecánica de fluidos [55]

$$\gamma = 180 \frac{(1 - \varphi)^2}{\varphi^3} \quad (3.8)$$

siendo el factor 180 deducido empíricamente [8]. Por tanto, la permeabilidad del medio granular es

$$\kappa = \frac{d_b^2}{180\mu} \left(\frac{\varphi^3}{(1 - \varphi)^2} \right) \quad (3.9)$$

Finalmente la ecuación que representa la evolución temporal de la posición del pistón respecto de la base de la celda es

$$\ddot{x} + \beta \dot{x} = f(t) \quad (3.10)$$

donde

$$\beta = \frac{180hA(1 - \varphi)^2\mu}{Md_b^2\varphi^3} \quad ; \quad f(t) = \Gamma g \sin(\omega t + \phi_0) - g \quad (3.11)$$

La ecuación (3.10) representa el movimiento de un cuerpo sometido a la acción de un frenado viscoso. Esta ecuación se resuelve numéricamente con las condiciones (3.12), encontrando la solución mostrada en la figura 3.8.

$$\left\{ \begin{array}{l} h = 20 \times 10^{-3} \text{ m} \\ S = 2,1 \times 10^{-3} \text{ m}^2 \\ \varphi = 1 - \phi = 0,41 \\ \mu = 1,8 \times 10^{-5} \text{ kg m}^{-2} \text{ s}^{-1} \\ M = 50 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ d_b = 0,43 \times 10^{-3} \text{ m} \end{array} \right. \Rightarrow \beta = 75,2 \text{ s}^{-1} \quad (3.12)$$

Como se puede apreciar en la figura 3.8, la presencia de gas intersticial retrasa el punto donde aparece la bifurcación respecto del caso teórico de una sola partícula inelástica. Este retraso no es suficiente para ajustar los datos obtenidos experimentalmente en el caso de la capa granular. Por otra parte, no se observa una saturación de las ramas tras

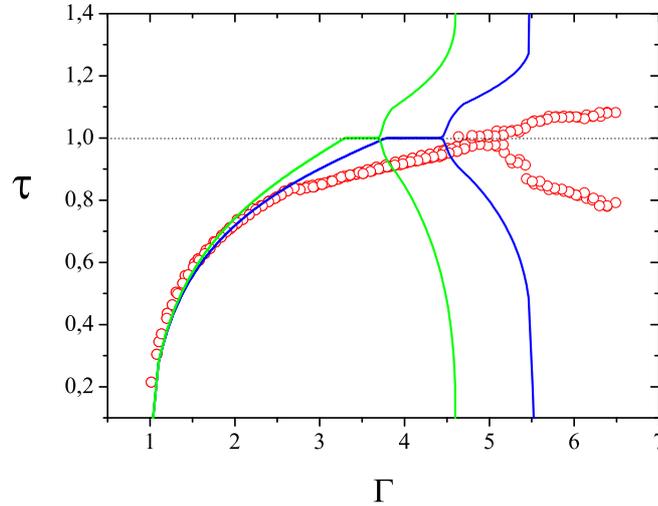


Figura 3.8: Tiempo de vuelo para una capa de altura $N = 33$. En verde el IBBM y en azul el IBBM modificado con la presencia de aire con $\beta = 75,2 \text{ s}^{-1}$.

la duplicación de periodo y además la meseta previa a la bifurcación *aumenta* de tamaño respecto de la predicha por el IBBM.

Interacción del medio con la pared

Otro efecto a considerar es el de la fricción de la capa de granos con las paredes. En el IBBM esto se puede modelizar si se considera que sobre la partícula inelástica actúa una fuerza efectiva superior a la gravedad. Puede que este efecto sea también responsable de que τ sea menor que el predicho por el IBBM. Esta fuerza es independiente de la contribución del gas intersticial, y en primera aproximación se considera tanto independiente de la velocidad relativa entre granos y pared. Se introducirá entonces una aceleración efectiva $\Gamma_{efect} = \frac{A\omega^2}{g_{efect}}$, donde g_{efect} da cuenta de la fuerza neta que actúa sobre el material. Su valor se ha elegido empíricamente y se representa mediante la expresión:

$$g_{ef} = g e^{\alpha g(\Gamma-1)} \quad (3.13)$$

donde α es una constante que se utilizará para ajustar los tiempos de vuelo. Esta fuerza neta da lugar a dos restricciones:

1. La condición para que la bola pueda despegar de la base es que la aceleración de ésta

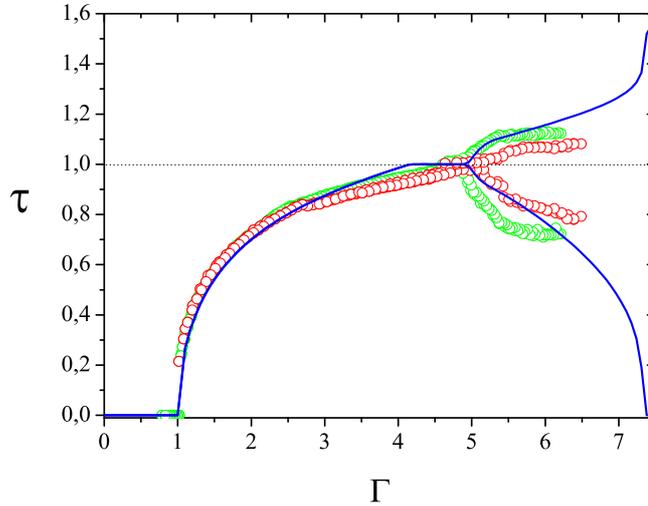


Figura 3.9: Tiempo de vuelo para unas capas de alturas $N = 20$ (verde), y $N = 33$ (rojo). En azul el IBBM modificado con una gravedad efectiva cuya constante es $\alpha = 7,5 \times 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$.

debe ser igual a la nueva gravedad efectiva g_{efect} . Sin embargo, utilizar esta condición no supone variaciones importantes en el instante en que la partícula despega, t_0 .

2. La aceleración a la que está sometida la partícula durante el vuelo es g_{efect} . Al ser constante, el vuelo continúa siendo parabólico.

En la figura 3.9 se han representado los tiempos de vuelo obtenidos experimentalmente para capas de altura $N = 20$ y $N = 33$ junto con los tiempos de vuelo calculados en el IBBM modificado tal como se ha descrito. Se ha elegido el valor del parámetro $\alpha = 7,5 \times 10^{-3} \text{ s}^2 \text{ m}^{-1}$ para hacer coincidir la abscisa del punto de bifurcación. De la figura resulta claro que el ajuste entre el modelo y los datos experimentales es razonablemente bueno. Respecto a las ramas de la bifurcación, su crecimiento se ve fuertemente amortiguado respecto al modelo original. Al igual que sucedía con la modificación introducida por el efecto del gas intersticial, la meseta previa a la bifurcación sigue apareciendo.

Duración finita de la colisión

Al analizar con detalle los datos de la aceleración (figuras 2.3 y 2.4), se aprecia que las colisiones de la capa granular tienen una duración finita. Se ha medido la duración de la colisión ajustando los picos que aparecen en la señal de aceleración a una curva de tipo

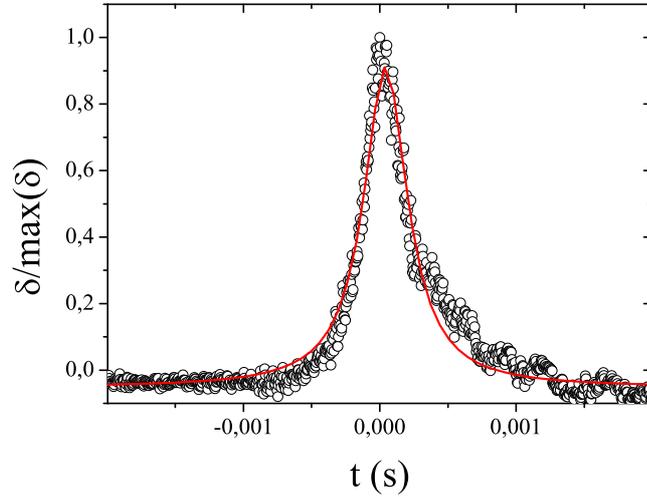


Figura 3.10: Pico producido en la señal de aceleración por una capa de $N = 33$ y $\Gamma = 3,31$. La línea en rojo es el resultado del ajuste.

lorentziana²:

$$\delta(x) = \delta_0 + \frac{2A}{\pi} \frac{w}{4(t - t_c)^2 + w^2} \quad (3.14)$$

donde δ_0 es la altura mitad, A es el área bajo la curva, δ_c es la coordenada del máximo de la curva, y w es la anchura a mitad de altura.

Se ha elegido una altura de capa ($N = 33$) y una aceleración ($\Gamma = 3,31$) que permitan apreciar nítidamente los picos producidos por la colisión. Estos datos se han centrado en el máximo del pico y normalizado con su altura. Finalmente se ha ajustado a una lorentziana dejando todos los parámetros libres (figura 3.10).

Si se considera la duración del choque, t_{choque} , como la anchura a mitad de altura de la lorentziana, se obtiene que $t_{choque} = w = 4,5 \times 10^{-4}$ s. Con este dato, la porción del ciclo, δt_{choque} , durante el cual la capa “está chocando” es

$$\delta t_{choque} = \frac{t_{choque}}{T} = 0,05$$

Que la colisión entre la capa y la base se produzca de manera no instantánea ($t_{choque} \neq 0$) podría alterar de forma significativa las predicciones del IBBM. En particular, la duración finita del contacto tendrá como consecuencia inmediata una variación, respecto del

²La aceleración que se registra en una colisión entre dos cuerpos de masas muy diferentes es proporcional a la integral del impulso, $a(t) \propto \int_{t_0}^t I(t') dt'$, que absorbe el cuerpo más masivo. Se ha hecho la hipótesis que esta integral tiene forma de lorentziana.

modelo original, de la velocidad con que la partícula inicia su vuelo después del choque. Esta variación será importante a partir del momento en que el tiempo que el medio permanece en contacto con la base se haga del orden de t_{choque} . Este efecto podría ser el responsable de que no se observe la meseta previa a la duplicación de periodo. Para que exista esta región es necesario que aparezca en los tiempos de vuelo un fenómeno del tipo “*critical slowing down*”, es decir una convergencia lenta del tiempo de vuelo a un periodo de oscilación.

El fenómeno de “*critical slowing down*” consiste en un ajuste de la fase en la que empieza y termina un vuelo, de tal manera que al cabo de muchos ciclos de vibración el tiempo de vuelo tiende a un periodo de vibración, T . El mecanismo por el que la fase se ajusta es así. Para un valor de Γ de la meseta, se considera una bola comience un primer vuelo con una velocidad inicial tal que su duración sea mayor que un periodo. La fase en la que termina este primer vuelo es mayor que en la que comenzó, justamente porque su duración es mayor que T . En el instante de la colisión, la aceleración del recipiente es menor que $-g$ y la bola inicia otro vuelo inmediatamente. En la fase correspondiente a ese instante, la velocidad inicial es menor que en el vuelo anterior (ecuación 1.15). La duración del segundo vuelo es, pues, menor que un periodo, y la fase en que termina menor que en la que empieza. De nuevo, inmediatamente después de la colisión, se inicia un tercer vuelo con velocidad inicial mayor que el segundo y cuya duración será mayor que T . La secuencia se repite indefinidamente: a un vuelo largo le sucede uno corto y viceversa, de tal manera que los vuelos de duración mayor que un periodo cada vez son más cortos y los de duración menor que un periodo cada vez más largos. Así, la velocidad inicial de todos los vuelos converge a un único valor. Esto se traduce en que la fase con la que termina un vuelo sea la misma que con la que empieza (mód 2π) y por tanto que la duración de un vuelo después un transitorio sea igual a un periodo.

Si los choques entre la base y la bola no son instantáneos, el ajuste de fase no se puede producir porque las velocidades iniciales no convergen y por tanto la saturación producida por el fenómeno de “*critical slowing down*” no aparece. Para simular este resultado en el modelo modificado, se suma un ruido blanco positivo $\delta\tau$ al tiempo de vuelo calculado. Este ruido está acotado por la duración del choque, de tal manera que $\max(\delta\tau) \leq t_{choque}$.

Con los nuevos tiempos de vuelo, $\tau^* = \tau + \delta\tau$, se verifica la condición de que se inicie un nuevo vuelo:

$$a(\tau^*) \leq -g$$

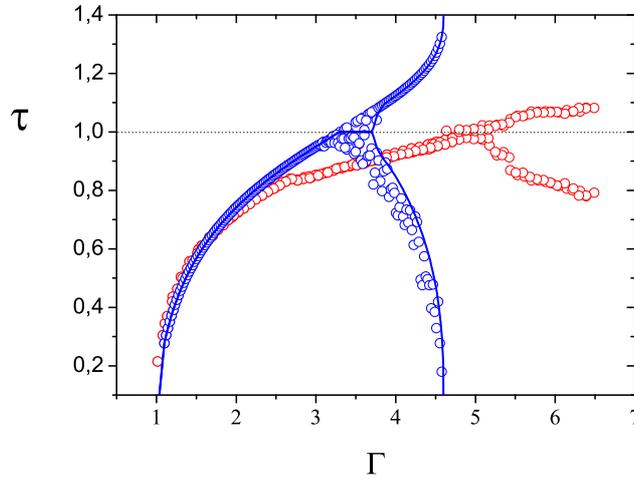


Figura 3.11: Tiempo de vuelo para una capa de altura $N = 33$ (puntos rojos) y el IBBM modificado con un ruido blanco (puntos azules). En línea continua se representan las predicciones del IBBM original.

Si se satisface esta condición la bola puede iniciar un vuelo con una fase inicial $\phi_0^* = \phi_0 + \omega\tau^*$, y si no la bola queda solidaria con la base hasta que se verifique $a(t_0) \leq -g$.

Se ha optado por sumar un ruido y no una cantidad constante haciendo la hipótesis de que la duración finita del choque se debe a que el medio granular no cae sobre la base de manera instantánea, sino que el choque tiene una duración finita debido al espesor de la capa; como el choque de los granos individuales es desordenado (en la figura 3.10 es posible observar que después de alcanzar el máximo, la curva converge de forma algo ruidosa a su valor final), para simularlo se toma un ruido blanco.

En la figura 3.11 se ha representado el efecto que produce esta modificación en los tiempos de vuelo. Se puede apreciar que la única diferencia entre los calculados con el IBBM y el modelo modificado es que no aparece la saturación debida a la bifurcación “*saddle node*”.

Finalmente, es importante destacar también la existencia de un cambio en la tendencia con la que crece el tiempo de vuelo al aumentar el parámetro de control. Como puede observarse en la figura 3.12, para valores menores que $\Gamma \approx 2,5$ las predicciones del IBBM coinciden prácticamente con las determinaciones experimentales. Sin embargo por encima de este valor comienza un retraso sistemático del tiempo de vuelo respecto del valor predicho por la teoría. Este cambio en la tendencia del tiempo de vuelo se puede relacionar con el tiempo que dura la colisión suponiendo que ésta produce en el medio granular una

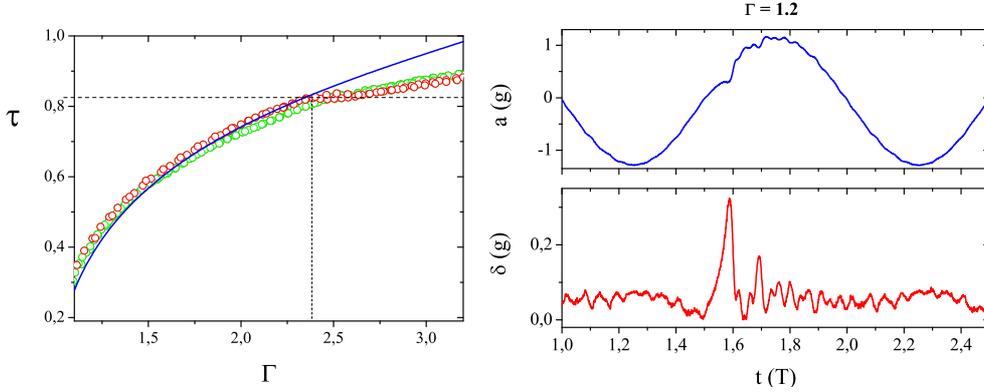


Figura 3.12: Izquierda: Tiempo de vuelo para una capa de altura $N = 20$ en presencia de aire (puntos rojos), en vacío (puntos verdes), y para el IBBM (línea azul). La posición donde aparece el cambio de tendencia se marca con una línea discontinua. Derecha arriba: aceleración a lo largo de un ciclo de vibración registrada experimentalmente cuando $\Gamma = 1,2$. Derecha abajo: diferencia entre la señal de aceleración y una función sinusoidal. Tras la colisión entre la capa y la celda aparecen una serie de picos. Estos picos podrían estar producidos por la reflexión de la onda en las superficies superiores e inferiores del medio (donde hay un fuerte cambio de impedancia).

onda de compactación que viaja desde la base hasta la superficie libre en un tiempo igual a t_{choque} . Esta onda al reflejarse en la superficie libre por un cambio de impedancia, volvería a recorrer el medio en el mismo tiempo. De esta manera, para las aceleraciones correspondientes a un tiempo de vuelo mayor que $\tau(\Gamma) > T - 2t_{choque} \approx 0,9T$ el tiempo que tarda la onda en recorrer el medio y perder toda su energía es comparable al tiempo que el medio granular está en reposo sobre la base de la celda. Así, el cambio de tendencia coincide con el valor de Γ para el cual el tiempo que el material permanece sobre la base se hace del orden del necesario para que se establezca una onda estacionaria en el medio. La existencia de esta onda de compactación durante el vuelo podría cambiar suficientemente las propiedades del medio granular [56] como para que el IBBM no describa adecuadamente su dinámica.

Como se describe en la sección 4.2, esta onda se ha observado mediante técnicas de análisis de imagen en la pared lateral de la celda. Por el momento no se ha podido determinar si es una onda de choque, una onda de compactación, o una combinación de ambas. La velocidad de propagación de la citada onda concuerda con la idea de que aparezca una onda estacionaria en el medio que viaja de un lado a otro. El tiempo que le lleva recorrer el medio es $t_{onda} = \frac{H}{v_{onda}} \sim t_{choque}$. Esta idea será desarrollada y ampliada en la sección 4.2.

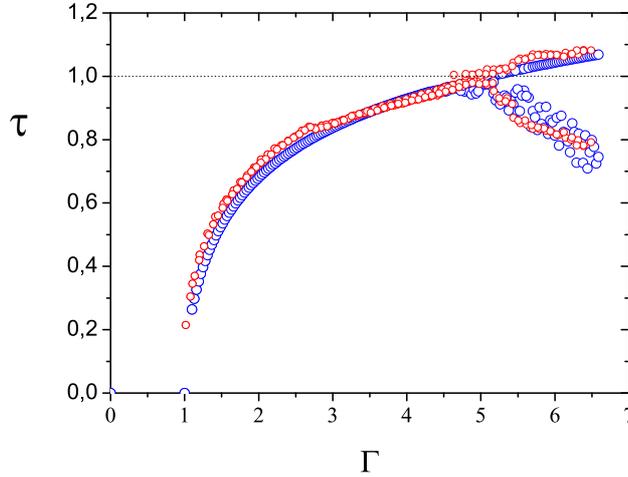


Figura 3.13: Tiempo de vuelo para una capa de altura $N = 33$ (puntos rojos) y el IBBM modificado por la presencia de gas intersticial, gravedad efectiva y ruido en la fase de inicio (puntos azules).

Efectos combinados

Resolviendo las ecuaciones (1.13) y (1.16) con las fuerzas que resultan de la interacción de los granos con la pared y la presencia del gas intersticial, y teniendo en cuenta la incertidumbre en el instante de inicio y del final del vuelo que introduce la duración finita de la colisión, se pueden ajustar con razonable precisión los datos obtenidos en el experimento. Los parámetros utilizados para cada una de estas nuevas contribuciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Interacción granos-pared : } \alpha = 2 \times 10^{-3} \\ \text{Presencia gas intersticial : } \beta = 75,2 \text{ s}^{-1} \\ \text{Duración finita de la colisión : } \delta t_{\text{choque}} = 0,05 \text{ T} \end{array} \right.$$

Como se puede apreciar en la figura 3.13, los tiempos de vuelo, tanto antes como después de la bifurcación por duplicación de periodo, son aproximadamente iguales, y además el punto donde aparece esta bifurcación también coincide. Respecto a la meseta debida a la bifurcación de tipo “*saddle node*”, está ausente en los cálculos realizados en esta simulación.

Estas modificaciones que se han hecho sobre el IBBM reproducen bien los resultados experimentales para capas mayores que $N = 30$. Sin embargo, para capas más delgadas, no se pueden aplicar estas modificaciones satisfactoriamente porque la forma de las ramas de la bifurcación es distinta que en los casos en que la capa es más profunda (figura 3.3).

Para valores de Γ mayores que los que se han representado en la figura 3.13, el modelo que incluye los efectos combinados sigue reproduciendo que la rama de vuelos largos crezca

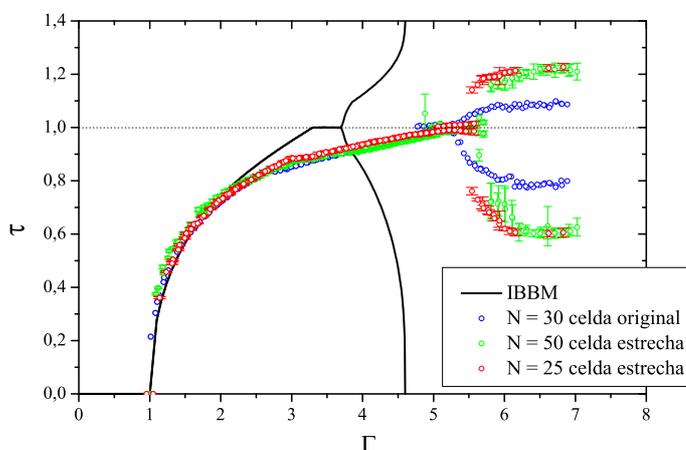


Figura 3.14: Tiempo de vuelo para capas menos profundas que el diámetro de la celda. En rojo, una capa de altura $N = 25$ y en verde $N = 50$ en el caso de la celda estrecha. En azul, una capa de $N = 30$ para la celda original. En línea continua la previsión del IBBM.

y la de vuelos cortos tiende a cero.

3.5 Influencia de la relación de aspecto

La influencia de la relación de aspecto en el movimiento del centro de masas se ha estudiado de manera tentativa y no será tratada en profundidad. En este apartado se muestran los tiempos de vuelo cuando el medio granular está en un contenedor estrecho de diámetro $D = 33\text{mm}$. Usando una cantidad de granos cuya masa es similar a las utilizadas en experimentos con la celda original ($D = 50\text{mm}$), la profundidad de la capa es mayor. La influencia de la relación de aspecto (cociente entre la profundidad de la capa y el diámetro del contenedor) se revela muy importante.

Se ha observado que para celdas estrechas y capas cuya profundidad no supera el diámetro de la celda, se obtiene cualitativamente el mismo resultado que en la celda original en las que la profundidad de la capa también es menor que el diámetro de la celda. Este es el caso de capas cuya profundidad es de 25 y 50 diámetros de partícula (figura 3.14). Sin embargo, cuando la profundidad de la capa es mayor que el diámetro de la celda ($N = 100$) el comportamiento es muy diferente (figura 3.15). Se detallan a continuación los resultados obtenidos.

Capas de altura menor que el diámetro de la celda

1. El tiempo de vuelo para $\Gamma < 2$ es mayor que el predicho. Este comportamiento sólo se puede explicar si la gravedad efectiva a la que está sometida la capa es menor que g . Una hipótesis que puede explicar este comportamiento es que en un ciclo de vibración se establezca un flujo ascendente de aire que arrastre los granos hacia arriba.
2. A partir de $\Gamma > 2$, τ vuelve a ser menor que el esperado.
3. La bifurcación aparece de nuevo para Γ mayor que el predicho.
4. Puede existir la bifurcación de tipo *saddle node*, pues aparece una región previa a la bifurcación en la que para distintos valores del parámetro de control el tiempo de vuelo es similar.
5. La transición al doble periodo es discontinua.

Capas de altura mayor que el diámetro de la celda

1. Hasta la duplicación de periodo, el comportamiento del centro de masas sigue la dinámica de las capas más estrechas.
2. El valor del parámetro de control donde se observa la bifurcación coincide con la predicción del IBBM, aunque el tiempo de vuelo correspondiente es menor que el periodo de vibración ($\tau_{duplicacion} \approx 0,9T$).
3. Los tiempos de vuelo se han medido primero aumentando y después disminuyendo la aceleración adimensional Γ . Como se puede ver en la figura 3.15, ambas series no coinciden, es decir, hay histéresis en las ramas.

Resumiendo los resultados de este capítulo, se puede concluir de esta exploración que se conocen cuáles son los parámetros que gobiernan la dinámica del centro de masas de un medio granular vibrado verticalmente. Los fenómenos relevantes han resultado ser la fricción de los granos con las paredes, la existencia de gas intersticial y la duración de la colisión entre la capa y la base del recipiente. Se ha modificado el IBBM introduciendo en el modelo (en el que se considera la existencia de gas intersticial, el rozamiento de todo el medio con la pared del recipiente y la duración finita de la colisión) dos fuerzas extra, debidas al rozamiento y a la percolación del aire a través de la capa, y un ruido blanco que modela la indeterminación en la duración del vuelo. Estas modificaciones han permitido

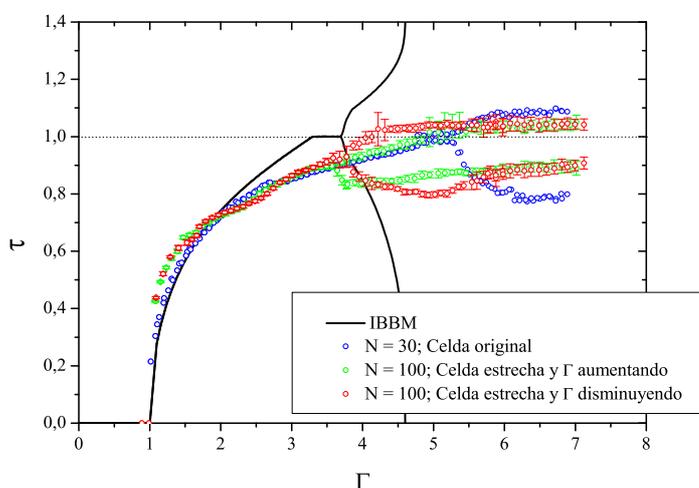


Figura 3.15: Tiempo de vuelo para capas más profundas que el diámetro de la celda. En rojo y verde, una capa de altura $N = 100$ en el caso de la celda estrecha. Para comprobar si existe histéresis se ha obtenido τ aumentando Γ (verde) y después disminuyéndola (rojo). En línea continua la previsión del IBBM.

reproducir satisfactoriamente los resultados experimentales. También se han encontrado indicios de la existencia de una onda de compactación que recorre el medio. Cuando el tiempo en el que la capa se encuentra solidaria con la superficie de la celda es mayor que dos veces la duración típica de la colisión entre el medio y la base, esta onda tiene tiempo de recorrer completamente la capa. Cuando el tiempo que la capa está solidaria con la base es menor, la onda no tiene tiempo de recorrer la capa completamente con lo que se modifican las propiedades mecánicas del medio y la dinámica se aleja de las predicciones del IBBM. También se ha explorado la relación entre la profundidad de la capa y el diámetro del contenedor. Cuando ambas son comparables aparecen efectos que no se han podido comprender.

Capítulo 4

Movimiento convectivo

En el capítulo anterior se ha tratado el movimiento de la capa granular como una única partícula y se ha aplicado el paradigma del IBBM. En la capa no se han considerado movimientos relativos entre granos. En ese sentido el paradigma equivale a considerar el medio granular como si estuviera solidificado. Haciendo uso de esa analogía, se ha obtenido el tiempo de vuelo en diversas condiciones experimentales. El IBBM es un modelo que reproduce bien los resultados concernientes al tiempo de vuelo del medio granular tomado en su conjunto, si se añade el efecto del gas intersticial, la fricción de los granos contra las paredes y la duración finita de la colisión de la capa con el fondo del contenedor.

En este capítulo, se estudia el movimiento relativo entre los granos. Mientras en el capítulo 3 el medio se podía asimilar a un sólido poroso, aquí se consideran los granos individualmente. En el movimiento de cada partícula hay dos *escalas de tiempo* (ténganse en cuenta que cuando en este capítulo se hable de escalas, no se quiere indicar que tales escalas representen una dimensión *característica* del problema, sino que los fenómenos descritos se observan con más comodidad en esa resolución temporal). La primera escala, rápida, corresponde a un ciclo de vibración. En esa escala, un grano típicamente describe un vuelo muy parecido al del centro de masas. En la otra escala, lenta, se desarrolla un movimiento colectivo que atañe a toda la capa granular, y que es el resultado neto acumulado tras muchos ciclos de vibración. Este movimiento colectivo es muy parecido al que tiene lugar en una celda de convección de las que se producen cuando un fluido se calienta por debajo: el líquido asciende por el centro y desciende por las paredes, dando lugar a una circulación con forma de rollo toroidal ([57] y [58]). A ese movimiento se le denominará en lo sucesivo *convección granular*. El mismo movimiento que se observa en el seno de un fluido con pequeña relación de aspecto, aparece también en las capas granulares

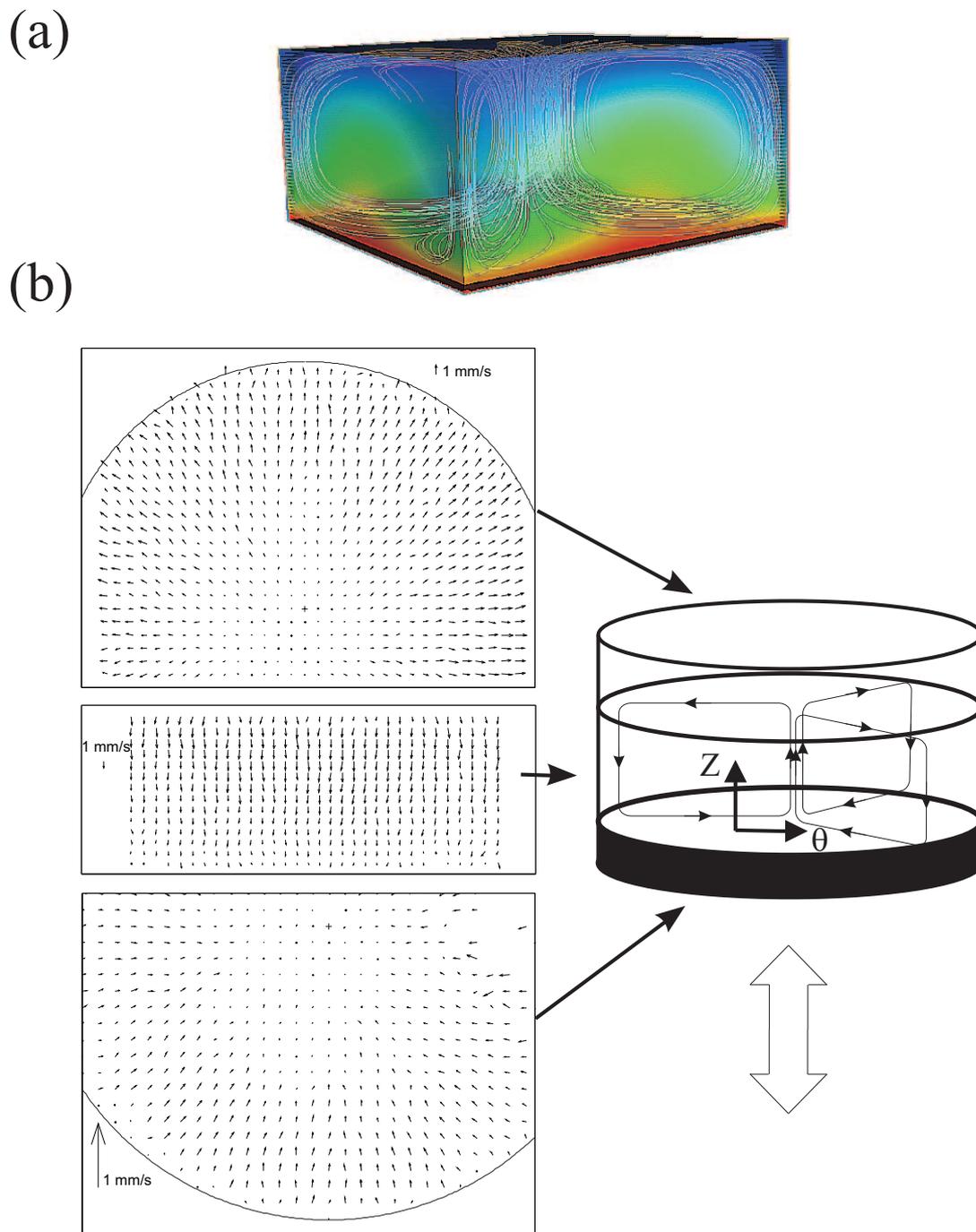


Figura 4.1: (a). Esquema de una celda convectiva en tres dimensiones para un líquido (obtenido de <http://www.lbmetho.org>). (b). De arriba a abajo, velocidad de convección en la parte superior, en la pared lateral de la capa y en la base de la capa granular (se hace notar que se han empleado diferentes escalas tal como se muestra en la figura). En el esquema se ha representado las líneas del flujo de partículas.

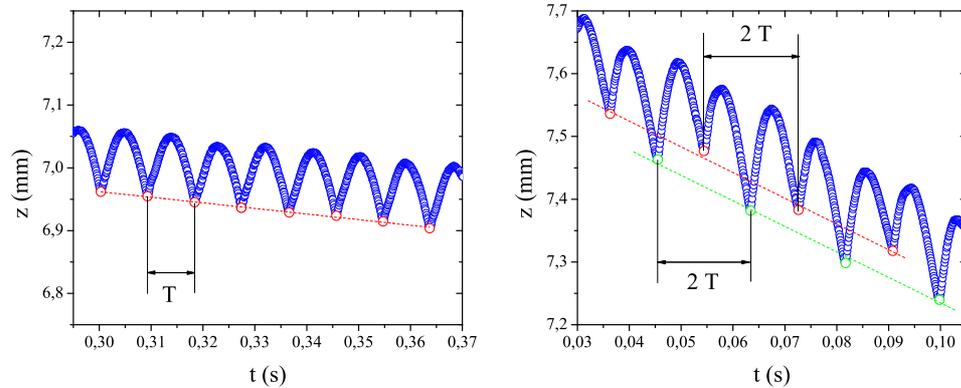


Figura 4.2: Se muestra la trayectoria de una partícula cercana a la pared lateral durante unos pocos ciclos de vibración a la izquierda para $\Gamma = 2,17$ y a la derecha para $\Gamma = 4,52$. Con línea continua roja y verde se han unido los mínimos relativos en las trayectorias. La tasa de adquisición de imágenes es de 10000 Hz. En ambas figuras las escalas de los ejes son idénticas.

cuya relación de aspecto se ha estudiado sistemáticamente en la presente memoria. El movimiento descendente de los granos cercanos a la pared lateral va acompañado de un movimiento ascendente de los granos próximos al eje de la celda, adquiriendo este flujo de partículas la geometría toroidal tal como aparece ilustrada en la figura 4.1 (a). En la figura 4.1 (b) se muestra el campo de velocidades en la superficie, el lateral y la base. En la superficie y en la base el movimiento es radial: desde el centro hacia el exterior en la parte superior y al revés en la inferior. En el lateral las partículas se mueven verticalmente hacia abajo.

En realidad, el movimiento de las partículas en la pared lateral no es tan sencillo como se muestra en la figura 4.1, puesto que el campo de velocidades ahí mostrado se ha tomado con una tasa de adquisición pequeña (25 imágenes por segundo). Al usar una tasa de ese orden de magnitud, muchos de los detalles del movimiento escapan a la percepción. Para entenderlo mejor, en la figura 4.2 se ofrece un ejemplo del movimiento de una partícula junto a la pared lateral resuelto en el tiempo dentro de un ciclo de vibración. Se aprecia cómo las partículas se mueven en una sucesión de pequeños saltos con una cadencia igual al periodo de vibración. En el cuadro izquierdo la aceleración a la que está sometido el sistema ($\Gamma = 2,17$) es inferior a la cual tiene lugar la duplicación de periodo, y mayor en el cuadro derecho ($\Gamma = 4,52$). Observese en este segundo caso cómo los granos realizan vuelos largos y cortos de manera alterna. Como más adelante se comprobará (sección 4.2), el movimiento entre mínimos relativos es similar a las predicciones del IBBM.

En la figura 4.2, los mínimos relativos en la trayectoria representan los instantes en que la bola termina su vuelo al impactar con las otras partículas del lecho granular que están bajo ella. En el caso que $\Gamma = 2,17$, el movimiento convectivo arrastra la partícula entre mínimos consecutivos. Se puede apreciar que la posición del grano en el choque es siempre inferior a la correspondiente en el choque precedente. En el caso que $\Gamma = 4,52$, puede verse claramente que se ha superado el umbral correspondiente a la bifurcación por duplicación de periodo. Los puntos señalados en verde representan el final de los vuelos cortos y los señalados en rojo el de los largos. Ya no ocurre que la posición de la partícula en el choque sea inferior que en el choque precedente. La deriva de los granos debido al movimiento de convección se aprecia en las posiciones de los mínimos relativos cada dos periodos de oscilación. En ambos gráficos se han empleado idénticas escalas en los ejes, poniéndose de manifiesto la diferencia de la dinámica entre ambos valores del forzado, puesto que la velocidad de deriva aumenta con Γ . En adelante, se denominará a esta velocidad *velocidad de convección* (es decir: es la velocidad de las partículas observada en la escala lenta).

Mediante un ajuste lineal de los mínimos relativos en la trayectoria resuelta a escala rápida se puede obtener la tendencia a lo largo de muchos ciclos de oscilación (en la figura 4.2 se han representado estos cálculos mediante líneas de trazo discontinuo). En el movimiento del grano registrado de modo que se filtre la alta frecuencia, lo único que se percibiría es esa deriva lenta. Es importante reseñar que cuando se ha superado la bifurcación por duplicación de periodo, la tendencia de los granos tomando como referencia el final de los vuelos cortos o largos es idéntica puesto que las líneas correspondientes son paralelas.

Este capítulo se divide en dos grandes secciones. En la primera se estudiará la velocidad a una escala de tiempos lenta. A esa velocidad es a la que se ha llamado velocidad de convección por la similitud entre la geometría del flujo de partículas y la inestabilidad en un fluido cuando es calentado desde abajo. La segunda sección trata de la velocidad de los granos en la escala rápida. Se describirá que le sucede a las partículas en un ciclo de vibración y cómo afecta esto a la velocidad de convección, y en consecuencia a la dinámica de toda la capa.

Se ha tenido acceso experimental a ambas dinámicas usando técnicas ópticas. Las secuencias de imágenes se han obtenido con una cámara de alta velocidad que registra las trayectorias de los granos cerca de la pared lateral a distintas tasas de adquisición. Por la geometría del flujo de partículas en el movimiento convectivo, el sistema de coordenadas cilíndrico es el más adecuado para expresar las distintas magnitudes. Sin embargo, al ser

el tamaño de los granos dos órdenes de magnitud menor que el diámetro del contenedor, el movimiento tridimensional de las partículas en la proximidad de las paredes se puede reducir a un plano (tangencial a la pared) y usar coordenadas cartesianas según los ejes que se han dibujado en el esquema de la figura 4.1: el eje z vertical y hacia arriba, y el eje azimutal θ en el plano de la pared, perpendicular a z , hacia la derecha.

4.1 Escala lenta. Velocidad de convección

En esta sección se estudiará el movimiento de las partículas en la escala de tiempos lenta. Al agitar verticalmente un medio granular con una aceleración mayor que la gravedad, se desarrolla en él un movimiento colectivo y ordenado de sus partículas. En el caso de celdas cilíndricas, el flujo tiene una geometría toroidal: las partículas se mueven hacia arriba en el centro de la capa granular y hacia abajo en los laterales de la celda. El movimiento en la parte superior e inferior es radial, de tal manera que se cierran las líneas del flujo.

Cálculo de la velocidad de convección

La velocidad de convección, \vec{v}_{conv} se puede calcular en primera aproximación promediando la deriva que experimentan las partículas tras cada ciclo de vibración. Este promedio es fácilmente estimable a partir del ajuste lineal de la posición de las partículas en los mínimos relativos de las trayectorias. Sin embargo, se ha optado por usar lo que se denomina un método estroboscópico. Con esta técnica es posible obtener la velocidad de deriva filtrando los desplazamientos a escalas de tiempo inferiores al periodo de oscilación. Se calcula obteniendo la diferencia de la posición entre un instante de tiempo t_i y otro posterior $t_i + \Delta t$, donde $\Delta t = nT$ es un número entero de veces el periodo de vibración T . Entonces, la velocidad estroboscópica de las partículas es:

$$\vec{v}^{estrob}(t_i) = \frac{\Delta \vec{r}(t_i)}{\Delta t} = \frac{(r\theta(t_i + \Delta t) - r\theta(t_i), z(t_i + \Delta t) - z(t_i))}{\Delta t} \quad (4.1)$$

donde $\Delta \vec{r}(t_i)$ es la variación de la posición de la partícula en la pared lateral tras un tiempo Δt . A partir de la velocidad estroboscópica se puede obtener la velocidad de convección. Para ello, primeramente se debe calcular el histograma del conjunto de todas $\vec{v}^{estrob}(t_i)$ (figura 4.3). Ajustando los puntos alrededor del máximo del histograma normalizado con su área a una curva gaussiana,

$$f(v) = Ae^{-\frac{(v^{estrob}-v^0)^2}{2\sigma^2}} \quad (4.2)$$

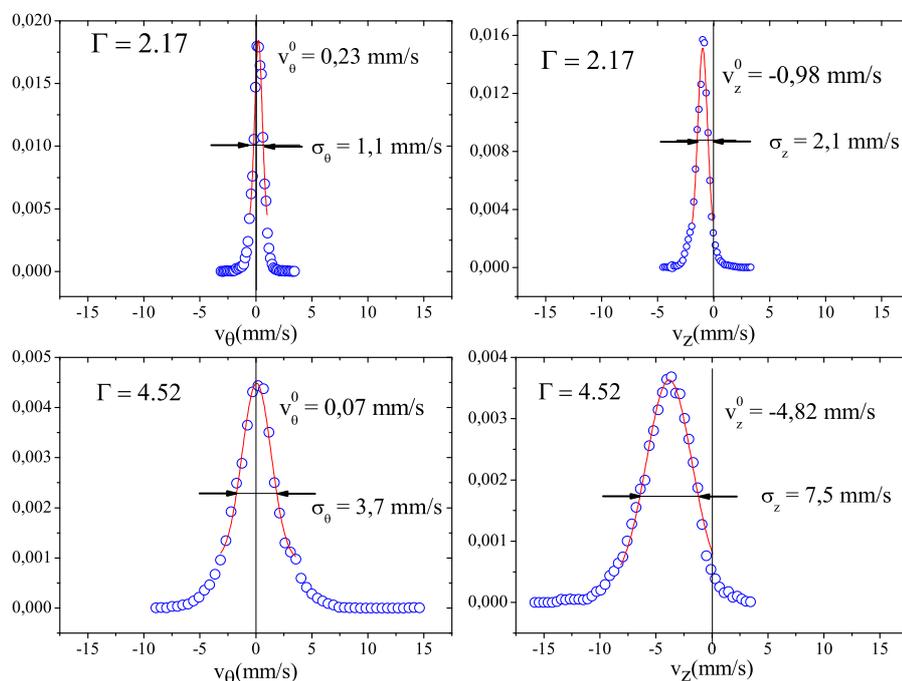


Figura 4.3: Histogramas de la velocidad estroboscópica. Izquierda: componente azimutal; derecha: componente vertical. Arriba se muestran los resultados con $\Gamma = 2,17$ y abajo con $\Gamma = 4,52$. La escala vertical de todas las figuras es adimensional y corresponde a la frecuencia normalizada de la velocidad estroboscópica.

donde A es una constante arbitraria, σ la anchura a media altura y v^0 la frecuencia máxima. De esta manera, la velocidad de convección corresponde al máximo de esta curva $\vec{v}_{conv} = (v_\theta^0, v_z^0)$. Por la simple inspección visual del flujo convectivo, se ha observado siempre un movimiento hacia abajo independientemente de la aceleración a la que se ha sometido a la capa. Este hecho está implícito en que los histogramas de la componente azimutal de velocidad estén centrados en cero y los de la componente vertical estén centrados en valores negativos. A pesar de que la forma de los histogramas de la figura 4.3 sugiere la posibilidad de definir una temperatura granular para un medio denso a partir de la dispersión de velocidades, σ , esto no será estudiado sistemáticamente en esta memoria. Nótese que se ha mantenido el convenio de signos para la altura y la velocidad. La altura es cero en la base de la celta y aumenta hacia arriba. La velocidad es positiva hacia arriba y negativa hacia abajo.

En lo que sigue se analizará cómo varía la velocidad de convección al cambiar los parámetros experimentales más significativos del experimento: la profundidad de la capa, la intensidad de la excitación externa Γ y la rugosidad de las paredes del recipiente que

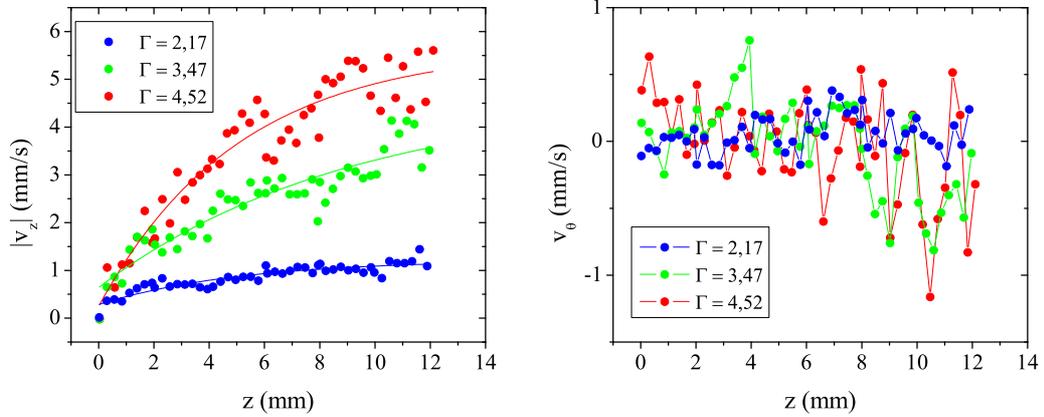


Figura 4.4: Izquierda, perfil vertical de velocidad. Con puntos se representan los datos experimentales y con líneas continuas un ajuste a una función del tipo $v(z) = V + v_z^0 e^{-z/\lambda(\Gamma)}$ Derecha, perfil de velocidad azimutal.

contiene los granos.

Velocidad de convección en función de la profundidad

A continuación se va a caracterizar el perfil de velocidades del flujo convectivo en función de z . Se ha discretizado la profundidad de la capa en una serie de bandas en las que se ha calculado \vec{v}_{conv} . Estas ventanas están limitadas por cotas verticales y tienen una altura de aproximadamente igual al radio de una partícula. De este modo, se puede obtener con gran precisión el promedio \vec{v}_{conv} en función de la profundidad.

En la figura 4.4 se han representado los perfiles de velocidad tanto para la componente vertical como azimutal. Como ya se describió previamente en [4], el perfil de velocidad vertical alcanza su valor máximo cerca de la superficie de la capa y disminuye suavemente a medida que se aproxima al fondo de la celda. Este efecto puede ser debido a la propia geometría toroidal del flujo y a la diferencia en la compactación de los granos (sección 4.2). En la parte superior del medio, los granos se encuentran menos compactados que en la inferior, disponiendo de un mayor volumen donde moverse. Además, la componente vertical de la velocidad de las partículas es mayor en la superficie que la parte inferior, puesto que allí los granos se mueven hacia el interior, disminuyendo la componente vertical y aumentando la radial. De acuerdo con las observaciones del perfil vertical de velocidades para una capa agitada con “tapping”¹ y usando técnicas de resonancia magnética nuclear

¹La agitación por “tapping” es periódica y no armónica. Cada periodo se divide en parte activa y no-activa. En

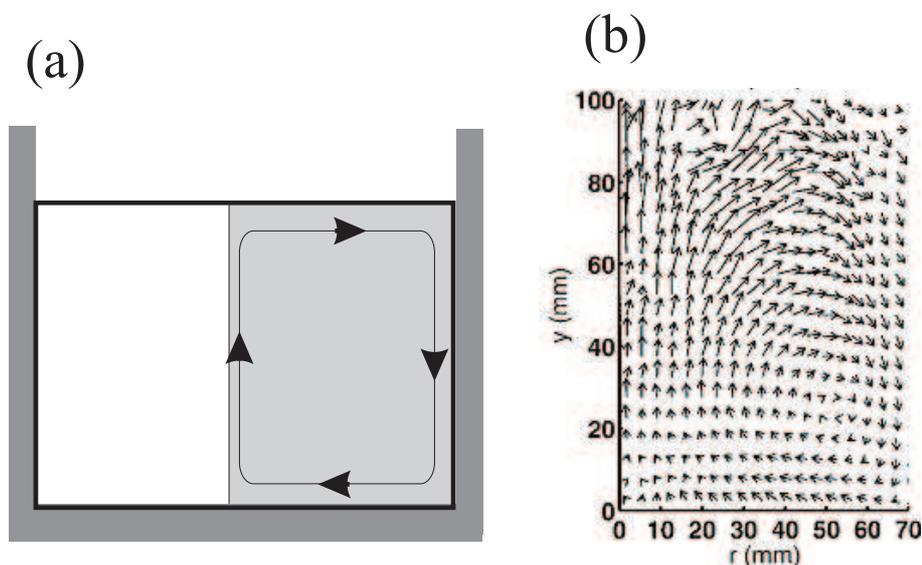


Figura 4.5: Diagrama en el que se ilustra la geometría del flujo de partículas en una sección del contenedor. (a) Esquema del recipiente y de la capa granular. La línea cerrada simplifica el movimiento de las partículas: se mueven radialmente en la superficie y en la base, y en la pared lateral de arriba a abajo. La velocidad azimutal es nula, por lo tanto el flujo tiene simetría de revolución respecto al eje de la celda. Se ha sombreado la región de la capa que se ilustra en el otro cuadro. (b) Campo de velocidades dentro de un rollo convectivo toroidal medido con técnicas de PET (imagen obtenida de [44]).

[37], la dependencia es exponencial con la altura según una ley del tipo $v_z \propto v_z^0 e^{-z/\lambda(\Gamma)}$. En este caso, el aporte de energía es continuo y se ha comprobado que existe la misma dependencia en la velocidad vertical con la altura.

En lo que respecta a la velocidad azimutal, v_θ se puede considerar nula en todos los casos (parte derecha de la figura 4.4). Debido a que únicamente se tiene acceso visual a la pared lateral de la celda, mediante este método no se puede obtener ninguna conclusión acerca de la estructura interna del rollo convectivo. Sin embargo, completando este resultado con el campo de velocidades de la figura 4.1, se puede hacer un esquema como el de la figura 4.5 para representar la geometría del flujo convectivo.

Velocidad de convección en función de Γ

Uno de los objetivos de este trabajo es comprobar si existe alguna relación entre la velocidad de convección y el parámetro de control Γ . Puesto que la velocidad de convección no es constante en toda la altura del medio granular, como se demostró en el apartado anterior, se ha optado por reducir la región donde se adquieren imágenes a una ventana de 4 mm

la parte activa todo el sistema se mueve enérgicamente, mientras que en la no-activa el sistema está quieto. La parte activa es muy corta comparada con la no-activa.

de altura en el centro de la capa (entre los 6 y los 10 mm). No se han explorado valores del parámetro de control en los que pueden coexistir dos rollos convectivos ($\Gamma \gtrsim 6,5$), en cuyo caso v_z no es constante si cambia la coordenada azimutal. Los resultados de estas medidas se han representado en la figura 4.6 (a). En ésta aparece exclusivamente el valor absoluto de la componente vertical de la velocidad de convección para distintos valores de Γ . Además, en la figura 4.6 (b) se ha normalizado la velocidad de convección utilizando la velocidad máxima de vibración.

Al estudiar la dependencia entre la velocidad de convección con la aceleración adimensional, se aprecia claramente que existe una dependencia lineal entre ambas. Se observa un pico aislado alrededor de $\Gamma \sim 3$ que no interrumpe la tendencia puesto que la constante de proporcionalidad es idéntica para valores menores y mayores del mencionado valor de Γ . Además, al igual que en el trabajo de Garcimartín *et al.* [4], aparece una bifurcación transcítica imperfecta en los valores de Γ más pequeños.

Si se normaliza la velocidad de convección con la velocidad máxima del vibrador $v_{max} = A\omega = \frac{\Gamma g}{\omega}$, los resultados parecen sugerir la existencia de dos regiones claramente diferenciadas. En cada una de éstas es distinta la pendiente de la recta a las que se ajustan los datos. Además, en estas regiones se observa cómo cambia la forma de la capa granular. Aunque en todos los casos el flujo forma un único rollo, la forma de la superficie cambia. A continuación se describirá como varía la velocidad de convección y la forma de la superficie al variar el parámetro de control.

$1,0 \leq \Gamma < 2,1$ En este intervalo (marcado en la figura 4.6 con color verde) la velocidad de convección aumenta con Γ . En lo que respecta a la superficie, esta se deforma hasta que constituye un cono cuyo vértice está situado en eje de la celda.

$2,1 \leq \Gamma < 3,5$ La pendiente de la recta que ajusta a los datos se hace más pequeña. El cono central desaparece y se transforma en un talud.

$3,5 \leq \Gamma$ La superficie se queda plana. La pendiente de la recta que mejor ajusta a los datos es la misma que en el caso anterior.

Sin lugar a dudas, de todas la transiciones descritas anteriormente, la más notable es la que tiene lugar cuando el cono central desaparece ($\Gamma \sim 2,1$) para formar un talud y cambia la dinámica de la velocidad de convección. Al no poderse controlar en el experimento la orientación del talud respecto de la dirección de observación, no se puede cuantificar completamente la velocidad, puesto que el rollo convectivo es asimétrico y la velocidad de convección depende del ángulo azimutal.

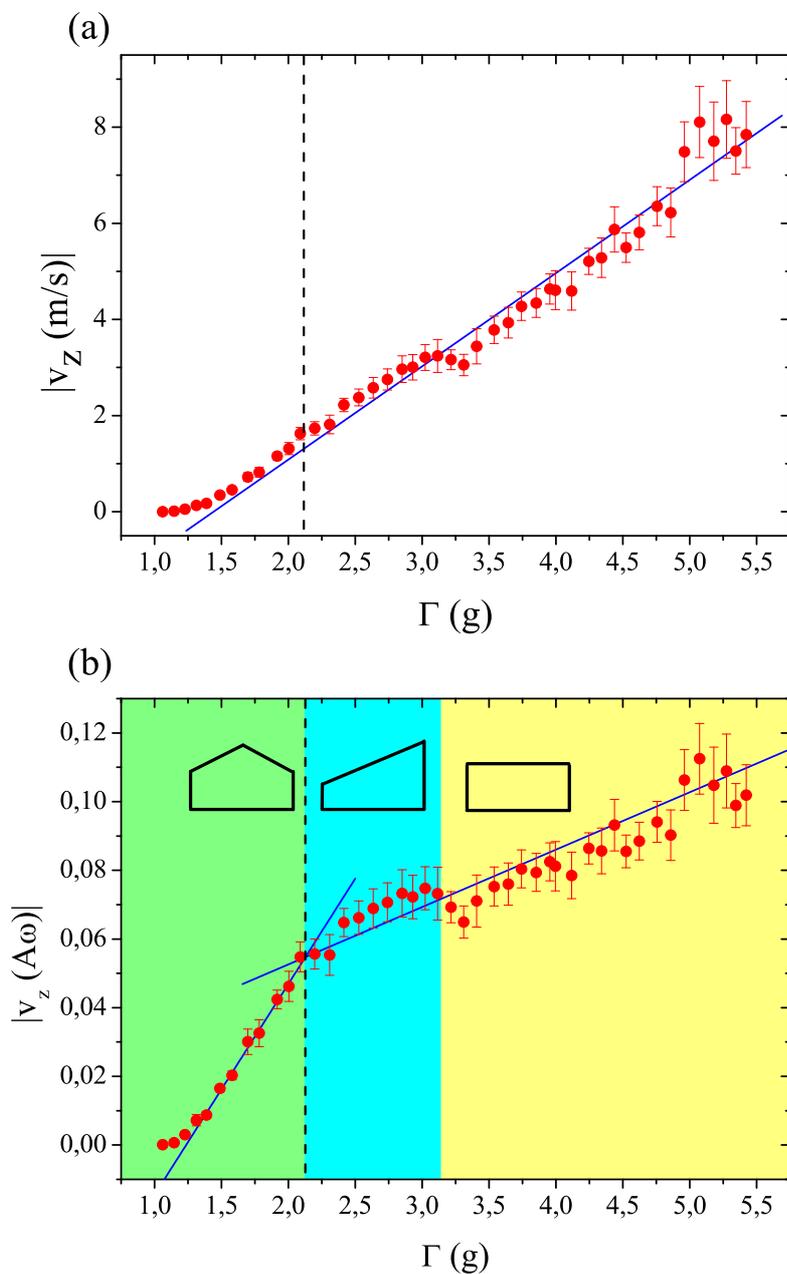


Figura 4.6: Velocidad de convección en función de la aceleración adimensional Γ expresada en mm/s en (a) y normalizada con la velocidad máxima de vibración en (b). Los datos corresponden a una capa de 50 g (33 diámetros de partículas), y el campo visual es de 4 mm de altura (entre los 6 y los 10 mm de profundidad). Las líneas continuas corresponden a los ajustes de los distintos conjuntos de datos. Estos ajuste sólo pretenden resaltar la tendencia y no se emplean como resultado. Los distintos colores del fondo en el cuadro (b) corresponden a diferentes formas de la superficie de la capa y la línea discontinua vertical divide las regiones de distinta pendiente.

Celda	Tamaño [μm]	v_r [mm/s]	θ [rad]	$\tau \times 10^{-3}$ [s]
Vidrio	0	$1,2 \pm 1,3$	$0,14 \pm 0,01$	$6,34 \pm 0,01$
Acero pulido	0	$1,1 \pm 0,6$	$0,17 \pm 0,01$	$6,30 \pm 0,01$
Vidrio + lija 500	30	$1,2 \pm 2,2$	$0,16 \pm 0,01$	$6,48 \pm 0,01$
Vidrio + lija 150	100	$0,4 \pm 1,0$	$0,10 \pm 0,01$	$6,49 \pm 0,01$
Acero + surcos	200	$0,4 \pm 0,2$	$0,10 \pm 0,01$	$6,64 \pm 0,01$

Cuadro 4.1: Tamaño típico de las imperfecciones en las paredes de las celdas, velocidad radial en la superficie, ángulo del “*heap*” y tiempo de vuelo para las distintas celdas. El valor de aceleración para todos los casos es $\Gamma = 1,93$.

Anteriormente, se observó que a partir de $\Gamma = 2,3$ el tiempo de vuelo de la capa se aparta de las predicciones del IBBM (figura 3.12). Más adelante se volverán a encontrar transiciones entre dos dinámicas para valores similares del parámetro de control. Las diferentes transiciones cerca de este punto indican que existe algún cambio en las propiedades del medio para $\Gamma \sim 2,3$. Este resultado subraya la conexión entre la dinámica espacial y la temporal en el movimiento convectivo de las partículas.

Velocidad de convección en función de la rugosidad

Se ha estudiado también la influencia de la rugosidad de las paredes en el movimiento de convección, utilizando celdas de acero – tanto pulido como con estrías – o simplemente adhiriendo papel de lija de distintas granulometrías a celdas de vidrio (los detalles se proporcionan en la tabla 4.1). En todos los casos la base de la celda tiene las mismas características que la pared lateral. A excepción de las celdas de acero, en la pared lateral se ha dejado una pequeña libre banda lateral que permite el acceso visual al movimiento de los granos en el interior. La anchura de esta ventana es lo más pequeña posible, para minimizar los efectos del vidrio desnudo: aproximadamente dos milímetros.

Debido a que no se ha podido medir la velocidad vertical en todos los casos estudiados, como ocurre con las celdas de acero que no tenían acceso visual a la pared lateral, se ha optado por medir la velocidad radial en la superficie de la celda. Comparando la velocidad radial, se puede estudiar la influencia de la rugosidad de la pared en el movimiento convectivo. Para esto, se han obtenido secuencias de imágenes en las que se ha medido la posición de algunas partículas en distintas imágenes dentro de la secuencia. La velocidad radial se define como el módulo del desplazamiento dividido por el tiempo transcurrido. Dado que el desplazamiento de las partículas en la superficie es en la dirección del radio,

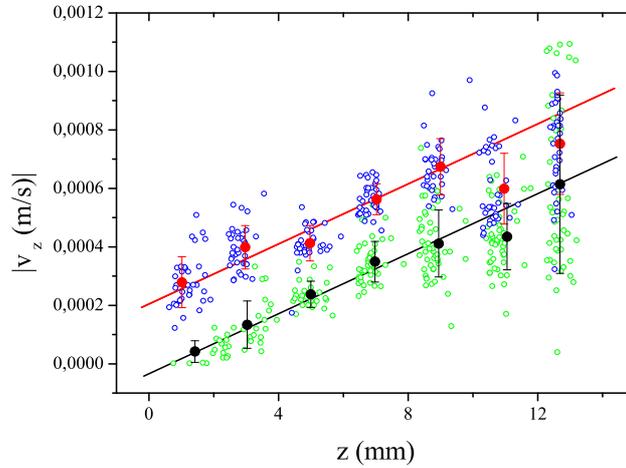


Figura 4.7: Perfil lateral de velocidad en valor absoluto para las celdas con la pared de vidrio desnuda y la pared de vidrio cubierta con lija de grano $100 \mu m$. Puntos azules vacíos, velocidades individuales de las partículas en el caso de la celda de vidrio; puntos rojos llenos, promedio de la velocidad en el caso del vidrio; la línea roja representa la tendencia de la velocidad en el caso del vidrio. Puntos verdes vacíos, velocidades individuales en el caso de la celda con la pared cubierta con lija; puntos negros llenos, promedio en el caso de pared con lija; la línea negra representa la tendencia de la velocidad en el caso pared con lija. El valor de aceleración es $\Gamma = 1,93$.

evidentemente, la velocidad resultante es radial. Se han representado estos datos en la tabla 4.1, obtenidos en la región intermedia de la celda entre el eje y la pared lateral. A la vista de estos resultados, las paredes lisas están asociadas a una mayor velocidad de convección. Es probable que al cambiar la superficie de la pared lateral se esté modificando el coeficiente de fricción estática. Las paredes rugosas tendrían una fricción mayor que las lisas. Esta fricción ejerce una fuerza de rozamiento sobre los granos próximos a las paredes, que sumada a la gravedad, haría que los granos no iniciaran el vuelo en la fase ϕ_0 (cuando la aceleración forzante es igual a $-g$), si no que lo harían en una fase posterior. La velocidad inicial con la que parten en esa fase es menor que cuando lo hacen en ϕ_0 , de modo que los vuelos serán más cortos [59]. Que los vuelos sean más cortos cuando la fricción es mayor, implica que la velocidad de convección es menor. La relación entre la velocidad de convección y el vuelo que realizan las partículas del medio granular se estudiará en la siguiente sección.

Se ha medido la velocidad de convección en la pared lateral en dos casos. Cuando se ha usado una celda de vidrio desnudo y cuando se adhirió lija de $100 \mu m$ (tamaño de grano). En este último las medidas se hicieron a través de la ventana que se ha dejado libre en la

pared. Para ello se ha usando el mismo método que se utilizó para medir la velocidad radial. Al comparar ambos resultados, los perfiles de velocidad con la profundidad son similares, aunque la velocidad siempre es menor para la celda con lija (figura 4.7). Respecto al tiempo de vuelo de toda la capa, no hay diferencias significativas al variar la rugosidad del recipiente. Esto significa que las propiedades de las paredes no afectan a la dinámica de toda la capa (este efecto ya se describió en la sección 3.2) aunque sí a la velocidad de convección. Adicionalmente, se ha medido el ángulo entre la superficie de la capa y la horizontal cuando se forma la prominencia en el centro de la celda. Se ha comprobado que el ángulo disminuye al aumentar la rugosidad de las paredes.

Esta explicación sobre la fricción estática es una conjetura elaborada a posteriori, para dar cuenta de lo que ocurre, y no se puede sustentar con argumentos definitivos. En particular, no se han hecho mediciones cuantitativas sobre el coeficiente de fricción entre los granos y las paredes. Por tanto, esta explicación debe tomarse como mera suposición plausible de lo que ocurre, y no como un resultado concluyente.

4.2 Escala rápida. Dinámica microscópica

En esta sección se analizará la dinámica microscópica de las partículas que componen el medio granular estudiando sus trayectorias resueltas en espacio y tiempo dentro de un ciclo de vibración (figura 4.2). Éstas se han obtenido usando las técnicas de “*particle tracking*” explicadas en la sección 2.5. El conocimiento detallado de la dinámica será de mucha utilidad a la hora de interpretar los fenómenos que producen el movimiento convectivo dentro de la capa.

Los experimentos se han llevado a cabo con una tasa de adquisición, FR , de 10000 imágenes por segundo, y una resolución espacial de aproximadamente 120 píxeles/mm. La zona de adquisición es cuadrada y abarca 2 mm de lado en la pared lateral. La duración de las secuencias de imágenes es superior a los 100 periodos de oscilación.

Para conocer la amplitud, A , y frecuencia angular, ω del movimiento oscilatorio de la celda, se ha adherido a ésta una banda con una serie de marcas espaciadas 0.5 mm. De estas marcas se obtienen series de puntos que siguen una dependencia sinusoidal del tipo $z(t) = A_0 + A \sin(\omega t + \phi_0)$ que se han obtenido con las mismas técnicas con las que se han registrado las trayectorias de las partículas. Ajustando esta función, se obtienen los parámetros A y ω de la oscilación. Además, conocer con precisión el parámetro ϕ_0 es de especial relevancia para determinar la fase del periodo de oscilación en la que ha sido

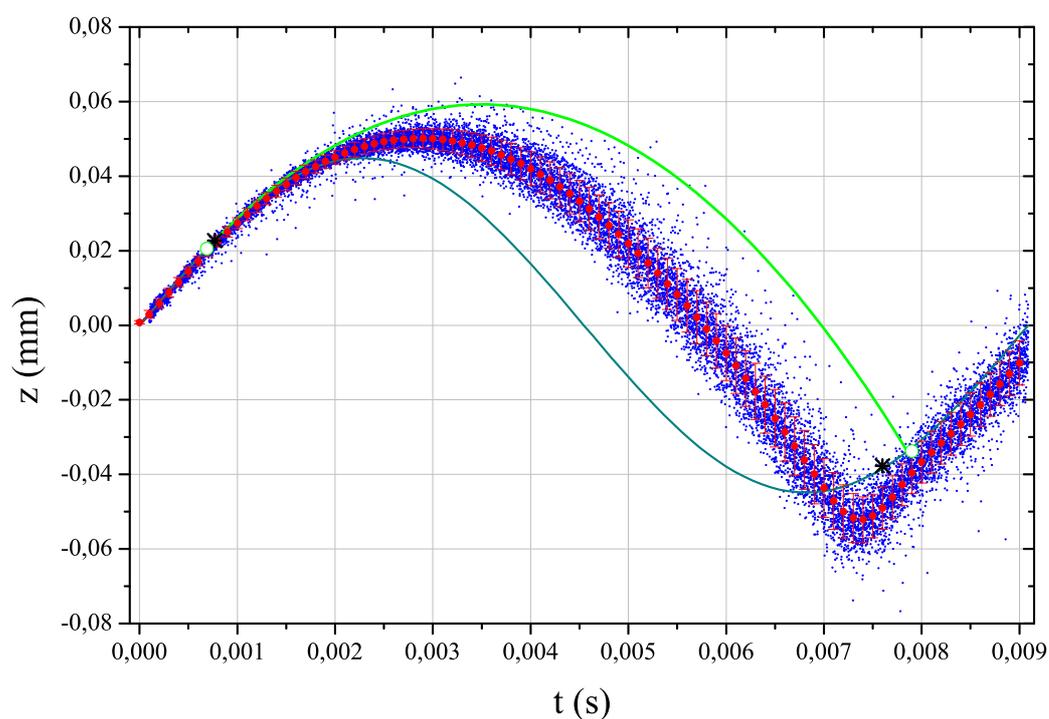


Figura 4.8: Coordenada z de todas las partículas de un estrato de 2 mm de espesor situado a una altura de 5 mm sobre la base de la celda, para $\Gamma = 2,17$ en una capa de altura $N = 33$ (50 g). Los datos han sido agrupados en un periodo de vibración. En rojo y con barras de error se han representado los promedios de los datos agrupados z_n . En línea continua verde se representa la trayectoria correspondiente al IBBM al que no se hecho ninguna modificación; marcado con círculos verdes se indica el principio y final del vuelo libre. Los asteriscos negros indican el inicio y el fin del vuelo de toda la capa tal como se obtiene experimentalmente. En línea continua cian se representa la posición de la base.

adquirida cada imagen de la secuencia.

$$\phi = \phi_n - \phi_0 = \omega t_n - \phi_0 \quad (4.3)$$

Tras determinar con gran precisión la fase de todas las imágenes que contienen la posición de los centroides de los granos, es posible reposicionar las trayectorias de todas las partículas estableciendo un origen de tiempos arbitrario, pero de manera que se conserve la fase, y colapsar así todos los vuelos dentro de un sólo periodo de vibración. Para esto, todos los puntos de las trayectorias se agrupan en intervalos temporales Δt_n . El número de éstos es el cociente entre la tasa de adquisición y la frecuencia de la oscilación, $\frac{FR}{f}$. Así, cualquier punto de una trayectoria se puede asignar a uno de estos intervalos cuando $\frac{\phi(\text{mód } 2\pi)}{\omega}$ esté dentro de los límites de los intervalos antes definidos. Una vez que todas las trayectorias están agrupadas en un sólo periodo, se puede calcular la trayectoria promedio de todas las partículas, z_n . De esta manera, se puede estudiar la dinámica de todas las partículas a lo largo del tiempo dentro agrupándolas de un solo ciclo. Para ilustrar la utilidad de esta reducción, en la figura 4.8 se muestra el movimiento detallado del estrato de 2 mm de espesor a 5 mm de la base de la celda con $\Gamma = 2,17$.

Se hace notar que las trayectorias de las partículas próximas a la pared lateral son un caso extremo y que su comportamiento puede diferir bastante al de las partículas en el seno de la celda y, por tanto, al del centro de masas del medio granular. Aun así se puede obtener mucha información del comportamiento del medio granular. En lo que sigue, se emplearán exclusivamente las trayectorias promediadas para estudiar la dinámica microscópica. De esta manera, en la figura 4.9 se ha evitado representar toda la colección de puntos para apreciar mejor cuál es la trayectoria promedio que siguen las partículas. También se representado la trayectoria relativa a la pared lateral del recipiente y la que seguiría una partícula en vuelo libre bajo la acción de la gravedad. Claramente, se aprecia que desde el instante en el que el medio comienza su vuelo, la trayectoria promedio es distinta a la de esa hipotética partícula. A pesar de que el tiempo de vuelo de la partícula libre y el estrato real de medio granular son muy parecidos (figura 3.2), la dinámica resuelta en el tiempo revela importantes diferencias. Aun teniendo en cuenta la extensión del modelo de la bola inelástica que se introdujo en 3.4 –no se ha representado en la figura por ser la trayectoria muy similar a la del IBBM sin modificar–, la trayectoria que siguen las partículas es muy diferente:

1. Tras iniciarse el vuelo, la altura que alcanzan las partículas es menor que la que alcanza el centro de masas del sistema.

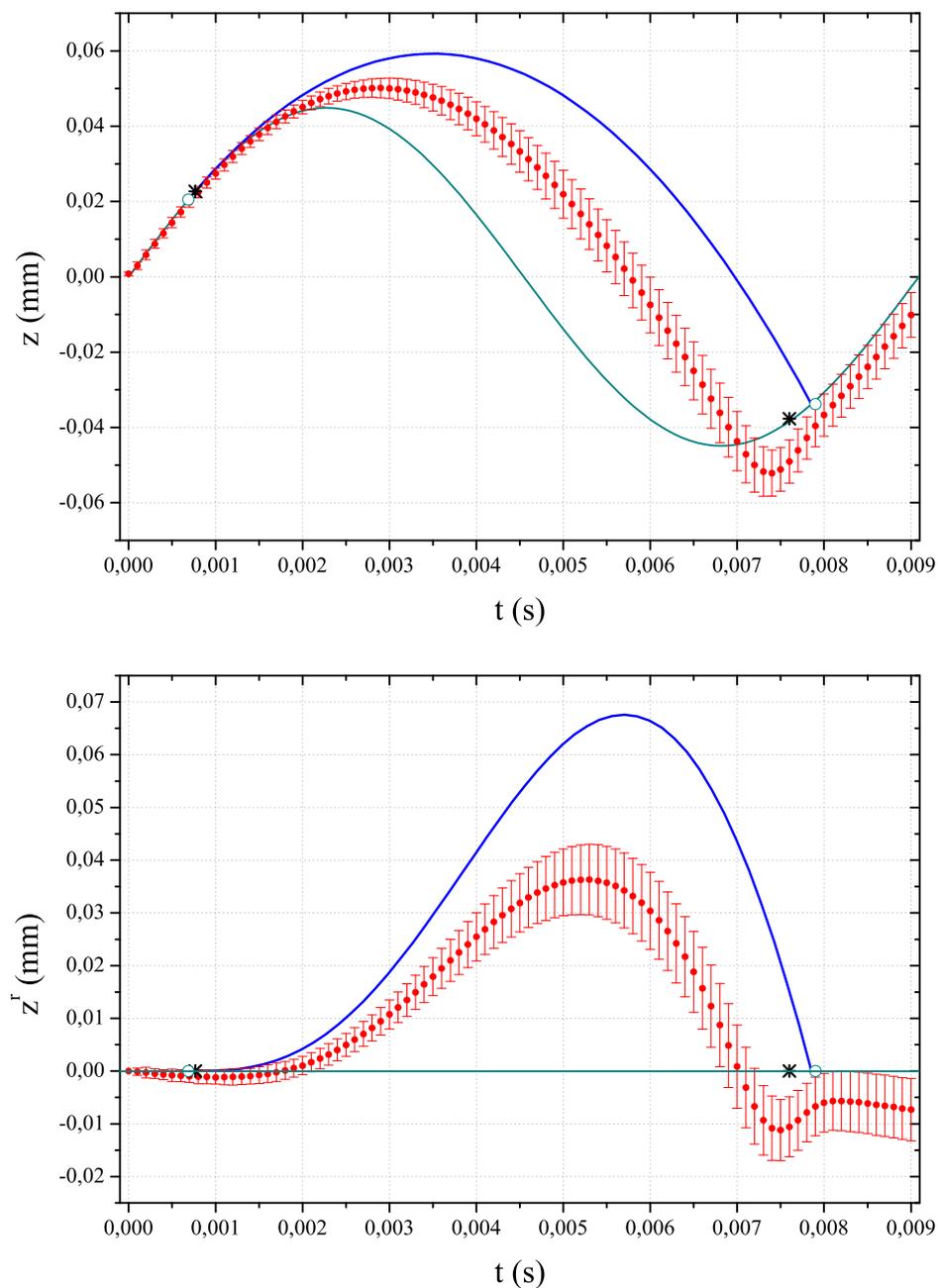


Figura 4.9: Arriba, posición absoluta y abajo, relativa al recipiente con $\Gamma = 2,17$. Puntos en rojo con barras de error: trayectoria promedio. Línea continua en azul: trayectoria del IBBM, donde se ha marcado el inicio y fin del vuelo con círculos. Los asteriscos negros señalan la fase en que comienza y termina el vuelo toda la capa. En línea continua cian se representa la posición del recipiente.

2. El mínimo de la trayectoria promedio relativa correspondiente al final del vuelo de las partículas es anterior al instante en que el centro de masas golpea con la base del recipiente. Este retraso en la fase de colisión está relacionado con que la colisión de la capa granular no sea instantánea y tenga una duración finita, tal como se demostró en la sección 3.4
3. La posición al final del vuelo es inferior a la del principio de éste. Este efecto está relacionado con la existencia del movimiento convectivo que se desarrolla en toda la capa granular.

A pesar de estas diferencias, es llamativo que el instante en el que las partículas próximas a la pared lateral terminan su vuelo, sea similar al que lo hace el centro de masas.

A la hora de calcular la componente vertical de velocidad, se ha derivado numéricamente la coordenada z de las trayectorias obtenidas por el método de “*particle tracking*”. Al igual que se hizo con la posición, todos los datos de la velocidad se han agrupado en un solo periodo de vibración. Usando los mismos intervalos temporales que se utilizaron para calcular la posición promedio de las partículas, se han obtenido las velocidades promediadas $v_n = v(\Delta t_n)$. En la figura 4.10 están representadas tanto la velocidad absoluta como la relativa al recipiente cuando $\Gamma = 2,17$. Al comparar la velocidad promedio con la del IBBM, de nuevo se observan importantes diferencias:

1. Durante el vuelo de la capa, la velocidad de ésta es hasta un 25 % menor que la velocidad que le corresponde a una partícula en vuelo libre. Para que esto ocurra, es forzoso que las partículas estén sometidas a otra fuerza adicional, que debe tener la misma dirección que la gravedad, para que las acelere más que el campo gravitatorio
2. Se aprecia claramente que la velocidad relativa promedio cambia de tendencia en una fase muy anterior a la que se registra el choque (flecha verde en la figura 4.10). Este hecho, de nuevo, está relacionado con que la colisión entre la capa y el recipiente no es instantánea.
3. La velocidad relativa promedio al final del vuelo no se hace cero, si no que muestra un pico alrededor de la fase en la que se registra la colisión.

Se hace notar que la capa granular tiene la misma velocidad que el recipiente cuando no está volando. Esta observación garantiza que el método que se ha utilizado para obtener las trayectorias y velocidades promedio es correcto.

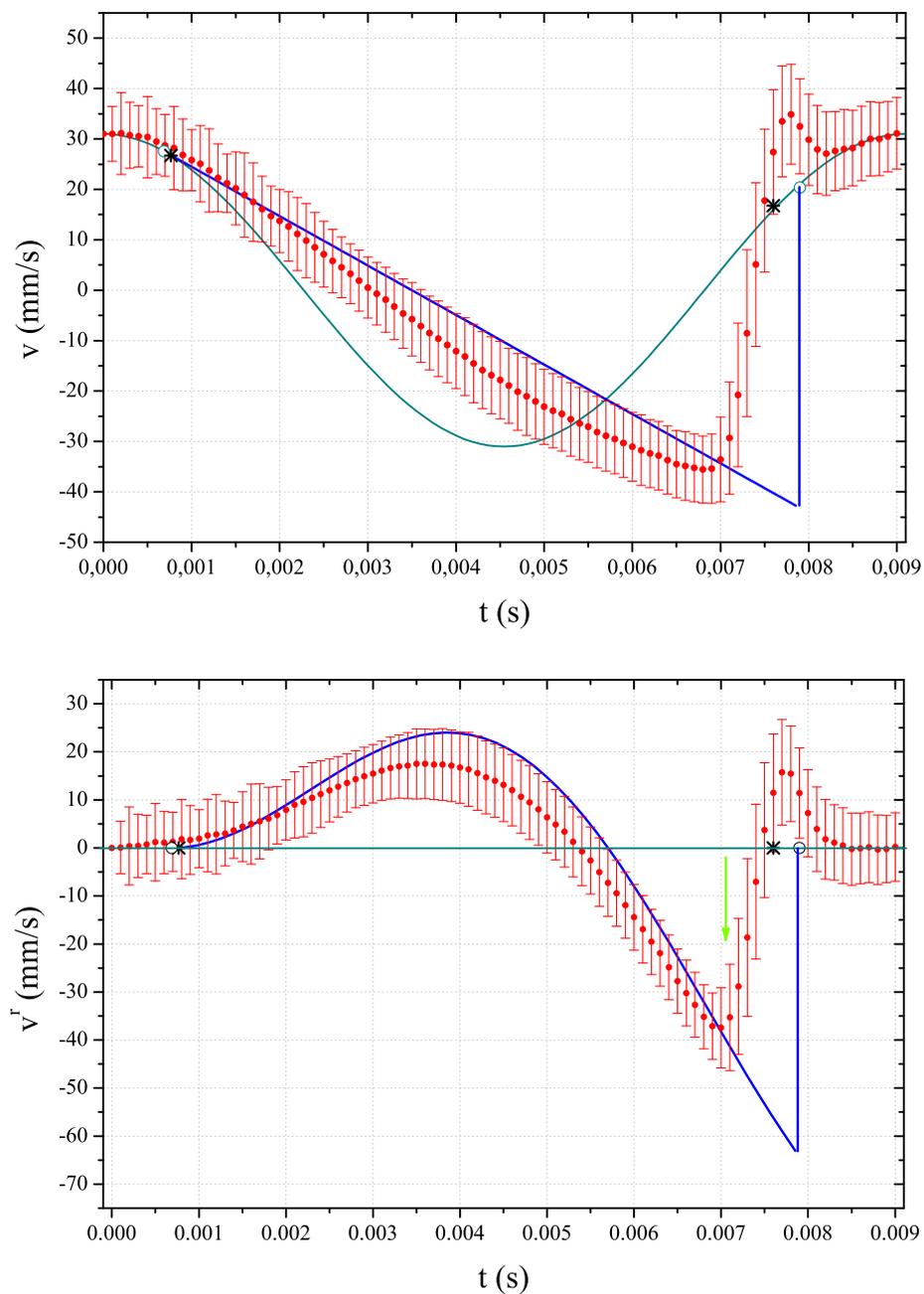


Figura 4.10: Arriba, velocidad absoluta y abajo, relativa a la del recipiente, para $\Gamma = 2,17$. Puntos en rojo con barras de error, velocidad promedio. Línea continua en azul, velocidad del IBBM en la que se marca el inicio y fin del vuelo con círculos azules. Los asteriscos negros señalan la fase en la que comienza y termina el vuelo toda la capa registrado experimentalmente. En línea continua cian se representa la velocidad del recipiente. La flecha verde indica donde la velocidad relativa cambia de tendencia.

La aceleración vertical de las partículas se ha calculado derivando numéricamente la velocidad y agrupando los datos tal como se hizo con la posición y la velocidad, obteniéndose entonces $a_n = a(\Delta t_n)$. La figura 4.11 representa la aceleración para $\Gamma = 2,17$, junto con la aceleración del recipiente. Cuando la aceleración a la que está sometido todo el recipiente es igual a la aceleración de la gravedad, todas las partículas comienzan un vuelo. En principio, este vuelo es libre, por lo que la aceleración que deberían experimentar las partículas entre el instante inicial del vuelo y la colisión con el contenedor sería g . Tras la colisión, la aceleración de las partículas debe ser igual a la del contenedor hasta iniciar un nuevo vuelo. A priori, al estudiar la aceleración promedio de las partículas, éstas no presentan grandes desviaciones respecto del esquema de movimiento que se acaba de describir, a excepción de un gran pico debido al choque de las partículas al final del vuelo. Sin embargo, al observar con más detalle se aprecia que hay pequeñas desviaciones de la aceleración respecto a g entre el instante inicial y final del vuelo. Para analizar este comportamiento detalladamente se ha construido un diagrama en el que se ha representado posición y velocidad relativa promedio junto con la aceleración absoluta promedio. En este diagrama se ha coloreado el fondo según las partículas se mueven hacia arriba, o hacia abajo, respecto al recipiente. Se aprecia que la aceleración no es constante en la porción del ciclo en el que la capa está volando: la aceleración es levemente menor que la gravedad cuando la velocidad relativa es positiva y ligeramente mayor cuando es negativa². En el caso más sencillo, en el que las partículas cercanas a las paredes sólo estuvieran sujetas a la gravedad y a una fricción culombiana, la aceleración que experimentarían sería

$$a = -g + \begin{cases} \frac{\mu|\vec{F}_N|}{m} & \text{si } v^r < 0 \rightarrow a > -g \\ -\frac{\mu|\vec{F}_N|}{m} & \text{si } v^r > 0 \rightarrow a < -g \end{cases} \quad (4.4)$$

donde v^r es la velocidad relativa de las partículas respecto de las paredes de la celda, μ es el coeficiente de rozamiento, m la masa de una partícula, y \vec{F}_N la fuerza normal que ejerce la partícula sobre la pared (proveniente de la componente del peso de la capa granular que se dirige a las paredes por las cadenas de fuerza). La fricción de los granos contra las paredes genera el arrastre que sufren las partículas (su altura al final del ciclo de vibración es inferior que al principio) y parece, por tanto, la responsable de que aparezca un flujo convectivo en los medios granulares vibrados.

²Nótese que de nuevo se ha considerado el sentido de la aceleración como negativo cuando es hacia abajo y positivo hacia arriba.

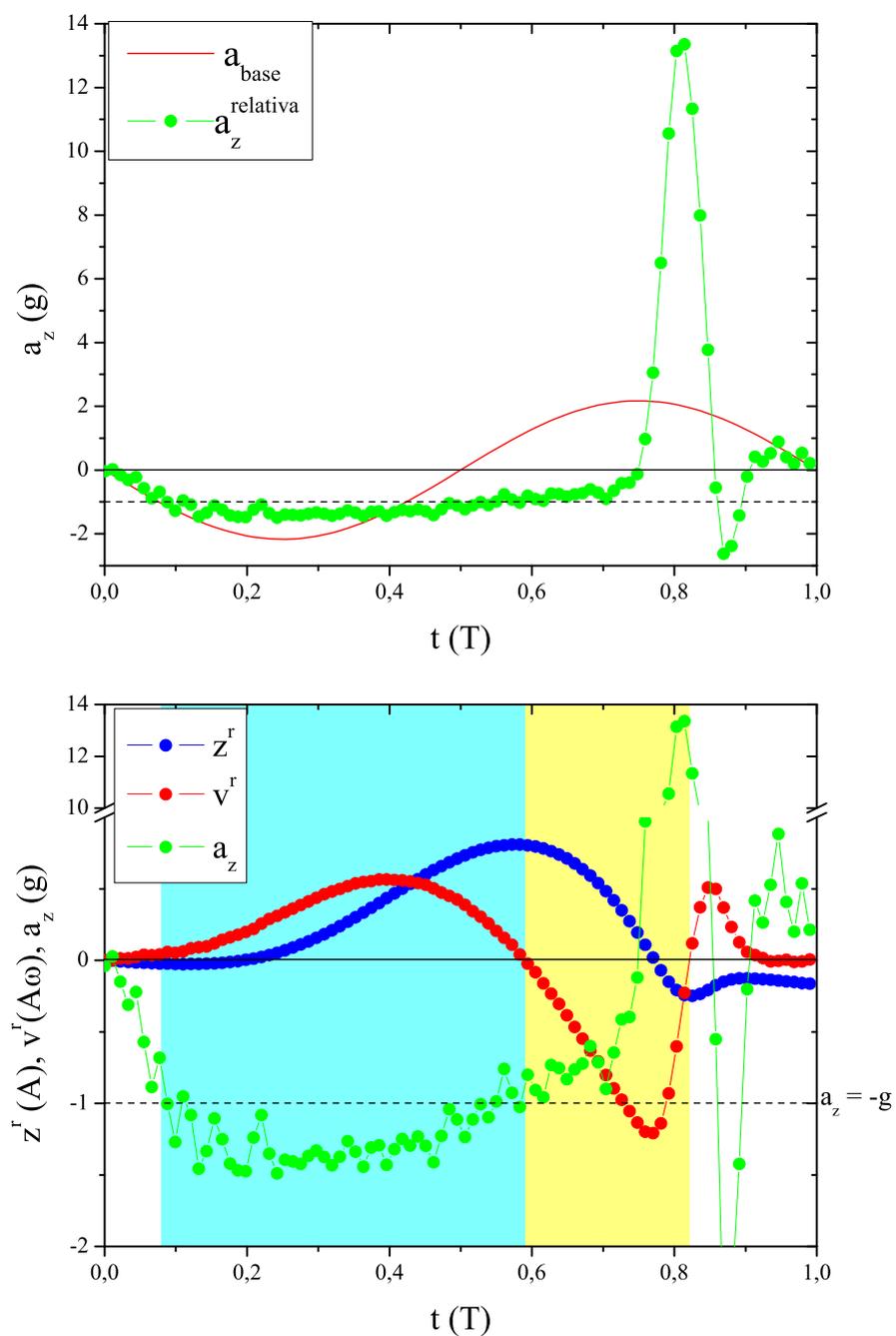


Figura 4.11: Arriba, aceleración promedio de las partículas para $\Gamma = 2,17$ (puntos verdes), aceleración de la base (línea roja continua). Abajo, posición relativa de las partículas normalizada con la amplitud máxima de vibración (puntos azules), velocidad relativa normalizada con la velocidad máxima de vibración (puntos rojos) y aceleración relativa normalizada con g (puntos verdes). El fondo se ha coloreado en azul cuando la capa está volando con velocidad relativa positiva, y en amarillo si es negativa.

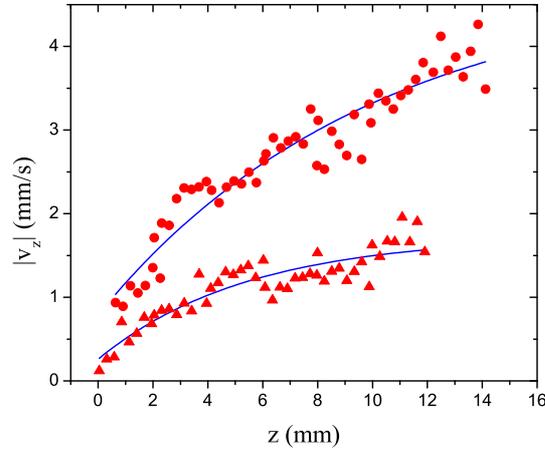


Figura 4.12: Velocidad de convección en función de la profundidad para una capa de 33 diámetros de partícula y $\Gamma = 2,43$. Círculos, el recipiente que contiene el medio está separado de la base por una pequeña rendija menor que el diámetro de una partícula. Triángulos, la celda está sellada. En ambos casos, la línea continua es un ajuste a una función del tipo $v(z) = V + v_z^0 e^{-z/\lambda(\Gamma)}$.

La existencia de gas intersticial no puede ser exclusivamente el origen del movimiento convectivo como se argumenta en [42]. Se ha medido la velocidad de las partículas en las paredes en el caso en que el recipiente tiene una brecha inferior por donde puede permear aire, evitando el gradiente de presiones que se genera en el interior. Al no existir este gradiente (o por lo menos ser muy pequeño respecto al caso en el que la celda no está hueca por abajo), no se debería observar movimiento convectivo o ser la velocidad mucho más pequeña que cuando la celda está sellada. Sin embargo se observa que la velocidad de convección es incluso mayor que cuando la celda está sellada (figura 4.12). Además, la dependencia de la velocidad con la altura sigue siendo exponencial.

Movimiento diferencial dentro de la capa granular

Como se ha comentado, la velocidad de convección depende exponencialmente de la profundidad. Además de estudiar la trayectoria, velocidad y aceleración promedio, se ha comprobado que existe una conexión entre el movimiento de los granos en la escala lenta y la rápida. Por tanto, todo hace indicar que dentro de la capa granular existe un movimiento diferencial, esto es, que la capa granular posee una dinámica interna que hace que se comporte de manera diferente en función de la profundidad. Esta dinámica se puede estudiar calculando la trayectoria y velocidad promedio de estratos muy delgados a diferente

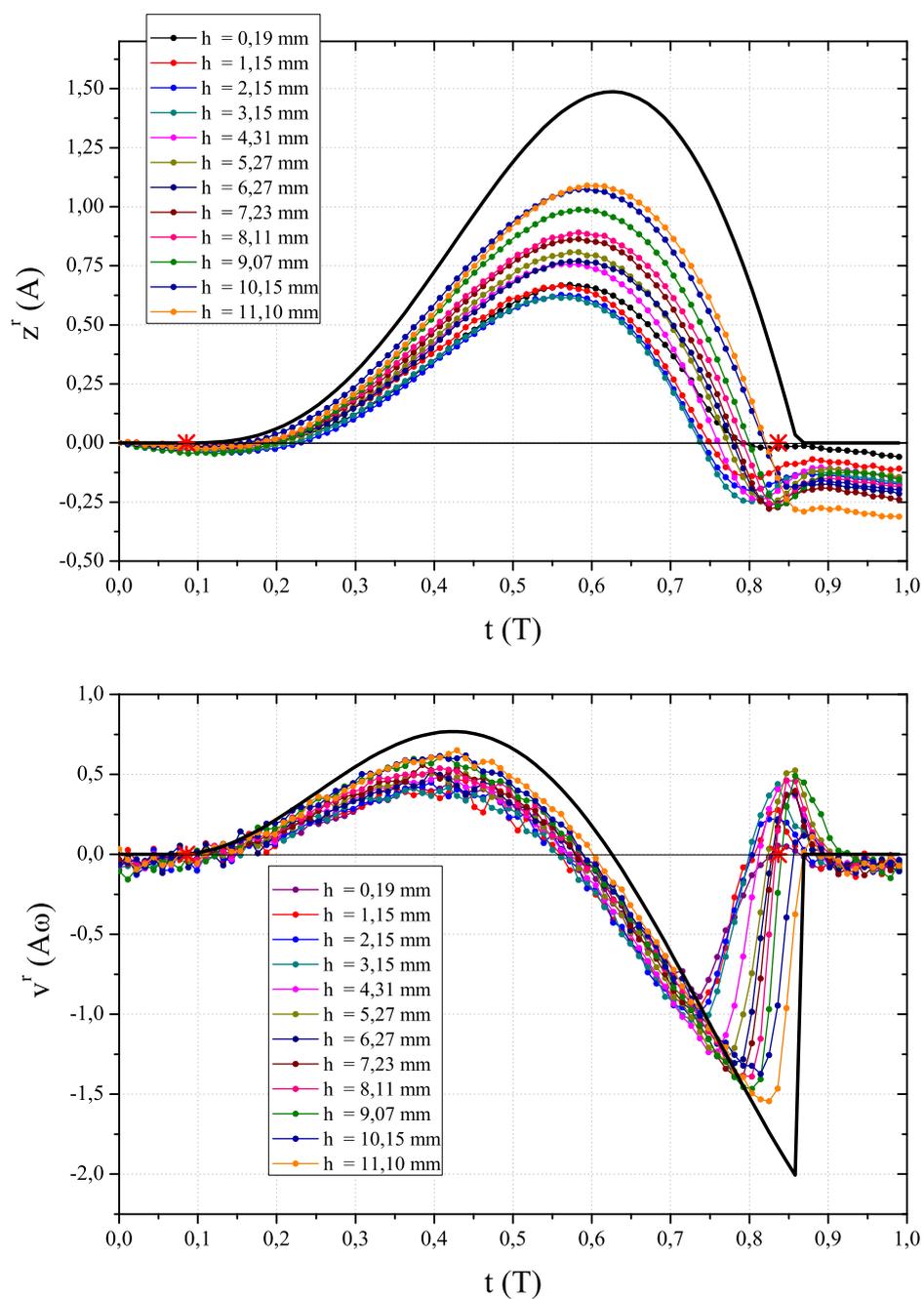


Figura 4.13: Con distintos colores se representan la posición y velocidad relativa para distintas alturas dentro de una capa de 50 g ($N = 33$) agitada con una aceleración adimensional $\Gamma = 2,17$. La línea negra representa la posición y velocidad relativa de una partícula inelástica sometida exclusivamente a la fuerza de gravedad (IBBM). Los asteriscos en rojo muestran el momento en que todo el medio inicia y termina un vuelo. Todas las unidades han sido adimensionalizadas.

profundidad. Para ello, se han adquirido secuencias de imágenes para toda la altura de la capa. Las imágenes de las secuencias se han dividido en ventanas de 256 píxeles de ancho y 8 de alto desde la base hasta la superficie del medio granular. Se ha obtenido la trayectoria y velocidad de las partículas que aparecen en cada uno de esos estratos.

En la figura 4.13 se ha reconstruido la dinámica interna resuelta en el tiempo de toda la capa, representando la trayectoria y la velocidad relativa a la pared, z^r y v^r respectivamente, de estratos separados una distancia igual a dos veces el diámetro de una partícula. Claramente se aprecia que existe un movimiento diferencial dentro de la capa porque la dinámica de los diferentes estratos depende de su altura.

En la pared lateral, tanto la altura como la fase del máximo de la trayectoria relativa de cada uno de los estratos es diferente: la altura máxima que alcanzan los estratos inferiores es menor que la que alcanzan los superiores y, además, dicho máximo se alcanza antes en los estratos inferiores que en los superiores. Esta observación es consistente con el hecho que la fricción entre los granos y la pared lateral sea el origen del movimiento convectivo. Al crecer la presión con la altura, la fuerza normal aumenta con la profundidad y, por tanto, la fuerza de rozamiento. Durante el vuelo, los granos próximos a la pared están sujetos a una fuerza que es la suma de la gravedad y la fuerza de rozamiento. Por este motivo, los estratos más profundos vuelan menos tiempo y terminan su vuelo antes que los menos profundos. En la sección 3.4 se avanzó que la colisión entre la capa granular y el contenedor no es instantánea, y tiene una duración estimada en un 5% del periodo. Donde más claramente se aprecia que la colisión tenga una duración finita es en la fase en la que v^r cambia de tendencia cerca del momento en que toda la capa colisiona con la base. La fase en la que ocurre dicho cambio depende de la altura del estrato.

Como ya se describió anteriormente, v^r no se hace cero instantáneamente tras la colisión del correspondiente estrato, sino que presenta un pico al rededor del instante donde se registra la colisión de toda la capa. Sin embargo, al observar el comportamiento de la capa estructurada en estratos, los más superficiales no presentan ningún pico alrededor del instante de colisión.

Una consecuencia directa del hecho de que la trayectoria que siguen los diferentes estratos de la capa dependa de la altura, es que la capa granular se dilata durante el vuelo y se comprime en el choque, cambiando la compactación del medio durante un ciclo de vibración. A continuación se hará un estudio más detallado de este fenómeno.

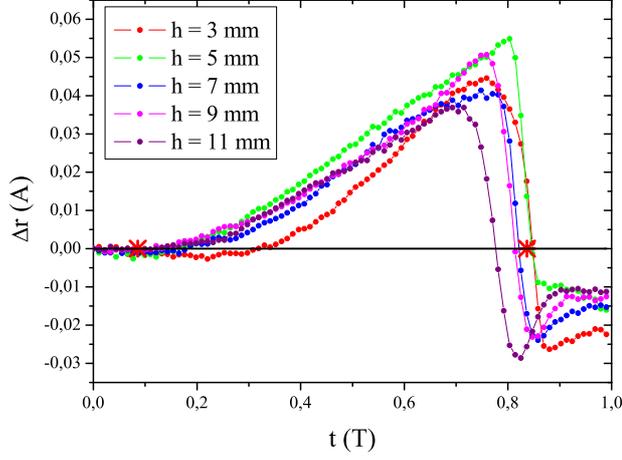


Figura 4.14: Distancia relativa adimensionalizada con la amplitud de vibración entre pares de partículas que aparecen en las mismas secuencias de imágenes. Se ha representado el promedio para ventanas de observación cuadradas de 2 mm de lado a distintas alturas. Los asteriscos rojos representan la fase inicial y final de vuelo de toda la capa medidas experimentalmente. La aceleración adimensional es $\Gamma = 2,17$

Compresión–dilatación. Movimiento del centro de masas

Para estudiar el ciclo de compresión–dilatación que se observa en la figura 4.13 se ha medido la distancia relativa entre pares de partículas, $\Delta r(t)$, cuyas trayectorias resueltas en el tiempo coincidan en una secuencia de imágenes y que abarque al menos un ciclo de vibración. Por tratarse de dos partículas cualesquiera (j e i) de las que aparecen en la secuencia, se debe restar la separación entre ambas partículas en el primer instante del ciclo, t_0 , para que el cálculo de esta magnitud sea comparable entre cualquier par de partículas. De esta manera se define la distancia relativa entre partículas:

$$\Delta r(t) = (\vec{r}_i(t) - \vec{r}_i(t_0)) - (\vec{r}_j(t) - \vec{r}_j(t_0)) \quad (4.5)$$

eligiendo j e i de tal manera que Δr sea positiva al comienzo del ciclo de vibración.

Los resultados de Δr , promediados y reagrupados en un solo ciclo, se muestran en la figura 4.14. Se aprecia cómo Δr aumenta tras despegar la capa alcanzando el máximo justo antes de la colisión. Los instantes donde se alcanzan los máximos son distintos, puesto que ya se ha demostrado que la colisión no ocurre en el mismo momento para todos los estratos.

Como se puede observar, Δr es más pequeño al final del ciclo que al principio. Esto se debe a una limitación del método empleado, causado por las partículas que salen de la ventana de observación (que probablemente son las que harían aumentar Δr) y que se

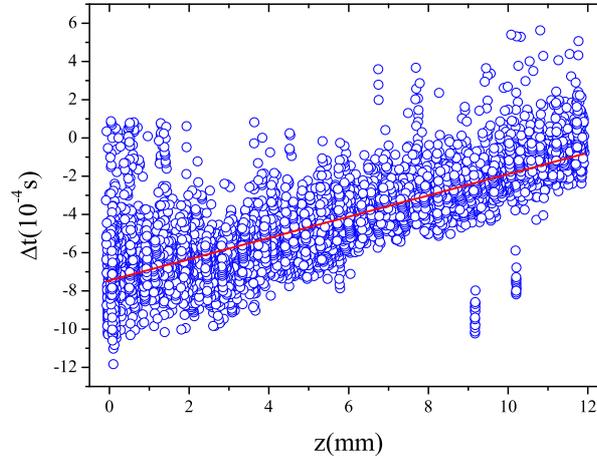


Figura 4.15: Instante de la colisión en función de la altura. Puntos azules, $(z(t_{col}), \Delta t_{col})$. Línea continua, ajuste lineal de los puntos.

pierden irremisiblemente, dando la falsa impresión de que el medio se está compactando. Además, hay que tener en cuenta que los valores de Δr obtenidos están en el límite de la resolución experimental del método descrito en la sección 2.5. Para estimar la resolución experimental se parte de que el error en la determinación del centroide se acotar en 0,25 pixel. Según el factor de conversión pixel–distancia $0,25 \text{ pixel} \sim 0,05 A$, donde A es la amplitud de vibración. Justamente, este valor es del orden del máximo de Δr .

Concediendo que estas medidas tengan la suficiente valía cuantitativa, la figura 4.14 muestra que el proceso de dilatación–compresión no es homogéneo dentro de la capa. Que la capa pueda dilatarse hasta $0,05 \times A$ hace que el movimiento del centro de masas de toda la capa sea la composición de dos movimientos: el que impone la vibración de todo el sistema y el propio de la dilatación del medio granular.

Pulso de compresión

La colisión al final del vuelo de los distintos estratos que componen una capa granular no es simultánea y, además, la compactación en este instante cambia drásticamente. Aquí se pretende estudiar cómo es este proceso en las partículas que componen el medio. Para ello se ha determinado en qué instante, t_{col} , y a qué altura, $z(t_{col})$, las partículas dejan de volar y se quedan en reposo sobre la base. La determinación de t_{col} se hace a partir de los instantes en que las partícula terminan su vuelo que se corresponden con los mínimos

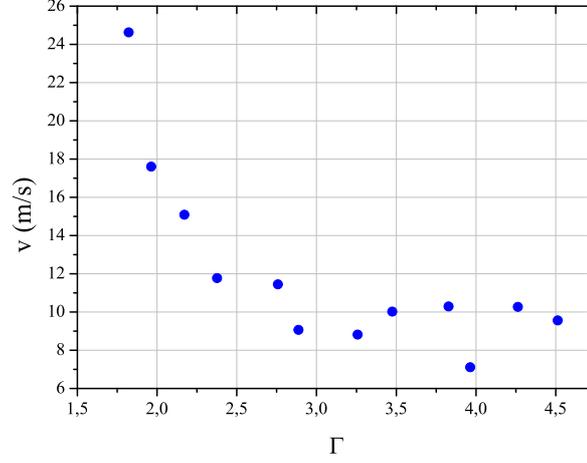


Figura 4.16: Velocidad de propagación del pulso de compresión.

resaltados con círculos en la figura 4.2. Una vez conocido t_{col} y el tiempo en que la capa granular termina el vuelo, t_{col}^{cm} , se define Δt_{col} como el retraso que sufre una partícula al terminar el vuelo respecto al centro de masas del sistema.

$$\Delta t_{col} = t_{col} - t_{col}^{cm} \quad (4.6)$$

Se puede describir el pulso compactación que recorre el medio granular estudiando la dependencia que existe entre Δt_{col} y $z(t_{col})$. Se ha comprobado que ésta es aproximadamente lineal, como se puede ver en la figura 4.15. Este hecho sugiere que dentro del medio granular viaja un pulso de compresión que se origina cuando la capa colisiona con la base de la celda. La velocidad a la que se propaga dicho pulso se puede calcular como la inversa de la pendiente de la recta que ajusta Δt_{col} en función de $z(t_{col})$. Se hace notar que se ha optado por hacer este ajuste (Δt_{col} en función de $z(t_{col})$) para minimizar el error que se comete al estimar el valor de la pendiente, puesto que la precisión con que se conoce $z(t_{col})$ es mayor que la de Δt_{col} .

La velocidad a la que se propaga el pulso de compresión (figura 4.16) cambia al variar el parámetro de control: la velocidad del pulso disminuye al aumentar Γ tendiendo a un valor constante cuando $\Gamma \sim 2,5$. Este valor del parámetro de control es muy similar al valor para el que el tiempo de vuelo del centro de masas se aparta del IBBM y la velocidad de convección cambia de tendencia. El cambio de velocidad a la que se propaga el pulso para este valor de Γ sugiere que se puede producir un cambio en las propiedades del medio

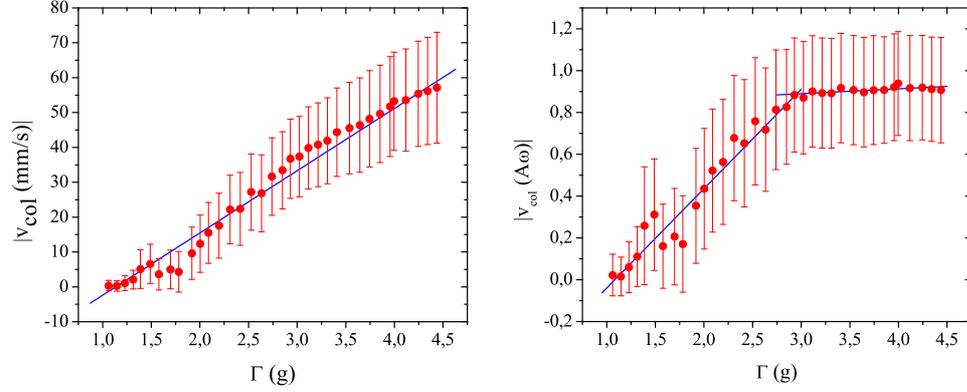


Figura 4.17: Velocidad relativa en la colisión en función de la aceleración adimensional Γ . Los datos corresponden a una capa de 50 g (33 capas), siendo el campo visual de 4 mm de altura (entre los 6 y los 10 mm de profundidad). A la izquierda, en unidades de mm/s . A la derecha, normalizado con la velocidad máxima de vibración.

granular.

Velocidad relativa en el choque

Se añade esta sección con resultados aún parciales, que merecen un tratamiento posterior más profundo, para señalar una posible línea de investigación en la que se podría continuar el trabajo recogido en la presente memoria.

En consonancia con la caracterización del pulso de compresión, también se puede analizar la velocidad relativa entre la capa granular y el recipiente en el instante de colisión, $v_i^r(t_{col})$, que se define como la diferencia de velocidad entre una partícula, v_i , y la base del recipiente en el instante de colisión.

$$v_i^r(t_{col}) = v_i(t_{col}) - A\omega \cos(\omega t_{col}) \quad (4.7)$$

Calculando el promedio de todos los valores de $v_i^r(t_{col})$ de las partículas próximas al lateral contenidas en cualquier estrato de la capa, se obtiene la velocidad de colisión v_{col} de dicho estrato. Al estudiar la dependencia con el parámetro de control, v_{col} tiene un comportamiento aproximadamente lineal como se puede apreciar en la figura 4.17. Sin embargo al normalizar la velocidad de colisión con la velocidad máxima que alcanza el recipiente durante un ciclo de vibración, v_{max} , se pone en evidencia la existencia de dos regiones bien diferenciadas. Cuando $\Gamma \lesssim 3$ la velocidad de colisión crece linealmente y cuando $\Gamma \gtrsim 3$ satura. Este mismo comportamiento se ha observado también en la velocidad

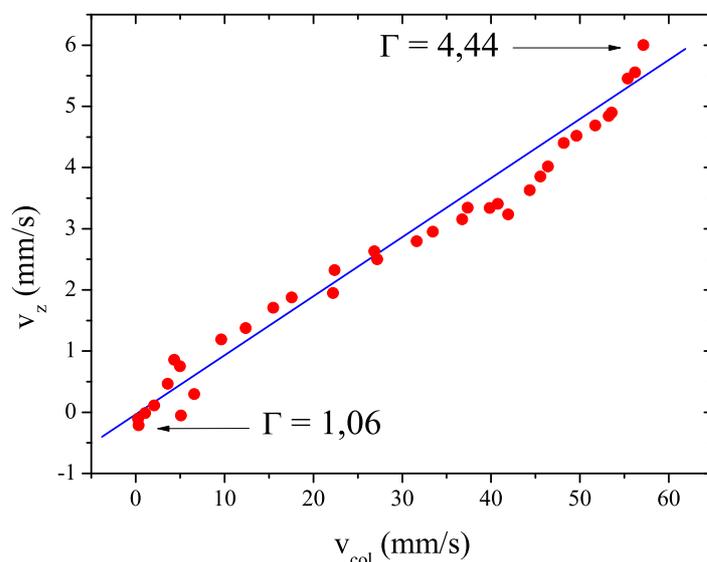


Figura 4.18: Velocidad de convección en función de la velocidad relativa en el choque para distintos valores de la aceleración adimensional. La línea continua es sólo una tendencia. Se ha señalado los valores de Γ para el rango explorado.

de convección (figura 4.6) para valores similares de Γ : la velocidad aumenta de una manera aproximadamente lineal con la aceleración adimensional, y al ser normalizada con v_{max} , muestra un cambio de tendencia en $\Gamma \sim 2,3$

Uno de los aspectos interesantes que se han planteado es determinar si existe alguna escala entre la velocidad de convección y la velocidad relativa de las partículas en el instante de la colisión. Al representar v_z en función de v_{col} como se ha hecho en la figura 4.18, la dependencia es aproximadamente lineal. Este hecho demuestra que existe una correlación entre el movimiento de las partículas en la escala lenta (movimiento convectivo) y la rápida (dinámica microscópica).

En resumen, en este capítulo se ha demostrado que en el movimiento de las partículas existen dos escalas temporales. La escala lenta correspondiente al movimiento convectivo y que sólo se aprecia tras muchos periodos de oscilación, y la rápida que es la que se observa en un ciclo de vibración. El movimiento de convección se ha caracterizado en función de la altura dentro de la capa, la rugosidad de las paredes y el parámetro de control. El movimiento de las partículas resuelto en el tiempo ha permitido conocer la dinámica microscópica de éstas, haciendo evidente que la fricción entre los granos y las

paredes del recipiente es la principal contribución a la fuerza que origina el movimiento convectivo en una capa vibrada. Se han encontrado evidencias de la existencia de un pulso que recorre la capa granular durante la colisión entre el medio y el contenedor. Por último, la dependencia de la velocidad de convección con la velocidad de la capa el choque indica que existe una correlación del movimiento de las partículas en ambas escalas.

Conclusiones y perspectivas

Conclusiones

En este último apartado se proporciona una visión global de las conclusiones parciales presentadas a lo largo de la memoria. Además se sugieren algunas líneas de investigación que se consideran prometedoras para la continuación de este trabajo.

En primer lugar, se ha considerado la capa de medio granular en su conjunto. En tal caso, la variable a la que se ha prestado especial atención es el tiempo que el medio granular pasa en cada ciclo sin contacto con la base del recipiente. Este tiempo de vuelo, que se ha denominado τ , crece conforme aumenta Γ hasta que alcanza el valor del periodo de la vibración externa. A partir de ahí, si se aumenta Γ todavía más, se produce una bifurcación en τ por duplicación de periodo: para un valor determinado de Γ , la capa realiza un vuelo de duración mayor que un periodo y a renglón seguido otro vuelo de duración inferior. El tiempo de vuelo crece en una de las ramas (la de los vuelos largos) y decrece en la otra (la de los vuelos cortos).

El movimiento colectivo de los granos en el seno de la capa granular forma una circulación con geometría toroidal: los granos suben hacia la superficie cerca del centro de la celda y descienden cerca de la pared lateral del recipiente. Esta circulación es robusta hasta valores de $\Gamma \approx 6,5$, momento en el cual el rollo toroidal se parte en dos rollos longitudinales según un diámetro del recipiente. Esa transición marca el límite explorado en el presente trabajo, en el que sólo se ha estudiado la circulación toroidal.

Se han variado algunas condiciones experimentales para analizar sus consecuencias en el tiempo de vuelo. Estos cambios han permitido obtener las siguientes conclusiones:

- Al variar la altura de la capa granular no se han encontrado diferencias apreciables en la posición en la que aparece la bifurcación. Sin embargo, la altura del medio sí que afecta al tiempo de vuelo para valores de Γ menores que la bifurcación por duplicación de periodo. Es de reseñar que para capas muy gruesas la bifurcación espacial (se pasa de un

rollo toroidal a dos longitudinales) no aparece en el rango explorado.

– Al modificar las propiedades superficiales de las paredes y las propiedades de fricción de los granos rociándolos con lubricante, de modo que cambie la fricción de los granos entre sí y con las paredes, tampoco se ha encontrado ninguna diferencia apreciable antes del punto de bifurcación. Sin embargo se observan diferencias en las ramas de la bifurcación, donde se puede apreciar una pequeña disminución en los tiempos de vuelo al aumentar la fricción.

– Se ha verificado la importancia del gas intersticial en el movimiento del centro de masas. Al practicar el vacío en el recipiente, el valor del parámetro de control para el que aparece la bifurcación por duplicación de periodo es menor que cuando en el sistema hay aire. Las ramas de la bifurcación también tienen un comportamiento bastante diferente cuando en el sistema existe un gas intersticial.

En resumen, estas variaciones no llevan aparejadas la observación de ningún nuevo fenómeno. Simplemente se han observado variaciones cuantitativas en la dependencia del tiempo de vuelo con Γ .

A fin de modelizar estas observaciones experimentales, se ha empleado el modelo de la bola inelástica que trata todo el medio granular como un cuerpo sólido perfectamente inelástico. Este modelo es fácilmente expresable en un algoritmo que puede ser resuelto por métodos numéricos. Al variar Γ dentro del rango explorado experimentalmente, el IBBM predice una dinámica para el tiempo de vuelo que es monótonamente creciente hasta que aparece una bifurcación de tipo “*saddle node*” cuando $\tau = T$ y después una bifurcación por duplicación de periodo. Tras esta última, la rama de los vuelos largos crece y la de los vuelos cortos decrece, acabando por anularse.

Al comparar los resultados experimentales con los calculados a partir del modelo se encuentran varias diferencias:

- Para $\Gamma > 2,5$ el tiempo de vuelo medido experimentalmente es menor que el calculado.
- El valor del parámetro de control donde aparece la bifurcación es mayor que el predicho por el modelo.
- No se observa la saturación del tiempo vuelo por una bifurcación “*saddle node*” en los datos experimentales.
- Las ramas de la bifurcación obtenidas experimentalmente saturan (no crecen o decrecen indefinidamente).

Por tanto, el IBBM no reproduce ni tan siquiera cualitativamente la dinámica de una

capa granular vibrada verticalmente. Para corregir el modelo y simular los resultados experimentales se ha implementado algunas modificaciones introducidas en el modelo.

Gas intersticial. Para simular la existencia de un gas intersticial en el medio granular se ha supuesto que el medio granular se comporta como un pistón poroso, usando el modelo de Kroll. Al introducir estos efectos, el punto donde se produce la bifurcación se desplaza, pero aún así no coincide con el obtenido experimentalmente.

Gravedad efectiva. Se ha introducido empíricamente una gravedad efectiva que es función de Γ para intentar simular el rozamiento del medio granular con la pared lateral del contenedor. Con esta modificación se consigue desplazar el punto donde aparece la bifurcación hasta el valor que se ha obtenido experimentalmente. Sin embargo no cambia la dinámica ya que sigue apareciendo la bifurcación “*saddle node*” y las ramas no saturan. De este modo, los datos experimentales antes y después de la duplicación de periodo no coinciden con los calculados.

Duración finita de la colisión. Al incluir ruido en la fase en la que se produce el choque es posible reducir la región de estabilidad de la bifurcación de tipo “*saddle node*”. Fuera de la región de estabilidad, el comportamiento del tiempo de vuelo calculado con esta modificación sigue siendo el mismo que el calculado a partir del modelo sin modificar. Además, al considerar la duración finita de los choques se explica un cambio de pendiente en la tendencia creciente del tiempo de vuelo.

Al introducir términos que den cuenta de estas tres modificaciones en el IBBM se reproduce cualitativamente y cuantitativamente, con buena precisión, los resultados que se obtienen experimentalmente del tiempo de vuelo para todos los espesores de capa excepto para la más pequeña ($N = 20$).

Al estudiar las trayectorias resueltas en el tiempo de los granos próximos a la pared es conveniente describir su movimiento en dos escalas de tiempo diferentes: una *escala rápida* que se refiere al movimiento de los granos resuelto en un periodo de vibración externa, y otra *escala lenta* que corresponde a una escala de tiempo un par de órdenes de magnitud superior al periodo de vibración externa. En la escala rápida los granos próximos a las paredes siguen trayectorias que recuerdan al vuelo libre de una partícula, con la particularidad de que se da una deriva lenta de los granos en dirección vertical hacia abajo. En la escala lenta se observa el movimiento convectivo, tal que los granos próximos a la pared lateral se mueven verticalmente hacia abajo.

Así se puede concluir que:

– La componente vertical de la velocidad de convección se ajusta bien a una función exponencial que depende de la profundidad dentro de la capa granular, mientras que la componente azimutal es nula.

– La forma de la superficie de la capa granular cambia con Γ . Cuando $\Gamma < 2$ es abultada en el centro, y plana cuando $\Gamma > 3$. En ambos casos la geometría del flujo es simétrica. Cuando $2 < \Gamma < 3$ la superficie es lisa pero presenta cierta inclinación respecto de la horizontal, dejando de ser simétrica.

– La velocidad de convección tiene diferente dependencia con Γ para las regiones descritas anteriormente.

– La velocidad de convección depende de las características de la superficie de las paredes laterales. A mayor rugosidad, menor es la velocidad de convección. Esto es válido para rugosidades del orden de las decenas o centenas de micras.

Con respecto a la dinámica microscópica observada a la escala de tiempos más corta:

– La dinámica del movimiento de los granos resuelto en el tiempo dentro de un periodo difiere del IBBM. En general, las trayectorias que siguen las partículas cercanas a la pared muestran un arrastre que indica que existe una fuerza hacia abajo mayor que la de la gravedad. Esta fuerza extra proviene del rozamiento de las partículas con la pared lateral, y actúa en la parte del ciclo que los granos están volando con velocidad relativa negativa.

– La velocidad que presentan los granos varía en función de la altura dentro de la capa.

– La capa se comprime y se dilata dentro en un periodo de vibración.

– El choque de la capa con el fondo de la celda no es instantáneo, de modo que se produce una onda de compresión. La velocidad de esa onda depende de Γ . Este fenómeno parece ser el responsable del cambio de tendencia cuando $\Gamma \approx 2,5$.

En resumen, gracias a las medidas realizadas, se ha relacionado de manera satisfactoria el movimiento individual de las partículas con la convección. Un modelo simple ha permitido comprender mejor los fenómenos observados y determinar así la influencia de diversas variables en el movimiento convectivo. El trabajo desarrollado revela que la fricción entre los granos y las paredes es el origen del movimiento convectivo.

Perspectivas

La caracterización del pulso de compactación, cuyo estudio se ha iniciado, es la continuación lógica del trabajo expuesto. En lo que respecta al movimiento del centro de masas,

parece de sumo interés conocer más a fondo cual es la influencia de la relación de aspecto en la dinámica del centro de masas de los medios granulares vibrados.

También se ha explorado de manera tentativa la forma de los histogramas de la velocidad estroboscópica. La forma de éstos está relacionada con la temperatura granular. Un estudio sistemático sería muy interesante a la hora de ver la relación entre el movimiento convectivo y la temperatura granular.

Finalmente, es interesante también apuntar que se han llevado a cabo algunos experimentos en microgravedad para investigar si puede existir convección granular en una capa vibrada en ausencia de gravedad y si la forma del recipiente en este caso es determinante. Aunque los datos todavía no han sido analizados en profundidad, no se ha observado convección en celdas cilíndricas con bases planas y sí cuando una de las bases tiene forma cónica.

Bibliografía

- [1] C. Coulomb. *Essay on the rules of maximis and minimis applied to some problems of equilibrium related to architecture*. Acad. Roy. Sci. Mem. Phys. **7**, (1773), p. 343.
- [2] M. Faraday. *On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces*. Philos. Trans. R. Soc. London **52**, (1831), pp. 299–318.
- [3] O. Reynolds. *On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact. with experimental illustrations*. Phil. Mag. Ser. 5 **20**, (1885), p. 469.
- [4] A. Garcimartín, D. Maza, J. L. Ilquimiche, I. Zuriguel. *Convective motion in a vibrated granular layer*. Phys. Rev. E **65**, (2002), p. 031303.
- [5] J. Pastor, D. Maza, I. Zuriguel, A. Garcimartín, J.-F. Boudet. *Time resolved particle dynamics in granular convection*. Phys. D **2**, (2007), pp. 128–135.
- [6] I. Zuriguel, A. Garcimartín, D. Maza, L. Pugnaloni, J. Pastor. *Jamming during the discharge of granular matter from a silo*. Phys. Rev. E **71**, (2005), p. 051303.
- [7] C. Mankoc, A. Janda, R. Arévalo, J. Pastor, I. Zuriguel, A. Garcimartín, D. Maza. *The flow rate of granular materials through an orifice*. Granul. Matter **9**, (2007), pp. 407–414.
- [8] R. M. Nedderman. *Statics and Kinematics of Granular Materials*. Cambridge University Press (1992).
- [9] D. Geldart. *Types of gas fluidization*. Powder Technol. **7**, (1973), pp. 285–292.
- [10] H. Jaeger, S. Nagel, R. Behringer. *Granular solids, liquids, and gases*. Rev. Mod. Phys. **68**, (1992), pp. 1259–1263.

-
- [11] I. Zuriguel, T. Mullin, J. Rotter. *Effect of particle shape on the stress dip under a sandpile*. Phys. Rev. Lett. **98**, (2007), p. 28001.
- [12] J. Duran. *Sands, Powders and Grains*. Springer - Verlag, New York (2000).
- [13] Y. Bertho, F. Giorgiutti-Dauphiné, J.-P. Hulin. *Dynamical janssen effect on granular packing with moving walls*. Phys. Rev. Lett. **90**, (2003), p. 144301.
- [14] I. Zuriguel, J. F. Boudet, Y. Amarouchene, H. Kellay. *Role of fluctuation-induced interactions in the axial segregation of granular materials*. Phys. Rev. Lett. **95**, (2005), p. 258002.
- [15] H. Kuo, Y. Hsiao, P. Shih. *A study of the axial segregation in a rotating drum using deformable particles*. Powder Technol. **166**, (2005), pp. 161–166.
- [16] R. Bagnold. *The Physics of Blown Sand and Desert Dunes*. Methuen, London (1941).
- [17] G. Peng, H. Herrmann. *Density waves of granular flow in a pipe using lattice-gas automata*. Phys. Rev. E **49**, (1994), pp. R1796–R1799.
- [18] R. L. Brown, J. C. Richards. *Principles of Powder Mechanics*. Pergamon Press, Oxford (1970).
- [19] T. Pöschel, S. Luding. *Granular Gases*. Springer (2001).
- [20] T. Pöschel, N. Brilliantov. *Granular Gas Dynamics*. Springer (2003).
- [21] J. Aguilar. *Curso de Termodinámica*. Alhambra, Madrid (1992).
- [22] N. Brilliantov, T. Pöschel. *Kinetic Theory of Granular Gases*. Oxford University Press (2004).
- [23] J. Jenkins, M. Richman. *Kinetic-theory for plane flow of a dense gas of identical, rough, inelastic, circular disks*. Phys. of Fluids **28**, (1985), pp. 3485–3494.
- [24] J. Brey, J. Dufty, C. Kim, A. Santos. *Hydrodynamics for granular flow at low density*. Phys. Rev. E **58**, (1998), pp. 4638–4653.
- [25] V. Garzó, J. Dufty. *Dense fluid transport for inelastic hard spheres*. Phys. Rev. E **59**, (1999), pp. 5895–5911.
- [26] I. Goldhirsch, G. Zanetti. *Clustering instability in dissipative gases*. Phys. Rev. Lett. **70**, (1993), pp. 1619–1622.

- [27] F. Melo, P. Umbanhowar, H. Swinney. *Transition to parametric wave patterns in a vertically oscillated granular layer*. Phys. Rev. Lett. **72**, (1994), pp. 172–175.
- [28] P. Umbanhowar, F. Melo, H. Swinney. *Localized excitations in a vertically vibrated granular layer*. Nature **382**, (1996), pp. 793–796.
- [29] S. Douady, S. Fauve, C. Laroche. *Subharmonic instabilities and defects in a granular layer under vertical vibrations*. Europhys. Lett. **8**, (1989), p. 621.
- [30] S. Fauve, S. Douady, C. Laroche. *Collective behaviors of granular masses under vertical vibrations*. J. Physique **50**, (1989), pp. 187–191.
- [31] E. Clément, L. Vanel, J. Rajchenbach, J. Duran. *Pattern formation in a vibrated two-dimensional granular layer*. Phys. Rev. E **53**, (1996), pp. 2972–2975.
- [32] R. L. Brown, J. C. Richards. *Profile of flow of granules through apertures*. Trans. Instn. Chem. Engrs. **38**, (1960), p. 243.
- [33] F. Melo, P. B. Umbanhowar, H. L. Swinney. *Hexagons, kinks and disorder in oscillated layers*. Phys. Rev. Lett. **75**, (1995), p. 3838.
- [34] T. Akiyama, K. Aoki, K. Yamamoto, T. Yoshikawa. *Experimental study on vibration-induced convection and heaping in granular beds*. Granul. Matter **1**, (1998), p. 15.
- [35] G. H. Ristow. *Pattern Formation in Granular Materials*. Springer-Verlag, Berlin (2000).
- [36] P. Evesque, J. Rajchenbach. *Instability in a sand heap*. Phys. Rev. Lett. **62**, (1989), p. 44.
- [37] J. B. Knight, E. E. Ehrichs, V. Y. Kuperman, J. K. Flint, H. M. Jaeger, S. R. Nagel. *Experimental study of granular convection*. Phys. Rev. E **54**, (1996), p. 5726.
- [38] E. Clément, J. Duran, J. Rajchenbach. *Experimental study of heaping in a two-dimensional “sandpile”*. Phys. Rev. Lett. **69**, (1992), p. 1189–1192.
- [39] J. B. Knight. *External boundaries and internal shear bands in granular convection*. Phys. Rev. E **55**, (1997), p. 6016–6023.
- [40] J. A. C. Gallas, H. J. Herrmann, S. Sokolowski. *Convection cells in vibrating granular media*. Phys. Rev. Lett. **69**, (1992), p. 1371.

- [41] D. Hong, P. Quinn, S. Luding. *Reverse brazil nut problem: Competition between percolation and condensation*. Phys. Rev. Lett. **86**, (2001), p. 3423-3426.
- [42] C. Laroche, S. Doady, S. Fauve. *Convective flow of granular masses under vertical vibrations*. J. Phys. France **50**, (1989), p. 699.
- [43] R. Ramírez, D. Risso, P. Cordero. *Thermal convection in fluidized granular systems*. Phys. Rev. Lett. **85**, (2000), p. 1230.
- [44] R. D. Wildman, J. M. Huntley, D. J. Parker. *Convection in highly fluidized three-dimensional granular beds*. Phys. Rev. Lett. **81**, (2001), p. 3304.
- [45] E. van Doorn, R. P. Behringer. *Dilation of a vibrated granular layer*. Europhys. Lett. **40**, (1997), p. 387.
- [46] E. Fermi. *On the origin of cosmic radiation*. Phys. Rev. **75**, (1954), p. 387.
- [47] N. B. Tufillaro. *An Experimental Approach to Nonlinear Dynamics and Chaos*. Addison-Wesley (1992).
- [48] M. Franaszek, P. Pierański. *Jumping particle model. critical slowing down near the bifurcation points*. Can. J. Phys. **63**, (1985), p. 488.
- [49] A. Metha, J. M. Luck. *New temporal behavior for a nonlinear dynamical system: The completely inelastic bouncing ball*. Phys. Rev. Lett. **65**, (1990), p. 393.
- [50] P. J. Holmes. *The dynamics of repeated impacts with a sinusoidally vibrating table*. J. Sound Vib. **84**, (1982), p. 173.
- [51] J. M. Luck, A. Metha. *Bouncing ball with a finite restitution: Chattering, locking, and chaos*. Phys. Rev. E **48**, (1993), p. 3988.
- [52] W. Kroll. Forsch. Geb. Ingenieurwes. **20**, (1954), p. 2.
- [53] R. G. Gutman. *Vibrated beds of powders: a theoretical model for the vibrated bed*. Trans. Instn. Chem. Engrs. **54**, (1976), p. 174.
- [54] L. I. Reyes, I. Sánchez, G. Gutiérrez. *Air-driven reverse buoyancy*. Phys. A **358**, (2005), p. 466.
- [55] J. M. Kay, R. M. Nedderman. *Fluid Mechanics and Transfer Processes*. Cambridge University Press (1985).

-
- [56] T. H. Wu. *Soil Dynamics*. Allyn and Bacon, Boston (1971).
- [57] T. Ordañuhu, J. Millán-Rodríguez, H. Mancini, A. Garcimartín, C. Perez-García. *Bénard–marangoni convective patterns in small cylindrical layers*. *Phys. Rev. E* **48**, (1993), pp. 1051–1057.
- [58] M. Ramón, D. Maza, H. Mancini. *Patterns in small aspect ratio Bénard–marangoni convection*. *Phys. Rev. E* **60**, (1999), pp. 4193–4198.
- [59] A. Garcimartín, J. M. Pastor, R. Arévalo, D. Maza. *Convection in a vibrated granular layer*. *Eur. Phys. J. Special Topics* **146**, (2007), pp. 331–340.

Conclusions

Firstly, the granular layer has been considered as a whole. In this case, the variable that received particular attention has been the time during which the granular media is not in contact with the base of the container in each cycle. This time of flight, which was called τ , grows as Γ increases until it reaches the value of the period of the external vibration. From there on, if Γ is increased even more, there is a bifurcation in τ by period doubling: the layer makes a flight longer than a period followed by a flight shorter than the period. The time of flight increases in one of the branches (the one of long flights) and decrease in the other (short flights).

Some experimental conditions were changed in order to analyze the consequences in the time of flight: changing the height of the granular layer affects the time of flight for values of Γ smaller than the bifurcation, and when the container is evacuated the value of the control parameter at which the bifurcation occurs by period doubling is lower than in the case when there is air in the container.

In order to reproduce these experimental observations, the IBBM (that models the whole granular media as a perfectly inelastic solid body) has been modified to include some realistic effects. The flow of air through the granular medium has been incorporated using the Kroll model, the friction between grains and walls has been taken in account by an effective gravity larger than g , and the length of the collision has also been put in by the addition of white noise. This model is able to properly reproduce the experimental results for τ , thus helping to understand the phenomenon.

The time resolved trajectories of individual beads close to the side wall have been studied. In this case, two different time scales are convenient to describe the movement of the particles. The *rapid scale* is referred to a time smaller than the vibration period, while the *slow scale* corresponds to times of about two orders of magnitude longer than the vibration period. At the rapid scale, the beads follow a trajectory close to a free flight, but it finishes the flight below the height at take off. At the slow scale, only the convective movement is observed, so the grains close to side wall just move downwards. The velocity of the convective movement has been measured as a function of Γ , and its behavior is related to the surface shape of the granular media. Also, the convection velocity depends on the surface features of the side wall.

Regarding the microscopic dynamics observed at the rapid time scale, the time resolved trajectories show the existence of a friction force between the grains and the side wall. The friction is the convection driving force. The detailed analysis of these trajectories shows that different layers of the media behave incoherently, and they display a differential delay along the height of the granular layer. Furthermore, evidence of the existence of a compression pulse that runs through the media was found. Finally, it was determined that the convective flow of the particles depends on the motion of the center of masses.

Convección en Medios Granulares Vibrados

José Martín Pastor Gutiérrez

Facultad de Ciencias

Universidad de Navarra – 2010

Al vibrar verticalmente un medio granular, la capa levanta el vuelo durante una fracción del período de excitación y desarrolla un movimiento colectivo a gran escala. La geometría del flujo a gran escala es toroidal: los granos próximos a la pared lateral del recipiente se mueven hacia abajo y ascienden cerca del centro, siendo el movimiento radial en la base y en la superficie. Se ha caracterizado la dinámica del centro de masas midiendo el tiempo de vuelo, que es el cociente entre el tiempo que la capa está en vuelo libre dividido entre el período de la excitación. Se ha elaborado un modelo capaz de reproducir adecuadamente los resultados. También se han obtenido las trayectorias resueltas en el tiempo de las partículas próximas a la pared lateral. Se concluyó que la fricción entre los granos y la pared lateral son la causa del movimiento convectivo. El estudio detallado de estas trayectorias pone de manifiesto que los distintos estratos del medio muestran un movimiento diferencial dentro de la capa granular. Se han encontrado pruebas de un pulso de compresión que recorre el medio. Por último, se ha podido determinar que el movimiento convectivo de las partículas depende del movimiento del centro de masas.

Convection in Shaken Granular Media

José Martín Pastor Gutiérrez

School of Sciences

University of Navarra (Spain) – 2010

When a granular media is shaken, the whole layer flights for some portion of the excitation period and develops a large scale collective motion. The geometry of the large scale flow has a toroidal shape: grains near the side wall of the container move downwards and they rise near the center, with a radial movement at the bottom and the top. The dynamics of the center of mass was characterized in terms of the flight time, which the ratio between the time that the layer is in free flight and the excitation period. A model was developed to faithfully reproduce the results. Also, time resolved trajectories of the particles near the side wall were obtained. It was concluded that friction between grains and the side wall is the driving force of the convective motion. The detailed study of these trajectories shows that different layers of the media display a time delay, resulting in a differential movement within the granular layer. Evidence of a compression pulse that runs through the layer was found. Finally, it was determined that the convective flow depends on the movement of the center of masses.