



Universidad de Navarra

Facultad de Ciencias

Sobre los efectos de las escalas lentas en la  
magnetohidrodinámica de un flujo de von Kármán

Alberto de la Torre Monguió





Universidad de Navarra  
Facultad de Ciencias

## Sobre los efectos de las escalas lentas en la magnetohidrodinámica de un flujo de von Kármán

Memoria presentada por **D. Alberto de la Torre Monguió** para aspirar al grado de Doctor por la Universidad de Navarra

El presente trabajo ha sido realizado bajo mi dirección en el Departamento de Física y Matemática Aplicada y autorizo que sea presentado ante el Tribunal que lo ha de juzgar.

Pamplona, 4 de septiembre de 2009

Dr. Javier Burguete Mas



Declaración:

Por la presente yo, **D. Alberto de la Torre Monguió**, declaro que esta tesis es fruto de mi propio trabajo y que en mi conocimiento, no contiene ni material previamente publicado o escrito por otra persona, ni material que sustancialmente haya formado parte de los requerimientos para obtener cualquier otro título en cualquier centro de educación superior, excepto en los lugares del texto en los que se ha hecho referencia explícita a la fuente de la información.

De igual manera, autorizo al Departamento de Física y Matemática Aplicada de la Universidad de Navarra, la distribución de esta tesis y, si procede, de la "fe de erratas" correspondiente por cualquier medio, sin perjuicio de los derechos de propiedad intelectual que me corresponden.

Pamplona, 4 de septiembre de 2009

D. Alberto de la Torre Monguió

ISBN 978-84-692-6376-1

© Alberto de la Torre Monguió

Derechos de edición, divulgación y publicación:

© Departamento de Física y Matemática Aplicada, Universidad de Navarra



A Claudia, por ser el faro de mi camino.  
A mi familia, por quererme tal como soy.  
A mi abuelo, por ser como era.





# Agradecimientos

Si hace algún tiempo me hubieran preguntado por la posibilidad de que pasara cinco años en Pamplona, mi rostro hubiera reflejado lo extraño que me hubiera resultado. Sin embargo los caminos de la vida son, cuanto menos, extraños, y bastó una semana para que esa nula posibilidad pasara a ser una gran aventura. Por ello el primer agradecimiento quisiera dárselo a la persona que me descubrió la oportunidad, Emilia Crespo del Arco.

Cinco años en Pamplona dan para mucho que hablar, y resumir en unos párrafos lo agradecido que estoy a todas las personas que me he ido encontrando resulta difícil, pero me bastará con arrancar una sonrisa de los labios a aquellos que lean estas líneas.

A todos los miembros del departamento agradezco su interés, sus consejos y su ánimo constante: Héctor Mancini, Jean Bragard, María Jesús Chasco, Carmen Palacios, Pedro Elizalde, Jorge Elorza, Antonio Peláez, Sergio Ardanza, Wenceslao González. Especialmente quiero agradecer la compañía y el conocimiento que me ha aportado el grupo de medios granulares: Diego Maza, Ángel Garcimartín, Iker Zuriguel, Martín Pastor, Roberto Arévalo, Cristian Mankoc, Álvaro Janda y Manuel Acevedo.

A Pilar Ayúcar, por su compañía y por ser la primera sonrisa que se encuentra al entrar en el departamento. Al resto de doctorandos, Montserrat Miranda, Gerard Vidal, Maximiliano Giuliani, Iván Martínez, Diego Azcona, Moorthi Pichumani y Tomás González. A todos los que pasaron por el departamento, Cecilia Wolluschek, María Yoldi, Cristina Arcos. En especial, a Angela Bernardini por su amistad durante el primer año de mi estancia, y a Carlos Pérez, por haber sido un modelo a seguir como científico y persona.

A todas esas personas de la Universidad que a veces no se ven pero que siempre se sienten: señoras de la limpieza, bedeles, personal de cafetería, del servicio de mantenimiento o de la secretaría... A la Asociación de Amigos de la Universidad de Navarra le debo la beca que he disfrutado durante este periodo. Su esfuerzo por hacer de esta ayuda un medio de vida es algo de digno reconocimiento.

A Jacques Léorat por suministrar el código mediante el que se realizaron las simulaciones numéricas. Sin él esta tesis no hubiera sido posible.

A todos aquellos desarrolladores anónimos cuyas herramientas simplificaron mi labor; Linus Torvalds, la GNU Foundation, Canonical Ltd, etc. A los profesores y estudiantes de los congresos y escuelas a los que he asistido, en especial a Mara Baudena, Emilie Caboche, Boris Levant, Shakti Menon...

A Javier Burguete, por la paciencia demostrada, la amistad, la sabiduría y la experiencia transmitida. A su mujer Lourdes y sus hijos Miguel, David y Amaia, por haberme hecho sentir acompañado en mis años en Pamplona.

A mis padres, hermanos y familia en general, por haberme apoyado en este proyecto, aún sin comprender demasiado de que iba.

Y a Claudia, por haber conseguido que mire hacia el futuro, y que desee alcanzarlo cuanto antes.



Caminante, son tus huellas  
el camino y nada más;  
Caminante, no hay camino,  
se hace camino al andar.  
Al andar se hace el camino,  
y al volver la vista atrás  
se ve la senda que nunca  
se ha de volver a pisar.  
Caminante no hay camino  
sino estelas en la mar.

Antonio Machado, *Proverbios y cantares*



# Índice general

Abreviaturas y Símbolos	xiv
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Apoyándose en hombros de gigantes	1
1.1.1 Hidrodinámica	1
1.1.2 Electromagnetismo	4
1.2 Magnetohidrodinámica	6
1.2.1 Ecuaciones fundamentales de la MHD	6
1.2.2 Adimensionalización y órdenes de magnitud	8
1.3 Efecto dinamo	12
1.3.1 Teoría del campo medio	14
1.3.2 Mecanismos de generación del efecto dinamo	15
1.3.3 Dinamo de Bullard y Rikitake	16
1.4 Dinamo Cinemática	17
1.4.1 Campos de velocidades experimentales	18
1.5 Experimentos	19
1.6 Magnetohidrodinámica de un flujo de von Kármán	21
<b>2 Diseño experimental</b>	<b>23</b>
2.1 Descripción de la celda experimental	24
2.2 Sistemas de coordenadas y parámetros del sistema	28
2.3 Sistemas de medida de la velocidad	29
2.3.1 LDA	30
2.3.2 Obtención del campo de velocidades	36
2.4 Estabilidad de los motores	37
2.5 Medidas de la temperatura	39
<b>3 Resultados experimentales</b>	<b>41</b>
3.1 Flujo medio	43
3.2 Posición de la frontera	51
3.2.1 Dependencia con $\Delta$	52
3.2.2 Dependencia con $Re$	55

3.2.3	Dependencia con los propulsores . . . . .	55
3.3	Velocidad ecuatorial . . . . .	57
3.3.1	Dependencia de $V_{\theta}^{eq}$ con $\Delta$ . . . . .	57
3.3.2	Distribución de velocidades en $V_{\theta}^{eq}$ . . . . .	58
3.4	Inversiones de estado . . . . .	60
3.4.1	Dependencia de $T_0$ con $\Delta$ . . . . .	62
3.5	Modelización del sistema . . . . .	63
3.6	Forzado dinámico . . . . .	66
<b>4</b>	<b>Simulaciones numéricas de la dinamo cinemática</b>	<b>71</b>
4.1	Esquema de la simulación . . . . .	73
4.1.1	Condiciones de contorno . . . . .	74
4.1.2	Esquema temporal . . . . .	76
4.1.3	Parámetros del código . . . . .	77
4.1.4	Variables recogidas de las simulaciones . . . . .	79
4.2	Campos con dependencia temporal . . . . .	81
<b>5</b>	<b>Resultados numéricos</b>	<b>83</b>
5.1	Características generales de los resultados . . . . .	84
5.2	Efecto de la simetría $R_{\pi}$ en el umbral de la dinamo . . . . .	85
5.3	Dependencia de $\sigma_{n\theta}$ con el factor $PT$ . . . . .	89
5.4	Efectos de la dependencia temporal del campo medio de velocidades en $\sigma$ .	95
5.4.1	Alternancia entre campos con simetría $R_{\pi}$ . . . . .	96
5.4.2	Alternancia entre campos sin simetría $R_{\pi}$ . . . . .	100
	<b>Conclusiones y perspectivas</b>	<b>105</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>109</b>



# Abreviaturas y Símbolos

$X = \langle x \rangle$	Promedio temporal de una variable
$\bar{x}$	Promedio espacial
$x_{r,\theta,z}$	Componentes polares del vector $\vec{x}$
$x_{N,S}$	Magnitud relativa al estado <i>Norte</i> o <i>Sur</i>
$x_{T,P}$	Componentes toroidal y poloidal
$x_{n_\theta, n_z}$	Modo del desarrollo de Fourier
$\alpha$	Ángulo de cruce de los haces en la LDA
$\beta$	Ángulo de ataque de la pala del propulsor
$\Gamma$	Relación de aspectos del cilindro
$\Delta$	Factor de asimetría
$\Delta_0$	Amplitud de la señal de forzado de los motores
$\epsilon$	Parámetro del modelo dinámico
$\varepsilon$	f.e.m. media
$\eta$	Difusividad magnética
$\eta_{ef}$	Difusividad efectiva
$\theta$	Coordenada polar azimutal
$\lambda$	Longitud de onda del laser
$\lambda_{n_\theta}$	Tasa de crecimiento del campo $\vec{b}_{n_\theta}$
$\mu$	Permeabilidad magnética
$\nu$	Viscosidad cinemática
$\Pi$	Presion efectiva
$\rho$	Coord. polar radial tomando como origen el punto de estancamiento de $\vec{V}$
$\sigma$	Tasa de crecimiento de la energía magnética
$\sigma_c$	Conductividad eléctrica
$\tau_{adv}$	Tiempo advectivo
$\tau_\nu$	Tiempo de difusión viscoso
$\tau_m$	Tiempo de difusión magnético
$\phi$	Coord. polar azimutal tomando como origen el punto de estancamiento de $\vec{V}$
$\omega$	Frecuencia de variación del campo $\vec{V}_\omega$
$\omega_c$	Frecuencia de cambio entre el comportamiento LF y HF
$\omega_f$	Frecuencia de la señal de forzado de los motores
$\omega_{res}$	Frecuencia de resonancia del campo $\vec{V}_\omega$
$\Omega$	Velocidad angular media de los vórtices



---

$\mathcal{A}$	Asimetría del campo de velocidades
$A_{0,N,S}$	Amplitud de las gaussianas $G_{0,N,S}$
$B$	Nivel de ruido en el modelo dinámico
$\vec{B}$	Campo magnético
$E$	Energía magnética promediada en el volumen
$E_c$	Energía cinética media del campo de velocidades
$E_{N,S,sim,dif}$	Energía cinética media de los distintos campos de velocidades
$\vec{E}$	Campo eléctrico
$f$	frecuencia de giro del propulsor
$f_D$	Corrimiento Doppler en la frecuencia
$g$	Segundo parámetro del modelo dinámico
$G_{0,N,S}$	Gaussianas necesarias para describir el perfil de velocidades
$\mathcal{H}$	Helicidad media en una trayectoria
$H$	Distancia de separación entre propulsores
$\vec{j}$	Densidad de corriente eléctrica
$\mathbb{L}$	Operador lineal en la ecuación de inducción
$L_{Dif}$	Escala de las diferencias topológicas entre dos campos
$m_\theta$	Número de vueltas realizado por una partícula alrededor del eje Z
$m_\phi$	Número de vueltas alrededor del punto de estancamiento
$Pm$	Prandtl Magnético
$PT$	Relación entre componentes poloidal y toroidal
$PT_{opt}$	Relación Poloidal-Toroidal óptima
$r$	Coordanada radial
$R$	Radio del cilindro
$R_{prop}$	Radio del propulsor
$Re$	Número de Reynolds hidrodinámico
$Rm$	Número de Reynolds magnético
$T_0$	Tiempo medio de residencia del sistema en un estado
$T_f$	Periodo de la señal de forzado de los motores
$T_{prop}$	Periodo del propulsor
$Tw$	<i>Twist Number</i> , relación entre $m_\theta$ y $m_\phi$
$u_\theta, u_\theta^{eq}$	Velocidad azimutal instantanea en ( $r = R_{prop}, z = 0$ ) normalizada con $V_{prop}$
$u_{\theta,0,N,S}$	Centro de las gaussianas $G_{0,N,S}$
$\vec{v}$	Campo de velocidades instantaneo
$\mathbb{V}$	Volumen
$v_\theta^{eq}$	Velocidad azimutal en la posición ( $r = R_{prop}, z = 0$ )
$\vec{V}_\omega$	Campo de velocidades con variación temporal
$\vec{V}_{Dif}$	Campo obtenido como diferencia entre dos campos de velocidades
$V_{prop}$	Velocidad de la periferia de un propulsor
$\vec{V}_{sim}$	Campo medio de velocidades simetrizado
$\vec{V}_{Sum}$	Campo obtenido como promedio de dos campos de velocidades
$V_{vort}$	velocidad media del vórtice
$z$	Coordenada axial
$z_0$	Posición de la frontera entre los dos rollos



# Capítulo 1

## Introducción

The neglected borderland between two branches of knowledge is often that which best repays cultivation, or, to use a metaphor of Maxwell's, the greatest benefits may be derived from a cross fertilisation of the sciences.

*Lord Rayleigh, 1884*

### Abstract

In this chapter a general framework of the Magnetohydrodynamics (MHD) is described, beginning from the two branches from where the MHD is developed: the hydrodynamics, with the Navier-Stokes equation and the classical electromagnetism, adapted to the problem here described: a conducting, charge-free and non-magnetizable fluid. The four equations used are obtained (Navier-Stokes, Induction and Gauss equations), and the dynamo effect is explained. A brief explanation of the mean-field theory and some anti-dynamo theorems are given. Finally, an overlook of the numerical and experimental work is given, with an emphasis on the von Kármán experiments.

## 1.1 Apoyándose en hombros de gigantes

Se entiende por magnetohidrodinámica (MHD, por sus iniciales) como la rama que estudia la interacción entre campos magnéticos y fluidos conductores en movimiento. Las herramientas y ecuaciones necesarias pertenecen tanto al electromagnetismo como a la hidrodinámica, de tal manera que su avance no ha podido desarrollarse hasta que sus bases estuvieran construidas.

### 1.1.1 Hidrodinámica

Desde antes del origen de la historia el agua ha sido uno de los elementos naturales más observados. Considerado como fuente de la vida desde la griega presocrática, su comportamiento periódico temporal a gran escala ha determinado el desarrollo de civilizaciones,

ya sea a través de las inundaciones con las que el Nilo mantenía las cosechas egipcias o las mareas que los fenicios aprovechaban en sus travesías. Su carácter, mezcla del capricho de la lluvia, la mutabilidad de su forma o su determinación por llegar al mar, han llevado a generaciones de filósofos y científicos a querer caracterizar su comportamiento.

Propiedades como las fuerzas de empuje o la presión hidrostática fueron aprovechadas pragmáticamente en la edad antigua, pero no fue hasta el desarrollo de las herramientas matemáticas necesarias que se pudo realizar una descripción de su característica más interesante: el agua fluye.

La primera contribución a la hidrodinámica fue debida a Daniel Bernoulli<sup>1</sup>, quien en 1738 publicó una ecuación de conservación de la energía para fluidos ideales. En esta ecuación se consideraban tres términos; la energía cinética, la potencial gravitatoria y la debida a la presión del flujo.

$$\frac{1}{2}\rho v^2 + \rho gh + p = cte \quad (1.1)$$

Posteriormente Leonhard Euler (quien se dice compartió piso con Bernoulli en San Petersburgo) propuso en 1757 dos ecuaciones para describir a los fluidos. La ecuación de conservación de la masa,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (1.2)$$

y del momento del fluido:

$$\rho \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \rho(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\nabla p \quad (1.3)$$

Esta última ecuación fue modificada por Claude-Louis Navier en 1821 añadiendo un término obtenido experimentalmente proporcional a la viscosidad del fluido. Finalmente, George Gabriel Stokes en 1845 explicó la naturaleza de dicho término, dándole consistencia física. La ecuación resultante pasaría a denominarse *ecuación de Navier-Stokes*, en reconocimiento a su trabajo:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}_{ext} \quad (1.4)$$

El conjunto de ecuaciones 1.2 y 1.4 tienen un rango de aplicabilidad infinito, siendo capaz de explicar tanto el comportamiento de las nubes al sobrevolar una isla como la forma con la que cae un hilo de agua. Sin embargo, el hecho de tener las ecuaciones necesarias no significa que se puedan resolver. La solución general de esa ecuación es uno de los retos por los que el Clay Mathematical Institute otorga un premio de un millón de dólares.

Si bien para ciertas condiciones el fluido se desplaza de manera ordenada encontrándose soluciones analíticas, el término de advección  $(\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v}$  puede producir comportamientos caóticos debido a su no linealidad.

En el primer caso se estaría trabajando con fluidos denominados laminares, ya que este se desplaza en capas, mientras que en el segundo se hablaría de flujos turbulentos.

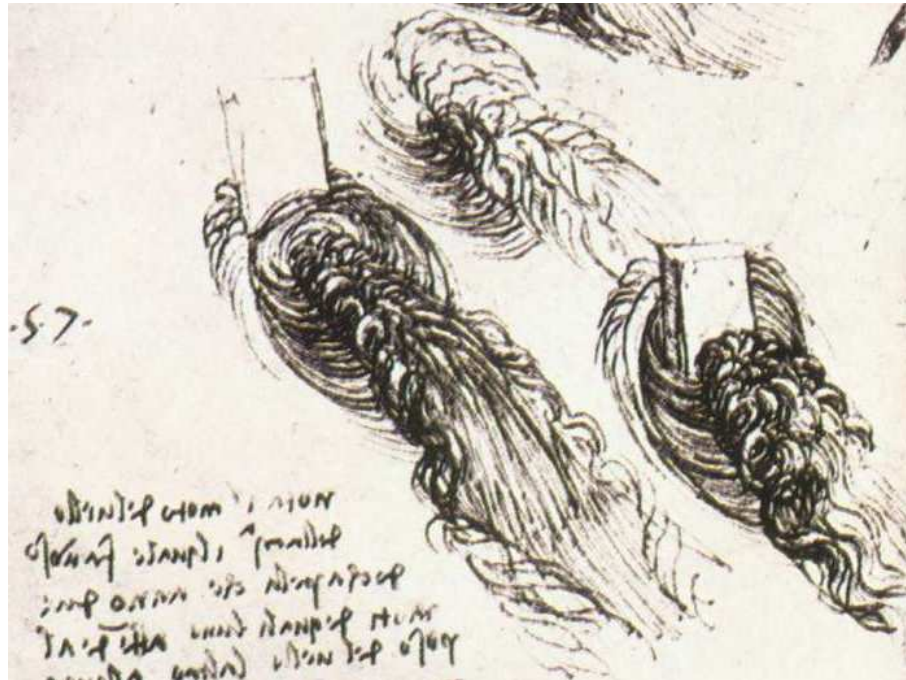


Figura 1.1: *Estudio sobre el agua bordeando un obstáculo*, Leonardo Da Vinci, 1508

## Turbulencia

Uno de los primeros estudios sobre fluidos en movimiento se lo debemos a Leonardo Da Vinci quien a través de varios bocetos dibujó el carácter turbulento del agua al caer desde una altura o al bordear un obstáculo (figura 1.1). Estos dibujos ponían de manifiesto la formación de estructuras estables en el tiempo y a distintas escalas.

Osborne Reynolds estudió en 1883 cómo se produce la transición entre flujos laminares y turbulentos, estableciendo un criterio para predecir su carácter. Este se basa en una relación adimensional de tres características del flujo: la velocidad con la que se desplaza, la escala espacial en la que se desarrolla y la viscosidad del fluido. La combinación, denominada número de Reynolds, mantiene su uso después de 125 años desde su definición.

El estudio de la turbulencia es amplio y complicado, encontrándose múltiples teorías acerca de su desarrollo. El uso de técnicas estadísticas se combina con las espectrales, desarrolladas por Andrei Kolmogorov [1, 2]. En su teoría se relacionan las distintas escalas espaciales y temporales que se producen en un flujo turbulento, mostrando cómo la energía cinética es transmitida a escalas menores hasta que finalmente, para escalas muy pequeñas, esta energía es perdida por disipación viscosa. Esta descripción, denominada “cascada de Kolmogorov”, establece que el espectro de potencias debe decaer con un exponente característico entre la escala de inyección y la viscosa (rango denominado “inercial”).

Supongamos que en régimen turbulento la disipación de energía sólo se produce en las

<sup>1</sup>Aunque existe cierta polémica acerca de la contribución de otros miembros de su familia a su trabajo.

escalas espaciales pequeñas, donde el término viscoso de la ecuación 1.4 cobra importancia. A escalas mayores, ese término es despreciable frente al término inercial, siendo sus respectivas escalas de tiempo (la escala temporal viscosa  $\tau_\nu = L^2/\nu$  y la inercial  $\tau_{adv} = L/V$ ) muy diferentes. La teoría de Kolmogorov propone que la que la energía se transmite desde escalas grandes hasta las disipativas a través de las escalas intermedias, de tal manera que la variación temporal de la energía a todas las escalas vendría determinada por la disipativa:

$$\dot{E} = \frac{dE}{dt} \sim \frac{E}{\tau_{adv}} \sim V^3 L^{-1} = \nu V_k^2 L_k^{-1} \quad (1.5)$$

en donde  $V_k$  y  $L_k$  son las escalas de velocidad y longitud en la zona disipativa.

Si se propone una dependencia de la energía en la forma

$$E \sim C k^\alpha \dot{E}^\beta \quad (1.6)$$

en donde  $C$  es una constante adimensional y  $k$  el número de onda en el espacio de Fourier, mediante argumentos dimensionales se deduce que

$$E \sim C k^{-5/3} \dot{E}^{2/3} \quad (1.7)$$

Esta dependencia del espectro de la energía ha sido comprobada experimentalmente en multitud de configuraciones, demostrando su universalidad [3].

Sin embargo la mayoría de las mediciones se realizan manteniendo la posición constante mientras el tiempo varía. Esto provoca que el espectro de potencias sea caracterizado en el dominio de la frecuencia y no del vector de onda. Para relacionar ambos espectros se utiliza el teorema de ergodicidad, que establece que en un sistema dinámico el valor medio temporal de una variable  $x(t, \vec{r})$  es igual al valor medio espacial, siempre que el sistema se deje evolucionar durante un determinado tiempo [4]. Utilizando la hipótesis de Taylor [3] es posible relacionar ambos dominios. Esta hipótesis es válida cuando el sistema muestra una velocidad media bien establecida; para los casos en los que la tasa de turbulencia (es decir, el ratio entre fluctuaciones y velocidad media) sea grande son necesarias ciertas correcciones a la señal [5].

### 1.1.2 Electromagnetismo

Los primeros informes de fenómenos eléctricos y magnéticos se recogieron en la antigua Grecia. Hacia el año 600 a. C. el filósofo Tales de Mileto describió el fenómeno de la electricidad estática; frotando una varilla de ámbar (o *elektron* en griego) contra un trozo de lana conseguía atraer pequeños objetos, e incluso la aparición de chispas. Una atracción similar se podía conseguir utilizando piedras procedentes de la ciudad de Magnesia. Estas piedras no solo tenían la capacidad de atraer algunos metales, sino también de repeler o atraerse entre ellas, según la orientación. De esta ciudad se derivó el nombre de magnetita, un compuesto ferromagnético con una imantación permanente debido al campo magnético terrestre.

En 1600 William Gilbert, médico personal de la reina Isabel I de Inglaterra publicó un estudio sobre el magnetismo, “De Magnete”, en el que reflejaba sus estudios sobre fuerzas, imantación y magnetismo terrestre. El estudio sistemático de las propiedades del electromagnetismo no fue posible hasta que Alessandro Volta desarrolló en 1800 una batería que permitía producir corriente eléctrica, a través de una serie de discos de plata y cinc separados por una tela mojada en un líquido salino. Gracias a este invento se pudieron construir generadores de corriente para realizar experimentos.

En 1827 George Simon Ohm modeló las corrientes inducidas en un material por la existencia de un campo eléctrico:

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E} \quad (1.8)$$

con  $\vec{j}$  las corrientes eléctricas,  $\sigma_c$  la conductividad del material y  $\vec{E}$  el campo eléctrico.

En ese mismo año André-Marie Ampère le daba consistencia matemática al experimento observado por Oersted, en el cual una corriente eléctrica producía un campo magnético:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (1.9)$$

con  $\mu$  la permeabilidad magnética del medio y  $\vec{B}$  el vector de inducción magnética. Como es costumbre, aunque no estrictamente correcto, en adelante el campo  $\vec{B}$  se denominará campo magnético.

Durante algunos años la comunidad científica se planteó la incongruencia de que un campo eléctrico pudiera producir un campo magnético, pero que un campo magnético no produjera el efecto análogo. No fué hasta 1831 en que Michael Faraday formuló la Ley de Inducción,

$$f.e.m. = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (1.10)$$

en donde *f.e.m.* es la fuerza electromotriz generada en una espira y  $\Phi$  el flujo magnético que la atraviesa.

En 1856 James Clark Maxwell desarrolló una formulación cerrada, abarcando las ecuaciones anteriores e incluyendo nuevos conceptos como las corrientes de desplazamiento:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.11)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{E} &= \frac{q}{\varepsilon} \end{aligned} \quad (1.13)$$

en donde  $\varepsilon$  es la permitividad eléctrica,  $q$  la carga eléctrica y  $c$  la velocidad de la luz en el medio.

Las consecuencias de estas cuatro ecuaciones son inmensas, partiendo desde la teorización y descubrimiento de las ondas electromagnéticas hasta las discusiones debido a su no invariancia en transformaciones de sistemas galileanos y el desarrollo de las transformaciones de Lorentz.

## 1.2 Magnetohidrodinámica

El primer uso de la palabra 'Magnetohidrodinámica' se atribuye a Hannes Alfvén, físico suizo que en 1942 describió de manera teórica unas ondas "electro-magneto-hidrodinámicas" [6] que se producirían en un fluido conductor perfecto, ondas que más adelante se referirían el nombre de su descubridor.

Sin embargo no fue ésta la primera contribución a la magnetohidrodinámica. Ya en 1832 Faraday [7] intentó medir la diferencia de potencial que se produce a ambos lados del río Támesis debido a la inducción del campo magnético terrestre, sin éxito por las dificultades técnicas de la época. En 1918 Julius Hartmann [8, 9] inventó una bomba electromagnética utilizando mercurio, y en 1919 Joseph Larmor [10] propuso la interacción entre un fluido conductor y un campo magnético como una de las tres posibles causas por las que el Sol mostraba campo magnético.

A mediados del siglo XX creció el interés por la magnetohidrodinámica gracias a su aplicación a la geofísica y la física de plasmas. Los trabajos de Elsasser [11] sobre geomagnetismo, o Chandrasekhar [12] sobre las inestabilidades hidrodinámicas en presencia de campos magnéticos externos contribuyeron a retomar el desarrollo. Industrialmente, diversas aplicaciones potenciaron el desarrollo de la MHD, tales como el uso de sodio líquido para enfriar los reactores en las plantas de fisión nuclear [13], la necesidad de confinar plasmas mediante campos magnéticos para estudios sobre fusión nuclear [14], o en procesos industriales en donde el campo magnético se utiliza para el procesamiento de metales líquidos [15].

### 1.2.1 Ecuaciones fundamentales de la MHD

Las ecuaciones a partir de las que se deriva la teoría magnetohidrodinámica son la ecuación de Navier-Stokes y las ecuaciones de Maxwell.

La ecuación de Navier-Stokes es, para un fluido incompresible, homogéneo y newtoniano:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \vec{f}_{ext} \quad (1.14)$$

en donde  $\vec{v}$  es el campo de velocidades del fluido,  $\rho$  su densidad,  $p$  el campo de presiones,  $\nu$  la viscosidad cinemática y  $\vec{f}_{ext}$  las fuerzas no hidrodinámicas, por unidad de masa. Dentro de estas fuerzas aparecería la fuerza de Lorentz:

$$\vec{f}_{Lorentz} = \frac{1}{\rho} (q\vec{E} + \vec{j} \times \vec{B}) \quad (1.15)$$

junto con otras posibles tales como la fuerza de la gravedad, de Coriolis, o las ejercidas por propulsores. Debido a la incompresibilidad del fluido, la ecuación de conservación de la masa se reduce a la ecuación de continuidad,

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.16)$$



Por otro lado, las ecuaciones de Maxwell para un material conductor paramagnético y eléctricamente neutro son:

- Ley de Ampère:

$$\frac{1}{\mu} \nabla \times \vec{B} = \vec{j} + \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (1.17)$$

- Ley de Faraday:

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.18)$$

- Leyes de Gauss para los campos magnéticos y eléctricos:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{E} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

Finalmente, aún falta una relación entre la corriente eléctrica y los distintos campos, obtenida por la ley de Ohm.

$$\vec{j} = \sigma_c \vec{E}' \quad (1.20)$$

con  $\vec{E}'$  el campo eléctrico en el interior del fluido. Esta ecuación solamente es correcta en el sistema de referencia del propio fluido. Cuando se realiza el cambio a un sistema de referencia externo, en el límite no-relativista la ley de Ohm se expresa de la siguiente manera:

$$\vec{j} = \sigma_c (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (1.21)$$

Esta ley, de carácter macroscópico, se trata de una ley fenomenológica a diferencia del resto de ecuaciones electromagnéticas.

La aproximación magnetohidrodinámica considera que la velocidad típica del fluido es mucho menor que la velocidad de la luz. Si los dos términos de la ley de Faraday (ec.1.18) son del mismo orden se deduce que

$$\left| \frac{\nabla \times \vec{E}}{\partial \vec{B} / \partial t} \right| \sim \frac{E/L}{B/T} \sim 1 \iff \quad (1.22)$$

$$E/B \sim L/T \ll c \quad (1.23)$$

en donde  $E$ ,  $B$ ,  $L$  y  $T$  son las escalas características de las magnitudes correspondientes.

De esta manera se pueden despreciar las corrientes de desplazamiento en la ley de Ampère (ec.1.17) frente al resto de términos:

$$\left| \frac{\varepsilon \partial \vec{E} / \partial t}{\nabla \times \vec{B} / \mu} \right| \sim \frac{\varepsilon E/T}{B/\mu L} \sim \frac{\varepsilon \mu L^2}{T^2} = \frac{L^2/T^2}{c^2} \ll 1 \quad (1.24)$$

con lo que las ecuaciones toman la siguiente forma:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu \vec{j} \quad (1.25)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (1.26)$$

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0 \quad (1.27)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{B} &= 0 \\ \vec{j} &= \sigma_c(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \end{aligned} \quad (1.28)$$

Eliminando el campo eléctrico de 1.26 y 1.28 se obtiene que

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \times \vec{E} = \nabla \times [(\vec{v} \times \vec{B} - \vec{j}/\sigma_c)] = \nabla \times [\vec{v} \times \vec{B}] - \nabla \times \nabla \times \vec{B}/\mu\sigma_c \quad (1.29)$$

Finalmente, teniendo en cuenta que  $\nabla \times (\nabla \times \vec{B}) = -\nabla^2 \vec{B}$  (ya que  $\vec{B}$  es solenoidal), se llega a la ecuación de inducción de la MHD:

$$\partial_t \vec{B} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \quad (1.30)$$

en donde  $\eta = \frac{1}{\mu\sigma_c}$  es la difusividad magnética. Esta ecuación, junto con la ecuación de Navier-Stokes (1.14) y las de divergencia nula de  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  son las cuatro ecuaciones básicas de la MHD.

## 1.2.2 Adimensionalización y órdenes de magnitud

### Adimensionalización

Según el teorema  $\pi$  de Buckingham [16] cualquier problema con  $m$  parámetros independientes y  $n$  magnitudes fundamentales puede ser adimensionalizado, reduciéndose a un sistema con  $(m - n)$  parámetros adimensionales. En el caso de la MHD, los parámetros que se pueden variar independientemente son las constantes físicas del fluido (densidad, viscosidad, conductividad y permeabilidad magnética) junto con la velocidad del fluido y la dimensión espacial. Las magnitudes fundamentales, por otro lado, son longitud, masa, tiempo e intensidad, de tal manera que al adimensionalizar las ecuaciones se deben obtener dos parámetros adimensionales:

$$m = \{\rho, \nu, \sigma_c, \mu, V, L\} = 6 \quad (1.31)$$

$$n = \{L, M, T, I\} = 4 \quad (1.32)$$

$$\Rightarrow \pi = \{\pi_1, \pi_2\} = 2 \quad (1.33)$$

Denotando con un asterisco las variables y operadores sin dimensión, la ecuación de inducción queda:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \eta \nabla^2 \vec{B} \Rightarrow \quad (1.34)$$

$$\frac{B}{T} \partial_t^* \vec{B}^* = \frac{VB}{L} \nabla^* \times (\vec{v}^* \times \vec{B}^*) + \frac{B}{\mu\sigma_c L^2} \nabla^{*2} \vec{B}^* \quad (1.35)$$

en donde  $L, V$  serían las escalas típicas de longitud y velocidad en nuestro sistema. Aun quedan por elegir una escala de tiempo  $T$  y para el campo magnético  $B$ , pero al ser la

ecuación lineal en  $\vec{B}$  no es necesario asignarle ninguna escala. Sí será necesario cuando se adimensionalice la ecuación de Navier-Stokes. Para la escala temporal existen dos opciones según se utilice la escala advectiva ( $\tau_{adv} = L/V$ ) o el tiempo de difusión del campo magnético ( $\tau_m = \mu\sigma_c L^2$ ). En condiciones normales este último suele ser más pequeño que el advectivo, por lo que será el utilizado. La ecuación resulta, prescindiendo de los asteriscos en las magnitudes adimensionalizadas:

$$\partial_t \vec{B} = Rm \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B} \quad (1.36)$$

en donde se define el primer parámetro adimensional,

$$Rm = \frac{VL}{\eta} = \mu\sigma_c VL \quad (1.37)$$

denominado número de Reynolds magnético. Este parámetro representa la relación entre la escala temporal de inyección y de difusión magnética, siendo determinante para esperar efectos de inducción de campo magnético.

Para adimensionalizar la ecuación de Navier-Stokes se supondrá que la única fuerza no hidrodinámica es la fuerza de Lorentz (1.15).

$$\vec{f}_{Lorentz} = \frac{1}{\rho} \vec{j} \times \vec{B} = \frac{1}{\rho\mu} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B} = \frac{1}{\rho\mu} \left[ -\frac{1}{2} \nabla B^2 + (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \right] \quad (1.38)$$

Al introducir esta fuerza en la ecuación el primer término se agrupa con el gradiente de presiones, definiendo una presión total  $\Pi = p + B^2/2\mu$ . Esto lleva a introducir una escala para  $\vec{B}$  basada en la presión, de tal manera que:

$$p \sim \frac{B^2}{2\mu} \sim \rho V^2 \Rightarrow B \sim \sqrt{\mu\rho V^2} \quad (1.39)$$

Por lo que la adimensionalización de la ecuación de Navier-Stokes quedaría:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla \left( p + \frac{B^2}{2\mu} \right) + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho\mu} (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \Rightarrow \\ \frac{V}{\mu_0 \sigma_c L^2} \partial_t^* \vec{v}^* + \frac{V^2}{L} (\vec{v}^* \cdot \nabla) \vec{v}^* &= -U^2 \nabla^* \Pi^* + \frac{\nu V}{L^2} \nabla^{*2} \vec{v}^* + \frac{V^2}{L} (\vec{B}^* \cdot \nabla^*) \vec{B}^* \Rightarrow \\ \partial_t^* \vec{v}^* + Rm (\vec{v}^* \cdot \nabla^*) \vec{v}^* &= -\nabla^* \Pi^* + P_m \nabla^{*2} \vec{v}^* + Rm (\vec{B}^* \cdot \nabla^*) \vec{B}^* \end{aligned} \quad (1.40)$$

El parámetro adimensional que aparece de forma natural es el número de Prandtl magnético  $Pm = \mu\sigma_c \nu$ , un parámetro que depende exclusivamente de las propiedades del material utilizado. Normalmente en el ámbito de la hidrodinámica el parámetro adimensional que aparece es el número de Reynolds hidrodinámico  $Re = VL/\nu$ , que representa la relación entre la escala de tiempos advectiva y el tiempo de difusión viscoso. Este parámetro también es utilizado en este contexto salvo que ya no es independiente, sino que se establece en función de los otros dos hallados:

$$Pm = \frac{Rm}{Re} \quad (1.41)$$

	$T_f$ (°C)	$T_{ref}$ (°C)	$\rho(10^3 \text{ Kg/m}^3)$	$\nu$ ( $10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ )	$\sigma_c$ ( $10^6 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ )	$Pm = \mu_0\sigma_c\nu$
Ti	1685	1700	4,1	1,3	0,58	9,48E-07
Cu	1083	1100	7,9	0,51	4,8	3,08E-06
Al	660	700	2,4	0,6	4,1	3,09E-06
Li	181	200	0,51	1,2	4	6,03E-06
Na	98	100	0,92	0,68	10	8,55E-06
K	64	70	0,82	0,58	7	5,11E-06
Ga	30	70	6,1	0,31	3,8	1,48E-06
NaK	-12	40	0,87	0,86	2,6	2,81E-06
Hg	-38	30	13,5	0,12	1	1,51E-07
Agua de mar	-4	20	1,04	1.05	$2.9 \cdot 10^{-6}$	3,64E-12

Tabla 1.1: Propiedades físicas de interés para la MHD de algunos fluidos [22]. Para todos ellos, el número de Prandtl magnético ( $Pm$ ) es muy pequeño, lo que a efectos prácticos resulta en que  $Re \gg Rm$ .

De esta manera se entiende el número de Prandtl magnético como la relación entre los tiempos de difusión viscoso ( $\tau_\nu = L^2/\nu$ ) y magnético ( $\tau_m = \mu\sigma_c L^2$ ).

Recopilando todas las ecuaciones, encontramos que la teoría MHD se basa en las siguientes ecuaciones adimensionalizadas:

$$\partial_t \vec{v} + Rm(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\nabla \Pi + Pm \nabla^2 \vec{v} + Rm(\vec{B} \cdot \nabla) \vec{B} \quad (1.42)$$

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (1.43)$$

$$\partial_t \vec{B} = Rm \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B} \quad (1.44)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.45)$$

Como se puede observar, la ecuación de inducción es lineal en  $\vec{B}$ . La no-linealidad aparece en la ecuación de Navier-Stokes, a través del término advectivo  $(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v}$  y de la fuerza de Lorentz  $\vec{f}_{Lor} = \frac{1}{\rho} \vec{J} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu\rho} (\nabla \times \vec{B}) \times \vec{B}$ . Posteriormente, los efectos de la no-linealidad llegan a la ecuación de inducción a través del campo de velocidades.

## Órdenes de magnitud

Como se ha visto anteriormente el  $Pm$  representa la relación entre los tiempos de difusión magnético y viscoso. También relaciona los números de Reynolds magnético ( $Rm$ ) e hidrodinámico ( $Re$ ), dependiendo tan solo de las propiedades físicas del fluido; permeabilidad magnética, conductividad y viscosidad. En la tabla 1.1 se detallan las características de algunos materiales reales.

Para observar efectos de inducción magnética se debe trabajar con  $Rm$  altos, al definir este número la relación entre el término de inyección y el de difusión en 1.36. Debido al

Magnitud	Longitud	Velocidad	$\tau_{adv}$	$\tau_m$	$\tau_\nu$
Valor típico	$L$	$V$	$L/V$	$\mu_0\sigma_c L^2$	$L^2/\nu$
Valor num.(S.I.)	0.2	1	0.2	0.5	$6 \cdot 10^4$

Tabla 1.2: Escalas utilizadas en la adimensionalización de las ecuaciones. La escala temporal elegida es la escala de difusión del campo magnético,  $\tau_m$ . Los valores numéricos son los característicos de nuestro sistema, suponiendo que el fluido utilizado es sodio a  $100^\circ\text{C}$ .

bajo valor de  $Pm$ , esto hace que el  $Re$  que haya que alcanzar sea muy alto. El material óptimo por lo tanto será aquel que presente un  $Pm$  mayor, que como se observa en la tabla 1.1 se corresponde con el sodio líquido. Tiene la ventaja añadida de no necesitar una temperatura de trabajo elevada aunque su manipulación conlleva grandes problemas. El sodio es altamente reactivo, siendo bien conocida su reacción explosiva con el agua. En la tabla 1.2 se muestran los valores típicos de varias magnitudes si se realizara un experimento con sodio en la misma configuración que nuestro experimento.

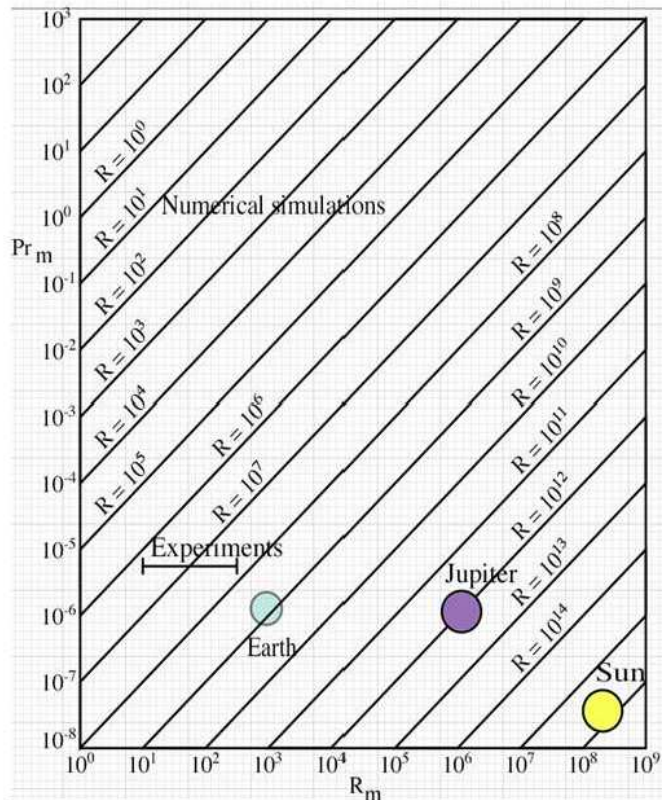


Figura 1.2: Número de Prandtl vs número de Reynolds magnético, representado la situación en la que se encuentran diversos problemas. Las líneas oblicuas representan líneas con  $Re$  constante (figura obtenida de [17]).

Observando estos valores se entiende las dificultades que conlleva cualquier experimento en donde la difusión del campo magnético no sea dominante. Para alcanzar un valor de  $Rm = 10$  sería necesario un volumen de  $1 \text{ m}^3$  de sodio moviéndose a velocidades del orden de  $1 \text{ m/s}$ , lo que experimentalmente conlleva grandes dificultades. En caso de que no se alcancen valores de  $Rm$  altos, el procedimiento usual es el de inducir un campo magnético externo (bien constante [18–20] o ligado a la respuesta del sistema [21]) para ver la inducción y el transporte del  $B_{ext}$  [22, 23].

De forma numérica tampoco resulta abordable ya que el  $Re$  obtenido a través del  $Pm$  provocan que el fluido esté en turbulencia completamente desarrollada, impidiendo enfrentarse al problema completo de manera teórica o numérica debido a la no linealidad de la ecuación de Navier-Stokes [24]. La única solución es realizar las simulaciones con números de Prandtl magnético muy superiores a los encontrados en la naturaleza [25, 26], pudiendo realizarse con  $Re$  más bajos.

Otra aproximación utilizada se denomina dinamo cinemática, la cual se explicará más adelante. De forma breve, consiste en separar la parte hidrodinámica de la MHD, considerando el campo de velocidades como un parámetro dado (cuyo origen puede ser teórico, numérico o experimental) y despreciar cualquier efecto que el campo magnético pueda tener sobre el campo de velocidades. Esta aproximación sólo es aplicable cuando los campos magnéticos implicados sean muy pequeños comparados con el resto de términos en la ecuación de Navier-Stokes, lo que impide la retroalimentación.

### 1.3 Efecto dinamo

Una de las aplicaciones de la MHD que más interés provoca es la sustentación del campo magnético debido al movimiento del fluido (fenómeno conocido como *efecto dinamo*).

Este efecto, propuesto por Larmor como mecanismo para la existencia del campo magnético solar [10], puede ampliarse para explicar el comportamiento de las manchas solares [27, 28] o los campos generados por planetas [29, 30] y galaxias [31].

Si bien en el caso terrestre existen otras teorías (restos de campos magnéticos atrapados durante su formación, o imanes permanentes), estas no son capaces de explicar la dinámica que se observa. Por ejemplo, es conocido como los polos magnéticos tienen un movimiento de precesión diario (figura 1.3a) y que su posición media tiene una deriva, que en los últimos años ha alcanzado velocidades de unos  $40 \text{ km}$  al año (figura 1.3b).

Otra característica interesante es la inversión del campo magnético observada tanto en el Sol como en la Tierra. Mientras que en el Sol las inversiones ocurren con un periodo regular de 11 años, en la Tierra se producen de forma aleatoria en una escala temporal de  $10^5$  años (fig. 1.4). Estas inversiones pueden explicarse con la ecuación de inducción 1.44 (ya que al ser lineal en  $\vec{B}$  admite soluciones del tipo  $\{\vec{B}, -\vec{B}\}$ ) y han sido observadas numéricamente en geometría esférica [32] y de forma experimental en otras configuraciones [33, 34].

Matemáticamente, esta ecuación se entiende como una competición entre un termino

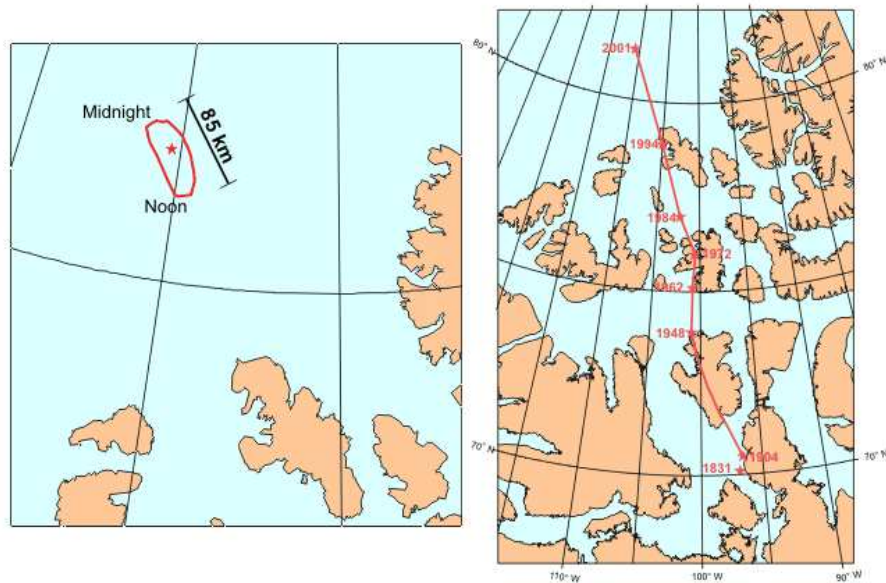


Figura 1.3: (a) Movimiento diario del polo norte, junto con la posición media. (b) Variación secular del polo norte en los últimos 200 años (Fuente: Geological Survey of Canada)

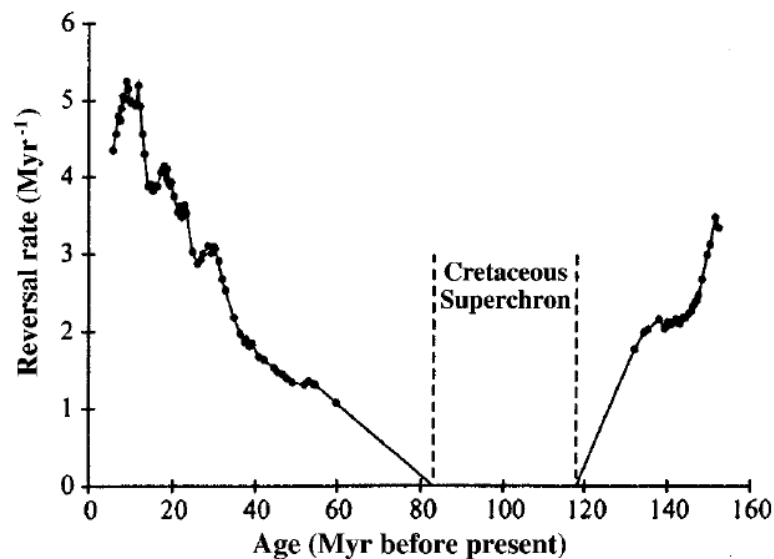


Figura 1.4: Estimación del número de inversiones del campo magnético terrestre, según [35]

difusivo ( $\nabla^2 \vec{B}$ ) y un término inyectivo que introduciría energía en el campo magnético a través del campo de velocidades ( $\nabla \times (\vec{v} \times \vec{B})$ ). A medida que se incrementa el  $Rm$  el término de inyección cobra más importancia dentro de la ecuación de inducción. Es posible

encontrar una inestabilidad en la cual el término de inyección supera al término difusivo. Al alcanzar ese  $Rm^c$ , el campo magnético se intensifica hasta que el término de la fuerza de Lorentz en la ecuación de Navier-Stokes cobra importancia, modificando el flujo. De esta manera, se llegaría a un estado estacionario (o régimen de saturación) [36] en el que la energía inducida al flujo es disipada tanto por las fuerzas viscosas como por el efecto Joule en las corrientes eléctricas.

Otro efecto interesante es la inestabilidad magneto-rotacional (MRI, por sus siglas en inglés) en la que se produce un acople entre las fuerzas centrífugas y las de Lorentz, provocando un transporte de momento angular hacia la periferia. Esta inestabilidad es la explicación del comportamiento de los discos de acreción galácticos [37, 38] y ha sido observado en experimentos con metales líquidos [39, 40].

### 1.3.1 Teoría del campo medio

En una primera aproximación al problema se trata de obtener un comportamiento general. Para ello se descomponen los campos implicados en una componente media de variación lenta, y una fluctuación rápida:

$$\vec{B} = \vec{B}_0 + \vec{b}' \quad (1.46)$$

$$\vec{v} = \vec{V}_0 + \vec{v}' \quad (1.47)$$

en donde se supondrá que la media temporal de las fluctuaciones es nula,  $\langle \vec{b}' \rangle, \langle \vec{v}' \rangle = 0$ , con lo que

$$\langle \vec{B} \rangle = \langle \vec{B}_0 \rangle + \langle \vec{b}' \rangle = \langle \vec{B}_0 \rangle \quad (1.48)$$

$$\langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{V}_0 \rangle + \langle \vec{v}' \rangle = \langle \vec{V}_0 \rangle \quad (1.49)$$

Suponiendo que la operación de promedio temporal se puede intercambiar con los operadores  $\nabla$  y  $\partial_t$  se puede simplificar la ecuación de inducción para obtener la evolución del campo medio

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times \langle \vec{v} \times \vec{B} \rangle + \eta \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (1.50)$$

Si se desarrolla el término  $\langle \vec{v} \times \vec{B} \rangle$ ,

$$\langle \vec{v} \times \vec{B} \rangle = \vec{V}_0 \times \vec{B}_0 + \langle \vec{V}_0 \times \vec{b}' \rangle + \langle \vec{v}' \times \vec{B}_0 \rangle + \langle \vec{v}' \times \vec{b}' \rangle \quad (1.51)$$

y se eliminan los términos nulos se obtiene que la ecuación de inducción promediada queda en la forma

$$\frac{\partial \vec{B}_0}{\partial t} = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times \varepsilon + \eta \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (1.52)$$

en donde se define  $\varepsilon = \langle \vec{v}' \times \vec{b}' \rangle$  como la f.e.m. media.



Para poder caracterizar este término se debe acudir al estudio de las fluctuaciones. Si se calcula la diferencia entre la ecuación de inducción y la 1.52, se obtendría que

$$\partial_t \vec{B} - \partial_t \vec{B}_0 = \partial_t \vec{b}' = \nabla(\vec{V}_0 \times \vec{b}') + \nabla(\vec{v}' \times \vec{B}_0) + \nabla \times \vec{G} + \eta \nabla^2 \vec{b}' \quad (1.53)$$

con  $\vec{G} = \vec{v}' \times \vec{b}' - \langle \vec{v}' \times \vec{b}' \rangle$ .

Esta ecuación de evolución en  $\vec{b}'$  tiene un término de inyección dominante  $\nabla \times (\vec{v}' \times \vec{B}_0)$ , de tal manera que es posible hacer un desarrollo en serie de la f.e.m. media

$$\varepsilon_i = a_{ij} B_{0j} + b_{ijk} \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} + \dots \quad a_{ij}, b_{ijk} = f(\vec{U}_0, \vec{u}) \quad (1.54)$$

Suponiendo que los tensores son isótropos y cortando el desarrollo en serie se obtendría que

$$\varepsilon = \alpha \vec{B}_0 - \beta \nabla \times \vec{B}_0 \quad (1.55)$$

con lo que la expresión de la Ec.Ind.Media queda

$$\partial_t \vec{B}_0 = \nabla \times (\vec{V}_0 \times \vec{B}_0) + \nabla \times \alpha \vec{B}_0 + \eta_{ef} \nabla^2 \vec{B}_0 \quad (1.56)$$

en donde el término en  $\beta$  se ha agrupado al término difusivo formando una “difusividad efectiva”  $\eta_{ef} = \beta + \eta$ .

### 1.3.2 Mecanismos de generación del efecto dinamo

En el análisis del efecto dinamo resulta muy útil la descomposición de los campos  $\vec{v}$  y  $\vec{B}$  en los modos toroidal y poloidal, ya que cualquier campo solenoidal puede escribirse en la forma [41]

$$\vec{X} = \vec{X}_P + \vec{X}_T = -\nabla \times (\vec{r} \times \nabla P(\vec{r})) - \vec{r} \times \nabla T(\vec{r}) \quad (1.57)$$

con  $P$  y  $T$  dos funciones escalares determinadas y  $\vec{r}$  el vector posición.

Cuando el campo vectorial es axisimétrico (p.e., en torno al eje  $z$ ), y utilizando un sistema de coordenadas cilíndrico se obtiene que las componentes toroidales y poloidales tienen la forma

$$\vec{X}_T = (0, X_\theta, 0) \quad (1.58)$$

$$\vec{X}_P = (X_r, 0, X_z) \quad (1.59)$$

Si se supone un campo de velocidades toroidal del tipo

$$\vec{V} = V(r, z) \vec{e}_\theta = \omega(r, z) \vec{e}_z \times \vec{r} \quad (1.60)$$

y dividiendo la ecuación 1.56 en componentes poloidal y toroidal, se obtiene que

$$\partial_t \vec{B}_T + r(V \cdot \nabla) \left( \frac{1}{r} \vec{B}_T \right) = r(B_P \cdot \nabla) \omega + \nabla \times (\alpha \vec{B}_P) + \eta_{ef} \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) B_T \quad (1.61)$$

$$\partial_t A + \frac{1}{r} (V \cdot \nabla) (rA) = \alpha B_T + \eta_{ef} \left( \nabla^2 - \frac{1}{r^2} \right) A \quad (1.62)$$

en donde se ha utilizado el potencial vector del campo magnético,  $\vec{B}_P = \nabla \times (A\vec{e}_\theta)$ .

En la ecuación 1.62 se observa un término en la forma  $\alpha B_T$ , que serviría como fuente de  $A$  y por lo tanto de  $\vec{B}_P$ . De esta manera es posible crear un campo magnético poloidal a través de la componente toroidal. Este proceso se denomina efecto  $\alpha$  o Parker.

Por otro lado, para generar  $B_T$  se disponen de dos fuentes. La primera,  $r(B_P \cdot \nabla)\omega$ , tiene una dependencia con la velocidad angular, mientras que en la segunda,  $\nabla \times (\alpha\vec{B}_P)$ , vuelve a aparecer el coeficiente  $\alpha$ . En función de qué mecanismo domine se hablará de una dinamo  $\alpha^2$  o  $\alpha\omega$ .

### Teoremas antidinamo

A día de hoy no existe ninguna condición suficiente para que un flujo presente esta inestabilidad. Por contra, sí son conocidos algunos teoremas que garantizan cuándo un fluido no presentará efecto dinamo.

El primero de ellos, enunciado por Cowling en 1933 [27] establece que un campo de velocidades axisimétrico no puede crear un campo magnético con la misma simetría [24, 41, 42]. Este teorema será aplicado en las simulaciones realizadas en esta tesis, debido a que los campos de velocidades serán considerados como axisimétricos.

Un segundo teorema es el de Bullard-Gellman [43, 44], en el que se demuestra que ni un campo puramente toroidal ni bidimensional puede presentar efecto dinamo. Si se han encontrado campos puramente poloidales que presentan efecto dinamo [45].

También existen teoremas que imponen una cota inferior al valor necesario del  $Rm$  para que aparezca el efecto dinamo [44, 46], en donde se demuestra que este valor debe ser cercano a la decena.

### 1.3.3 Dinamo de Bullard y Rikitake

Un experimento teórico basado en la dinamo de Faraday sirve para introducir la manera en la que se produce una autoexcitación del campo magnético. Aunque este experimento no involucra ninguna hidrodinámica, se considera un punto de partida para la comprensión del efecto dinamo.

La dinamo de Bullard [43] es una variación de la dinamo de Faraday, esquematizada en la figura 1.5a. En ella, un disco gira con una velocidad angular variable  $\Omega$ , mientras que un cableado con forma de espira conecta la periferia del disco con el eje de giro.

Supóngase que en un momento dado se produce una intensidad de corriente  $I(t)$  en la espira. Esta corriente crea un campo magnético  $B$  haciendo que sobre el disco atravesase un flujo magnético

$$\Phi = MI \quad (1.63)$$

donde  $M$  es el coeficiente de inducción mutua entre espira y disco. Debido a la rotación del disco se crea una fuerza electromotriz dada por

$$f.e.m. = \frac{\Omega\Phi}{2\pi} \quad (1.64)$$

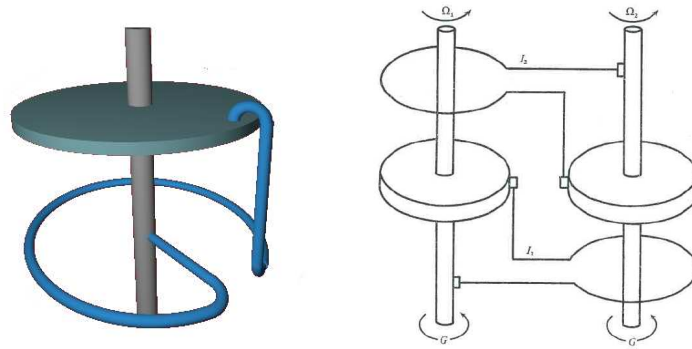


Figura 1.5: Dinamo de Bullard y Rikitake.

lo que nos llevaría a la ecuación que rige el comportamiento de la intensidad:

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \frac{M\Omega}{2\pi} I \quad (1.65)$$

con  $L$  y  $R$  la autoinducción y la resistencia del circuito. La solución a esta ecuación es del tipo  $I = I_0 e^{\lambda t}$  con  $\lambda = \frac{1}{L} \left( \frac{M\Omega}{2\pi} - R \right)$ . Mientras que para pequeñas velocidades angulares la intensidad decaería hasta anularse, existe una frecuencia crítica

$$\Omega_c = \frac{2\pi R}{M} \quad (1.66)$$

a partir de la cual el coeficiente  $\lambda$  se vuelve positivo, haciendo que la intensidad crezca exponencialmente. El sistema se estabilizaría al considerar la fuerza de Lorentz sobre el disco, que frenaría la rotación hasta llegar a la frecuencia crítica.

Este modelo, aunque adecuado para un primera explicación del efecto dinamo, no representa completamente la dificultad que entraña esta inestabilidad. En la dinamo de Bullard la corriente eléctrica es guiada por un camino muy determinado mientras que en un fluido conductor sin restricciones de movimiento esto no podría garantizarse.

Desde un punto de vista de sistemas dinámicos resulta más interesante la modificación del problema realizada por Rikitake [47], esquematizada en la figura 1.5b. Este sistema muestra una dinámica más complicada, en donde cada disco afecta al otro a través de su espira, siendo realimentado por la contraria. Las variables del sistema,  $\Omega_{1,2}$  y  $I_{1,2}$  pueden reducirse a un sistema dinámico no lineal de tres variables [48]. Este sistema dinámico se comporta como un atractor extraño, produciendo inversiones caóticas de la intensidad (figura 1.6) y por tanto del campo magnético, con la consiguiente analogía con el geomagnetismo.

## 1.4 Dinamo Cinemática

En el desarrollo del estudio del efecto dinamo los investigadores (tanto experimentales como numéricos) se encuentran con una dificultad: la turbulencia. Para que la inestabilidad aparezca es necesario que la hidrodinámica sea muy turbulenta, con  $Re > 10^6$ .

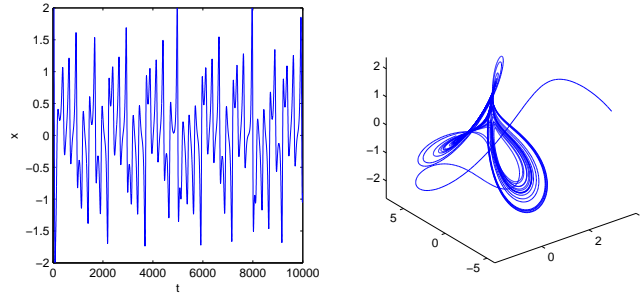


Figura 1.6: (a) Inversiones en la intensidad de uno de los discos de Rikitake (b) Atractor extraño de Rikitake

Numéricamente no es posible trabajar en ese rango sin tomar ciertas aproximaciones, y experimentalmente obtener ese valor requiere acelerar un volumen de  $1 \text{ m}^3$  de fluido conductor (normalmente sodio) a velocidades de  $1 \text{ m/s}$ .

Para simplificar el problema y comprender los mecanismos básicos que llevan a la aparición del efecto dinamo se recurre a la aproximación de la dinamo cinemática. Esta se basa en que por debajo del umbral y en ausencia de campos magnéticos externos, las fuerzas magnéticas en la ecuación de Navier-Stokes son nulas y la evolución del campo de velocidades depende tan sólo de la hidrodinámica [49]. Bajo estas condiciones la investigación se divide en dos problemas separados: La parte hidrodinámica y la parte magnética. En un primer paso se obtiene un campo de velocidades, bien de un flujo analítico<sup>2</sup> o de uno medido experimentalmente. Posteriormente, el comportamiento magnetohidrodinámico del campo de velocidades se reproduce mediante simulaciones numéricas, reescalando el campo hasta alcanzar un  $Rm^c$  en el cual se desarrolle el efecto dinamo. Esto implica suponer que en todo ese rango del  $Rm$  (y por tanto del  $Re$ , debido a la relación entre ambos números) el campo de velocidades no varíe su forma topológica. Incluso bajo esta suposición las conclusiones obtenidas del estudio pueden ser erróneas, ya que si se alcanza el  $Rm^c$  las fuerzas de Lorentz pueden modificar el flujo y perder el desarrollo de la inestabilidad.

Sin embargo, el uso de esta aproximación resulta fundamental tanto para comprender el efecto dinamo, así como para los estudios previos al desarrollo experimental de un sistema magnetohidrodinámico[59, 60].

#### 1.4.1 Campos de velocidades experimentales

Para obtener los campos de velocidades experimentales el estudio se realiza sobre otro fluido con características hidrodinámicas similares. En el caso del sodio líquido, uno de los metales más favorables para su uso en MHD por su alto número de Prandtl magnético ( $Pr \sim 10^{-5}$  a  $T = 100^\circ \text{C}$ ) y baja temperatura de fusión ( $T_f = 98^\circ \text{C}$ ), tenemos que su

<sup>2</sup>Ejemplos de campos analíticos los tenemos en los flujos de Roberts [50, 51], Ponomarenko [52, 53], ABC [54] o de Taylor-Green [26, 55–58], entre otros.

densidad ( $\rho = 920 \text{ kg/m}^3$ ) y viscosidad ( $\nu = 0.68 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ) son muy similares a las del agua ( $\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$ ,  $\nu = 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ ). Realizar el cambio ofrece, entre otras ventajas, la posibilidad de utilizar técnicas ópticas de medición de velocidad (el Na es opaco), además de evitar la alta reactividad del sodio.

Si bien esta aproximación no restringe el uso de campos dependientes del tiempo, debido a la alta turbulencia encontrada en el flujo hidrodinámico éste se simplifica eliminando las fluctuaciones, de tal manera que el campo de velocidad introducido en la ecuación de inducción es el campo medio de velocidades. Esta aproximación se basa en la diferencia entre las escalas temporales de las fluctuaciones. Si las fluctuaciones turbulentas son más rápidas que las magnéticas, la fuerza electromotriz media (definida en la ec. 1.52) sería nula, ya que

$$\varepsilon = \langle \vec{u} \times \vec{b} \rangle = \langle \vec{u} \rangle \times \vec{b} = 0 \quad (1.67)$$

Aunque el efecto de la turbulencia sobre el campo magnético puede no ser despreciable [18, 61], el uso de esta técnica ha permitido realizar estudios numéricos que facilitasen la aparición del efecto dinamo, bien variando las características del flujo [59, 62] o bien condiciones externas tales como paredes conductoras [59, 63–67] o capas de fluido en reposo [68, 69].

## 1.5 Experimentos

El número de experimentos en magnetohidrodinámica ha crecido considerablemente en los últimos años. Aun así, debido a las grandes dificultades técnicas que acarrea hace que su número se mantenga bajo. A continuación se comentarán algunos de los experimentos, encontrando una descripción más extensa en otros trabajos [70].

Los primeros experimentos en búsqueda del efecto dinamo datan de mediados del siglo pasado. En 1958 Lehnert estudió el campo magnético inducido mediante el efecto  $\Omega$  en una cavidad cilíndrica con sodio, propulsado mediante un disco plano [71]. En la siguiente década Lowes y Wilkinson [72] construyeron un dispositivo en el que se obtenía efecto dinamo con varios comportamientos del campo magnético; campos estáticos, dinámicos, inversiones... El experimento consistía en dos cilindros macizos de cobre con una orientación oblicua (fig. 1.7). Rodeados de mercurio, cada uno de ellos generaba un campo poloidal por efecto  $\Omega$ . Debido a la inclinación relativa, el campo poloidal de uno se recibía como campo toroidal para el otro, eludiendo así el teorema anti-dinamo de Bullard-German.

Durante años los teoremas anti-dinamo presagiaban que no iba a ser posible observar un efecto dinamo en flujos sin elementos sólidos. Los esfuerzos se centraron en la búsqueda de un teorema que definitivamente demostrara la imposibilidad de que se autosostuviera un campo magnético. Pero la aparición de flujos analíticos que si mostraban dicho efecto renovaron el interés. El primer resultado se consiguió en Karlsruhe (Alemania) en el año 2000 [73] utilizando un flujo de Roberts [50]. Este flujo helicoidal se repetía en el interior de 50 cilindros, cada uno de ellos de 2 metros de altura (figura 1.8a,b). El segundo resultado se

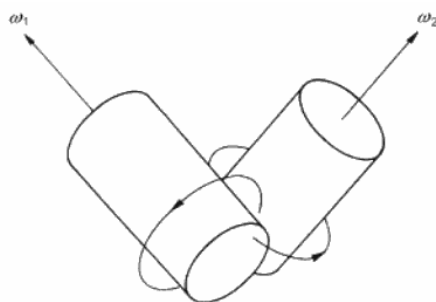


Figura 1.7: Esquema de la dinamo de Lowes y Wilkinson.

obtuvo poco después en Riga (Letonia) [74] utilizando un flujo de Ponomarenko [52] (figura 1.8c). En ambos casos la hidrodinámica estaba impuesta por la geometría, imposibilitando la retroalimentación del campo magnético sobre el fluido.

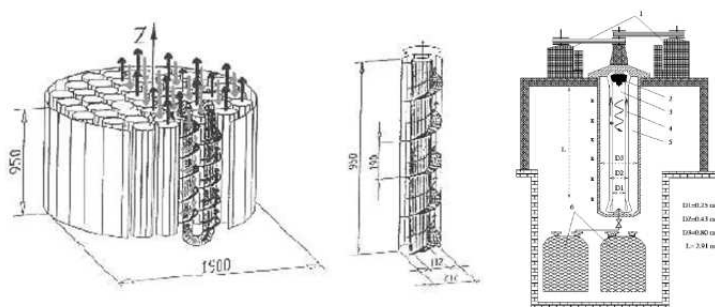


Figura 1.8: (a) Esquema del montaje de Karlsruhe. (b) Detalle del esquema (c) Esquema de la dinamo de Riga.

El reto siguiente consistía en diseñar un experimento en el que un flujo creado se moviera libremente, permitiendo que las fuerzas de Lorentz modificaran el flujo.

No ha sido hasta recientemente [75] que un sistema de estas características ha producido la dinamo, en Cadarache (Francia). Precisamente es en esta configuración, denominada de von Kármán, en la que la presente investigación se ha realizado.

Otros experimentos se están realizando en geometría esférica, entre los que destacan dos. En Maryland (EEUU) se está trabajando con un flujo de Couette en una esfera de 3 metros de diámetro girando con una frecuencia máxima de 12 Hz, en donde se espera alcanzar  $Rm \sim 600$  (figura 1.10a). En Grenoble (Francia) se trabaja con otro flujo de Couette en una esfera de 30 cm de diámetro con un dipolo permanente en el centro (figura 1.10b). En este sistema las fuerzas dominantes son las de Coriolis y Lorentz, mostrando dinámicas muy variadas [76, 77].

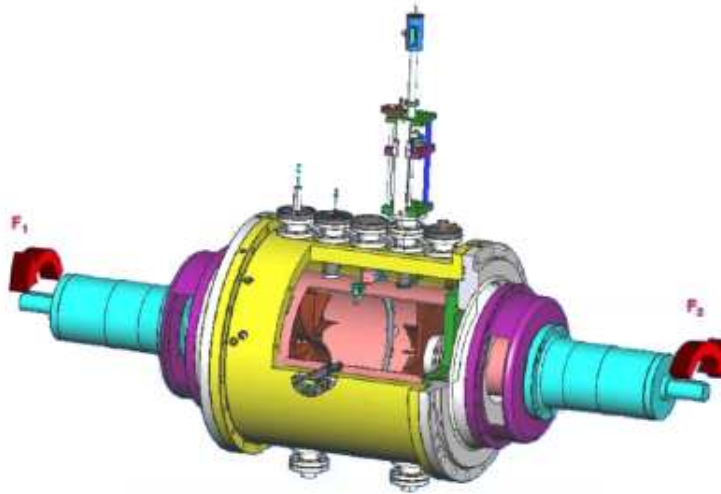


Figura 1.9: Montaje VKS en Cadarache.

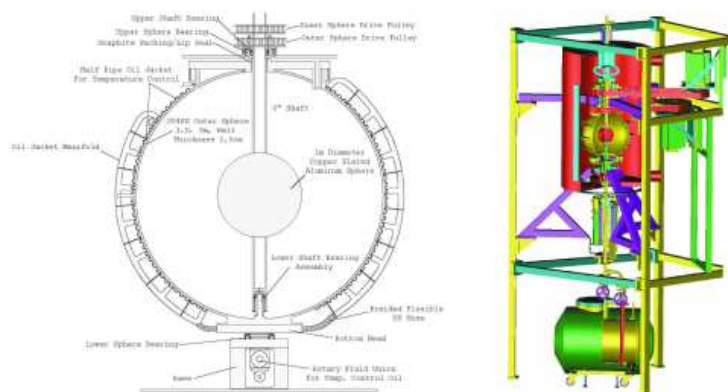


Figura 1.10: Montaje en Maryland y en Grenoble

## 1.6 Magnetohidrodinámica de un flujo de von Kármán

Se denominan flujos de von Kármán a los producidos por rotación de uno o dos discos. La primera descripción analítica se debe a Theodore von Kármán [78] quien en 1921 estudió el desarrollo del flujo provocado por la rotación de un disco infinito. El problema fue modificado por Batchelor en 1951 [79], quien introdujo un segundo disco coaxial. De esta manera se pudo definir el número de  $Re$  para el problema, aunque a costa de introducir un nuevo parámetro: la diferencia entre la rotación de los propulsores.

Los análisis teóricos dieron paso a las simulaciones numéricas, destacando el trabajo de Zandbergen [80]. Estos trabajos estaban limitados a números de  $Re$  bajos, por lo que los

experimentos hidrodinámicos constituían una parte fundamental para la comprensión del problema. Entre estos trabajos se encuentran los de Stewartson con relación de aspectos muy pequeña [81].

En los años 90 este tipo de flujo recobra su interés al perfilarse como un buen candidato para el desarrollo del efecto dinamo debido a la presencia de rotación diferencial y helicidad [19, 82] que favorece la aparición de la inestabilidad [41] mediante una dinamo tipo  $\alpha\omega$  [18, 19, 65]. Se desarrollaron los primeros códigos de la dinamo cinemática [83] y estudios experimentales del flujo en turbulencia completamente desarrollada [5, 84–86]. Para alcanzar el grado de turbulencia necesaria se sustituyeron los discos planos (cuya transmisión se producía por arrastre viscoso) por propulsores con palas, llegando a niveles de turbulencia de  $Re \sim 10^5$  en experimentos con agua de tamaño no muy grande.

El desarrollo de los códigos cinemáticos junto con las nuevas técnicas de velocimetría permitió estudios más profundos sobre el comportamiento MHD del fluido [59, 63, 65, 87], mientras que en paralelo los recursos computacionales permitieron estudiar numéricamente la transición a la turbulencia [88], mostrando cómo los modos no axisimétricos se volvían dominantes [89, 90]. Estos resultados numéricos han sido completados experimentalmente en profundidad [91], mostrando la desestabilización de la capa de cizalla o la aparición de ondas viajeras y vórtices hasta llegar a la turbulencia. En este trabajo también se observa cómo la distribución de velocidades en un punto no sigue una estadística gaussiana, sino una distribución de doble joroba típica de flujos biestables.

Los primeros estudios con metales líquidos en esta configuración son realizados en Lyon, en donde se describen los efectos de inducción magnética [19, 60], mostrando que las predicciones obtenidas en la dinamo cinemática reproducían adecuadamente los resultados experimentales. Sin embargo, el uso del campo de velocidades medio sin las fluctuaciones turbulentas no podía explicar las diferencias encontradas entre simulaciones y experimentos, o las fluctuaciones observadas en el campo magnético [82, 92].

Finalmente, en el 2007 se observó el efecto dinamo [75], junto con inversiones caóticas del campo magnético [33]. Aunque se considera el primer caso de un flujo no constreñido que desarrolla esta inestabilidad los resultados fueron positivos solamente utilizando propulsores de hierro dulce, no quedando claro su papel en este problema.

A pesar del gran esfuerzo realizado por la comunidad aun quedan muchas incógnitas por aclarar. En el plano hidrodinámico encontramos la caracterización de la no axisimetría del flujo o las bifurcaciones del flujo medio, mientras que en el plano magnetohidrodinámico no se ha establecido la validez de considerar el campo como axisimétrico o el papel que las fluctuaciones turbulentas juegan en el desarrollo del efecto dinamo.



## Capítulo 2

# Diseño experimental

### Abstract

The aim of the experimental part of this thesis is the characterization of a von Kármán flow. This flow will be used to predict the magnetohydrodynamic behavior of a sodium flow with the same hydrodynamic conditions, under the kinematic dynamo approximation. In order for the MHD instabilities to develop, the  $Rm$  reached must be of the order of  $10^2$  [93]. As the ratio between the magnetic and the hydrodynamic Reynolds number for a material as sodium (eq. 1.41) is very low ( $Pm \sim 10^{-5}$ ) it is necessary to work with  $Re \sim 10^6$ , i.e., turbulent flows. Nevertheless, the usual approximations based on the difference between the hydrodynamic and magnetic temporal scales neglect the turbulent fluctuations, so a time-averaged velocity field is used.

This approach is questioned when slow temporal scales are shown in the flow which makes the system fluctuate between two possible states, each of them with a different mean velocity field [94]. Although this scales had been studied numerically at moderate  $Re$  [88, 90, 95], there aren't any experimental study at turbulent  $Re$  showing dynamics at temporal scales of  $10^3$  s.

In this chapter the experimental setup is described, together with the measured magnitudes and the techniques used such as the Laser-Doppler anemometry. There are defined the three control parameters of the system: the aspect ratio of the cylinder ( $\Gamma$ ), the Reynolds hydrodynamic number ( $Re$ , which varies in the range between  $10^4 - 10^6$ ) and the asymmetry between the rotation of the propellers ( $\Delta$ ).

El objetivo de la parte experimental de esta tesis es la caracterización de un flujo de von Kármán para posteriormente, mediante simulaciones numéricas, predecir el comportamiento magnetohidrodinámico de un flujo de sodio con las mismas características hidrodinámicas. Para que las inestabilidades magnetohidrodinámicas se desarrollen el  $Rm$  alcanzado debe

ser del orden de  $10^2$  [93]. Como la relación existente entre el número de Reynolds magnético y el hidrodinámico para un material como el sodio (ec. 1.41) es muy baja ( $Pm \sim 10^{-5}$ ) es necesario trabajar con  $Re \sim 10^7$ , es decir, flujos turbulentos. Sin embargo, las aproximaciones basadas en la diferencia entre las escalas temporales hidrodinámicas y magnéticas permitían despreciar las fluctuaciones turbulentas, utilizando tan solo un campo de velocidades promediado en el tiempo.

Este planteamiento queda cuestionado cuando en el flujo aparecen escalas temporales lentas que hacen que el sistema fluctúe entre dos posibles estados, cada uno con un campo medio de velocidades [94]. Aunque estas escalas han sido estudiadas numéricamente a  $Re$  moderados [88, 90, 95], no existe ningún estudio experimental a  $Re$  turbulentos mostrando dinámicas a escalas temporales del orden de  $10^3$  s en esta configuración.

En este capítulo se describe el montaje experimental así como las magnitudes medidas y las técnicas utilizadas (como la anemometría por Laser-Doppler). Se definen los tres parámetros de control del sistema: La relación de aspectos del cilindro ( $\Gamma$ ), el número de  $Re$  hidrodinámico ( $Re$ , modificado en un rango de  $10^4 - 10^6$ ) y la asimetría entre la rotación de los propulsores ( $\Delta$ ).

## 2.1 Descripción de la celda experimental

El flujo hidrodinámico se desarrolla en el interior de un cilindro cuyas tapas giran en contrarrotación. Dado que se quiere trabajar con  $Re \sim 10^5$  utilizando como fluido agua ( $\nu = 10^{-5}$  Pas), el sistema debe tener una escala de longitud  $L$  y velocidad  $V$  tal que  $LV \sim 1\text{m}^2/\text{s}$ . Manteniendo un compromiso entre costes de fabricación de la celda experimental y de los motores necesarios, se escogió un cilindro de 20 cm de diámetro interno y 30 cm de longitud. Elegido en un primer diseño de policarbonato de 5 mm de grosor, fue sustituido por otro cilindro de metacrilato de 1 cm de grosor debido a las deformaciones producidas por las fluctuaciones de presión en el interior.

La orientación del cilindro se eligió horizontal para evitar cualquier asimetría producida por la gravedad. Si el cilindro estuviera dispuesto verticalmente la actuación de los propulsores como focos fríos no sería igual en ambos extremos del cilindro ya que, mientras que en el inferior la configuración sería estable, la superior podría producir algún efecto de convección. Si se coloca el cilindro en horizontal se evitará esta ruptura de simetría. Como efectos secundarios, la orientación dificulta la evacuación de burbujas del interior, aunque permite el acceso a ambos extremos sin necesidad de vaciar la celda. El cilindro se cierra mediante unas tapas de policarbonato cuya función es la de minimizar flujos hacia el exterior que puedan alterar la hidrodinámica del sistema. Estos flujos no son del todo anulados debido a un agujero pasante de 25 mm de diámetro por donde atraviesan los ejes de los propulsores, de 20 mm de diámetro.

Las tapas se fijan a unas abrazaderas de duraluminio que rodean al cilindro en una extensión de 45 mm. De esta manera mantenemos una buena fijación necesaria por las

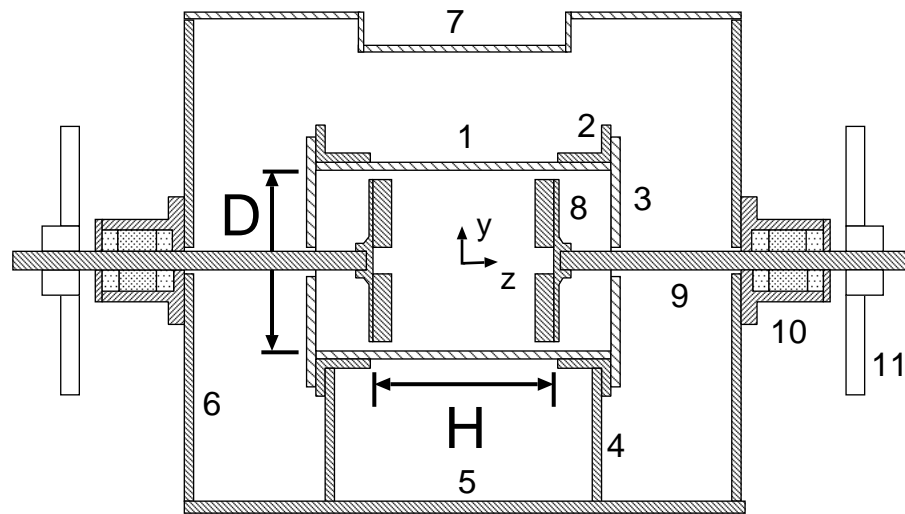


Figura 2.1: Celda experimental. 1-Cilindro, 2-Abrazaderas, 3-Tapas, 4-Pies, 5-Base, 6-Pared lateral, 7-Tapa superior, 8-Propulsores, 9-Ejes, 10-Conjunto Portaejes, 11-Conjunto Polea.

fluctuaciones de presión, aunque el volumen de observación se reduce sustancialmente. Las abrazaderas se están sujetas a la base de la celda mediante unos pies de manera que el eje del cilindro se encuentra a una distancia de 25 cm de la base.

El conjunto se sitúa en el interior de una celda de 60 cm de lado, que es llenada con unos 200l de agua. A través de las paredes laterales se colocan los ejes de los propulsores, mientras que las paredes frontales disponen de unas ventanas de policarbonato de 30x30 cm para permitir las mediciones de velocimetría óptica.

El objetivo de sumergir el cilindro en un cubo es doble. En primer lugar, al ser las técnicas de velocimetría (secc. 2.3) de naturaleza óptica se deben controlar las refracciones producidas en las distintas interfaces. Si se trabajase directamente con la superficie cilíndrica (aire-metacrilato-fluido) las deformaciones ópticas serían considerables, mientras que si en primer lugar se coloca una superficie plana (aire-fluido) las refracciones en la interfaz cilíndrica (fluido-metacrilato-fluido) serán más simples. El segundo motivo es el de obtener una mayor estabilidad en la temperatura, ya que la potencia entregada por los motores al fluido (del orden de 3 kW) se transforma en calor a través del efecto Joule. Esta potencia produciría un incremento de temperatura importante si tan solo se considerara el volumen del cilindro (9.5l). Aumentando el volumen del fluido en un factor 20, el calentamiento se reduce a un valor típico de 0.5 K/hora, aunque esta tasa depende tanto de factores ambientales como de la velocidad impuesta al fluido.

### Propulsores

Para impulsar el fluido se utilizaron discos de aluminio anodizado tallados mecánicamente mediante control numérico. Las piezas fueron realizadas a partir de un bloque macizo para

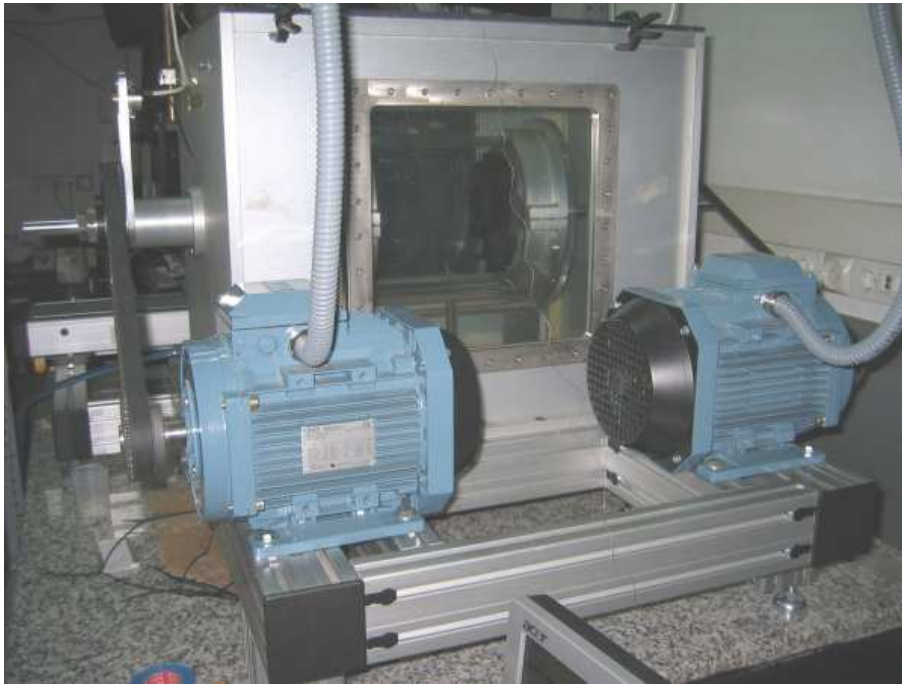


Figura 2.2: Vista de la celda.

Propulsor	$R_{palas}$	$\beta$
P20	47 mm	$20^\circ$
P30	51 mm	$30^\circ$

Tabla 2.1: Características distintivas de los dos propulsores. El ángulo  $\beta$  es el formado en la periferia del propulsor entre ésta y la tangente de la pala.

evitar soldaduras, consiguiendo una precisión en la forma de  $5 \mu\text{m}$ . Los propulsores tienen un diámetro de 17.5 cm de diámetro con 10 palas uniformemente distribuidas (fig 2.3). Si bien se dispone de discos planos, estos fueron descartados debido a la baja potencia transmitida al fluido, producida tan solo por el arrastre de la capa límite y el bombeo de Ekman. Las palas sin embargo arrastran el fluido, con lo que la transmisión de velocidad es mucho mayor. Éstas, de 2 cm de altura, mantienen una sección constante con forma de arcos de circunferencia, comenzando a una distancia de 3 cm del centro del disco y terminando en el borde. Se evitó que las palas llegaran hasta el centro del disco tanto por la dificultad que se plantearía en el mecanizado de la pieza como para facilitar la aspiración del fluido. Se utilizaron dos tipos de propulsores que se distinguen por el radio de los arcos de circunferencia y por lo tanto en el ángulo formado entre la periferia del disco y el extremo de la pala. Este ángulo, definido como  $\beta$  (fig. 2.3 y tabla 2.1) se eligió conforme a estudios anteriores [59, 87], los cuales relacionan la forma de los propulsores con características del campo de velocidades que optimizan el umbral del efecto dinamo. En especial, el ángulo  $\beta$

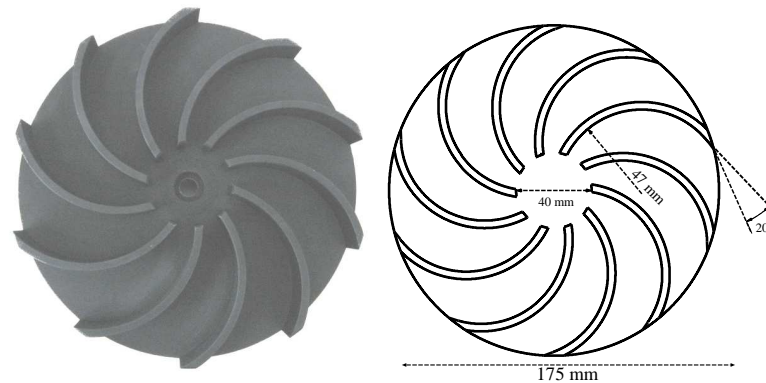


Figura 2.3: El propulsor  $P20$  es uno de los dos tipos de propulsores utilizados para generar el movimiento en el fluido. El radio del propulsor es  $R_{prop} = 87.5$  mm, y dispone de 10 palas de 2 cm de altura para mejorar el arrastre del fluido. La forma de las palas son arcos de circunferencia. El sentido de giro escogido es antihorario, también definido como *rotación positiva*.

influye en la relación Poloidal-Toroidal, de la que se hablará en el capítulo 4.

Los propulsores giran solidariamente con unos ejes de acero inoxidable de 2 cm de diámetro que atraviesan las paredes laterales hasta el exterior de la celda, donde unos portaejes fijan la distancia  $H$ , además de conferir una mayor estabilidad en la rotación. El conjunto portaejes se compone de varios elementos, entre los que se encuentran rodamientos para facilitar el giro dentro del portaejes y un casquillo ajustable, que impide el desplazamiento horizontal del eje.

### Motores y sistemas de transmisión

En el extremo exterior del eje se encuentran las poleas, que mediante unas correas dentadas transmiten el giro proporcionado por los motores. Se dispone de dos juegos de poleas (de 168 y 83 mm de diámetro), pudiendo tener una relación entre las velocidades de giro del motor y de los ejes de 1 : 1 ó 2 : 1. Si bien con el primer juego se consigue alcanzar mayores velocidades (y por lo tanto  $Re$  más altos), con el segundo juego se obtiene una mayor precisión en la frecuencia de los propulsores, siendo este factor determinante en el experimento.

Cada eje dispone de un motor independiente permitiendo estudiar varias configuraciones: un solo propulsor en marcha, ambos girando con la misma velocidad angular (*corrotación*) o con velocidades angulares opuestas (*contrarrotación*).

Los motores utilizados son motores asíncronos *ABB M3AA 100L*, caracterizados por la velocidad de rotación alcanzada (hasta 950 rpm) y el par máximo que pueden suministrar (15 Nm). Su funcionamiento se basa en dos componentes: el estator y el rotor. El estator se compone de varios electroimanes que se activan progresivamente con una corriente trifásica

a 380 V, mientras que el rotor se compone de un bobinado. Cuando un electroimán se activa en el estator se induce una corriente eléctrica en el bobinado del rotor, que a su vez sufre una fuerza neta al variar el flujo magnético. Esta fuerza es la causante del giro del rotor, el cual debe girar con una velocidad menor que la del avance del campo magnético creado por el estator, ya que de otra manera no habría cambio en el flujo magnético.

Debido a que el motor no es capaz de elegir la frecuencia de giro, sino que ésta le viene impuesta por la señal eléctrica, es necesario la utilización de variadores de frecuencia que permiten modificar la frecuencia de la corriente entregada al motor. Para ello se cuenta con dos variadores *ABB ACS140* capaces de proporcionar hasta 1.5 kW de potencia. Estos pueden ser operados manual o remotamente a través de una señal eléctrica exterior en donde la tensión indica al variador qué frecuencia debe aplicar. El modo remoto presenta dos importantes ventajas. La primera es que la resolución es superior a la obtenida en el control manual (limitada a incrementos de 0.03 Hz). La segunda ventaja es que mediante un generador de funciones se pueden introducir diversas formas de variación: sinusoidal, de onda cuadrada, etcétera.

Un problema que se encuentra al modificar la frecuencia de los motores es que están diseñados para trabajar a la frecuencia de la corriente eléctrica (50 Hz). Si se introducen frecuencias mayores el fabricante no asegura el mantenimiento del par, mientras que si se reduce demasiado, la refrigeración (producida por un ventilador que rota solidariamente con el motor) no será suficiente, provocando un aumento en la temperatura de éste.

Tanto la celda como los motores están fijados a una estructura de raíles de aluminio que mantienen alineadas las poleas y la tensión en las correas, además de añadir estabilidad al sistema. Finalmente se construyó un carenado mediante perfiles que recubre el montaje experimental, con un doble uso. Por un lado permite la fijación de distintos elementos como tubos de llenado y vaciado de la celda o cables y cámaras necesarias para la velocimetría. Por el otro, permite colocar unos paneles que por seguridad evitan contactos accidentales con los componentes mecánicos giratorios y con los reflejos del láser. Además de estos paneles se disponen de gafas de seguridad que filtran la longitud de onda del láser utilizado.

## 2.2 Sistemas de coordenadas y parámetros del sistema

Debido a la simetría del volumen el sistema de coordenadas apropiado es el de coordenadas cilíndricas  $\{r, \theta, z\}$ , con  $r \in (0, R)$ ,  $\theta \in (0, 2\pi)$ ,  $z \in (-\frac{H}{2}, \frac{H}{2})$ , siendo  $R = 10$  cm el radio del cilindro y  $H$  la distancia entre los propulsores. Aunque la separación entre propulsores es modificable, en esta configuración se mantendrá  $H = 20$  cm. Utilizando estas coordenadas se define el propulsor en  $z = -\frac{H}{2}$  como propulsor sur (*S*) y el propulsor en la posición  $z = \frac{H}{2}$  como propulsor norte (*N*). Siguiendo la definición utilizada por Marié [96], la rotación (que no la velocidad angular) se considera negativa cuando los propulsores impulsan con la parte cóncava de las palas (como una cesta en pelota vasca), y positiva si se utiliza la parte convexa (fig. 2.3). La configuración elegida en todos los experimentos es de *contrarrotación*

*positiva*, lo que implica que la velocidad angular en el propulsor  $S$  es positiva mientras que la del propulsor  $N$  es negativa.

En cuanto al control del sistema, éste fue diseñado para permitir la variación de tres tipos de parámetros.

El primer parámetro de control es de tipo geométrico y especifica la relación entre el diámetro del cilindro y la distancia entre propulsores, también denominado *relación de aspectos del cilindro*.

$$\Gamma = \frac{D}{H} \quad (2.1)$$

La dependencia del flujo con  $\Gamma$  ha sido estudiada numérica [89] y experimentalmente [97] a bajos  $Re$ , pero en este estudio se ha preferido mantener  $\Gamma = 1$ . Actualmente se cuenta con otro cilindro de diámetro  $D = 30$  cm con el que en un futuro se estudiará si existe alguna dependencia específica del sistema con  $D$ .

El segundo parámetro es relativo al grado de turbulencia del sistema, el número de Reynolds hidrodinámico,

$$Re = \frac{RV_{prop}}{\nu} \quad (2.2)$$

en donde  $\nu$  es la viscosidad cinemática del fluido utilizado (agua, con  $\nu = 1$  cp a  $20^\circ$ ) y  $V_{prop} = 2\pi R_{prop}f$  la velocidad periférica del propulsor. Dependiendo de las poleas utilizadas la frecuencia de giro puede alcanzar un máximo de 15 Hz, aunque por encima de los 13 Hz las palas producen cavitación. La resolución permitida en el modo manual es de 0.015 Hz, por lo que el  $Re$  mínimo alcanzable se sitúa en  $Re = 870$ . Sin embargo esta frecuencia no resulta muy estable, provocando además un calentamiento excesivo de los motores.

El rango de  $Re$  trabajado es de  $10^4 - 10^6$ ) (tabla 2.2). Esto implica que el experimento se encuentra en turbulencia completamente desarrollada, no pudiendo acceder a regímenes laminares.

Por último, la diferencia en la rotación de los dos propulsores se controlará mediante el factor de asimetría,

$$\Delta = \frac{f_N - f_S}{f_N + f_S} \quad (2.3)$$

en donde  $f_{N,S}$  son las frecuencias de los propulsores  $N, S$ , respectivamente. Al girar en sentido positivo, las frecuencias siempre tendrán valores positivos. El caso en el que los dos motores giren con la misma frecuencia, es decir,  $\Delta = 0$ , se denomina *contrarrotación exacta*.

## 2.3 Sistemas de medida de la velocidad

Para poder caracterizar un flujo turbulento es necesario un sistema de velocimetría con una alta resolución tanto espacial como temporal. Además, al estar interesados en las escalas lentas, se requiere de aparatos con capacidad para realizar medidas de larga duración.

Desechados los métodos invasivos como la anemometría por hilo caliente [5] se optó por dos métodos de velocimetría óptica: la velocimetría por imagen de partículas (PIV), y la anemometría por Láser-Doppler (LDA). Ambos métodos se basan en la medición de la

$f$ (Hz)	$V_{prop}$ (m/s)	$Re$ ( $\times 10^5$ )
0.1		0.06
1		0.55
5		2.75
10		5.50
15		8.25

Tabla 2.2: Relación entre la frecuencia de giro del propulsor  $f$ , la velocidad de la periferia  $V_{prop}$  y el  $Re$  alcanzado.

velocidad de partículas diseminadas en el flujo, con lo que éstas deben tener un alto grado de reflectividad para facilitar su visualización y deben desplazarse con la misma velocidad que el fluido. Esta última condición ha sido estudiada por varios autores [98–100] diferenciándose entre partículas trazadoras e inerciales, dependiendo de la densidad relativa y el tamaño. Las primeras tienen la misma densidad que el entorno y si son de un tamaño reducido seguirán la trayectoria del fluido. Las segundas, sin embargo, al tener una densidad distinta no tendrán la misma respuesta ni ante las aceleraciones ni ante las fluctuaciones de presión. En cuanto a las fuerzas de empuje, si la diferencia de densidades no es muy grande, estas serán despreciables frente a las fuerzas advectivas. Las partículas utilizadas son esferas de vidrio huecas con un recubrimiento plateado para incrementar la reflectividad. Estas tienen un diámetro medio de  $14\ \mu\text{m}$  y una densidad de  $1.65\ \text{g/cc}$ . A pesar de la diferente densidad entre las partículas y el agua no se observa diferencia en la medición de velocidades al utilizar partículas con densidad más parecida ( $\rho_p = 1.06\ \text{g/cc}$ ). La ventaja de las primeras es su alta reflectividad, muy adecuada cuando la potencia del láser disponible es limitada.

Finalmente, la velocimetría por PIV no fue utilizada ya que aunque cuente con una buena resolución espacial (determinada por la óptica) el tiempo de medida queda limitado por la frecuencia de adquisición. Cuando esta última es máxima (15 Hz), el tiempo de medición se reduce a  $10^2\ \text{s}$ , muy lejos de las escalas temporales necesarias.

El sistema LDA, por contra, permite mediciones sin límite de tiempo con tasas de adquisición que superan el  $k\text{Hz}$ . En su contra está que solo es posible medir una componente por adquisición y que la medición se produce punto a punto, lo que provoca un sacrificio de la resolución espacial en pos de un tiempo de medición adecuado. Aun así, este último método ha sido el utilizado para realizar todas las mediciones de velocimetría, explicando a continuación con más detalle su funcionamiento.

### 2.3.1 LDA

En 1842, el físico austriaco Christian Doppler [101] predijo la variación que debía sufrir la frecuencia de una onda cuando era emitida o recibida por un cuerpo en movimiento. Esta variación se experimenta en la vida cotidiana, con el cambio de tono de las sirenas de ambulancia al variar la velocidad relativa con respecto a nosotros, o con más sofisticación,



en el corrimiento hacia los extremos del rango visible de los colores de las estrellas, según se acerquen o alejen a nuestro planeta.

La aplicación de este efecto como medida de la velocidad es amplio, utilizándose tanto ondas sonoras en la medición de la circulación sanguínea o de flujo (especialmente interesante la velocimetría por reflejo de ultrasonidos [102, 103]), como luz infrarroja en los radares de carretera.

En hidrodinámica se describió su uso por primera vez en 1964 por Yeh y Cummins [104], mostrándose como un método no invasivo y capaz de medir velocidades en turbulencia gracias a su alta resolución temporal. Originalmente se medía el corrimiento Doppler que se produce en la luz reflejada por una partícula. En su forma más simple (una partícula alejándose con velocidad  $V \ll c$  en la dirección de propagación de un haz con longitud de onda  $\lambda$ , con el emisor y el receptor en la misma posición) el incremento en la frecuencia tiene un valor proporcional a la velocidad:

$$f_D = \Delta f = \frac{2V}{\lambda} \quad (2.4)$$

en donde  $f_D$  es el denominado corrimiento Doppler. El problema que surge es que esta diferencia es tan solo una pequeña parte comparada con la frecuencia original, por lo que el error asociado a la medida es muy alto. Por ejemplo, el corrimiento Doppler producido por una partícula con velocidad de 1 m/s es del orden del MHz, mientras que las frecuencias de emisión y recepción son del orden de los PHz, es decir, 9 ordenes de magnitud de diferencia.

La técnica sufrió una importante variación cuando se aplicó principios de interferometría al procedimiento. Al hacer coincidir dos haces con la misma longitud de onda y polarización se produce un patrón de interferencia en un volumen en donde la intensidad de la luz varía rápidamente. Cuando una partícula atraviesa las franjas de interferencia, ésta devuelve una señal luminosa modulada por el paso a través de las zonas iluminadas y oscuras. Recogiendo la frecuencia de las variaciones de intensidad es posible encontrar la velocidad de la partícula en la dirección perpendicular de las franjas:

$$v_{\perp} = f_D \cdot d = \frac{\lambda}{2 \sin(\alpha)} \quad (2.5)$$

con  $f_D$  la frecuencia de la señal recibida,  $d$  la distancia entre franjas y  $2\alpha$  el ángulo que forman los dos haces (fig 2.4a).

Mientras que con el efecto Doppler original es posible distinguir si la partícula se acerca o aleja, este segundo método no lo permite ya que dos partículas con velocidades opuestas devuelven una señal con la misma frecuencia (en la figura 2.4b, el caso representado en azul). La ambigüedad se evita modificando la frecuencia de uno de los haces, lo que provoca que las franjas se desplacen dentro del volumen de medición con velocidad proporcional a la diferencia entre las frecuencias (o *frequency shift*). De esta manera, una partícula que avance en la dirección de desplazamiento de las franjas presentará una frecuencia menor que la que avance en sentido contrario (en la fig.2.4b, el caso representado en rojo). La

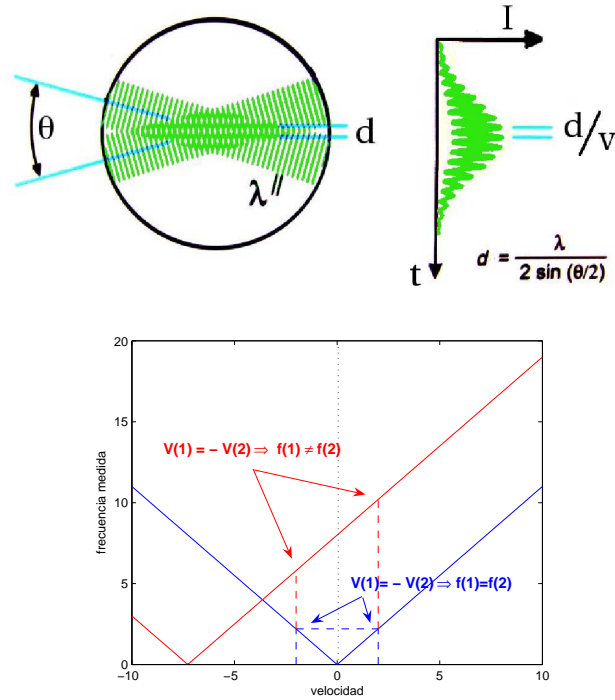


Figura 2.4: **(a)** Cuando una partícula atraviesa las franjas de interferencia, la intensidad reflejada se encuentra modulada con una frecuencia proporcional a la velocidad en esa dirección. **(b)** Frecuencia recogida frente a la velocidad de las partículas cuando (azul) los haces tienen la misma frecuencia (no hay diferencia entre  $+v$  y  $-v$ ) y cuando (rojo) existe una diferencia de frecuencia (o *frequency shift*) entre los haces (se puede distinguir entre velocidades opuestas).

velocidad de la partícula vendrá dada por la expresión

$$v_{\perp} = (f_D + f_{sh}) \cdot d \quad (2.6)$$

en donde  $f_{sh}$  es la variación de la frecuencia (normalmente con un valor de 40 MHz). Esta técnica solo es válida para un rango de velocidades determinado por el valor de  $f_{sh}$ , ya que fuera de él vuelve a haber una ambigüedad en torno a la velocidad medida.

Para imprimir la diferencia de frecuencias entre los haces se utiliza una celda de Bragg. Dicha celda difracta un haz incidente sobre un cristal permitiendo ajustar la potencia relativa de cada haz para obtener dos haces coherentes con la misma potencia. Además, el cristal permite modificar sus propiedades ópticas al aplicar una onda de presión sobre él, induciendo una diferencia en las frecuencias de los haces transmitidos. La onda de presión se obtiene mediante un piezoeléctrico en contacto con el cristal, conectado a un generador de señales.

La medición por LDA presenta varias dificultades técnicas inherentes a su diseño. El primer problema es que solamente es posible medir la componente de la velocidad en la

Color	$\lambda$ (nm)	Potencia (mW)
Morado	475	20
Azul	488	100
Verde	514.5	100

Tabla 2.3: Principales líneas de emisión del láser de Argón Laser Stellar-Pro-L

dirección perpendicular a las franjas. Si se quiere obtener simultáneamente el resto de componentes es necesario disponer de otro equipo de medida con distinta orientación y longitud de onda, de tal manera que los patrones no interfieran entre sí. Normalmente se utiliza un láser multilínea de Argón ya que emite en varias longitudes de onda y con potencias similares (tabla 2.3).

Un último problema surge de que la medición de la velocidad se produce por el paso de partículas por el volumen de medida. Estadísticamente, si tenemos una densidad de sembrado homogénea con una distribución normal de velocidades, el número de partículas que cruza dicho volumen será mayor cuanto mayor sea su velocidad. Para evitar el consiguiente sesgo se cambia el peso estadístico de las velocidades medidas. McLaughlin [105] demostró que en configuraciones simples la corrección suponía un coeficiente proporcional a la velocidad. Sin embargo, para mediciones reales dicha corrección dista de ser trivial, y aunque existen correcciones más realistas [99, 106], algunos autores sostienen que el error cometido en la corrección supera el sesgo [107]. Este factor no ha sido tenido en cuenta en nuestro sistema ya que aunque puede ser importante [108], consideramos que no afecta sustancialmente a los resultados presentados.

### Sistema Comercial

El sistema comercial utilizado fue adquirido a la empresa *TSI Incorporated*. El equipo se compone de un láser de Argón Laser Stellar-Pro-L, alineado con el módulo Fiberlight. Este aparato separa las líneas del láser, utilizando en nuestro caso únicamente la línea verde. Además, dispone de una celda de Bragg para dividir el haz en dos e imprimir el *frequency shift* explicado anteriormente. La señal eléctrica exterior necesaria para producir este desfase de 40 MHz es generada en el módulo *FSM*, el cual se explicará más adelante.

Los haces láser son guiados a través de una fibra óptica hasta el cabezal *Fiberoptic* donde una lente los focaliza en el punto de medición. Al ser la separación entre los haces de 50 mm y la distancia focal en aire de la lente  $f' = 363$  mm, el ángulo con el que se cruzan los rayos es de  $7.9^\circ$ . El volumen de medición se acota siguiendo el criterio  $1/e^2$  [109], es decir, donde la intensidad decaiga hasta ese valor de la intensidad inicial. En nuestro caso obtenemos un elipsoide de semieje mayor 1.3 mm y semieje menor  $90 \mu\text{m}$ . Las franjas de interferencia se localizan paralelas al semieje mayor, con una separación de  $3.73 \mu\text{m}$ , obteniendo unas 20 franjas.

En el mismo cabezal se encuentra también una fibra óptica encargada de recoger la luz

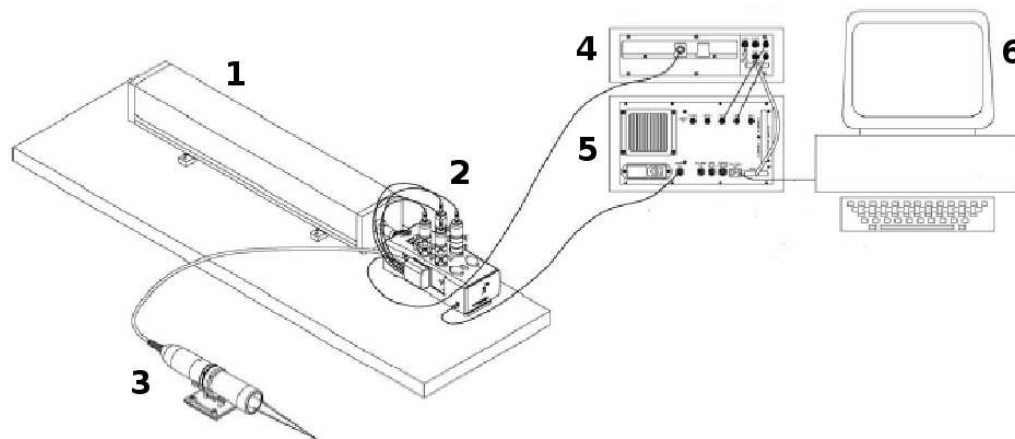


Figura 2.5: Esquema de la LDA: El láser (1) envía un rayo al Fiberlight (2). Éste duplica el haz, imprimiendo un desfase en el rayo secundario y transmitiendo los haces hasta la sonda (3) mediante fibra óptica. La sonda focaliza los dos haces en el punto de medición, recogiendo la señal reflejada por las partículas y enviándola al módulo fotodetector (4). La señal óptica es filtrada y convertida en señal eléctrica, que es enviada al procesador de señales (5). Este extrae la frecuencia Doppler de la señal, la digitaliza y la envía al ordenador (6), que recoge las velocidades y realiza las estadísticas.

reflejada por las partículas, colocado en el punto conjugado del punto de medición. Aunque la luz reflejada es mucho mayor en la dirección de avance del láser (*front scattering*) que en la contraria (*back scattering*)[98], colocar el sensor en el cabezal evita problemas de alineación, además de disminuir el volumen final del equipo comercial. La luz recogida por el fotosensor es enviada al módulo fotodetector (*PDM*), donde un filtro óptico elimina la luz ambiental. Posteriormente, la señal óptica se transforma en eléctrica a través de un tubo fotomultiplicador, eliminando el pedestal y siendo enviada al procesador de señales (*FSA*). Este procesador elimina el shift frequency  $f_{sh}$  (y a su vez proporciona la señal eléctrica al Fiberlight para producir ese desplazamiento) y descarta las señales que no superen un umbral de ratio señal/ruido. Por último extrae la frecuencia Doppler y envía el valor al ordenador para su registro y análisis estadístico utilizando el programa *FlowSizer*. El esquema del equipo se encuentra en la figura 2.5.

Dado que la medición se obtiene tan solo en un punto, es necesario el uso de un desplazador micrométrico que permita variar la posición del cabezal. Este desplazador puede ser controlado remotamente y permite el movimiento sobre un plano horizontal. En la vertical, el cabezal está colocado de tal manera que el punto de medición se encuentre en un plano horizontal que contenga al eje del cilindro. En estas condiciones, las componentes accesibles para el sistema LDA son las componentes axial  $v_z$  y azimutal  $v_\theta$  en el plano  $\theta = 0, \pi$ . No es posible, con el montaje actual, medir la componente radial.

### Corrección a la posición

Debido a que los rayos atraviesan distintas interfaces hasta llegar al interior del cilindro, éstos sufren varias refracciones que modifican la posición del punto de medición. Es necesario por lo tanto realizar una corrección en la posición del cabezal, que dependerá no solo de los índices de refracción de cada material, sino también de la geometría de la celda, la posición de partida de los haces y de la componente medida. En la figura 2.6 podemos ver las refracciones que se producen cuando se mide la componente azimuthal (es decir, con los haces formando un plano vertical).

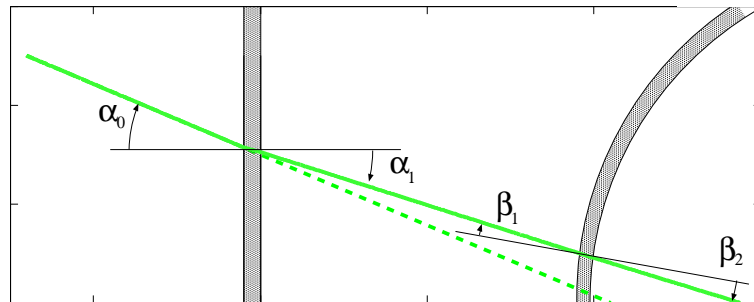


Figura 2.6: Cambio en la posición del punto de medición al medir la velocidad azimuthal debido a las refracciones de un rayo láser a través de las distintas interfaces: Planas (aire-metacrilato, metacrilato-agua) y cilíndricas (agua-mtc, mtc-agua). Las escalas horizontal y vertical no coinciden, para facilitar la claridad.

### Corrección a la velocidad

También sería necesario realizar una corrección sobre la velocidad calculada, ya que en la fórmula 2.5 tanto la longitud de onda como el ángulo entre los haces dependen del medio en el que se realice o de la geometría de las interfaces.

La corrección en la longitud de onda es un término proporcional al índice de refracción del agua, ya que la frecuencia de la luz no cambia al pasar a otro medio:

$$\lambda_{Agua} = n_{Agua} \lambda_{Aire} \quad (2.7)$$

Sin embargo el cambio en el ángulo de cruce no es tan simple. Los haces sufren una primera refracción en la interfaz plana, lo que provoca un cambio en la dirección dada por la ley de Snell (en la figura 2.6, los ángulos  $\alpha_0$  y  $\alpha_1$ ).

$$\sin \alpha_0 = n_{Agua} \sin \alpha_1 \quad (2.8)$$

En la refracción en la pared del cilindro la corrección dependerá de la dirección con la que el rayo llegue *relativa* a la superficie cilíndrica (fig. 2.6, ángulos  $\beta_1$  y  $\beta_2$ ). De esta manera un rayo que entre radialmente no variará de dirección, mientras que el resto se desviarán

según la ley de Snell. Cuando se calculan las correcciones de ambas interfaces se obtiene que la corrección dominante es la debida a la primera refracción, mientras que la segunda refracción puede ser despreciada.

De esta manera las correcciones en el denominador y el numerador de la ecuación 2.5 se anulan entre ellas, por lo que no es necesario realizar ninguna corrección.

$$V = \frac{\lambda_{agua}}{2 \sin(\alpha_1)} = \frac{\lambda_{aire}}{2 \sin(\alpha_0)} \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Obtención del campo de velocidades

En una primera aproximación al problema, el objetivo es la obtención de campos medios de velocidades. Para ello, será necesario medir punto a punto las dos componentes accesibles para el sistema LDA,  $v_\theta$  y  $v_z$ .

En cada medición se obtiene un valor medio, por lo que el tiempo de medida se tomó de 100 s asegurándose un alto número de registros (del orden de  $10^4$ ).

$$V_{\theta,z} = \langle v_{\theta,z}(t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1,N} v_{\theta,z}(t_i) \quad (2.10)$$

Este tiempo es escogido ya que, como se verá más adelante, se encuentra entre dos escalas características del problema: una rápida relativa a la escala inyectiva y una lenta en la que el sistema fluctúa entre dos estados.

El muestreo del campo se realiza en una malla de 21 puntos en la dirección axial y 11 puntos en la dirección radial, en el semiplano  $\theta = 0$ . Para obtener un mallado regular en el interior del cilindro se calcularon las correcciones necesarias para compensar las refracciones de los haces en las distintas interfaces.

Debido a que las palas son opacas, hay zonas a las que no es posible acceder. Si bien para  $r > 0.6$  la curvatura de las palas permite cierta medición, para puntos más internos esta no es posible. Para completar las medidas se realiza una extrapolación de las velocidades, suponiendo que  $V_z \mapsto 0$  cuando  $z \mapsto \pm H/2$ , y que  $V_\theta(r) \mapsto rf$  cuando  $z \mapsto 0$ .

Una vez obtenidas las componentes medias ( $V_\theta$  y  $V_z$ ), se deriva la componente radial teniendo en cuenta que el campo de velocidades es solenoidal, y por lo tanto las derivadas espaciales de las componentes están relacionadas. Para ello se descompone  $\vec{V}$  en la suma de una componente toroidal y otra poloidal [110]

$$\vec{V} = \vec{V}_{Tor} + \vec{V}_{Pol} \quad (2.11)$$

Si el campo es axisimétrico y utilizamos un sistema de coordenadas cilíndrico ( $(r, \theta, z)$  con  $z$  el eje de simetría), la ecuación de continuidad no afecta a  $V_\theta$ , quedando reducida a una relación entre  $V_r$  y  $V_z$ .

$$\nabla \cdot \vec{V} = \frac{1}{r} \partial_r (r V_r) + \partial_z V_z = 0 \quad (2.12)$$

Igualmente se cumple que la componente toroidal tiene dirección únicamente azimutal, mientras que la poloidal es una combinación de las direcciones radial y axial,

$$\vec{V}_{Tor} = V_\theta \hat{e}_\theta \quad (2.13)$$

$$\vec{V}_{Pol} = V_r \hat{e}_r + V_z \hat{e}_z \quad (2.14)$$

en donde  $\hat{e}_k$  son los vectores unitarios en el sistema de coordenadas cilíndricas.

Como el campo es solenoidal es posible definir una función de corriente  $\Psi(r, z)$ , independiente de  $\theta$  por la axisimetría del flujo, de tal manera que

$$V_r = -\partial_z \Psi \quad (2.15)$$

$$V_z = 1/r \partial_r (r \Psi) \quad (2.16)$$

La función de corriente se obtiene a partir de la integración de  $V_z$ ,

$$\Psi = \frac{2\pi}{r} \int_0^r dr' (r' V_z) \quad (2.17)$$

para posteriormente suavizar tanto la componente  $V_\theta$  como  $\Psi$  mediante un filtro de convolución y remuestrear el campo desde los 21x11 puntos hasta una resolución de 25x51 puntos, que es la utilizada en el programa de simulación. Por último, se obtiene la componente  $V_r$  a partir del potencial  $\Psi$ , siguiendo la ecuación 2.15.

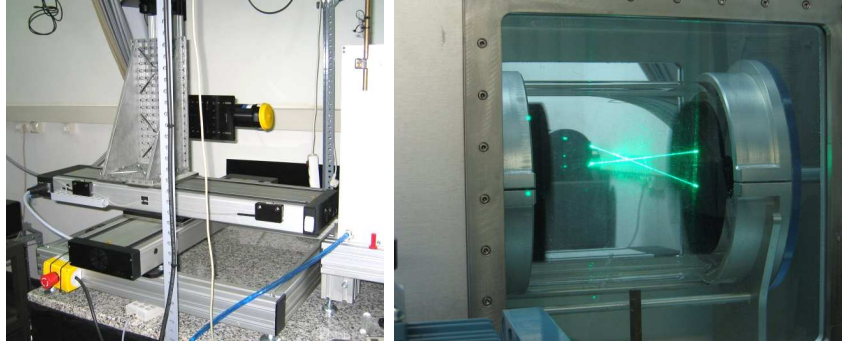


Figura 2.7: (a) Montaje de la sonda LDA sobre el desplazador. (b) Medición en el interior del cilindro.

## 2.4 Estabilidad de los motores

Como se mostrará en el siguiente capítulo el sistema tiene una fuerte dependencia con  $\Delta$ , por lo que es fundamental controlar con exactitud las velocidades de giro de los propulsores.

La estabilidad nominal de los motores es del 1% aunque debido a la forma de control (frecuencia de giro controlada por un variador, controlado a su vez por una fuente de tensión externa) esta estabilidad podría verse alterada.

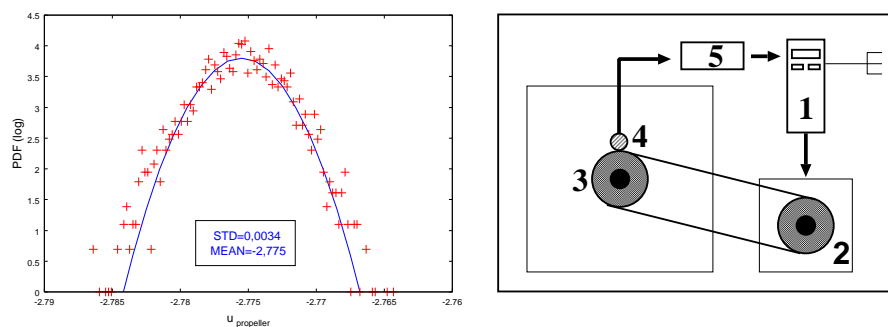


Figura 2.8: **(a)** Histograma de la velocidad de giro del eje a  $f_N = 6.3\text{Hz}$  y ajuste a una gaussiana. **(b)** Diagrama del lazo de control sobre la frecuencia: El variador (1) alimenta al motor (2), que transmite el giro a la polea del propulsor (3). Un encoder (4) recoge la frecuencia, enviando una señal al convertidor analógico-digital (5). El convertidor envía la señal al variador, quien corrige la frecuencia enviada al motor.

El primer sistema de control fue la medición mediante LDA de la velocidad periférica de los propulsores. Al colocar el punto de medición en el borde del disco se obtiene una distribución de velocidades gaussiana con un valor medio muy estable y una desviación estándar del orden del 0.1% del valor medio (figura 2.8a). El problema de esta técnica es que tan solo se puede observar uno de los propulsores en cada medición. Además no es posible obtener esta información complementariamente a la medida de un campo de velocidades, por lo que no se puede realimentar el sistema para ganar en estabilidad.

La segunda técnica consiste en el uso de un encoder óptico incremental *Hengstler RI-32*. El funcionamiento de este tipo de encoders se basa en el paso de un haz de luz a través de un disco perforado. El haz activa el fotosensor y este manda una señal pulsada. La frecuencia es extraída de la señal pulsada y posteriormente convertida a una señal analógica, que es capturada con un multímetro digital *Agilent 34970A*. Esta técnica permite la caracterización continua de la velocidad de ambos propulsores, pero no es tan robusta como la primera técnica. La debilidad está en la transmisión de la rotación desde la polea hasta el encoder, que se realiza mediante una rueda que gira por rodadura con respecto a la polea. Esta transmisión es muy sensible al montaje, haciendo inútil la calibración de la señal del encoder. Su uso ha sido restringido por lo tanto a medir la estabilidad relativa en cada experimento.

Por último, para aumentar la precisión del sistema se quiso implementar un circuito de realimentación. El variador dispone de un modo de funcionamiento en el que corrige la frecuencia enviada a partir de los valores recibidos del encoder, conocido como lazo de control PID (figura 2.8b). Este tipo de control tiene en cuenta tres factores para calcular la frecuencia de salida. El primer factor es un término proporcional al error (P), de tal manera que para errores grandes la respuesta sea rápida; el segundo factor es un término proporcional a la integral del error (I) que tenga en cuenta cual ha sido la evolución de éste;



el tercero es un término proporcional a la derivada del error (D), para evaluar la tendencia. Esta técnica fue desestimada por dos motivos. El primero es su dependencia con la señal del encoder, lo que provoca una recalibración en cada montaje de todo el lazo PID. El segundo motivo es que el activar el lazo empeora la estabilidad de los propulsores y aunque se hubiese podido optimizar los parámetros PID, se consideró que la estabilidad obtenida sin el lazo era suficiente.

Por último, se ha comprobado que el conjunto variador-motor responde a señales externas que varíen rápidamente. Aunque por fabricación el variador tiene un tiempo de respuesta de 25 ms, cabría preguntarse cuál es ese tiempo para el motor, sujeto a la carga del fluido. Experimentalmente se observa que el motor es capaz de seguir una señal externa con periodos de hasta 4 s (fig 2.9).

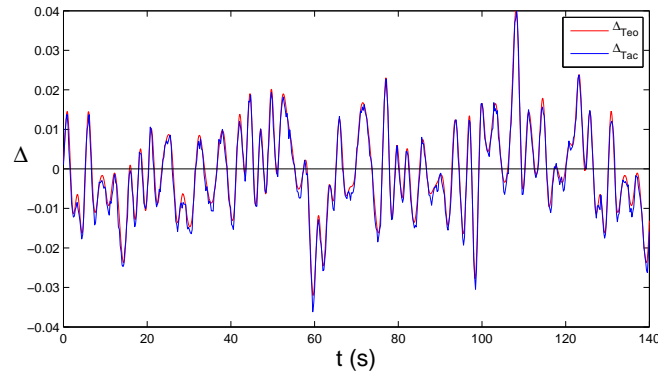


Figura 2.9: (—)  $\Delta$  random teórico obtenido a partir de un generador de funciones en el variador, (—)  $\Delta$  experimental recogida por los tacómetros. La correlación entre las señales garantiza una buena respuesta de los propulsores ante variaciones rápidas en los valores de la frecuencia.

## 2.5 Medidas de la temperatura

El efecto de la temperatura en nuestro sistema es indirecto; el valor de la viscosidad tomado para calcular el número de Reynolds del flujo corresponde a la del agua a 20 °C ( $\nu = 10^{-6}$  Pa s). Un incremento en la temperatura de 1 °C produce una variación en la viscosidad del 2% [111], lo que provocaría un error en la caracterización del  $Re$ . Estas variaciones de temperatura son debidas a la potencia entregada por los propulsores, transformada en calor debido al efecto Joule. En la figura 2.10 se representa el incremento de temperatura en el interior del cilindro en función de la frecuencia de giro de los propulsores. Dado que las medidas de la velocidad son de varias horas, el error relativo en la asignación del  $Re$  puede ser en el escenario más desfavorable de un 10%. Sin embargo, como se mostrará en la sección 3.1, las características hidrodinámicas del flujo en turbulencia completamente desarrollada se vuelven independientes del  $Re$  por lo que no se espera que esta indeterminación afecte

considerablemente a los resultados.

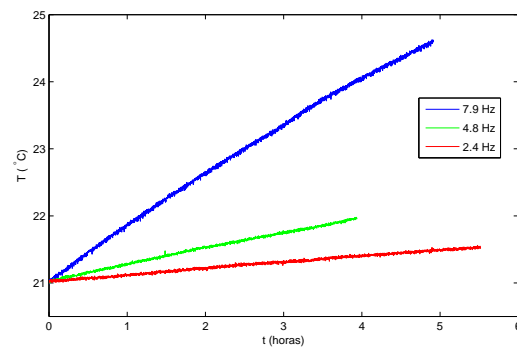


Figura 2.10: Evolución de la temperatura en la pared interna del cilindro ( $z = 0, r = R$ ) para distintas frecuencias de giro del motor.

## Capítulo 3

# Resultados experimentales

### Abstract

In this chapter the results obtained from the experimental turbulent flow are shown. In section 3.1 the characteristics of the mean velocity field are described, revealing a symmetry rupture and a bifurcation of the mean flow into two possible states: *North* and *South*. In sections 3.2 and 3.3 the variables used to characterize the system state are described. While the first variable ( $z_0$ ) is a geometric one, the second ( $V_\theta^{eq}$ ) is the fluid velocity at an equatorial point. Using these variables the dependency of the flow with the Reynolds number  $Re$ , the asymmetry factor  $\Delta$  or the propeller used will be detailed. In section 3.4 the dynamics of the inversions between the states  $N$  and  $S$  is studied, while in section 3.5 a model able to reproduce the principal characteristics of the system is shown. Finally, in section 3.6 the dynamics of the system will be modified by an external forcing, looking for a mean flow in where  $\Omega_z$  (the azimuthal velocity of the vortices) is null.

El objetivo del estudio experimental es describir el flujo hidrodinámico dentro del cilindro, atendiendo a las fluctuaciones en las escalas lentas. Una vez obtenido el campo de velocidades éste se introducirá en el código numérico para evaluar el comportamiento magnetohidrodinámico de un metal líquido en la misma configuración. Sin embargo, la riqueza en la hidrodinámica que se ha encontrado nos ha llevado a un estudio más profundo, sin restar importancia al objetivo anterior.

Para la visualización de las características principales del flujo se plantearon varias posibilidades: desde pequeñas esferas de delrin de 3 mm de diámetro y densidad  $\rho = 1.34 \text{ g/cm}^3$  hasta fluidos rheoscópicos (kalliroscope). Sin embargo, lo más efectivo resultaron ser burbujas de aire. Debido a las altas velocidades en el flujo las fuerzas advectivas sobre las burbujas superan a las fuerzas de empuje, diseminándolas por todo el volumen. Dichas burbujas se rompen hasta un tamaño de milímetros, por lo que no siguen exactamente el flujo instan-

táneo sino que debido a su tamaño se comportan como partículas inerciales, llevando una trayectoria promedio. Esto permite la observación de vórtices tales como muestra la figura 3.1, que rompen la axisimetría del flujo. Estructuras similares se han encontrado tanto numérica como experimentalmente. Así, Nore et al. [88, 89] mostraban la aparición de un único vórtice en  $Re$  laminares, fruto del gradiente de velocidades en el ecuador del cilindro (situación similar a la que se observa en inestabilidades Kelvin-Helmholtz para  $Re$  altos [12]). De forma experimental, Marié [96] reportó vórtices ecuatoriales para  $Re$  turbulentos (aunque sin estudiar sus características) y recientemente se han descrito estas estructuras en varias configuraciones [112].

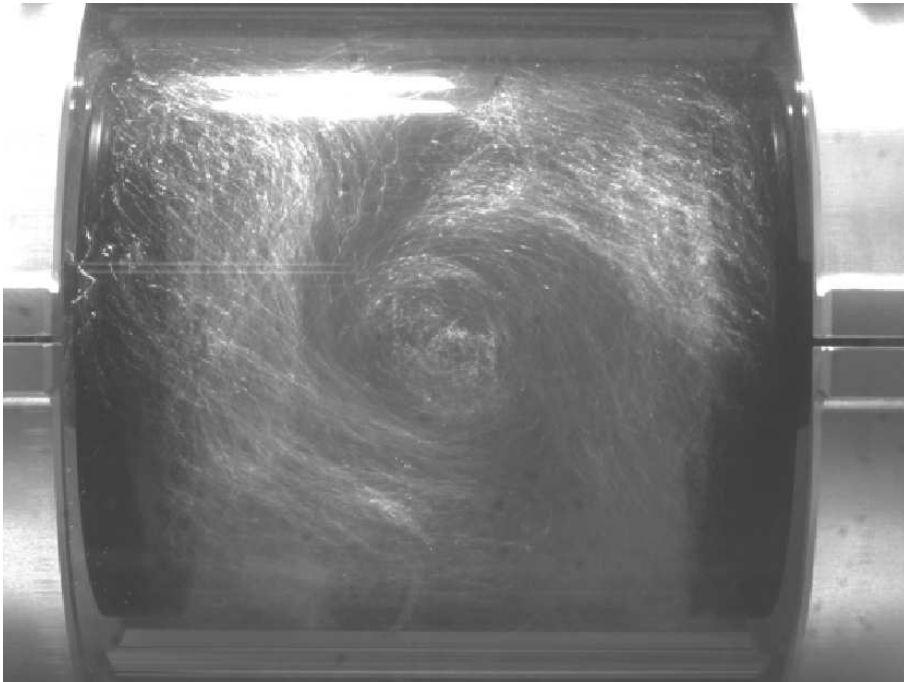


Figura 3.1: Vórtice visualizado mediante burbujas de aire. Estos vórtices se desplazan a lo largo del ecuador, llevando el sentido de giro del propulsor que domine.

Los vórtices observados en nuestro experimento también se encuentran en el ecuador, siempre que  $\Delta = 0$ . En la dirección azimutal, sin embargo, no mantienen una posición estática sino que se desplazan siguiendo el sentido de giro de uno de los propulsores. Se definen entonces dos posibles estados del flujo, *Norte* o *Sur*, según qué propulsor sigan los torbellinos (es decir, en el estado *S* los vórtices se desplazan con velocidad angular  $\Omega_z > 0$ , mientras que en el estado *N* lo harían con  $\Omega_z < 0$ ). Este desplazamiento no es constante, sino que presenta un movimiento intermitente parada-marcha.

Ambos estados son igual de probables al iniciar el sistema, mostrándose muy estables en el tiempo (con tiempos de vida del orden de la hora). Sin embargo, espontáneamente, el sistema puede cambiar de estado invirtiendo la velocidad  $\Omega_z$  de los vórtices, en lo que se denomina una *inversión*. Estas inversiones siguen una estadística aleatoria y muestran

una fuerte dependencia con el parámetro  $\Delta$ . De esta manera cualquier diferencia entre la frecuencia de los propulsores produce un cambio en la probabilidad de permanencia en un estado, favoreciendo aquel en el que  $\Omega_z$  sea paralela a la velocidad angular del propulsor más veloz. Se ha observado también que diferencias mayores del 0.7% hacen que el fenómeno de las inversiones desaparezca, quedando el sistema anclado al estado dominante.

En todo el rango de  $Re$  y  $\Delta$  explorado no ha sido observado ningún estado en el que  $\Omega_z = 0$ . Si se identifica la velocidad de desplazamiento del vórtice con la velocidad azimutal en el punto  $r = R_{prop}$ ,  $z = 0$ , se observa que esta velocidad es siempre distinta de cero para cualquier valor de  $\Delta$ . Por otro lado, la velocidad del vórtice disminuye conforme disminuye el  $Re$  (figura 3.2), pudiendo extrapolar que para  $Re = 1500$  el vórtice tendría velocidad nula. Esta posibilidad no ha sido verificada debido a las limitaciones en el sistema experimental, que establecen una cota inferior al  $Re$  de  $1.7 \cdot 10^3$ . Es de esperar, por tanto, que el sistema sufra una bifurcación supercrítica en  $Re \sim 1.5 \cdot 10^3$  en la que la solución  $V_{vort} = 0$  se vuelve inestable, apareciendo dos posibles soluciones estables con valores opuestos.

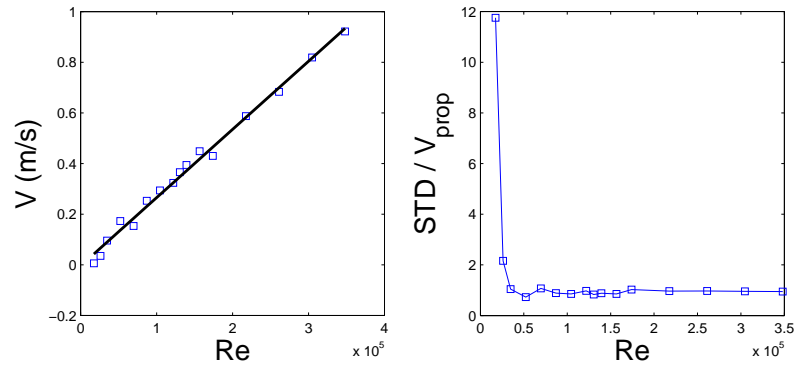


Figura 3.2: **(a)** Velocidad azimutal media del vórtice frente al  $Re$  para el propulsor  $P30$ . Las velocidades se representan en valor absoluto para abarcar los dos estados,  $N$  y  $S$ . La ecuación de ajuste lineal es  $V_{vort} = 2.69 \cdot 10^{-6} \cdot Re - 4.01 \cdot 10^{-3}$ , con  $r^2 = 0.996$ . La regresión predice una velocidad nula en  $Re = 1491$ . **(b)** Tasa de turbulencia en el ecuador.

### 3.1 Flujo medio

Se define el campo medio de velocidades, obtenido mediante LDA en el plano  $\theta = 0$  como

$$\vec{V} = (V_r, V_\theta, V_z) = \langle \vec{v} \rangle \quad (3.1)$$

entendiendo el valor medio como un promedio en el conjunto de los registros,

$$V(\vec{r}) = \langle v(\vec{r}, t) \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1, N} v(\vec{r}, t_i) \quad (3.2)$$

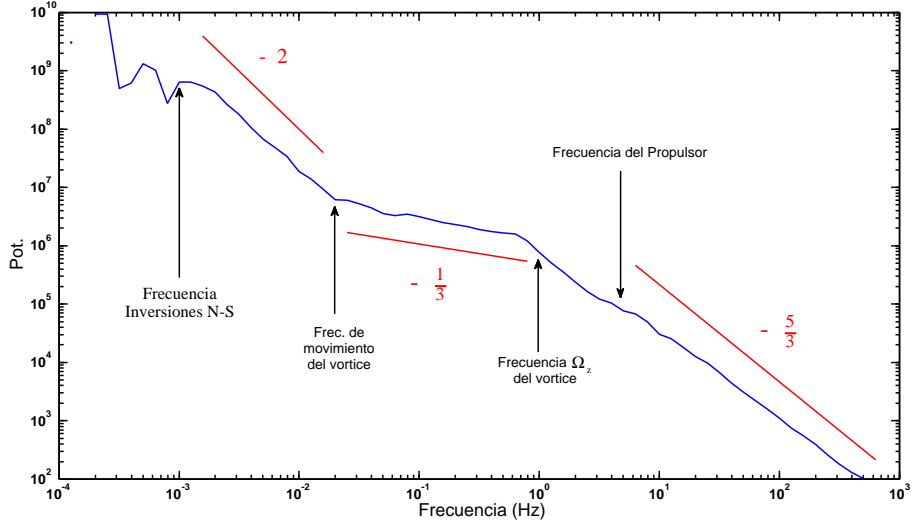


Figura 3.3: Espectro de potencias de la velocidad en el punto  $z = 0$ ,  $r = R_{prop}$ , con  $\Delta = 0$  y  $Re = 2.5 \cdot 10^5$  mediante LDA. En ella se observan las distintas escalas temporales del sistema.

Dado que la rotación de los propulsores es elevada (hasta 15.8 Hz), las velocidades medidas en el interior del cilindro llegan a valores del orden del  $m/s$ . El rango del número de Reynolds alcanzado pertenece al régimen de turbulencia completamente desarrollada,  $Re \in (10^3, 10^6)$ , por lo que las fluctuaciones en  $v$  son altas, del orden del valor medio. Por otro lado, la presencia de los vórtices ecuatoriales hace que el flujo instantáneo no sea axisimétrico, además de los efectos derivados de que estas estructuras se desplacen por el ecuador.

Todo esto provoca la aparición de diversas escalas temporales, que pueden ser analizadas mediante su espectro de potencias (figura 3.3). En una escala temporal rápida, con  $f > 1$  Hz, el sistema se ve afectado por las fluctuaciones turbulentas, mostrando un decaimiento en el espectro de  $-5/3$  tal como predice la teoría de Kolmogorov para turbulencia homogénea [113]. La influencia de la dinámica del vórtice (entre las que se encuentran el movimiento de rotación propio del torbellino  $\Omega_r$ , el movimiento en torno al eje del cilindro  $\Omega_z$ ) o el movimiento de parada y marcha del torbellino) se encuentra en una escala temporal media con  $f \in (10^{-2}, 10^0)$  Hz, mostrando un exponente de  $-1/3$ . También se observa una escala lenta relacionada con las inversiones entre estados  $N - S$ . Este rango de frecuencias muestra un exponente de  $-2$ , típico de una señal cuadrada.

En la figura 3.4a se presenta una medición que abarca la escala temporal lenta. Si se utilizara la serie completa, se obtendría una distribución de velocidades bimodal con valor medio nulo (fig. 3.4b, azul). Sin embargo, si el promedio se realiza en escalas menores se distingue entre los dos estados,  $N$  y  $S$ , con velocidades  $|V_N| = |V_S| \neq 0$  (fig. 3.4a, en rojo, separadas en la figura 3.4b en rojo y verde).

Si el promedio se realiza sobre escalas más rápidas (fig. 3.4c) dentro de cada estado

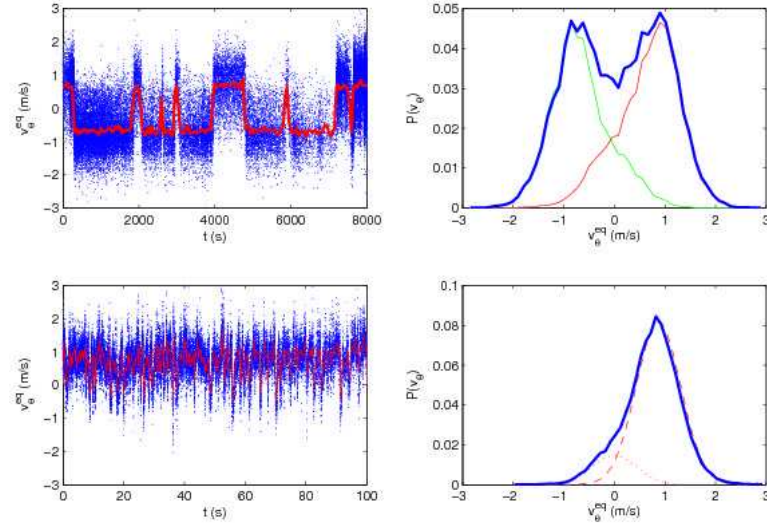


Figura 3.4: Registro e histogramas de la velocidad azimutal en  $z = 0$ ,  $r = R_{prop}$ , con  $\Delta = 0$  y  $Re = 2.5 \cdot 10^5$  mediante LDA. En rojo, la señal filtrada. Mientras que a escalas temporales grandes ( $t \sim 10^5$ )s el sistema presenta una velocidad ecuatorial nula, a escalas intermedias ( $t \sim 10^2$ )s la velocidad presenta un valor no nulo.

se observa la aparición de la escala relacionada con la presencia del vórtice. La velocidad recogida se divide en otros dos estados, uno centrado en cero y el otro con valor medio no nulo. Ambos estados rápidos presentan una distribución gaussiana, que unidas proporcionan la distribución de los estados Norte o Sur (fig. 3.4d).

Esta tesis se centra en las escalas lentas del flujo, por lo que el tiempo utilizado para calcular el campo de velocidades medias es de  $\Delta t = 100$ s. Esta escala permite promediar los efectos de la turbulencia y del vórtice, recuperando un flujo axisimétrico,

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}(r, z) \quad (3.3)$$

pero pudiendo distinguir entre los estados  $N$  y  $S$ .

Por otro lado se observa que para un fluido en turbulencia estacionaria las velocidades medias y las desviaciones estándar son proporcionales al  $Re$  [86], y por su definición, a la velocidad del propulsor  $V_{prop}$ . Este resultado se muestra en la tabla 3.1, en donde se recogen las velocidades experimentales y sus desviaciones estándar normalizadas con  $V_{prop}$ , promediadas en el volumen  $\mathbb{V}$ ,

$$\bar{U} = \frac{1}{V_{prop} \mathbb{V}} \int_{\mathbb{V}} |V| d\mathbb{V} \neq f(Re) \quad (3.4)$$

$Re(\times 10^5)$	$\bar{U}_z$	$\bar{U}_\theta$	$STD(\bar{U}_z)$	$STD(\bar{U}_\theta)$
0.9	1.23	2.47	1.60	1.85
2.6	1.30	2.54	1.73	1.78
3.5	1.29	2.61	1.71	1.74
4.4	1.30	2.57	1.71	1.80

Tabla 3.1: Velocidades y desviaciones estándar, promediadas en el volumen y adimensionalizadas con  $V_{prop}$ , para las componentes medidas. Estos valores son prácticamente independientes del  $Re$ .

### Características generales de los campos medios

El campo medio de velocidades que se desarrolla en esta configuración está esquematizado en la figura 3.5. El flujo dentro del cilindro se divide en dos rollos toroidales separados por un plano de cizalladura, cada uno girando con el sentido correspondiente al propulsor más cercano. Dentro de cada rollo, el flujo es absorbido por el eje hacia los propulsores, de forma similar al bombeo de Ekman. Al llegar a las palas es centrifugado hacia las paredes, y llevadas de nuevo hasta el plano de cizalladura, donde cierran la circulación.

El flujo se considera axisimétrico ya que el tiempo de medición es superior a la escala temporal de cualquier efecto que rompa la axisimetría (como, por ejemplo, vórtices u ondas viajeras). En el caso de contrarrotación exacta se esperaba otra simetría en la que la geometría del sistema no se ve alterada bajo una rotación  $R_\pi$ , es decir, una rotación de  $\pi$  radianes en torno a cualquier diámetro ecuatorial ( $\theta = \theta_0, z = 0$ ). Si esta última simetría se aplicase al campo de velocidades se obtendría que

$$\vec{V} = R_\pi [\vec{V}] \iff \{V_r, V_\theta, V_z\} |_{r, \theta_0 + \theta, z} = \{V_r, -V_\theta, -V_z\} |_{r, \theta_0 - \theta, -z} \quad (3.5)$$

Considerando las condiciones 3.3 y 3.5, se deduce que en el ecuador del cilindro las componentes axial y azimutal deberían anularse:

$$V_\theta(z=0) = V_z(z=0) = 0 \quad \forall r, \theta \quad (3.6)$$

Esta simetría se observa a  $Re$  altos en trabajos de otros grupos, si acaso con ligeras desviaciones [59]. Nuestro estudio, sin embargo, muestra una ruptura importante en la simetría  $R_\pi$  que hasta ahora no había sido descrita. En otros estudios [88, 114, 115] se han encontrado flujos asimétricos a  $Re$  bajos, donde es de esperar que la turbulencia restaure las simetrías al aumentar el  $Re$ .

En la figura 3.6a-b se representan los resultados de las componentes azimutal y axial obtenidas experimentalmente, sin ningún postprocesado. En ella se observa cómo la capa de cizalla entre los rollos no se encuentra en la posición  $z = 0$  sino desplazada hacia el propulsor  $N$ . Este efecto se acentúa al disminuir el radio, haciendo que el rollo norte sea menor que el sur.



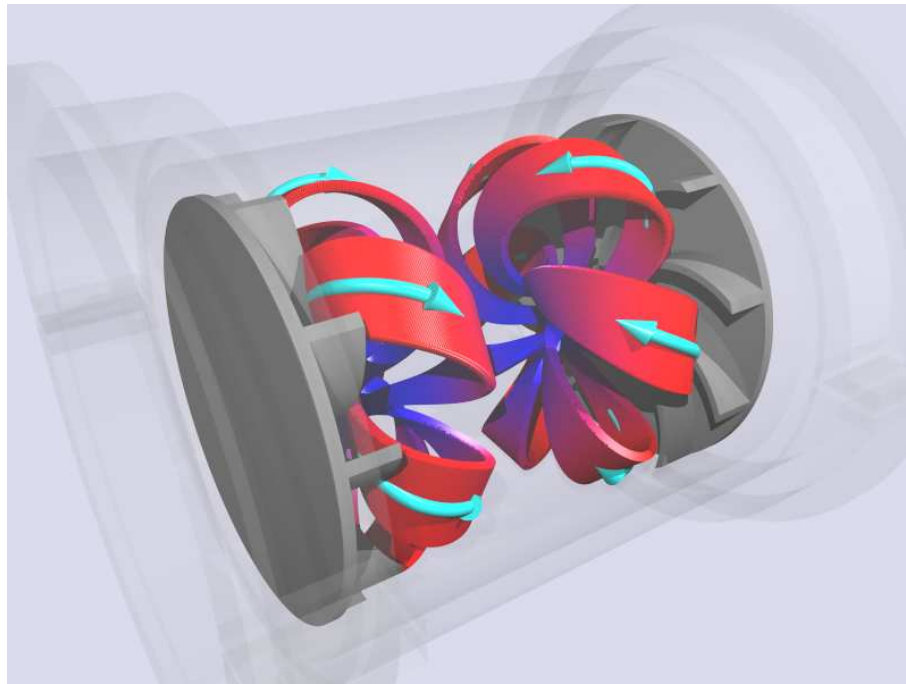


Figura 3.5: Esquema del campo medio de velocidades para un flujo de von Kármán. El flujo se divide en dos rollos, siguiendo cada uno al propulsor más cercano. Dentro de cada rollo los elementos de fluido siguen trayectorias helicoidales alrededor de líneas  $r = \text{cte}$ .

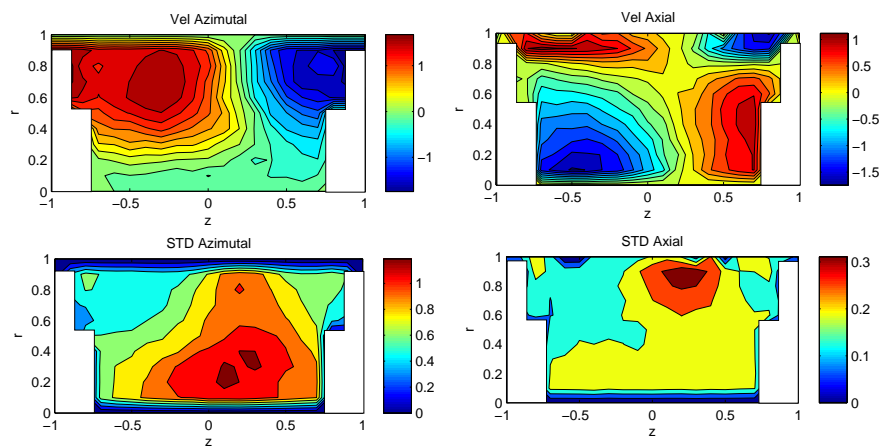


Figura 3.6: **(arriba)** Velocidades medias azimutal y axial utilizando los propulsores  $P20$  a  $Re = 3.5 \cdot 10^5$ . Aunque la geometría básica se mantiene, el campo obtenido en nuestra configuración presenta una evidente ruptura en la simetría alrededor del ecuador, en  $z = 0$ . **(abajo)** Desviaciones estándar. La parte en blanco corresponden a las zonas no accesibles entre las palas de los propulsores.

La asimetría también se ve claramente reflejada en las desviaciones estándar de las medidas, como muestran las figuras 3.6c-d. Mientras que en el caso simétrico las zonas con máxima dispersión se encuentran centradas en  $z = 0$  [96], en el campo asimétrico son desviadas hacia  $z > 0$ .

Una vez calculada la componente  $V_r$  a partir de las componentes experimentales, se obtienen los campos de velocidades de la figura 3.7. En ella se presentan los dos flujos medios posibles  $\vec{V}_N$  y  $\vec{V}_S$ , para el propulsor  $P20$ .

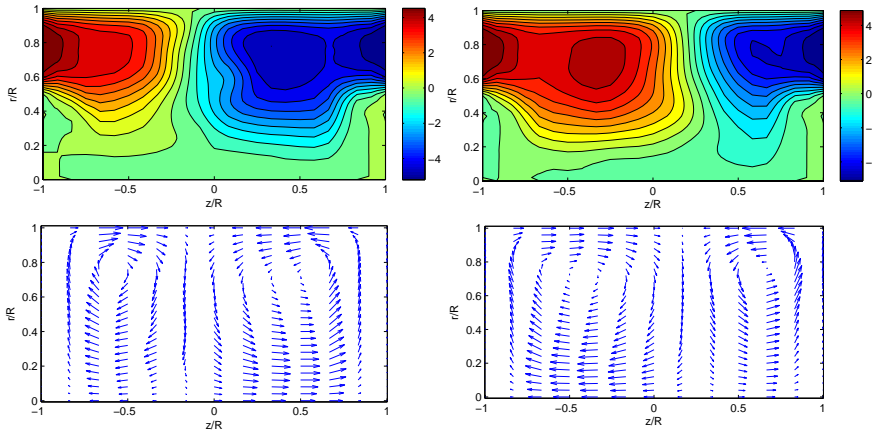


Figura 3.7: Componente toroidal (arriba) y poloidal (abajo) para un campo asimétrico en estado *Nor* (izq.) ( $Re = 2.6 \cdot 10^5$ ), y *Sur* (der.) ( $Re = 3.5 \cdot 10^5$ ).

El motivo por el que esta asimetría no se ha descrito en otros experimentos puede deberse a varias razones. En algunos casos ha sido impuesta en el procesado de los datos, eliminando la parte asimétrica [87]. En otros, dado que la capa de cizalladura es muy turbulenta, la presencia de pantallas o anillos internos en la zona ecuatorial [75, 112] podrían favorecer que la frontera entre ambos rollos se encuentre en  $z = 0$ . Otra posibilidad, discutida más adelante, es que los estados  $N$  y  $S$  sean menos estables que en nuestro caso (entendiendo por estabilidad el que el sistema permanezca más tiempo sin inversiones). Si esto ocurriese, durante la medición se producirían saltos entre ambos estados con un periodo menor que el tiempo de medición, resultando en un campo promediado sobre los dos estados. La velocidad en el ecuador sería nula aunque con una distribución bimodal, como la observada en [91]. En nuestro caso, si bien el tiempo en el que el sistema permanece en un estado es muy superior al tiempo de medición en un punto, no es posible asegurar que durante la medición de un campo de velocidades (que se prolonga durante varias horas) el sistema permanezca en un único estado. Para garantizar esta condición se introdujo una mínima diferencia en la velocidad de los propulsores. Esta asimetría, la menor que permite la resolución manual, no modifica notablemente la geometría del campo de velocidades, pero sí afecta a la probabilidad de que el sistema permanezca en un estado, como se explicará en la sección 3.4.1.

En la tabla 3.2 se muestran las velocidades medias, promediadas en el volumen, de los

Propulsor	Pol		Tor		PT	
	$\bar{V}$	$V_{max}$	$\bar{V}$	$V_{max}$	$PT$	$PT_{max}$
P20	0.49	1.17	0.64	1.36	0.76	0.86
P30	0.50	1.31	0.70	1.35	0.71	0.97

Tabla 3.2: Velocidades medias y máximas en el volumen (en m/s) y ratio de las componentes poloidal y toroidal para los propulsores  $P20$  y  $P30$ , a  $Re = 2.6 \cdot 10^5$ .

campos toroidales y poloidales para dos propulsores distintos,  $P20$  y  $P30$ .

$$\bar{V}_{Pol} = \frac{1}{\mathbb{V}} \int_{\mathbb{V}} \sqrt{V_r^2 + V_z^2} d\mathbb{V} \quad (3.7)$$

$$\bar{V}_{Tor} = \frac{1}{\mathbb{V}} \int_{\mathbb{V}} |V_{\theta}| d\mathbb{V} \quad (3.8)$$

Asimismo se muestran las velocidades máximas y el ratio entre componentes, denominado relación Poloidal-Toroidal (o  $PT$ )<sup>1</sup>. En esta tabla se observa cómo el efecto de aumentar el radio de curvatura (es decir, aumentar  $\beta$ ) produce tanto un incremento en la eficiencia (mayor velocidad transmitida) como un aumento de la componente toroidal, tal como se ha reportado anteriormente [59, 87].

### Caracterización de la asimetría de $\vec{V}$

Para caracterizar la asimetría de un campo de velocidades se pueden utilizar variables locales, tales como la posición de la frontera entre los rollos o la velocidad del fluido en el ecuador (mediciones tratadas en las secciones 3.2 y 3.3). Esta asimetría también se puede medir utilizando una descripción global que no solo abarque las desviaciones en la frontera, sino también otras características como posibles diferencias en la localización del punto de estancamiento en el plano poloidal, o el punto de máxima velocidad azimutal.

Para ello se descompone el campo asimétrico ( $\vec{V}_N$  o  $\vec{V}_S$ ) en suma de dos campos, uno simétrico  $\vec{V}_{sim}$  y otro antisimétrico  $\vec{V}_{dif}$ :

$$\vec{V}_N = \vec{V}_{sim} + \vec{V}_{dif} \quad (3.9)$$

$$\vec{V}_{sim} = \frac{1}{2} (\vec{V}_N + \vec{V}_S) \quad (3.10)$$

$$\vec{V}_{dif} = \frac{1}{2} (\vec{V}_N - \vec{V}_S) \quad (3.11)$$

En la figura 3.8 se representa el módulo de los campos  $\vec{V}_{sim}$  y  $\vec{V}_{dif}$  para los propulsores  $P20$  y  $P30$ . Topológicamente, los resultados son muy similares; en concreto el campo  $\vec{V}_{dif}$  muestra que la asimetría de  $\vec{V}_N$  se concentra en torno al ecuador, a  $r = 0.4$  y  $r = 0.8$ . Sin embargo, los valores alcanzados en el segundo caso (propulsor  $P30$ ) son más altos.

<sup>1</sup>El interés de este ratio se justifica con la dependencia exhibida por el comportamiento magnetohidrodinámico, tal como se mostrará en los capítulos 4 y 5.

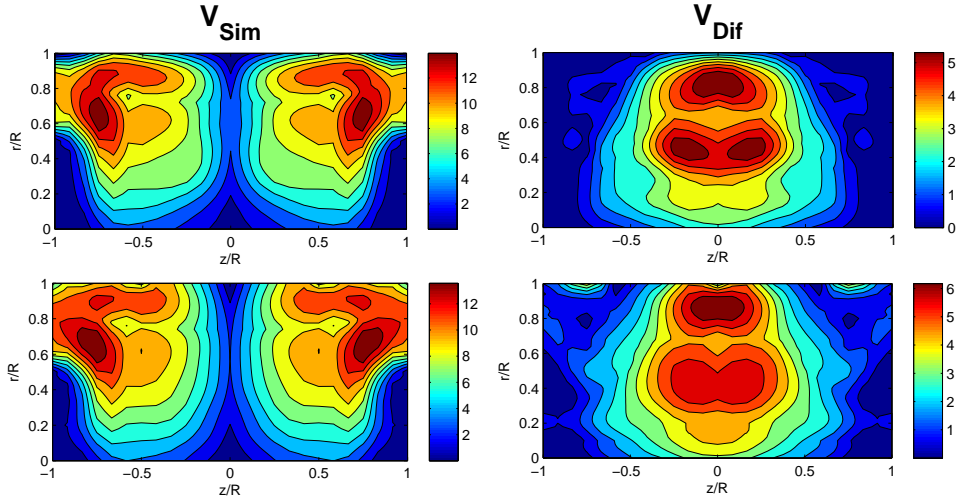


Figura 3.8: Módulo de los campo (izq.)  $\vec{V}_{sim}$  y (der.)  $\vec{V}_{dif}$  para los campos obtenidos a  $Re = 2.6 \cdot 10^5$  con propulsores (arriba)  $P20$  y (abajo)  $P30$ .

Si se calcula la energía cinética de cada campo,

$$E_c = \frac{1}{2} \rho \int_{\mathbb{V}} |\vec{V}|^2 d\mathbb{V} = \pi \rho \int_{r=0}^{r=R} r dr \int_{z=-H/2}^{z=H/2} dz |\vec{V}|^2 \quad (3.12)$$

se obtiene una descripción global del peso de la asimetría. Esta información se encuentra recogida en la tabla 3.3, donde se muestra las energías relativas para los propulsores  $P20$  y  $P30$ .

Propulsor	$E_N$	$E_{sim}/E_N$	$E_{dif}/E_N$	$E_{dif}/E_{sim}$
P20	2.74	0.905	0.095	0.105
P30	2.95	0.868	0.136	0.156

Tabla 3.3: Energía relativa de los campos  $\vec{V}_N$ ,  $\vec{V}_{sim}$  y  $\vec{V}_{dif}$ , definidos en ec. 3.10 y 3.11, para los propulsores  $P20$  y  $P30$ , a  $Re = 2.6 \cdot 10^5$ .

El hecho de que el campo producido por el propulsor  $P30$  sea más asimétrico que el correspondiente al propulsor  $P20$  está relacionado con la forma de las palas [87]. El aumento de  $\beta$  produce un crecimiento en la componente poloidal, mientras que la toroidal apenas se ve afectada. Esto producirá una mayor inclinación en las líneas de flujo en la superficie  $r = ct$  (figura 3.9), favoreciendo la aparición de los torbellinos, y por lo tanto de la asimetría.

Si bien el cálculo de los campos  $\vec{V}_{sim}$  y  $\vec{V}_{dif}$  proporcionan información global acerca de la asimetría, esta información resulta muy costosa de obtener ya que el tiempo necesario para medir un campo es de varias horas. Por otro lado, la figura 3.8 muestra que la región de mayor asimetría proviene de la zona de cizalladura entre los dos rollos. Cabe pregun-

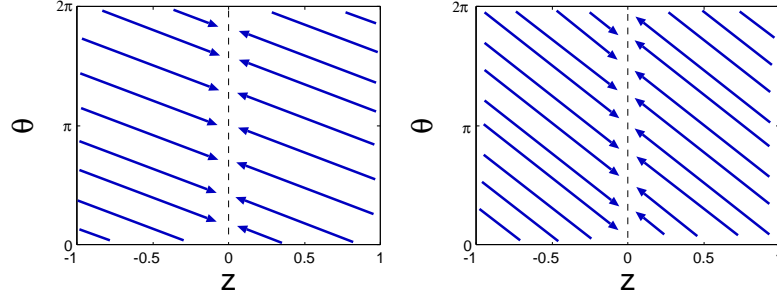


Figura 3.9: Esquema de las componentes  $V_\theta$ ,  $V_z$  para los propulsores (izq.)  $P20$  y (der.)  $P30$  para  $r \sim R_{prop}$ . Al tener  $P30$  mayor curvatura en las palas, el ratio  $V_\theta/V_z$  aumenta, provocando que la cizalla entre los dos rollos se incremente con respecto al propulsor  $P20$ .

tarse entonces el utilizar una variable local que describa con mayor precisión la asimetría, y cuyo tiempo de obtención sea menor. De esta forma, de entre las posibles variables se han elegido dos de ellas. La primera, *posición de la frontera* (sección 3.2) es una variable geométrica, mientras que la segunda, *velocidad ecuatorial* (sección 3.3) describe características cinemáticas del campo.

## 3.2 Posición de la frontera

La primera variable para analizar localmente la asimetría de los estados es la posición de la frontera  $z_0$ , definida como la posición  $z$  en la que la velocidad azimutal media es nula.

$$V_\theta(r = R_{prop}, z_0) = 0 \quad (3.13)$$

Para caracterizar  $z_0$  se midió la componente  $v_\theta$  de forma continua, desplazando el cabezal de la LDA a lo largo del eje  $z$  y manteniendo  $r = R_{prop}$ . La ventaja de esta distancia radial es que al variar la posición del desplazador entre ambos extremos la medición recoge la velocidad de la periferia de los propulsores  $N$  y  $S$ , permitiendo una mejor caracterización del sistema. La velocidad del desplazador se eligió de tal manera que los 20 cm de altura del cilindro fueran barridos en 200 s, es decir, a una velocidad de 1 mm/s. Dicho tiempo es fruto del compromiso entre obtener una buena resolución y garantizar que el sistema permanezca en un único estado durante la medida.

Un ejemplo se encuentra en la figura 3.10. Debido a que la velocidad registrada es muy turbulenta, es necesario eliminar las fluctuaciones de la señal utilizando un filtro de altas frecuencias. Con una señal más suave se obtiene el valor de  $z_0$ , y con éste, la celda dominante. De esta manera, en la figura 3.10a el sistema se encontraría en el estado  $S$  ( $z_0 > 0$ ) mientras que en la figura 3.10b estaría en el estado  $N$  ( $z_0 < 0$ ).

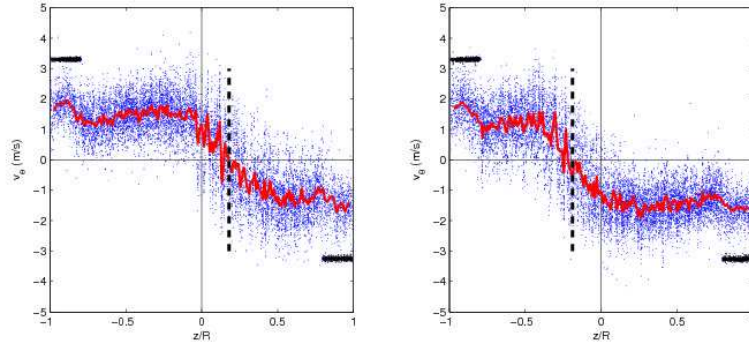


Figura 3.10: Medición de la velocidad azimutal a lo largo del eje  $r = R_{prop}$  con  $Re = 6.3 \cdot 10^5$ ,  $\Delta = 0$  para **(a)** Estado  $S$  **(b)** Estado  $N$ . Las líneas rojas representan la señal filtrada. El valor de  $z_0$  (--) queda definido como el valor medio de los puntos de corte de la señal filtrada con el eje  $V_\theta = 0$ . Los registros constantes a ambos extremos de la gráfica representan la velocidad de las propulsores.

El problema de esta técnica es que la posición de la frontera es muy difusa. Aunque el estado es visualmente identificable, para caracterizarlo se necesita un análisis que, según los parámetros utilizados en el filtro, puede ocasionar un valor de  $z_0$  distinto (aunque no modifique el estado resultante). Además, esta técnica no permite estudiar la evolución temporal de la frontera debido al tiempo necesario para barrer la generatriz.

### 3.2.1 Dependencia con $\Delta$

Como se ha comentado anteriormente, en la situación de contrarrotación exacta el sistema presenta una biestabilidad caracterizada por dos posibles valores para la frontera entre las dos celdas. El siguiente paso es introducir una asimetría en el sistema, mediante un valor no nulo de  $\Delta$ .

En la figura 3.11 se representa la posición de la frontera para un pequeño rango de  $\Delta$  a  $Re = 3.5 \cdot 10^5$ . Dicho rango equivale a variaciones entre la frecuencia de rotación de los propulsores de hasta un 10% con una resolución de  $\Delta f = 0.03$  Hz. Como se observa en la figura, la biestabilidad solo aparece en el punto  $\Delta = 0$ , y basta una mínima diferencia entre los propulsores para producir un cambio de estado.

En la figura 3.12 se amplían los resultados anteriores mostrando un rango mayor de  $\Delta$ . En ella se observa cómo  $z_0$  varía de forma continua salvo en  $\Delta = 0$ , donde la discontinuidad impide observar un estado con  $z_0 = 0$ . Para valores de  $|\Delta| = 0.33$  la frontera llega a la zona ocupada por los propulsores ( $|z| \geq 0.8$ ), considerándose entonces que el sistema se reduce a un único rollo. Los perfiles de  $v_\theta$  obtenidos para distintos valores de  $\Delta$  se encuentran en la fig. 3.13.

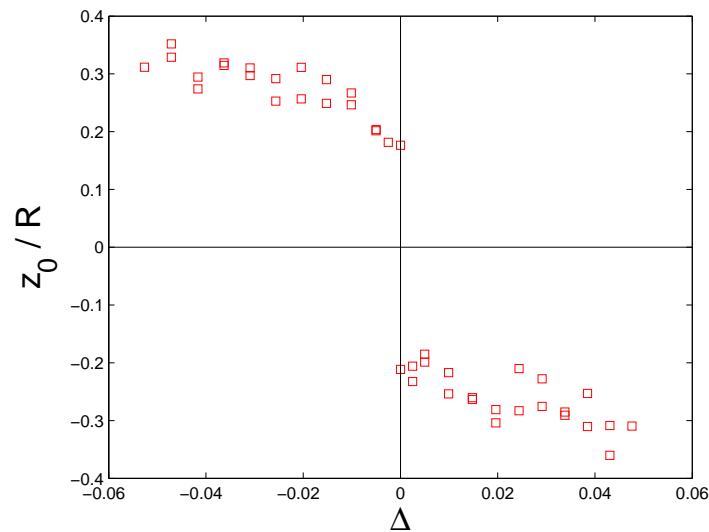


Figura 3.11: Posición de la frontera entre las dos celdas frente a  $\Delta$  para  $Re = 3.5 \cdot 10^5$  con los propulsores *P30*. No existe ningún valor para el cual la frontera se encuentre en  $z = 0$ .

Ravelet et al. [116] mostraron cómo en el caso de contrarrotación negativa (esto es, impulsando el fluido con la parte cóncava del propulsor) el sistema mostraba tres estados. Un estado simétrico, con dos rollos iguales, estable en contrarrotación exacta. Al hacer  $\Delta \neq 0$  el estado simétrico se vuelve inestable, desembocando después de un tiempo característico en un estado asimétrico en el que el flujo se reduce a un único rollo girando en rotación sólida. Una vez completada la transición, el sistema presentaba un ciclo de histéresis entre los dos posibles estados asimétricos, dentro del rango  $|\Delta| < 0.16$ . Solamente se recuperan los dos rollos cuando se reinicia de nuevo el sistema, a partir de una situación de reposo. En nuestra celda, por contra, dicho estado simétrico no existe, y los estados asimétricos presentan dos rollos con un tamaño dependiente de  $\Delta$ .

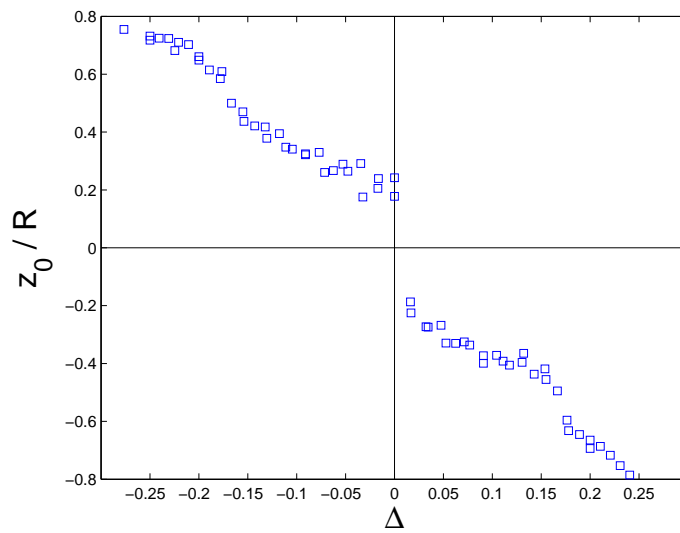


Figura 3.12: Posición de la frontera entre las dos celdas frente a  $\Delta$  a  $Re = 2.6 \cdot 10^5$ , para un mayor rango de  $\Delta$ .

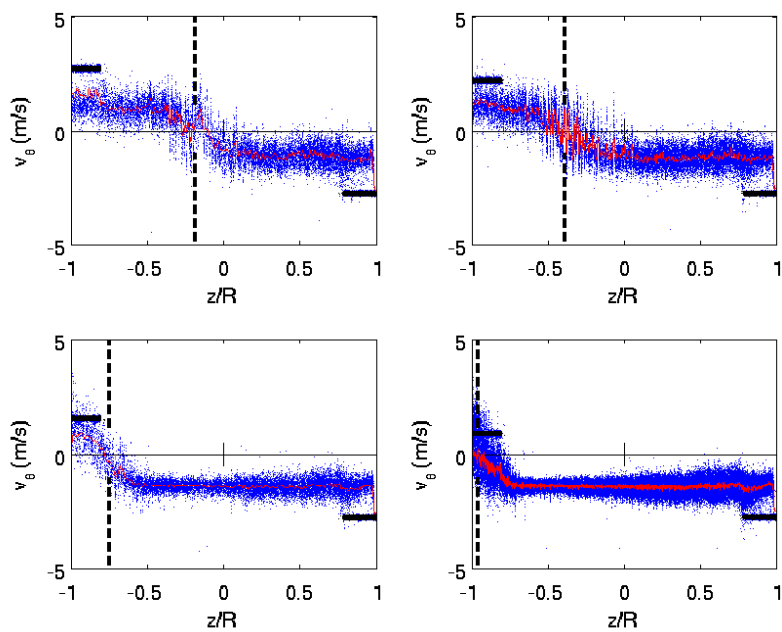


Figura 3.13: Perfil de  $v_\theta$  en  $r = R_{prop}$  a  $Re = 1.7 \cdot 10^5$ , para  $\Delta = 0, 0.11, 0.28$  y  $0.5$ . A medida que aumenta la asimetría, la zona de la frontera se desplaza hacia el propulsor no dominante.



### 3.2.2 Dependencia con $Re$

En la sección 3.1 se mostraba cómo el campo de velocidades mantiene sus características dentro del rango del  $Re$  estudiado. El resultado se repite al estudiar la dependencia de  $z_0$  con  $\Delta$  para varios  $Re$ , tal como muestra la figura 3.14.

Este comportamiento confirma que en el régimen del  $Re$  en el que se trabaja el flujo presenta una topología independiente de este parámetro.

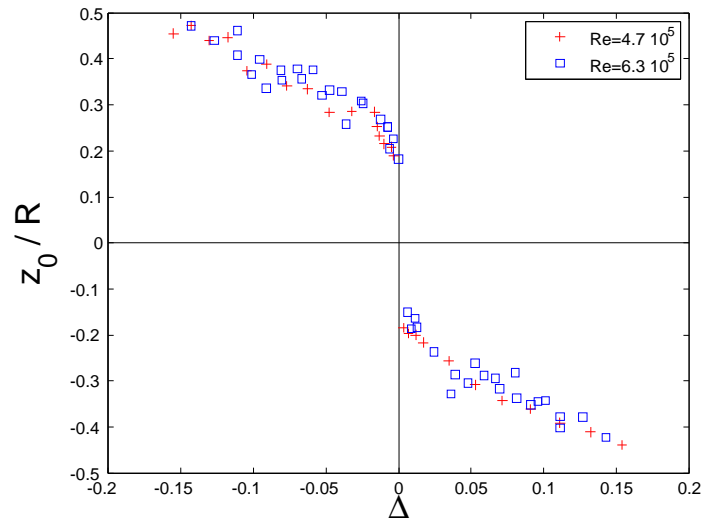


Figura 3.14: Posición de la frontera entre los dos rollos frente a  $\Delta$ , a distintos  $Re$  utilizando el propulsor  $P20$ . Se observa como  $z_0$  es independiente del  $Re$ .

### 3.2.3 Dependencia con los propulsores

Por último, en la figura 3.15 se muestra la posición de la frontera medida para los propulsores  $P20$  y  $P30$ , a  $Re = 2.6 \cdot 10^5$ . Como se puede observar no existe una diferencia cualitativa en los resultados con ambos propulsores, aunque los resultados obtenidos de los campos  $\vec{V}_{Sim}$  y  $\vec{V}_{Dif}$  sí que mostraban una diferencia apreciable en la intensidad de la parte asimétrica.

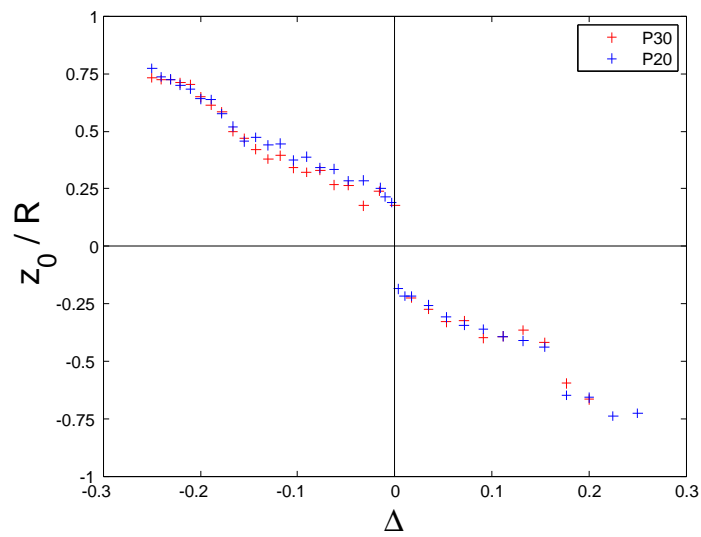


Figura 3.15: Posición de la frontera entre las dos celdas frente a  $\Delta$  a  $Re = 2.61 \cdot 10^5$ , para los propulsores P20 y P30.

### 3.3 Velocidad ecuatorial

La segunda variable utilizada para caracterizar localmente la asimetría es la velocidad azimutal media en un punto ecuatorial cercano a la pared,  $V_\theta^{eq}$ :

$$V_\theta^{eq} = V_\theta(r = R_{prop}, z = 0) \quad (3.14)$$

De nuevo se encuentra una medida con grandes fluctuaciones, llegando a tasas de turbulencia del 80 % (fig 3.16) aunque con medias muy estables y proporcionales al  $Re$  (como se vio en la figura 3.2). El estado queda identificado con el signo de  $V_\theta^{eq}$ , con lo que en la figura 3.16a el sistema se encuentra en el estado  $N$  ( $V_\theta^{eq} < 0$ ) mientras que en la figura 3.16b el estado ocupado es el  $S$  ( $V_\theta^{eq} > 0$ ). Al igual que la posición de la frontera,  $V_\theta^{eq}$  per-

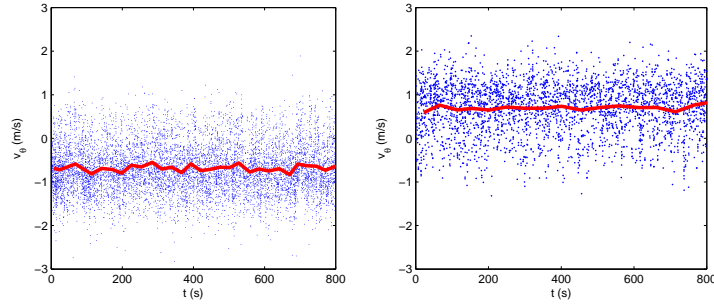


Figura 3.16: Medición de  $v_\theta$  en  $r = R_{prop}$ ,  $z = 0$ , con  $Re = 3 \cdot 10^5$ ,  $\Delta = 0$  (a) Estado Norte, con  $V_\theta^{eq} = -0.67$  m/s (b) Estado Sur, con  $V_\theta^{eq} = -0.70$  m/s. En rojo, la señal filtrada.

mite determinar el estado visualmente, pero cuenta con la ventaja de que la caracterización se hace de forma continua. Esto permitirá no solo caracterizar el estado, sino estudiar la evolución dinámica del sistema.

#### 3.3.1 Dependencia de $V_\theta^{eq}$ con $\Delta$

La fuerte dependencia del estado con  $\Delta$  también se refleja en esta variable. En la figura 3.17 se muestra  $V_\theta^{eq}$  normalizada con la velocidad del propulsor dominante, frente a  $\Delta$ , promediada para tiempos cortos. En ella se observan dos regiones; para  $|\Delta| \lesssim 0.2$  en donde la velocidad normalizada fluctúa entre medidas, y una segunda zona con  $|\Delta| \gtrsim 0.2$  en donde la velocidad normalizada se vuelve independiente de  $\Delta$ . Este comportamiento se debe a la presencia del vórtice en el punto de medición. Tal como mostraba la figura 3.13, el efecto de aumentar  $|\Delta|$  es el de desplazar la frontera y con ella la posición del vórtice, responsable de las fluctuaciones que se observan en el valor medio para  $|\Delta|$  pequeños. Para valores de  $|\Delta|$  grandes la frontera se aleja suficientemente del ecuador como para que las fluctuaciones no afecten al punto de medición. Éste se encuentra inmerso en el rollo dominante, en donde la velocidad media es más estable y proporcional al propulsor correspondiente.

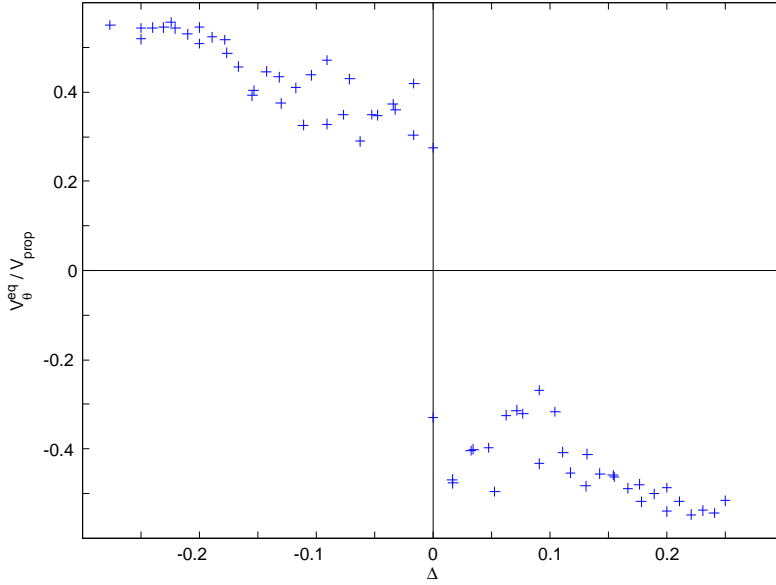


Figura 3.17: Medición de  $V_{\theta}^{eq}$  frente a  $\Delta$ , con  $Re = 2.6 \cdot 10^5$ . La velocidad se representa normalizada con la velocidad del propulsor dominante.

### 3.3.2 Distribución de velocidades en $V_{\theta}^{eq}$

Cuando el flujo se encuentra en turbulencia homogénea la velocidad local presenta fluctuaciones altas, con una estadística gaussiana [113]. En nuestro caso, dentro de cada estado la velocidad  $V_{\theta}^{eq}$  está bien identificada, proporcional al  $Re$ . Sin embargo cuando se mide la velocidad instantánea  $v_{\theta}^{eq}$  con una tasa de adquisición alta (fig. 3.18), se observa cómo, además de las fluctuaciones turbulentas, existe una escala rápida en la que la velocidad media (promediada en esa escala rápida) evoluciona entre una velocidad nula y otra no nula (positiva o negativa, dependiendo del estado del sistema).

Cuando se considera el histograma de la velocidad normalizada  $u_{\theta} = v_{\theta}^{eq}/V_{prop}$  dentro de un estado se observa que no sigue una distribución normal, sino que es el resultado de la superposición de dos gaussianas (fig. 3.19a), cada una centrada en el valor medio de esos estados rápidos.

Matemáticamente, la distribución de velocidades normalizadas en el estado *Norte* ( $p_N$ ) o la distribución del estado *Sur* ( $p_S$ ) se puede describir como:

$$p_{N,S}(u_{\theta}) = G_0 + G_{N,S} = \frac{A_0}{\sqrt{2\pi}\sigma_0} \exp\left(-\frac{u_{\theta}^2}{2\sigma_0^2}\right) + \frac{A_{N,S}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{N,S}} \exp\left(-\frac{(u_{\theta} - u_{N,S})^2}{2\sigma_{N,S}^2}\right) \quad (3.15)$$

en donde  $A_0 + A_{N,S} = 1$ .

Ambas distribuciones  $p_N$  y  $p_S$  comparten las mismas propiedades: la gaussiana ( $G_0$ ) tiene valor medio nulo, mientras que las gaussianas  $G_{N,S}$  están centradas alrededor de un valor

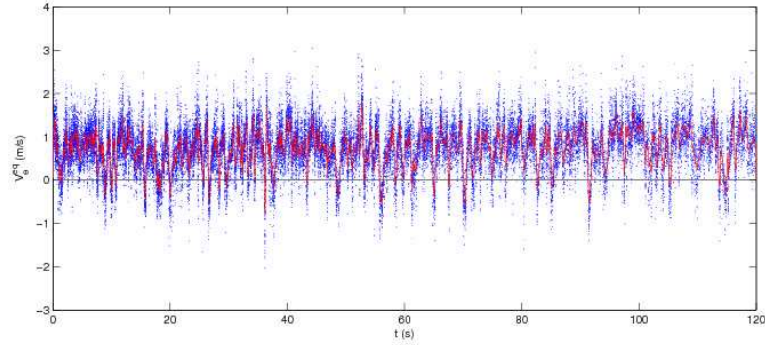


Figura 3.18: Evolución de la velocidad ecuatorial, en donde se observa cambios en la velocidad media en escalas de tiempo rápidas.

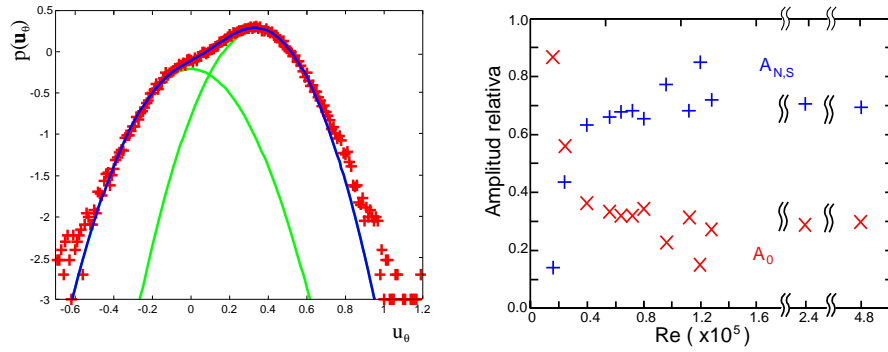


Figura 3.19: (a) (+) Histograma de la velocidad  $u_{\theta}^{eq}$  con  $Re = 4 \cdot 10^5$ ,  $\Delta = 0$  en el estado  $S$ . (-) Ajuste de la distribución de velocidades a partir de dos gaussianas  $G_0$  y  $G_{N,S}$  (-), según ec.3.15. La separación en las colas puede ser debido al sesgo en la medida de la velocidad con LDA. (b) Amplitudes de las gaussianas  $G_0$  y  $G_{N,S}$  frente al  $Re$ . Al crecer el  $Re$  la gaussiana asimétrica cobra importancia con respecto a la centrada en 0, aunque ésta no desaparece por completo.

finito ( $|u_N| = |u_S| = 0.34$ ). Este valor permanece prácticamente constante, aumentando ligeramente con el  $Re$ . Las amplitudes  $A_0$  y  $A_{N,S}$  tienen una dependencia más compleja con el  $Re$ , representada en la figura 3.19b. En ella se observa como la gaussiana central domina para  $Re$  bajo mientras que la gaussiana asimétrica tiene una amplitud casi nula. Si se disminuyese el  $Re$  hasta el punto de bifurcación las gaussianas asimétricas desaparecerían, con lo que  $V_{\theta}^{eq}$  sería nula y el campo de velocidades restauraría la simetría  $R_{\pi}$ .

Al aumentar el  $Re$  las gaussianas  $N, S$  cobran importancia mientras que  $A_0$  disminuye. Esto produce que el campo de velocidades rompa la simetría al tener  $V_{\theta}^{eq} \neq 0$ . Sin embargo para  $Re$  altos las amplitudes parecen alcanzar un valor asintótico que en el caso de  $A_0$  es no nula. Esto conlleva que la distribución de  $v_{\theta}^{eq}$  nunca se pueda representar solamente con

las gaussianas  $G_{N,S}$ .

### Dependencia con $\Delta$

El efecto de introducir una disimetría en la velocidad de los propulsores sobre la distribución de  $v_\theta^{eq}$  es análogo al explicado en la sección 3.3.1. Para valores de  $|\Delta| \ll 1$  el vórtice en el ecuador mantiene una velocidad  $\Omega_z$  relacionada con la velocidad media de los propulsores. Si se invierte  $\Delta$  se produce un cambio de signo en  $\Omega_z$  y por lo tanto en el valor medio de  $V_\theta^{eq}$ , quedando el vórtice en las cercanías del ecuador. La distribución de velocidades intercambia las gaussianas  $G_N, G_S$ , pero las amplitudes y centros de las gaussianas permanecen constantes. Al aumentar  $|\Delta|$  la frontera se desplaza hacia el propulsor no dominante, y con ella la zona de máxima dispersión haciendo que la gaussiana  $G_0$  pierda peso frente a las gaussianas no centrales. Finalmente, para valores de  $|\Delta| \sim 0.2$  el ecuador se encuentra completamente inmerso en uno de los rollos, mostrando una distribución gaussiana con un valor medio proporcional a la velocidad del propulsor dominante tal como se mostraba en la figura 3.17.

## 3.4 Inversiones de estado

Los dos estados observados  $N$  y  $S$  presentan una dinámica estable, manteniéndose durante tiempos mucho mayores que el periodo de rotación del propulsor o del vórtice. Sin embargo el sistema puede espontáneamente cambiar de estado, en lo que se denomina una *inversión*. En la figura 3.20 se observa cómo registrando la evolución de  $v_\theta^{eq}$  se produce un desplazamiento en el rango de velocidades medidas. Aunque las fluctuaciones son grandes, el cambio en el valor medio es evidente. El tiempo de transición (del orden de 10 s) es mucho menor que el tiempo que el sistema se encuentra en cada estado (entre  $10^2$  y  $10^4$  s).

Para caracterizar la evolución del sistema es necesario utilizar la variable  $V_\theta^{eq}$  ya que su medición se puede realizar en modo continuo. En este caso se utilizó un tiempo de promedio del orden del tiempo de transición, de manera que el error cometido en la determinación de la inversión (del orden de segundos) es despreciable frente a los tiempos de permanencia.

$$V_\theta^{eq}(t) = \langle v_\theta^{eq} \rangle |_t^{t+t_{trans}} \quad (3.16)$$

Dado que las inversiones se producen de manera aleatoria, la dinámica del sistema se caracterizó utilizando la distribución de tiempos de escape, definida como la probabilidad de que pasado un tiempo  $t$  el sistema haya sufrido una inversión. Teóricamente en un sistema biestable con ruido la distribución sigue una ley exponencial en la forma

$$\rho(t) \sim e^{(-t/T_0)} \quad (3.17)$$

en donde  $T_0$  es el tiempo medio de residencia, relacionado con la amplitud del ruido y  $\rho(t)$  la probabilidad de que el sistema permanezca sin invertir su estado durante un tiempo  $t$  [117–120].

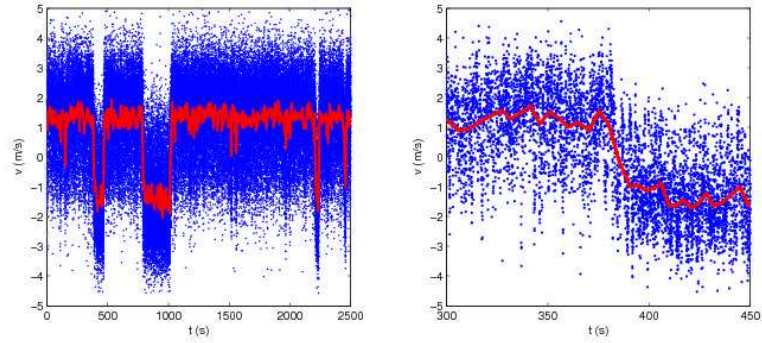


Figura 3.20: **(a)** Registro de la velocidad  $v_{\theta}^{eq}$  frente al tiempo para  $Re = 5.2 \cdot 10^5$ ,  $\Delta = 0$ . En rojo la velocidad media. El sistema sufre varias inversiones entre los estados  $S$  ( $V_{\theta}^{eq} > 0$ ) y  $N$  ( $V_{\theta}^{eq} < 0$ ). **(b)** Detalle de la inversión observada en  $t \sim 400$  s. El tiempo de transición ( $t_{trans} \sim 10$  s) es muy pequeño comparado con el tiempo medio de residencia en cada estado ( $T_{res} > 100$  s).

En la figura 3.21 se representan las inversiones del sistema (distinguiendo entre inversiones  $N \rightarrow S$  y  $S \rightarrow N$ ), ajustándose a una distribución exponencial. Ambos casos son mediciones con los propulsores P30 a  $\Delta = 0$  pero a distintos  $Re$ . Mientras que en el primer caso se observa que el sistema es simétrico, con  $T_{0,N} = T_{0,S}$ , el segundo caso muestra una preferencia por el estado  $S$  con tiempos de residencia que triplican el del estado  $N$ . Además en el primer caso las inversiones son más frecuentes, cuadruplicando las del segundo caso.

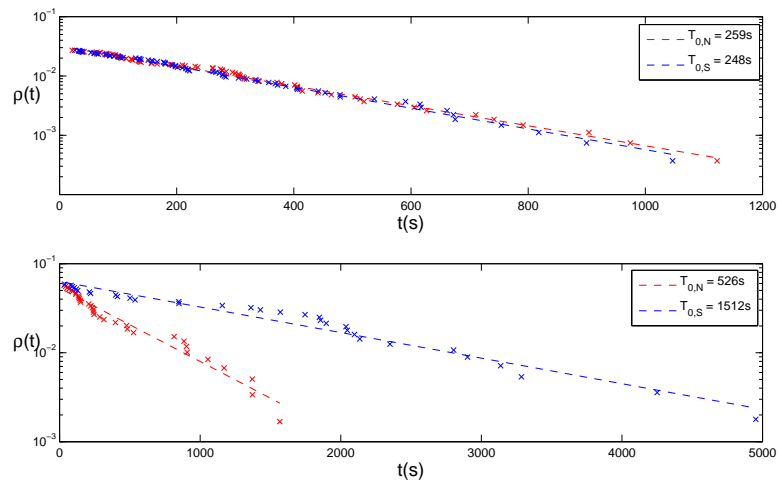


Figura 3.21: Distribución de los tiempos de escape experimentales y ajuste exponencial para los estados Norte ( $\times$ ) y Sur ( $\times$ ) **(a)**  $Re = 3.5 \cdot 10^5$  **(b)**  $Re = 2.6 \cdot 10^5$  para el propulsor P30. A pesar de que  $\Delta = 0$ , el sistema muestra una preferencia por el estado  $S$ , triplicando el tiempo medio de residencia entre uno y otro estado.

La razón de la preferencia del sistema por el estado  $S$  en la figura 3.21b es atribuida a alguna asimetría en el montaje experimental. Entre las posibles causas se encuentra el desarrollo de flujos secundarios entre los propulsores y las tapas del cilindro. Si los flujos en ambos extremos del cilindro no es simétrico (debido a diferencias en las distancias propulsor-tapa, o al intercambio de flujo con el exterior del cilindro) esto afectaría a la dinámica del sistema. Sin embargo, estas disimetrías no pueden ser responsables de la biestabilidad del sistema, sino tan solo de la predilección de un estado sobre otro.

Los motivos por los que el fenómeno de las inversiones es más frecuente en uno u otro caso serán objeto de investigación futura. La comprensión de este problema podría explicar la obtención de distribuciones bimodales de  $V_\theta^{eq}$  en otros experimentos en configuraciones similares [91]. En esos casos el tiempo medio de inversión sería menor que el tiempo de medida, lo que produciría una recuperación de la simetría  $R_\pi$ .

Como consecuencia del valor de  $T_0$ , para caracterizar la distribución de inversiones son necesarias medidas de muy larga duración ( $t_{med} > 10^4$  s) que permitan registrar un número suficiente de inversiones como para que la estadística sea representativa. Esto provoca varios problemas experimentales tales como calentamiento del agua o de los motores, o pérdidas en la densidad del sembrado debido a flujos salientes del cilindro.

### 3.4.1 Dependencia de $T_0$ con $\Delta$

Los resultados descritos al analizar la posición de la frontera (apartado 3.2.1) mostraban la biestabilidad del sistema en el caso de contrarrotación exacta. Dicha biestabilidad se perdía al introducir una mínima diferencia en la rotación de los propulsores, haciendo que la frontera entre los rollos se desplazase hacia el propulsor no dominante. Este tipo de análisis no permite la observación de inversiones al ser el tiempo de medición (de 200 s) mucho mayor que el tiempo de transición (unos 10 s).

Si se realiza una caracterización continua durante tiempos prolongados (caracterización que solo es posible utilizando  $V_\theta^{eq}$ ) la biestabilidad no solo se observa con  $\Delta = 0$ , sino que también cuando la asimetría entre los propulsores es pequeña. Sin embargo esta asimetría provoca que el tiempo de residencia en el estado desfavorecido disminuya drásticamente. Si para el caso  $\Delta = 0$  los tiempos medios de residencia son del mismo orden para los estados  $N$  y  $S$ , variar  $\Delta$  dentro del rango  $|\Delta| < 0.004$  (lo que equivale a una diferencia entre  $f_N$  y  $f_S$  menor del 1%) produce que el estado favorecido (aquel cuyo propulsor gire a mayor velocidad) aumente considerablemente su tiempo medio de residencia, mientras que el estado menos probable lo disminuya. Aumentar aún más la diferencia de rotación entre las palas hace que no se observen inversiones durante el tiempo de medición, permaneciendo el sistema en el estado dominante y perdiendo su biestabilidad. Este comportamiento provoca que a pesar de los largos tiempos de medición (mayores de  $10^4$  s), el número de inversiones registradas sea pequeño y por lo tanto no se pueda realizar una caracterización estadística del sistema adecuada. En los casos en los que no se observan inversiones se tomó el tiempo de medición y el tiempo típico de inversión (10 s) como tiempos de vida medio de los estados



dominante y no dominante, respectivamente.

En la figura 3.22 se muestra la dependencia del tiempo de escape medio para ambas distribuciones al variar  $\Delta$ , en distintas configuraciones. En las figuras (a,c) se utilizó el control manual de los variadores, que permite una resolución en la frecuencia de  $\Delta f = 0.03$  Hz (lo que equivale, aproximadamente, a una resolución en  $\Delta$  de 0.02), mientras que en en la figura (b) los variadores fueron controlados mediante un generador de funciones, permitiendo una mejora en la resolución sin afectar a la estabilidad. Como se puede observar, en el caso (c) (que se corresponde al caso asimétrico de la figura 3.21) la resolución manual resulta insuficiente para que el sistema recupere la simetría. Interpolando la curva, se necesitaría modificar  $\Delta$  en un valor de  $10^{-3}$ , o en términos de frecuencia, un  $\Delta f \sim 2 \cdot 10^{-3}$  Hz.

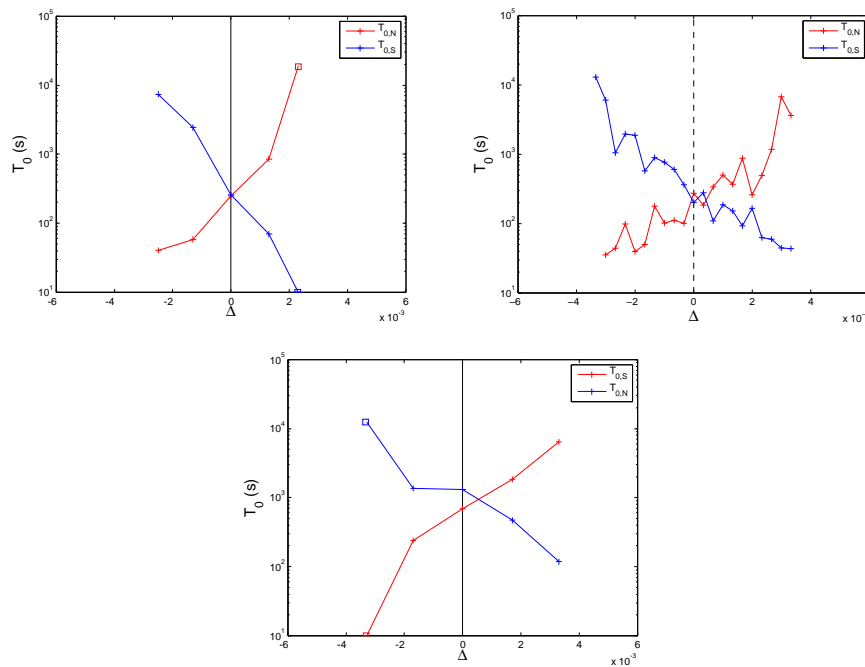


Figura 3.22: Tiempo de escape medio frente a  $\Delta$  para (a) propulsor  $P30$ ,  $Re = 3.5 \cdot 10^5$ , (b) propulsor  $P20$ ,  $Re = 2.6 \cdot 10^5$ , (c) propulsor  $P30$ ,  $Re = 2.6 \cdot 10^5$ . Los puntos ( $\square$ ) representan experimentos en los que no se observaron inversiones. En las figuras (a,c) se utilizó el control manual de los variadores mientras que en la figura (b) los variadores fueron controlados mediante un generador de funciones, permitiendo una resolución mayor en  $\Delta$ .

### 3.5 Modelización del sistema

Los histogramas de  $u_\theta$  tomados a distintas escalas temporales muestran que la velocidad fluctúa alrededor de los puntos  $[u_N, 0, u_S]$ , haciendo que el sistema alterne entre los estados  $G_0$  y  $G_{N,S}$  con una dinámica muy rápida (del orden del Hz) mientras que las inversiones entre estados  $N$  y  $S$  ocurran en la escala de los  $10^{-3}$  Hz.

El comportamiento de  $u_\theta$  puede ser modelado con un potencial de tres pozos centrados en  $u_N, u_S$  y 0, (fig. 3.23a) con un alto nivel de ruido. Para  $Re$  grandes los pozos asimétricos serían más profundos que el pozo central. Sin embargo debido a las altas fluctuaciones de la velocidad el sistema abarcaría no sólo uno de los pozos  $u_N, u_S$ , sino también el central. Al disminuir el  $Re$  los pozos  $N, S$  perderían profundidad, residiendo el sistema principalmente en la gaussiana central.

El modelo más simple para describir ese potencial  $\mathbb{V}(u_\theta)$  es un polinomio de sexto orden (figura 3.23a) con un ruido blanco aditivo:

$$\dot{u}_\theta = -\frac{\partial \mathbb{V}}{\partial u_\theta} = \epsilon u_\theta + g u_\theta^3 - u_\theta^5 + \sqrt{2B} \xi(t) \quad (3.18)$$

en donde  $\epsilon$  y  $g$  son parámetros,  $\xi$  una variable aleatoria con distribución gaussiana y  $B$  el nivel de ruido. El número de pozos depende de los valores de  $\epsilon$  y  $g$ , pudiendo encontrar entre una y tres soluciones estables. Mediante un cálculo simple se obtiene que los puntos fijos del sistema dinámico son:

$$u_{\theta,0} = 0 \quad (3.19)$$

$$u_{\theta,N,S} = \pm \sqrt{\frac{g + \sqrt{g^2 + 4\epsilon}}{2}} \quad (3.20)$$

$$u_{\theta,In} = \pm \sqrt{\frac{g - \sqrt{g^2 + 4\epsilon}}{2}} \quad (3.21)$$

La solución  $u_\theta = 0$  existe para todo el rango de  $\epsilon, g$ , pero solamente es estable para  $\epsilon < 0$ . Los puntos de la ecuación 3.20, por contra, solo existen para  $\epsilon > -g^2/4$  siendo siempre estables. Los puntos 3.21 son, si existen, inestables. En la figura 3.23b se detalla el diagrama de puntos fijos al variar  $\epsilon$  con  $g = 2$ .

El sistema experimental está representado en el rango  $0 > \epsilon > -g^2/4$ . La cota inferior representa la bifurcación del flujo en  $Re = 1500$ , mientras que la cota superior representaría un estado en el cual la gaussiana  $G_0$  no existe.

Desarrollando las ecuaciones del modelo se deduce que  $\epsilon$  influye principalmente en la estabilidad de cada pozo, con lo que equivaldría en el sistema real al  $Re$ . Por otro lado  $g$  modifica la posición y profundidad relativa de los valles, relacionándose con los centros  $u_{N,S}$  y las amplitudes relativas de  $G_0$  y  $G_{N,S}$ . El último sumando de la ec.3.18 juega el papel de la turbulencia, con lo que el valor de  $B$  debe ser alto.

La aplicación del modelo es muy limitada debido a su sencillez, pero aun así se recuperan algunas características de la distribución de velocidades. En la figura 3.24 se muestran los resultados de las simulaciones del modelo numérico con  $\epsilon = 0.05$ ,  $g = 2$  y  $B = 1$  utilizando un esquema de Euler-Maruyama [121]. En concreto, se recupera la distribución de dos gaussianas dentro de cada estado y se reproduce la variación de las amplitudes  $A_0, A_{N,S}$  con el  $Re$ .

Las simulaciones realizadas también presentan inversiones, obteniéndose una dependencia exponencial de los tiempos de residencia como se puede observar en la figura 3.25.

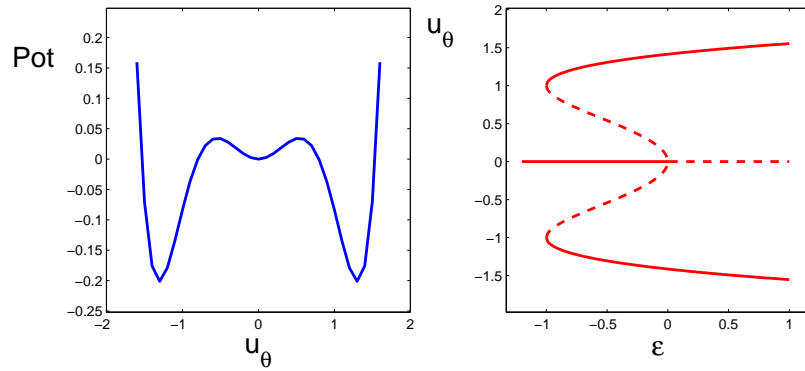


Figura 3.23: (a) Potencial de tres pozos en la que se encuentra  $u_\theta$  según ec. 3.18, para  $\epsilon = -0.5, g = 2$ . Aunque los estados más estables son los pozos asimétricos el alto nivel de turbulencia hace que el sistema ocupe también el pozo central. (b) Puntos fijos del modelo al variar  $\epsilon$ . La línea continua muestra puntos estables mientras la discontinua los puntos inestables. La región explorada corresponde a  $\epsilon \in (-1, 0)$ , en donde existen 3 puntos fijos estables.

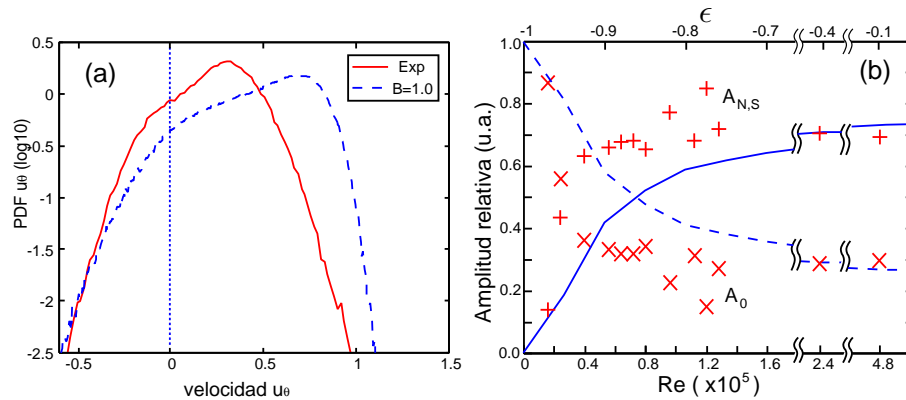


Figura 3.24: (a) Distribución de la velocidad normalizada  $u_\theta$  experimentales ( $Re = 2.5 \cdot 10^5$ ) y para la simulación del modelo 3.18 ( $B = 1, \epsilon = -0.05, g = 2$ ). El modelo muestra también una distribución de doble joroba. (b) Valores de las amplitudes experimentales  $A_0$  ( $\times$ ) y  $A_{N,S}$  ( $+$ ) frente al  $Re$  (eje inferior) para los valores experimentales y frente a  $\epsilon$  (eje superior) para el modelo ( $-$ ).

La imposibilidad de ajustar los resultados numéricos a los experimentales puede ser debido a la forma escogida para describir el potencial. Mientras que en el sistema experimental las fluctuaciones dentro de cada gaussiana son simétricas, en el modelo numérico las fluctuaciones en los pozos  $N$  y  $S$  no lo son. Esto es debido a la forma polinómica del potencial que provoca que las fluctuaciones con  $u_\theta \rightarrow 0$  sean más probables que las fluctuaciones con  $u_\theta \rightarrow \pm\infty$ .

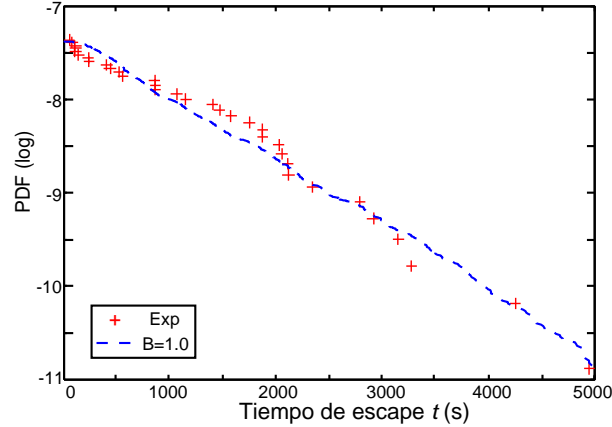


Figura 3.25: PDF de los tiempos de escape experimentales (+,  $Re = 2.5 \cdot 10^5$ ) y del modelo (-,  $B = 1, \epsilon = -0.05, g = 2$ ). La distribución sigue una ley exponencial (ec. 3.17) con  $T_0 = 1484$  s, varios ordenes de magnitud superior al periodo del propulsor ( $T_{prop} = 0.2$  s.)

Por último, este modelo puede ampliarse para que describa la situación en la que  $\Delta \neq 0$ . Si bien para  $\Delta$  pequeños un término lineal sería suficiente para que el potencial rompiera la simetría par (fig 3.26b,c), añadiendo un término cúbico  $c(\Delta) u_\theta^3$  se cubriría también el caso  $\Delta = 0.2$  en el que solamente existe un pozo estable (fig 3.26d,e).

### 3.6 Forzado dinámico

Una última cuestión surge acerca de la posibilidad de restaurar la simetría del sistema dentro de la escala temporal media. Los resultados aquí mostrados revelan como al introducir una diferencia en la rotación de los propulsores se favorece uno de los estados, pero en ningún caso se restaura el estado simétrico. Cabe preguntarse si un forzado dinámico puede devolver la simetría, igual que un equilibrista es capaz de mantenerse sobre un monociclo pedaleando hacia delante y atrás.

Para ello se estudió el comportamiento de la velocidad ecuatorial al introducir una diferencia en la rotación de los propulsores dependiente del tiempo,  $\Delta = \Delta(t)$ . Midiendo la distribución de velocidades y los tiempos de escape se determinó qué escalas temporales afectan a la dinámica de las inversiones y cuáles son los requisitos para que éstas sean controladas mediante una señal externa.

#### Sinusoidal

El primer paso fue aplicar un forzado armónico a uno de los propulsores (p.e., el propulsor  $N$ ) en la forma

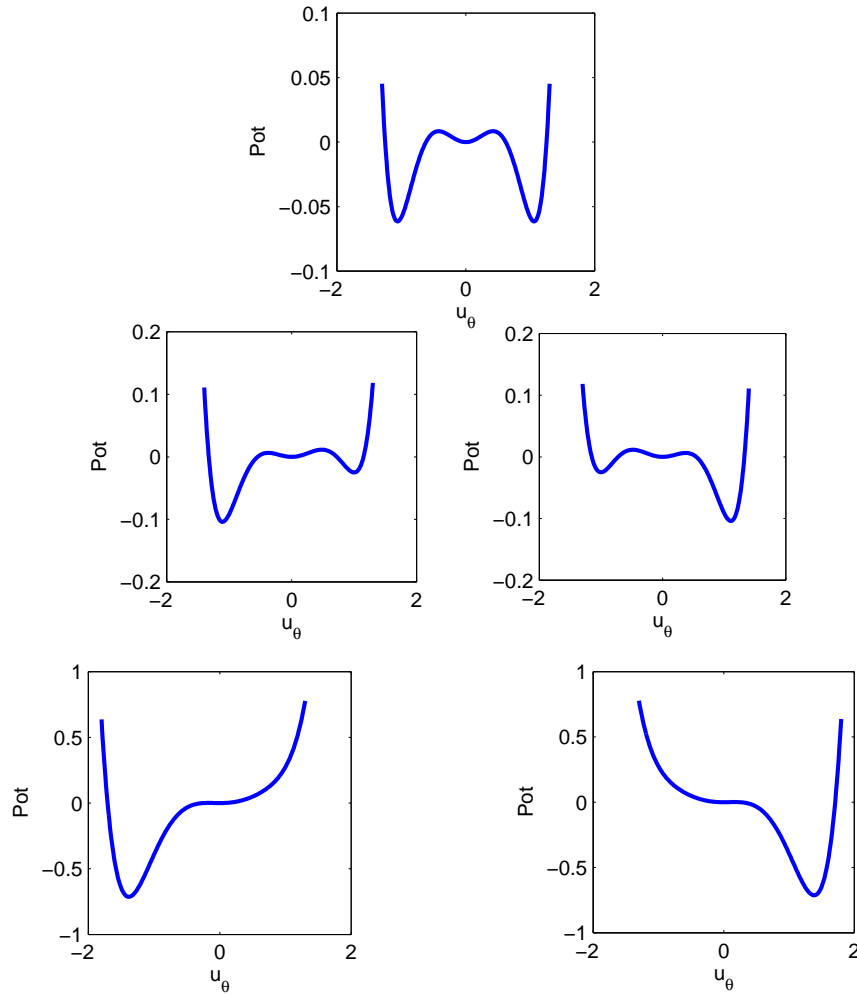


Figura 3.26: Evolución del potencial correspondiente a la ec 3.18 al añadir un término cúbico  $c u_\theta^3$  para  $\epsilon = 0.5$ ,  $g = 2$  y  $c = 0, \pm 0.1, \pm 1$ . El parámetro  $c$  está relacionado con  $\Delta$ , de tal manera que aumentar  $c$  provoca que el valor más estable sea el de uno de los pozos asimétricos (equivalente a modificar  $\Delta$  en el sistema experimental). Aumentar aún más este valor produce que finalmente exista un único pozo estable.

$$\left. \begin{aligned} f_S &= f_0 \\ f_N &= f_0 [1 + 2\Delta_0 \cos(\omega_f t)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta \simeq \Delta_0 \cos(\omega_f t) \quad (3.22)$$

para estudiar la variación de  $V_\theta^{eq}$  con los parámetros  $\Delta_0$  y  $\omega_f$ . Experimentalmente se observa que a medida que aumenta la frecuencia del forzado es necesario aumentar la amplitud para que las inversiones del sistema tengan la misma frecuencia que la señal exterior. En la figura 3.27 se muestra el comportamiento de  $V_\theta^{eq}$  con  $Re = 2.6 \cdot 10^5$  y  $\omega_f = 0.31$  rad/s, para amplitudes de forzado  $\Delta_0 = 0.017$  y  $0.023$ . En la primera figura la amplitud del forzado no es la suficiente como para que el sistema siga a la señal, siendo necesario

aumentar la amplitud para que se produzca esa sincronización. De esta manera se consigue reducir el tiempo de residencia en cada estado a  $T_{res} = 20s$ , mucho menor que el obtenido cuando el sistema no está sometido a forzado.

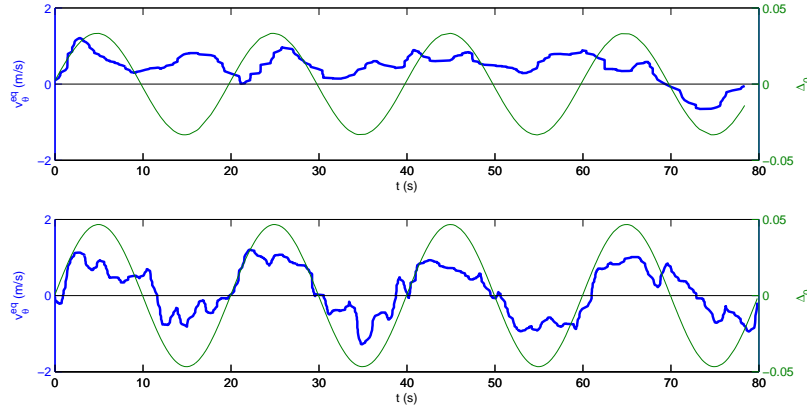


Figura 3.27: Medición de  $V_{\theta}^{eq}$  con  $Re = 2.6 \cdot 10^5$  y  $\Delta = \Delta_0 \cos(0.1\pi t)$ . (a)  $\Delta_0 = 0.017$ : la amplitud del forzado no es suficiente para sincronizar el estado del sistema a la señal exterior. (b)  $\Delta_0 = 0.023$ : el sistema permanece sincronizado con la señal de forzado mostrando inversiones periódicas con una frecuencia mucho mayor a la propia del sistema.

También se observa cómo la distribución de velocidades es distinta en uno u otro caso, obteniendo una velocidad casi nula en el caso de sincronización (figura 3.28).

Para forzados con periodos  $T_f < 10s$  el sistema no es capaz de seguir la señal para amplitudes menores de  $\Delta_0 = 0.035$ . Esto ocurre ya que el periodo del forzado es del mismo orden que el tiempo de inversión (de unos 10s), de tal manera que señales con periodos menor que éste serían ignoradas por el flujo. No se ha estudiado la respuesta del sistema para amplitudes mayores.

### Forzado random

Por último se estudió la influencia del ruido en la frecuencia de los motores. Para ello se introdujeron señales correlacionadas en los motores de tal manera que  $\Delta$  tuviera una variación aleatoria:

$$\left. \begin{aligned} f_S &= f_0 [1 + \Delta(t)] \\ f_N &= f_0 [1 - \Delta(t)] \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta = \Delta(t) \quad (3.23)$$

Los valores de  $\Delta(t)$  fueron generados a partir de la interpolación de una serie aleatoria con distribución gaussiana. El número de puntos de la serie es fijo ( $N = 100$ ), y la señal se repite con un periodo elegido  $T_f$ , lo que produce una señal correlacionada durante un tiempo  $T_{corr} = T_f/100$ . El sistema estaría por tanto bajo un forzado de ruido de color. La amplitud de  $|\Delta|$  se identifica con la desviación estándar de la señal, por lo que para variar la amplitud solo es necesario reescalar la serie original.

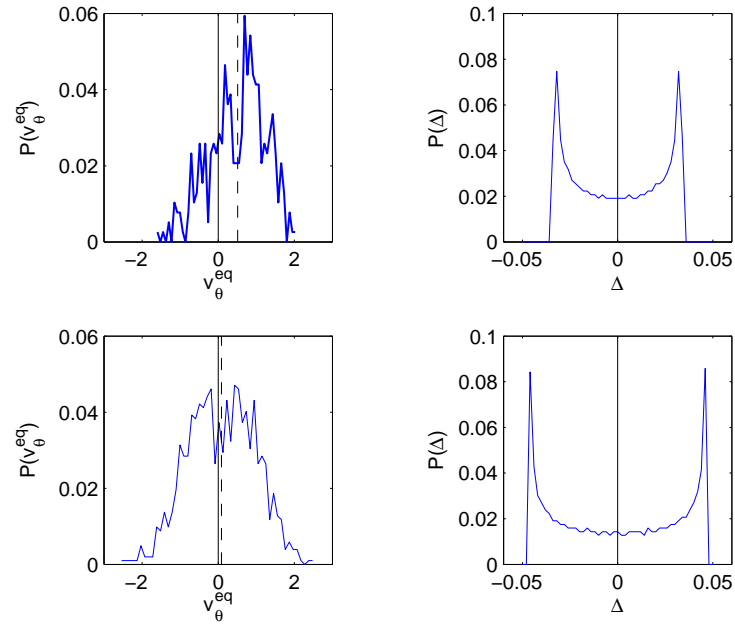


Figura 3.28: Histogramas normalizados de  $v_{\theta}^{eq}$  (izq) y  $\Delta$  (der) para las mediciones de la figura 3.27. La línea discontinua representa el valor medio de la distribución.

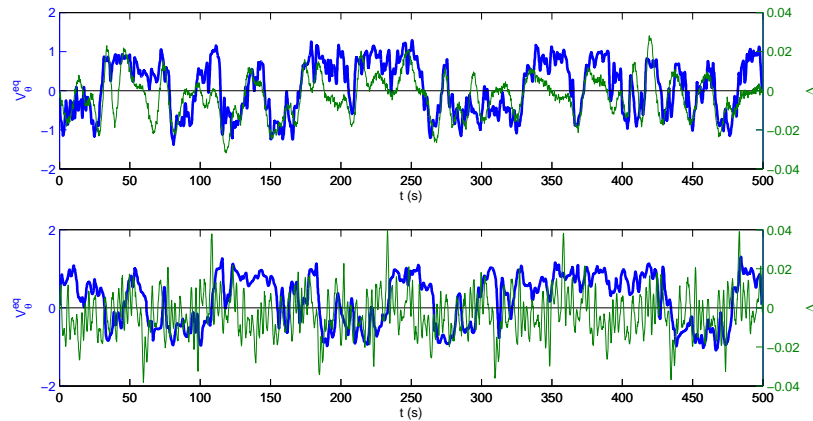


Figura 3.29: Medición de  $V_{\theta}^{eq}$  (—) y  $\Delta$  (—) con  $STD(\Delta) = 0.01$  para (a)  $T_f = 1000$  s (b)  $T_f = 120$  s

En la figura 3.29 se representan dos casos, ambos con amplitud  $STD(\Delta) = 0.01$ . En el primer caso el periodo de la señal es  $T_{corr} = 10$  s con lo que las variaciones de  $\Delta$  son suaves y el sistema fluctúa entre los dos estados, recuperando  $V_{\theta}^{eq}$  una distribución cuasi-simétrica, aunque bimodal (figura 3.30a). En la figura 3.29b el periodo de la señal se ha reducido de tal manera que  $T_{corr} = 1.2$  s, mostrando fluctuaciones de  $\Delta$  más bruscas. El sistema pierde

la sincronización con la señal aunque sigue alternando entre ambos estados. El histograma correspondiente (fig. 3.30), aunque bimodal, no presenta una media nula.

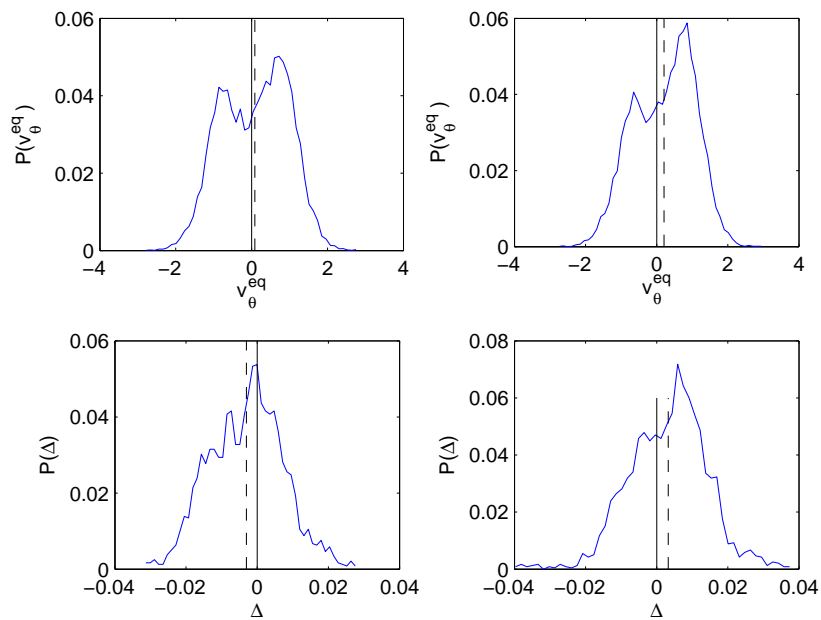


Figura 3.30: Histogramas de (arriba)  $v_{\theta}^{eq}$  y (abajo)  $\Delta$  con  $STD(\Delta) = 0.01$  para (izq)  $T_f = 1000$  s (der)  $T_f = 250$  s



## Capítulo 4

# Simulaciones numéricas de la dinamo cinemática

### Abstract

In this chapter the numerical code for the kinematic dynamo is detailed. The spatial scheme follows a modal decomposition in  $\theta, z$ , and finite differences on the radial direction. The temporal scheme is a semi-implicit mixed Adams–Bashforth/Adams–Moulton of second order method. The boundary conditions are isolating on the walls, while periodic in  $z$ . The parameters mainly used in the simulations are explained: The magnetic Reynolds number  $Rm$ , the Poloidal-to-Toroidal ratio of the velocity field  $PT$ , and the mean velocity fields  $\vec{V}$ . In order to study the effects detailed in previous chapters, two additional parameters are introduced: A frequency of oscillation  $\omega$  between different velocity profiles and the asymmetry degree  $\mathcal{A}$ , defined in eq.4.38. Finally, the variables obtained are described: Magnetic energy  $E$  and growth rates of the Fourier modes of the energy  $\sigma_{n\theta, n_z}$ .

Hasta ahora la investigación mostrada ha sido puramente hidrodinámica. Se han descrito las características del flujo de von Kármán y analizado su campo de velocidades. Si se quisiera estudiar el comportamiento magnetohidrodinámico en el experimento, se vería como la evolución de  $\vec{B}$  es prácticamente difusiva. Esto es debido a que el agua es un fluido poco conductor y con un número de Prandtl muy bajo (tab. 1.1). Sin embargo, dentro de la aproximación de la dinamo cinemática es posible simular el comportamiento del campo de velocidades suponiendo que el material utilizado es un metal líquido. En el caso del sodio a 100 °C su densidad y viscosidad es similar a la del agua, por lo que tendrá un comportamiento hidrodinámico similar. Sin embargo al tener una conductividad alta su número de Prandtl es varios órdenes de magnitud superior.

Para atacar este problema es necesario realizar simplificaciones que faciliten la comprensión de los distintos procesos implicados. Entre las simplificaciones está la de suponer que la fuerza de Lorentz no afecta a la hidrodinámica del problema (dinamo cinemática), lo que permite romper la no-linealidad en las ecuaciones y utilizar el campo de velocidades como un parámetro más en la ecuación de inducción.

$$\partial_t \vec{B} = Rm \nabla \times (\vec{v} \times \vec{B}) + \nabla^2 \vec{B} \quad (4.1)$$

Sin embargo para que se desarrolle el efecto dinamo es necesario que el flujo sea turbulento. Para no trabajar con todas las escalas temporales y espaciales encontradas en la turbulencia, el flujo se simplifica trabajando tan solo con el campo de velocidades medio. La justificación proviene de considerar que las fluctuaciones del campo de velocidades son demasiado rápidas para que el campo magnético se vea afectado. Esto es debido a la diferencia entre el tiempo de difusión viscoso ( $\tau_\nu = L^2/\nu$ ) y el tiempo de difusión magnético ( $\tau_m = \mu\sigma_c L^2$ ), relacionados a través del número de Prandtl magnético ( $Pm = \tau_m/\tau_\nu$ ). En el caso del sodio a 100 °C este valor es de  $Pm = 8.55 \cdot 10^{-6}$ .

Como se ha mostrado en los capítulos precedentes el flujo presenta una evolución en escalas temporales lentas, ya sean debidas a la dinámica de los vórtices ecuatoriales o las inversiones entre estados norte y sur. Estas escalas son similares o incluso superiores a las del campo magnético por lo que deben de afectar a su comportamiento. Recientes trabajos experimentales en el montaje VKS2 [33, 75] han mostrado la evolución de  $\vec{B}$  en configuraciones muy similares a la nuestra (fig. 4.1). En ellos se observan fluctuaciones e inversiones en el campo magnético que, adimensionalizando conforme a las escalas espaciales y temporales correspondientes, resultan del mismo orden que las mencionadas anteriormente.

Aunque la aparición de la dinamo en el VKS2 había sido pronosticados mediante simulaciones de dinamo cinemática [87], el hecho de que los resultados experimentales se produzcan tan solo cuando se utilizan propulsores de hierro provoca una cierta incertidumbre acerca de su verdadero origen, y por lo tanto de la validez de las conclusiones obtenidas con las aproximaciones realizadas en las simulaciones.

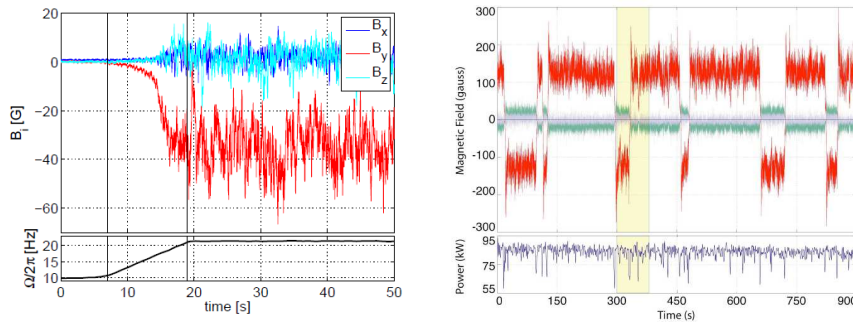


Figura 4.1: (a) Fluctuaciones del campo  $\vec{B}$  medidas en el experimento VKS2 (figura obtenida de [75]) (b) Inversiones del campo  $\vec{B}$  [33]

Otra aproximación comúnmente utilizada es la de simetrizar el campo de velocidades alrededor de un eje contenido en el plano  $z = 0$  (simetría  $R_\pi$ ). Sin embargo esta aproximación no se cumple en los campos observados en este experimento, por lo que sería otro factor a estudiar en la evolución de  $\vec{B}$ . Este estudio no ha sido llevado a cabo en la presente investigación.

## 4.1 Esquema de la simulación

A lo largo de la historia de la magnetohidrodinámica se han ido creando multitud de códigos para estudiar la ecuación de inducción del campo magnético: desde métodos de Galerkin [122–124], espectrales [87, 125], DNS [26, 58, 69], volúmenes finitos [67] ...

El código utilizado en este estudio fue originalmente desarrollado por J. Léorat [83], escrito en lenguaje FORTRAN. El esquema general es el de un fluido con conductividad  $\sigma_c$  en movimiento en el interior de un cilindro infinito con paredes aislantes. Dado que el campo de velocidades experimental tiene una altura  $H$ , es necesario repetir el campo periódicamente. Para impedir la aparición de zonas de cizalla artificiales, dado que  $V_\theta(z = 1) = -V_\theta(z = -1)$ , el campo que se repite es uno de tamaño  $2H$  consistente en el campo original seguido de una reflexión especular en  $z$  (fig. 4.2). Esto hace que el periodo base en la descomposición modal no sea  $H$ , sino el doble.

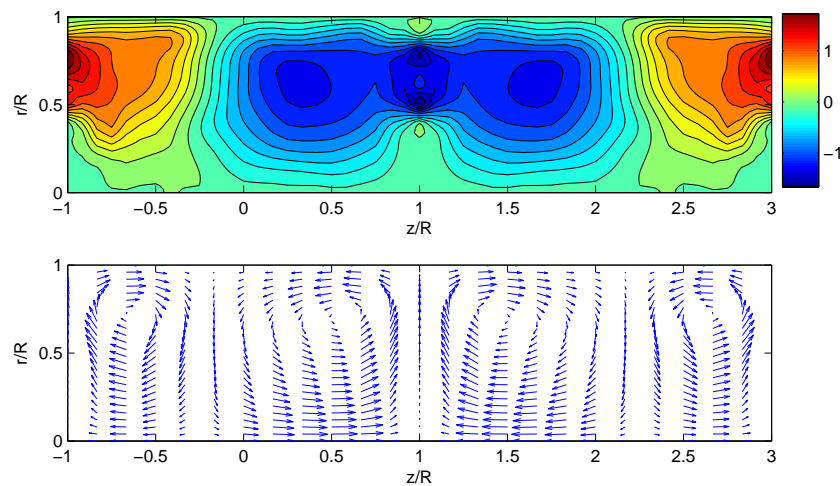


Figura 4.2: Campo de velocidades doblado para garantizar la periodicidad en la dirección  $z$ .

En el exterior se encuentra un medio aislante y en reposo. La permeabilidad magnética se considera aproximada a la del vacío en todo el volumen ( $\mu = \mu_0$ ).

Se trata de un código pseudo-espectral que realiza una descomposición modal en las coordenadas axial ( $z$ ) y azimutal ( $\theta$ ), mientras que en la coordenada radial ( $r$ ) mantiene un

esquema de diferencias finitas de 6° orden. La evolución temporal se estudia mediante un método mixto Adams-Bashfort/Adams-Moulton de segundo orden.

#### 4.1.1 Condiciones de contorno

##### Coordenada radial

La condición de contorno en  $r = R$  es la de pared aislante; es decir  $\sigma_c = 0$  para  $r > R$ . Las implicaciones de esta condición se obtienen a partir de los teoremas de flujo y circulación magnética: en primer lugar, si se aplica la ley de Faraday a una línea cerrada  $\mathbb{C}$  que forma un paralelogramo de base  $\delta w$  y altura  $\delta h$  que atraviese la frontera (figura 4.3a), se obtiene que por el teorema de Stokes

$$\oint_{\mathbb{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{\mathbb{S}} (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{S} = \int_{\mathbb{S}} \mu \vec{j} d\vec{S} \quad (4.2)$$

Al hacer  $\delta h \rightarrow 0$ , y en ausencia de corrientes superficiales (ya que las paredes son no conductoras), se deduce que la componente paralela del campo magnético debe ser continua en la interfaz:

$$B_{\parallel}(r = R^-) = B_{\parallel}(r = R^+) \quad (4.3)$$

En segundo lugar se aplica la ley de Gauss en su forma integral,

$$\int_{\mathbb{V}} \nabla \cdot \vec{B} dv = \oint_{\mathbb{S}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (4.4)$$

en donde  $\mathbb{V}$  es un paralelepípedo de base  $\delta S$  y altura  $\delta h$  (figura 4.3b). Al hacer tender la altura a cero la conservación del flujo obliga a que la componente normal del campo magnético sea continua en la frontera.

$$B_{\perp}(r = R^-) = B_{\perp}(r = R^+) \quad (4.5)$$

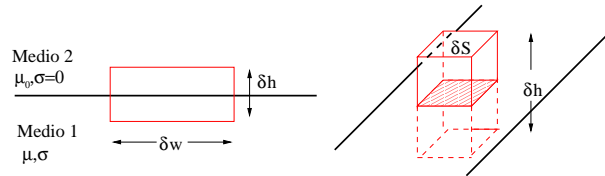


Figura 4.3: Esquema de las condiciones de contorno para (a) la componente tangencial (b) la componente normal.

Por lo tanto la condición de contorno en  $r = R$  es la continuidad del campo magnético:

$$\vec{B}(r = R^-) = \vec{B}(r = R^+) \quad (4.6)$$

Existen otras configuraciones posibles tales como las de pared conductora [59, 63–67] o con una capa en reposo del mismo material [68, 69]. Utilizando los mismos teoremas que para el caso no conductor se llega a que mientras la componente normal debe ser continua, la componente tangencial puede mostrar una discontinuidad debido a las corrientes superficiales. Aunque estas condiciones modifican el comportamiento de  $\vec{B}$  pudiendo facilitar la aparición de la dinamo no han sido estudiadas en este trabajo.

### Coordenadas axial

Las condiciones de contorno en esta variable es de periodicidad, ya que al repetir el campo de velocidades en la dirección  $z$  se simplifica la descomposición modal en esa dirección. Además la ecuación de difusión tiene una solución analítica exacta basada en las funciones de Bessel modificadas, y se evita la dificultad de los cálculos en las aristas del cilindro.

### Campo en el exterior del cilindro

El comportamiento del campo magnético en el exterior del cilindro es puramente difusivo, ya que al ser la velocidad nula para  $r > R$ , el término de inyección se anula.

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla^2 \vec{B} \quad (4.7)$$

Por otro lado, dado que el medio exterior es aislante no existen corrientes eléctricas, con lo que el campo magnético es irrotacional. Bajo estas condiciones, es posible definir un potencial escalar magnético  $\Psi$ , tal que

$$\vec{B}|_{r>1} = -\nabla\Psi \Rightarrow \nabla \times \vec{B}|_{r>1} = 0 \quad (4.8)$$

con lo que la ecuación de Gauss se reduciría a una ecuación de difusión del potencial  $\Psi$ .

$$\left. \begin{array}{l} \nabla \times \vec{B} = 0 \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \nabla^2 \Psi = 0 \quad r > 1 \quad (4.9)$$

La dependencia temporal viene dada por una evolución exponencial,  $\Psi \sim e^{\lambda t}$ , mientras que la parte espacial debe cumplir que

$$\nabla^2 \Psi = 0 \implies \frac{1}{r} \partial_r [r \partial_r \Psi] + \frac{1}{r^2} \partial_\theta^2 \Psi + \partial_z^2 \Psi = 0 \quad (4.10)$$

Suponiendo que  $\Psi$  tiene un desarrollo armónico en  $\theta, z$ ,

$$\Psi = \sum_{n_\theta, n_z > 0} A(r) e^{i(n_\theta \theta + 2\pi n_z z)} \quad (4.11)$$

e introduciendo un cambio de variables  $x = r n_z$  se llega a la ecuación de Bessel modificada.

$$x^2 \partial_x^2 A + x \partial_x A - (m^2 + x^2) A = 0 \quad (4.12)$$

con  $m = n_\theta$ . La solución general es una combinación lineal de las funciones de Bessel modificadas de primera y segunda especie:

$$A = B_1^m I_m(x) + B_2^m K_m(x) \quad (4.13)$$

Debido a que estas soluciones deben aplicarse para  $r \in (R, \infty)$ , y dado que las funciones  $I_m$  divergen para  $x \rightarrow \infty$ , se obtiene que  $B_1^m = 0$ . Recuperando el valor de  $\Psi$ , la expresión del campo magnético tendría la siguiente forma:

$$\Psi = \sum_{n_\theta, n_z} B_{n_\theta} K_{n_\theta}(r n_z) e^{i(n_\theta \theta + 2\pi n_z z)} \quad (4.14)$$

$$\vec{B} = \nabla \Psi = (\partial_r \Psi, \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi, \partial_z \Psi) \Rightarrow \quad (4.15)$$

$$B_r = \sum_{n_\theta, n_z} B_{n_\theta} \frac{-n_z}{2} [K_{n_\theta+1}(n_z r) + K_{n_\theta-1}(n_z r)] e^{i(n_\theta \theta + 2\pi n_z z)} \quad (4.16)$$

$$B_\theta = \frac{1}{r} \sum_{n_\theta, n_z} (i n_\theta) B_{n_\theta} K_{n_\theta}(n_z r) e^{i(n_\theta \theta + 2\pi n_z z)} \quad (4.17)$$

$$B_z = \sum_{n_\theta, n_z} (n_z r) B_{n_\theta} (i n_z) K_{n_\theta} e^{i(n_\theta \theta + 2\pi n_z z)} \quad (4.18)$$

en donde se ha aplicado una de las relaciones de recurrencia de las funciones de Bessel modificadas:

$$\partial_x K_m(x) = \frac{1}{2} [K_{m+1}(x) + K_{m-1}(x)] \quad (4.19)$$

Debido a la forma de las componentes de  $\vec{B}$  en la ecuación 4.15 es posible derivar el campo magnético en la superficie del cilindro a partir de una sola de sus componentes. En el código se calcula la componente radial a partir de los tres últimos puntos en el interior del cilindro. Posteriormente, las otras dos componentes se calculan utilizando una relación derivada de las ecuaciones anteriores.

#### 4.1.2 Esquema temporal

El código de simulación realiza parte del tratamiento de la ecuación de inducción en el espacio de Fourier de las variables  $\theta$  y  $z^* = \pi z/H$ . Si se descompone el campo magnético y el campo de velocidad en los modos azimutales se obtiene que

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \sum_{n_\theta} \vec{b}_{n_\theta}(r, z, t) e^{i n_\theta \theta} + C.C. \quad (4.20)$$

$$\vec{V}(\vec{r}) = \vec{V}(r, z) \quad (4.21)$$

en donde se ha tenido en cuenta la axisimetría del campo de velocidades. Esta axisimetría provoca que los modos  $n_\theta$  del campo  $\vec{B}$  evolucionen independientemente en la ecuación de inducción 4.1 [126], de tal manera que si se aplica el desarrollo de  $\vec{B}$  y  $\vec{V}$  se obtiene que

$$\partial_t \vec{B} = \mathbb{L} \vec{B} \Rightarrow \quad (4.22)$$

$$\partial_t \vec{b}_{n_\theta}(r, z, t) = \hat{L}_{n_\theta} \vec{b}_{n_\theta}(r, z, t) \quad \forall n_\theta \quad (4.23)$$

en donde  $\mathbb{L}$  es un operador lineal sobre  $\vec{B}$ .

$$\mathbb{L} = \left[ Rm \nabla \times \vec{V} \times \right] + [\nabla^2] = \sum_{n_\theta} \hat{L}_{n_\theta} \quad (4.24)$$

De nuevo, gracias a la axisimetría de  $\vec{V}$ , no es necesario que el número de modos a tener en cuenta en el sumatorio sea grande.

Para resolver la evolución temporal se utiliza un esquema semiimplícito. El operador  $\hat{L}$  se divide en una parte lineal y otra en la que están implicadas derivadas parciales en  $\vec{b}$ . Mientras que la parte lineal es utilizada de forma implícita (es decir, estará evaluada en el instante  $t_{n+1}$ ), la parte con derivadas se mantiene de forma explícita (es decir, evaluada en  $t_n$ ). Una vez obtenida la ecuación para el valor de  $\vec{b}$  en el instante  $t_{n+1}$ , éste se calcula mediante un método de Adams-Bashforth/ Adams-Moulton de segundo orden, en un solo paso.

Debido a que las tres componentes del campo magnético se calculan individualmente, la divergencia del campo no se mantiene nula por lo que es necesario proyectar el campo cada cierto número de pasos.

Como condiciones iniciales el código permite bien imponer un campo magnético externo hasta  $t = 1$  u.t. o bien introducir un campo magnético semilla en  $t = 0$ . Este campo semilla está relacionado con las soluciones a la ecuación de difusión, para minimizar el estado transitorio.

### 4.1.3 Parámetros del código

El código tiene la flexibilidad para variar un amplio número de parámetros; las condiciones de contorno, la relación de aspectos del campo de velocidades o las condiciones iniciales del campo magnético, entre otros. Sin embargo, en este estudio tan solo se han utilizado tres de ellas: los campos de velocidades, el número de Reynolds magnético y la relación Poloidal-Toroidal.

A continuación se detallarán estos tres parámetros, y más adelante se explicarán las modificaciones realizadas para incluir campos dependientes del tiempo.

#### Campos de velocidades

Los campos de velocidades introducidos han sido medidos experimentalmente, siguiendo el proceso explicado en secciones anteriores. Estos campos han sido remuestreados a una resolución de 51 puntos radiales, 25 puntos axiales y 8 azimutales. Teniendo en cuenta que el campo debe ser doblado en la dirección axial, el campo total tendrá 48 puntos axiales. El motivo por el que se utiliza un número tan reducido de modos axiales es que debido a la axisimetría del campo de velocidades, los modos  $n_\theta$  del campo  $\vec{B}$  están desacoplados, evolucionando independientemente.

Los campos  $\vec{V}$  deben ser estáticos, es decir, sin dependencia temporal. El más utilizado es el obtenido con los propulsores P30 a  $Re = 3 \cdot 10^5$  y  $\Delta = 0$ . El estado del flujo es el

norte, siendo el estado sur obtenido mediante una reflexión. A partir de estos dos campos se genera el campo simétrico,

$$\vec{V}_{Sim} = \frac{1}{2} (\vec{V}_N + \vec{V}_S) \quad (4.25)$$

y el campo antisimétrico

$$\vec{V}_{Dif} = \frac{1}{2} (\vec{V}_N - \vec{V}_S) \quad (4.26)$$

en donde se cumple que  $\overline{V}_{Dif} = 0.39\overline{V}_{Sum}$ .

También se crean campos con mayor o menor asimetría, mediante el parámetro  $\mathcal{A}$ :

$$\vec{V}_{N,S}(\mathcal{A}) = \vec{V}_{Sim} \pm \mathcal{A}\vec{V}_{Dif} \quad (4.27)$$

### Reynolds magnético ( $Rm$ )

El número de Reynolds magnético describe la relación entre el término de inyección y el término difusivo. Este número se relaciona con el número de Reynolds hidrodinámico a través del número de Prandtl magnético, que para el sodio a 100 °C tiene un valor de

$$Pm = \frac{Rm}{Re} = \mu_0 \sigma_c \nu = 8.55 \cdot 10^{-6} \quad (4.28)$$

Dado que el campo anterior fue medido a un  $Re = 3 \cdot 10^5$ , el valor del  $Rm$  alcanzado es  $Rm = 2.57$ , un valor demasiado bajo para generar efecto dinamo [44]. Sin embargo es posible aumentar el valor del  $Rm$  suponiendo que la topología del campo de velocidades se mantendrá al variar el  $Re$ . Esta hipótesis ha sido confirmada en la parte experimental para un cierto rango, pero no hay garantías de que no se produzca una nueva bifurcación que modifique el flujo.

Teniendo en cuenta la adimensionalización realizada, para incrementar el  $Rm$  tan solo es necesario reescalar el campo:

$$\vec{V}_{Rm} = \frac{Rm}{|V_{max}|} \vec{V} \quad (4.29)$$

El rango en el que se realizan las simulaciones es de  $Rm \in (60, 140)$ , que es el dominio en el que se desarrolla la inestabilidad magnética para los campos de velocidades obtenidos.

### Relación Poloidal-Toroidal

Como se explicó en capítulos anteriores la descomposición del campo de velocidades en componentes poloidal/toroidal garantiza el cumplimiento de la ecuación de continuidad. Además, en el caso de flujos axisimétricos se cumple que

$$\vec{V}_{pol} = V_r \hat{e}_r + V_z \hat{e}_z \quad (4.30)$$

$$\vec{V}_{tor} = V_\theta \hat{e}_\theta \quad (4.31)$$

Se define la relación Poloidal-Toroidal como la relación entre las velocidades promediadas en el volumen  $\mathbb{V}$ ,

$$PT = \frac{\int_{\mathbb{V}} |V_{pol}| dv}{\int_{\mathbb{V}} |V_{tor}| dv} \quad (4.32)$$



Esta relación está definida para cada campo de velocidades experimental y depende entre otros factores de la forma geométrica de los propulsores. Sin embargo, al estar desconectadas ambas componentes se pueden reescalar para variar el factor  $PT$  a nuestro antojo. El interés para modificar este parámetro surge al observar que para cada campo existe un valor  $PT_{opt}$  en el que se optimiza la aparición del efecto dinamo [59, 93, 122]. Ese valor no tiene por qué coincidir con el valor natural y aunque sea distinto para cada campo, en la literatura se localiza en torno a  $PT = 0.7$  [87].

#### 4.1.4 Variables recogidas de las simulaciones

Una de las variables de la simulación que se puede estudiar es la evolución de la energía magnética  $E(\vec{r}, t)$  dentro del cilindro.

Dado que la ecuación 4.23 es lineal en  $\vec{b}_{n_\theta}$  es de esperar que una vez superada la fase transitoria, el sistema alcance las autofunciones del operador  $\hat{L}_{n_\theta}$  y la evolución temporal del sistema siga un comportamiento exponencial.

$$\vec{b}_{n_\theta}(r, z, t) \sim e^{\lambda_{n_\theta} t} \quad \forall n_\theta \quad (4.33)$$

Un tratamiento análogo se realiza a la energía magnética en el volumen, definida como

$$E = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{V}} |\vec{B}|^2 dv = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{V}} \sum_{n_\theta} |\vec{b}_{n_\theta}(r, z, t)|^2 dv = \sum_{n_\theta} E_{n_\theta} \quad (4.34)$$

en donde

$$E_{n_\theta} = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathbb{V}} |\vec{b}_{n_\theta}(r, z, t)|^2 dv \sim e^{\sigma_{n_\theta} t} \quad t \gg \tau_m \quad (4.35)$$

con  $\sigma_{n_\theta}$  la tasa de crecimiento del modo  $n_\theta$ .

Si se aplica una nueva descomposición, esta vez en la componente azimutal,

$$\vec{b}_{n_\theta}(r, z, t) = \sum_{n_z} \vec{b}'_{n_\theta, n_z}(r, t) e^{(in_z \pi z / H)} \quad (4.36)$$

se demuestra que al alcanzar los autovectores de operador todos los modos  $n_z$  deben evolucionar con la misma tasa determinada por el modo  $n_\theta$ , de tal manera que

$$\sigma_{n_\theta, n_z} \neq f(n_z) \quad (4.37)$$

La tasa de crecimiento de la energía magnética depende del valor del  $Rm$  y de las características del campo de velocidades (entre las que se encuentra el ratio  $PT$  o la asimetría  $\mathcal{A}$ ). Dado un campo  $\vec{V}$  determinado el efecto dinamo aparecerá para un valor  $Rm = Rm^c$  cuando uno de los modos se vuelva inestable (es decir, cuando al menos la tasa de un modo sea positiva). Una vez superado el umbral la aproximación de dinamo cinemática dejará de ser válida ya que al crecer el campo magnético de forma exponencial las fuerzas de Lorentz llegarán a ser apreciables en la ecuación de Navier-Stokes modificando el flujo hidrodinámico.

Los requisitos para que se desarrolle la inestabilidad aún no están establecidos. Si bien hay condiciones por las cuales un flujo no puede crear dinamo [41], no es posible determinar a priori si este podrá crear campo magnético. Por ejemplo, en la figura 4.4 se muestran dos campos de velocidades obtenidos experimentalmente por Marié et al. [59]. Las diferencias entre ambos campos son mínimas y sin embargo (fig. 4.5) el primero presenta efecto dinamo con un  $Rm^c \sim 140$  mientras que el segundo, después de alcanzar una cota máxima, reduce su eficiencia al aumentar el  $Rm$  sin que  $\sigma$  tome valores positivos.

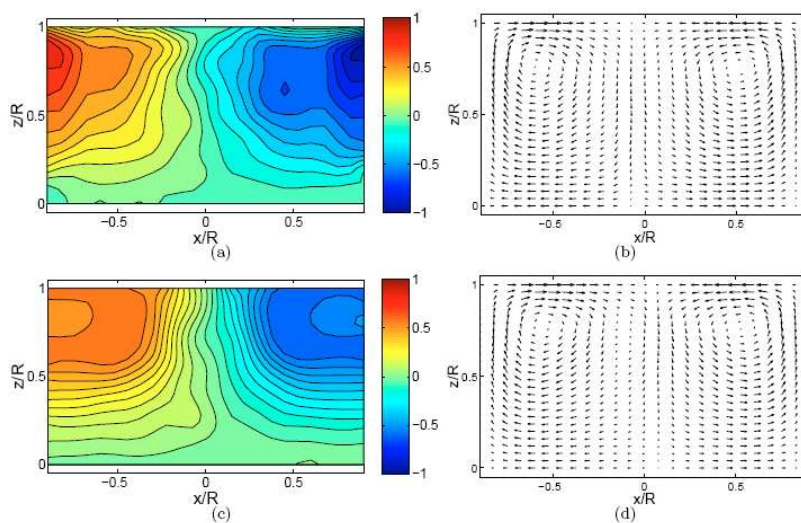


Figura 4.4: (a) Campo de velocidades  $TM28$  (b) Campo  $TM60$ , obtenidos de [59]

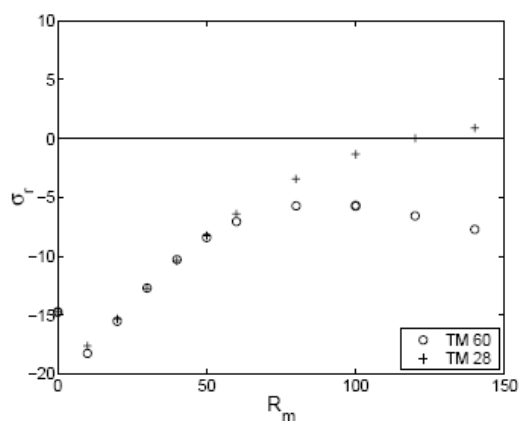


Figura 4.5: Evolución de la tasa frente al  $Rm$  para los campos de la figura 4.4, obtenida de [59].

## 4.2 Campos con dependencia temporal

Una de las hipótesis con la que se trabaja comúnmente es que las fluctuaciones del campo de velocidades son invisibles para la evolución del campo magnético debido a las diferencias de escalas temporales. Bajo esta aproximación, solamente es necesario tomar un campo medio de velocidades para estimar el valor crítico del  $Rm$ .

Los campos de velocidades obtenidos experimentalmente no tienen dependencia temporal, al tratarse de flujos promediados en el tiempo. Sin embargo se ha comprobado como estos muestran una dinámica a varias escalas temporales, algunas de ellas lentas [94]. Como ejemplo se encuentran vórtices con una velocidad de rotación  $\Omega_z$  ( $t \sim 10$  s), o inversiones en la velocidad  $\Omega_z$ , es decir, cambios del campo de velocidades entre el estado Norte y el Sur ( $t \sim 10^3$  s).

Para evaluar el efecto de las distintas escalas temporales del campo de velocidades en la evolución del campo magnético, se modificó el código introduciendo un campo variable en el tiempo. Este es calculado a partir de dos campos experimentales *estáticos*  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$  mediante la siguiente operación:

$$\vec{V}_\omega(t) = \frac{\vec{V}_A + \vec{V}_B}{2} + \mathcal{A} \frac{\vec{V}_A - \vec{V}_B}{2} \cos \omega t = \vec{V}_{Sum} + \mathcal{A} \vec{V}_{Dif} \cos \omega t \quad (4.38)$$

donde  $\vec{V}_{Sum}$  y  $\vec{V}_{Dif}$  son el campo suma y diferencia respectivamente,  $\mathcal{A}$  la amplitud de modulación y  $\omega$  la frecuencia de cambio. Mediante el parámetro  $\omega$  se puede variar la velocidad de las oscilaciones, tomando como referencia el tiempo de difusión magnético. Este parámetro se barre en el rango  $[10^{-1}, 10^3]$ , es decir, desde oscilaciones muy lentas (que representarían la dinámica lenta observada en nuestro experimento) hasta oscilaciones muy rápidas en comparación con la evolución de  $\vec{B}$  (que representaría el fenómeno de las escalas rápidas de la turbulencia).

Los campos  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$  son campos medidos experimentalmente en distintas configuraciones. Dichos campos, aunque con similar topología a la mostrada en la fig.4.4, variarán en cuanto a su efectividad a la hora de crear campo magnético. De esta forma se mezclarán campos que producen dinamo con campos no-dinamo, campos con y sin simetría  $R_\pi$ , etc.

Ambos campos se encuentran normalizados al mismo  $Rm$ , pero esa normalización se pierde al construir el campo  $\vec{V}_{Sum}$ , y por lo tanto en  $\vec{V}_\omega$ . Cuando se estudia la variación del  $Rm$  en este último a lo largo de un periodo (fig. 4.6) se observa como el valor es *menor* que el de los campos originales.

$$Rm|_{Sum} = \text{Max} \left( \frac{|\vec{V}_A + \vec{V}_B|}{2} \right) \leq \frac{1}{2} \left( \text{Max}(|\vec{V}_A|) + \text{Max}(|\vec{V}_B|) \right) = Rm \quad (4.39)$$

Esta disminución efectiva del  $Rm$  depende de cada caso, pero puede llegar a reducir hasta un 15 % del valor original.

El ratio Poloidal-Toroidal se encuentra en una situación similar. Este valor se establece para los campos originales, no estando determinado para los campos  $\vec{V}_{Sum}$  y  $\vec{V}_\omega$ . Sin embargo

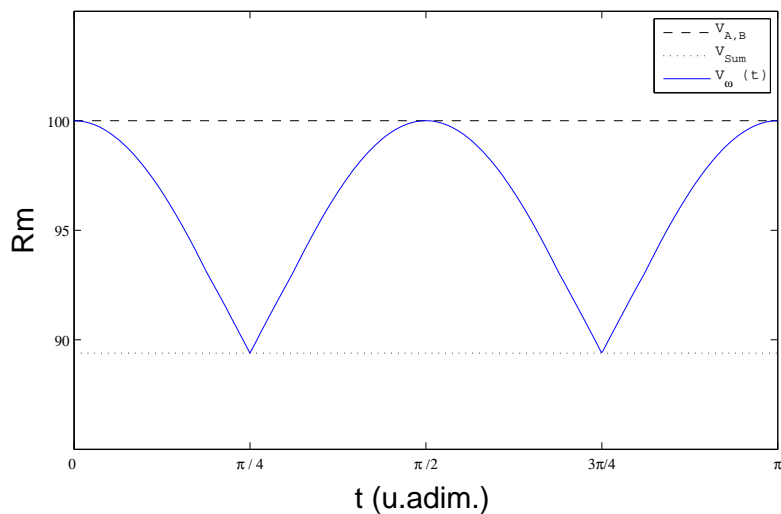


Figura 4.6: Evolución del  $Rm$  del campo  $V_\omega$  dentro de un periodo. Los valores oscilan entre el asignado a los campos  $\vec{V}_A$ ,  $\vec{V}_B$  (ambos normalizados a  $Rm = 100$ ) y el valor efectivo del campo  $\vec{V}_{sum}$ .

mientras que el  $Rm_{efec}$  es siempre menor que el establecido, el comportamiento del factor  $PT$  no es tan simple. Por otro lado, mientras que la disminución en el valor del  $Rm_{efec}$  es normalmente perjudicial para el valor de la tasa de crecimiento, la variación del factor  $PT$  en un campo de velocidades no tiene por qué serlo. Es posible encontrar situaciones en las que el campo  $\vec{V}_\omega(t)$  en un instante dentro del ciclo muestra una tasa de crecimiento mayor que la de los campos estáticos.

## Capítulo 5

# Resultados numéricos

### Abstract

In this chapter the numerical results of the kinematic dynamo code are shown. In section 5.1 the common results of every simulation are described, together with the definition of the variable used to determine the apparition of the dynamo effect. Later in sec.5.2 the effect of the lack of  $R_\pi$  symmetry will be studied showing that a reduction of the assymetry could decrease the threshold of the dynamo instability.

In section 5.3 the Poloidal-to-toroidal ratio  $PT$  will be varied looking for an optimization of the flow in the dynamo effect. Other studies [59, 87] have shown an optimal ratio of  $PT \simeq 0.7$ . A discussion is followed in order to determine the reason of this resonance and explain the appearance of other resonances at higher ratios, which seems to be related with closed streamlines of the flow.

Finally, in section 5.4 the effect of time dependent flows at different time scales are studied, both for  $R_\pi$  symmetric and asymmetric flows. The magnetic behavior of the flow is affected by temporal scales below 100 Hz, increasing the  $Rm^c$ . In the case of asymmetric flows, a resonance due to the temporal variations is found at high frequencies.

Este estudio pretende comprobar el efecto que las dinámicas encontradas en los campos de velocidades experimentales tienen sobre el efecto dinamo. En primer lugar, se ha encontrado que los campos de velocidad experimentales no tienen la simetría  $R_\pi$ . Si bien el efecto de esta asimetría ha sido estudiado anteriormente [59], su grado es considerablemente inferior a los encontrados en nuestra configuración. En segundo lugar se ha encontrado que nuestro sistema experimental es biestable, cambiando de estado con dinámicas muy lentas. Otros trabajos han mostrado la importancia para el efecto dinamo de flujos dependientes del tiempo [95, 127–129], pero de nuevo como perturbaciones menores del flujo medio. Estos resultados se complementarán, estudiando la importancia tanto de los cambios espaciales

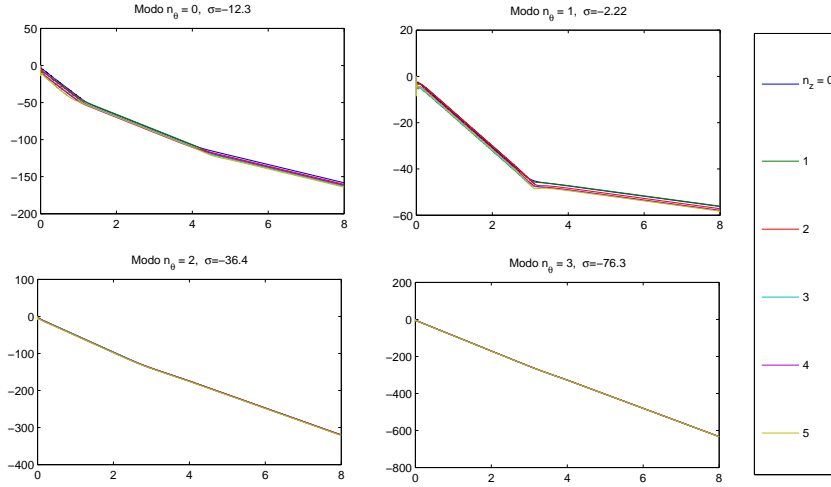


Figura 5.1: Evolución de la energía magnética en escala logarítmica del campo  $\vec{V}_N$  (fig. 4.2) para los modos  $n_\theta = 0, 1, 2, 3$  con  $Rm = 100 < Rm^c$

como de la escala temporal de los cambios.

## 5.1 Características generales de los resultados

Tal como se explicó en el capítulo anterior el resultado recogido de las simulaciones es la evolución de la energía magnética para los modos  $n_\theta$  cuando el campo es perturbado con una semilla inicial. Si la perturbación en alguno de los modos es inestable, estaremos ante un efecto dinamo.

Por el teorema de Cowling el modo  $n_\theta = 0$  siempre será difusivo, de tal manera que los primeros modos potencialmente inestables son los modos  $n_\theta = 1, n_z = 0, \dots, 5$ . En la figura 5.1 podemos observar la evolución de la energía para los cuatro primeros modos  $n_\theta = 0, 1, 2, 3$  (en el interior de cada figura, los modos  $n_z = 0, \dots, 5$ ) para un campo obtenido experimentalmente a  $Re = 2.7 \cdot 10^5$  con los propulsores P30. En todos los casos, durante un periodo de tiempo  $t \sim 1$  u.t. el sistema está en un estado transitorio en el que la energía se difunde. Pasado ese tiempo, el sistema se acomoda en sus autofunciones y evoluciona conforme a su tasa.

Cabe destacar que el modo  $n_\theta = 0$  evoluciona siempre con la misma tasa independiente del  $Rm$ , lo que confirma que su evolución es puramente difusiva. El siguiente modo azimutal,  $n_\theta = 1$ , es el modo que presenta mayor tasa en todas las simulaciones y será la referencia para caracterizar la bondad de los campos de velocidades. Los modos superiores por lo general decaen muy rápidamente, con tasas que pueden alcanzar valores de  $\sigma \sim -70$ .

En la figura 5.2 se encuentra la evolución temporal de la energía del modo  $n_\theta = 1$  del campo anterior para dos  $Rm$  distintos. En el primer caso el campo se encuentra debajo

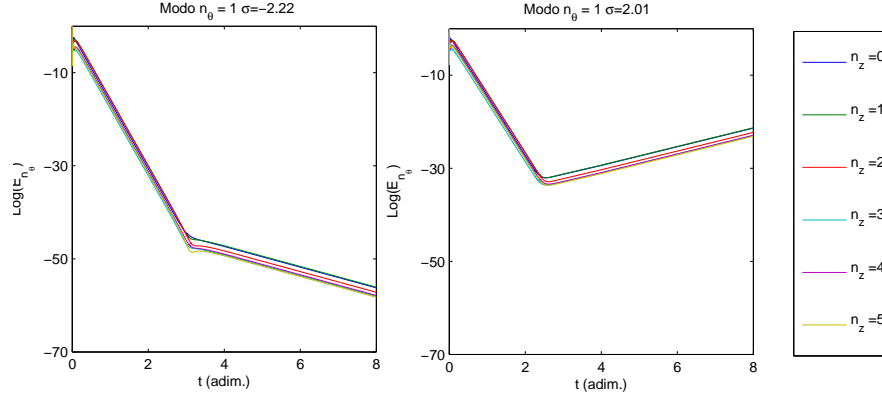


Figura 5.2: Evolución de la energía magnética del campo  $\vec{V}_N$  correspondiente al modo  $n_\theta = 1$  para (a)  $Rm = 80 < Rm^c$  (b)  $Rm = 140 > Rm^c$ . Mientras que en el primer caso la energía disminuye ( $\sigma < 0$ ) en el segundo ésta aumenta ( $\sigma > 0$ ), desarrollándose el efecto dinamo.

del umbral del efecto dinamo y una vez pasado el estado transitorio continúa decayendo. En el segundo caso ya se ha sobrepasado el  $Rm^c$ , y se observa cómo la energía aumenta ( $\sigma_{n_\theta=1} > 0$ ). En ese modo el campo magnético crece exponencialmente, encontrando el efecto dinamo.

Por último se comprueba que no hay diferencias entre las tasas de los modos  $n_z$ , que presentan una misma dinámica aunque con energías distintas.

## 5.2 Efecto de la simetría $R_\pi$ en el umbral de la dinamo

Una de los principales resultados encontrados en la parte experimental es que los campos medidos no mantienen la simetría  $R_\pi$ . El primer estudio realizado será por tanto ver si esta característica afecta a la evolución del campo magnético.

Para ello se trabajará con un campo asimétrico  $\vec{V}_N$ , obtenido experimentalmente con los propulsores P30 a  $Re = 3 \cdot 10^5$  y  $\Delta = 0$  y su correspondiente campo simetrizado,  $\vec{V}_{Sim}$ ,

$$\vec{V}_{Sim} = \frac{1}{2} (\vec{V}_N + \vec{V}_S) \quad (5.1)$$

en donde  $\vec{V}_S$  se ha obtenido a través de una rotación  $R_\pi$  del campo  $\vec{V}_N$ .

En la figura 5.3 se representa la evolución de la energía magnética de ambos campos para los modos  $n_\theta = 0, 1, 2$  y  $3$  a  $Rm = 100$ . En ella se observa cómo para los dos campos el modo con mayor tasa es el modo  $n_\theta = 1$ . También se comprueba que la estabilidad del modo depende de si se considera el campo experimental o el simetrizado.

En la figura 5.4 se muestra la distribución espacial de energía para los campos  $V_N$ ,  $V_{Sim}$  y  $V_S$ . La estructura del campo magnético es la correspondiente al modo  $n_\theta = 1$ , similar a la de un dipolo (fig 5.5). Debido a la ruptura de simetría  $R_\pi$ , la tasa de crecimiento adquiere una parte compleja [59] produciendo que  $E_B$  rote alrededor del eje  $Z$ . En los resultados

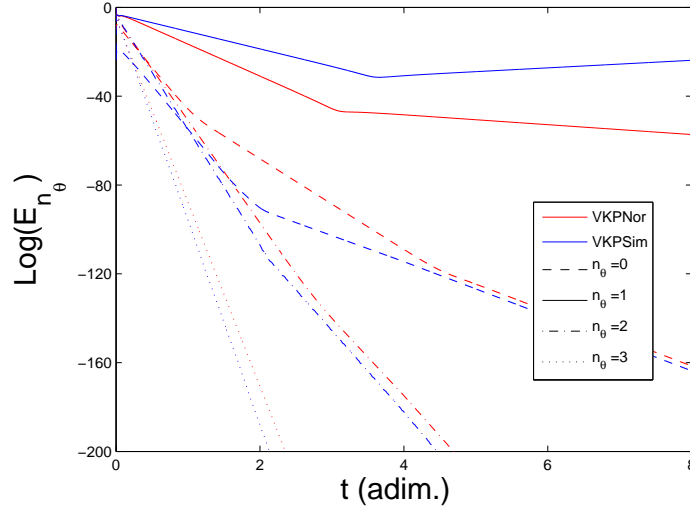


Figura 5.3: Evolución de la energía a  $Rm = 100$  para los campos  $\vec{V}_{Sim}$  (-) y  $\vec{V}_N$  (-), modos  $n_\theta = 0, \dots, 3$

aquí presentados se observa dicha rotación (con sentidos opuestos) en los campos  $V_N$  y  $V_S$ , mientras que en  $V_{Sim}$  no aparece, como era de esperar.

En la figura 5.6 se representa la dependencia de las tasas  $\sigma_{n_\theta}$  frente al  $Rm$ . Si bien los modos  $n_\theta = 0, 2$  y  $3$  difunden cualquier perturbación, el modo  $n_\theta = 1$  hace que se vuelvan inestables a partir de un valor crítico del  $Rm$ . Este valor depende del campo, y en este caso se observa cómo  $\vec{V}_{Sim}$  desarrolla la inestabilidad antes que el campo  $\vec{V}_N$ . Como resultado, el efecto de simular el campo de velocidades simetrizado artificialmente produce una apreciable subestimación del  $Rm^c$  frente al campo real.

El siguiente paso es estudiar cómo dependen estos resultados de la asimetría del campo del velocidades. Para ello se define una nueva variable,  $\mathcal{A}$ , que permita modificar esta característica de forma continua:

$$\vec{V}_{asim} = \vec{V}_{Sim} + \mathcal{A} \vec{V}_{Dif} \quad (5.2)$$

en donde  $\vec{V}_{Dif} \sim 0.39 \vec{V}_{Sim}$ . Para  $\mathcal{A} = \pm 1$  se recuperan los campos experimentales Norte y Sur, mientras que  $\mathcal{A} = 0$  anularía la asimetría. Variando  $\mathcal{A} \in (0, 1.5)$  se observa que existe una dependencia de la tasa de crecimiento con este parámetro, reflejada en la gráfica 5.7. El efecto de la asimetría en el modo  $n_\theta = 0$  es despreciable, mientras que para el resto de modos su comportamiento es más complicado. Por ejemplo, para el modo  $n_\theta = 1$  un valor de  $\mathcal{A} = 0.6$  hace desaparecer el efecto dinamo. Si bien puede parecer que la ruptura de la simetría  $R_\pi$  perjudica el desarrollo de la inestabilidad magnética, en la próxima sección se verá como la variación en  $\sigma$  también es debida a otro factor: la relación Poloidal-Toroidal.



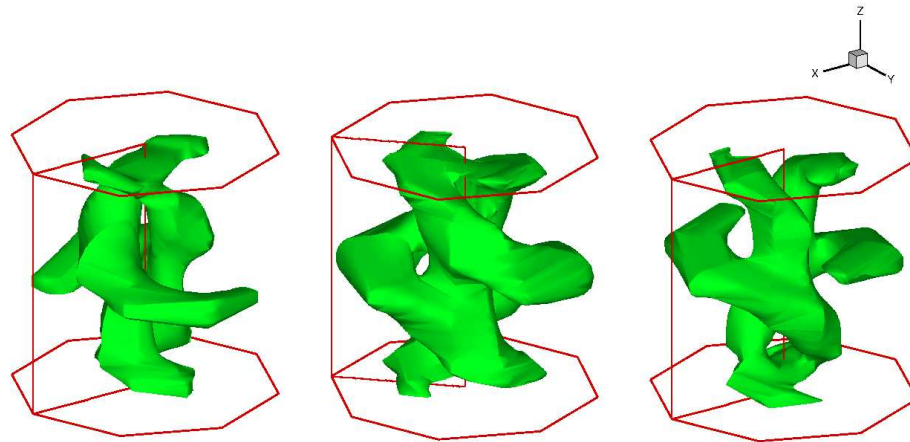


Figura 5.4: Isosuperficies de  $E$  en el espacio real para (a) Campo  $\vec{V}_N$  (b) Campo  $\vec{V}_{Sim}$  (c) Campo  $\vec{V}_S$ . Las tasas de crecimiento de los campos  $V_N$  y  $V_S$  tienen parte imaginaria, lo que provoca que la distribución rote en torno al eje axial, con sentidos contrarios. La energía de  $V_{Sim}$  es real, con lo que la distribución permanece estática. Esto es debido a la ruptura de la simetría  $R_\pi$ .

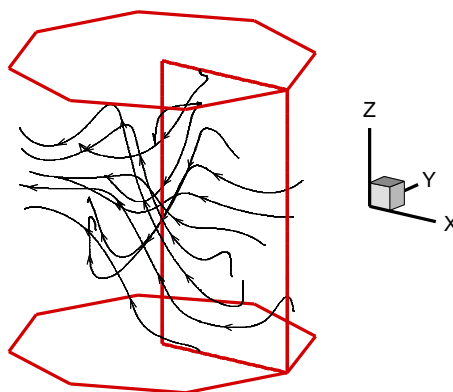


Figura 5.5: Líneas de  $\vec{B}$  para el campo  $\vec{V}_{Sim}$ . La estructura es similar al de un dipolo.

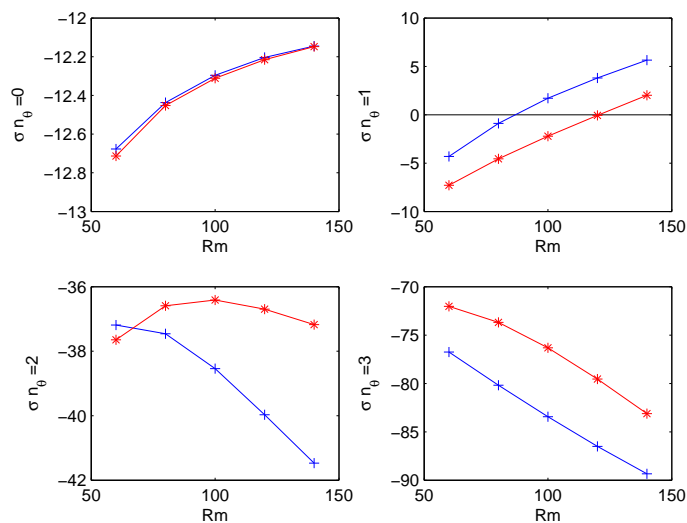


Figura 5.6: Tasa de crecimiento de la energía de los modos  $n_\theta = 0, \dots, 3$  frente al  $Rm$  para los campos  $\vec{V}_{Sim}$  (—) y  $\vec{V}_N$  (—). El modo  $n_\theta = 1$  se vuelve inestable para el campo simétrico a  $Rm^c = 86$ , frente a un  $Rm^c = 121$  para el campo asimétrico.

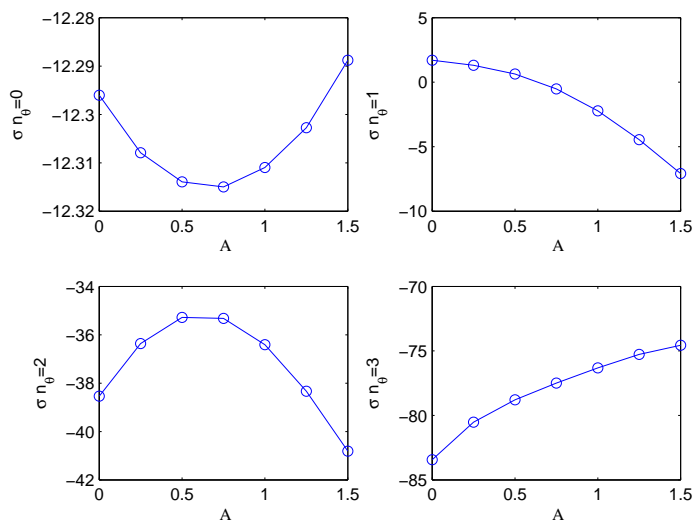


Figura 5.7: Dependencia de la tasa de crecimiento de la energía de los modos  $n_\theta$  a  $Rm = 100$  al variar  $\mathcal{A}$ , la asimetría del campo de velocidades.

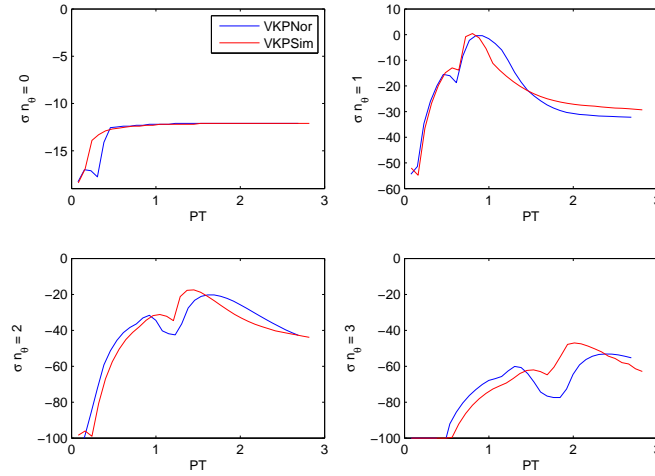


Figura 5.8: Valores de la tasa frente a  $PT$  a  $Rm = 100$  para los campos  $\vec{V}_N$  (—) y  $\vec{V}_{Sim}$  (—)

### 5.3 Dependencia de $\sigma_{n_\theta}$ con el factor $PT$

Como se explicó en la sección 4.1.3, la relación entre componentes poloidal y toroidal del campo de velocidades es relevante en la aparición del efecto dinamo. Aunque esta relación tiene un valor natural en cada campo experimental es posible modificarla gracias a la independencia entre componentes en la ecuación de continuidad, fruto de la axisimetría. Variando este parámetro es posible encontrar un valor  $PT_{opt}$  en el que la tasa de crecimiento sea máxima.

En la figura 5.8 se representa el valor de las tasas  $\sigma_{n_\theta=0,\dots,3}$  al variar  $PT$  para los campos  $\vec{V}_N$  y  $\vec{V}_{Sim}$  a un  $Rm = 100$ . En ella se observa cómo en el modo  $n_\theta = 0$  la tasa satura hasta un valor constante. Para el resto de modos, sin embargo, el comportamiento no es tan simple, observándose una distribución con un primer máximo relativo y un segundo máximo absoluto.

La posición de estos máximos depende tanto del modo estudiado como del campo de velocidades. Para el modo  $n_\theta = 1$  el máximo absoluto para  $\vec{V}_N$  se encuentra en  $PT = 0.85$  y en  $PT = 0.81$  para  $\vec{V}_{Sim}$ . Mientras que para  $\vec{V}_{Sim}$  el ratio  $PT_{opt}$  es el valor original del campo, para  $\vec{V}_N$  estos valores no coinciden (tabla 5.1). Esto nos lleva a pensar que el motivo por el que el campo de velocidades asimétrico es menos efectivo que el campo simétrico no se debe tan solo a su asimetría, sino a que el factor  $PT$  no es el adecuado. Cuando ambos campos se encuentran en su  $PT_{opt}$ , su tasa de crecimiento se asemeja bastante obteniendo un  $Rm^c = 103$  para el campo norte, frente a  $Rm^c = 86$  para el simétrico.

Si se estudia el comportamiento de la tasa de crecimiento de la energía con  $PT$  variando la amplitud de la asimetría (figura 5.9) se observa tanto una deriva del pico de la resonancia como un suavizado en ella. Esto explica el comportamiento observado en la figura 5.7, en el que la variación no es debida tanto a la asimetría del campo de velocidades, como a que

Campo	$PT$	$\sigma$	$PT_{opt}$	$\sigma$
$\vec{V}_N$	0.77	-2.22	0.85	-0.39
$\vec{V}_{Sim}$	0.81	1.70	0.81	1.70

Tabla 5.1: Tasas de crecimiento del modo  $n_\theta = 1$  para los campos  $\vec{V}_N$  y  $\vec{V}_{Sim}$  a  $Rm = 100$ . El campo  $\vec{V}_N$  no se encuentra de forma natural en su factor  $PT$  óptimo.

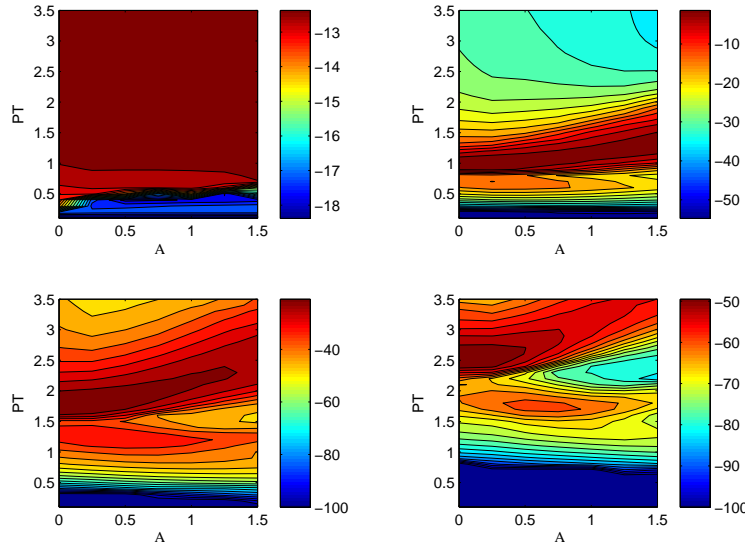


Figura 5.9: Valores de la tasa de crecimiento para el campo  $\vec{V} = \vec{V}_{Sim} + \mathcal{A}\vec{V}_{Dif}$  al variar  $\mathcal{A}$  y  $PT$  para los modos  $n_\theta = 0, 1, 2, 3$  (de izq. a der. y de arriba a abajo).

el factor  $PT$  se aleja del  $PT_{opt}$ .

Por último, se estudió el efecto conjunto de variar tanto el factor  $PT$  como el  $Rm$ . En la figura 5.10 se representa esta dependencia para los distintos modos, observándose que el factor  $PT_{opt}$  es prácticamente independiente del  $Rm$ . Este comportamiento no tiene por qué ser general, ya que aunque la geometría del campo de velocidades no se altere al modificar el  $Rm$ , el operador  $\mathbb{L}$  sí lo hace, modificando las autofunciones de  $\vec{B}$ , y presumiblemente el valor de  $PT_{opt}$ .

### Resonancias en otros $PT$

Si se observa la posición de los máximos del resto de modos de la figura 5.8, estas parecen estar relacionadas entre si mostrándose como múltiplos o submúltiplos del valor  $PT_{opt}$ . En la tabla 5.2 se detalla la posición de los máximos para los modos  $n_\theta = 1, 2$  y  $3$  relativo al valor  $PT_{opt}$ .

Aunque esta relación no es tan clara para el campo  $\vec{V}_{Sim}$ , se puede modelar este com-

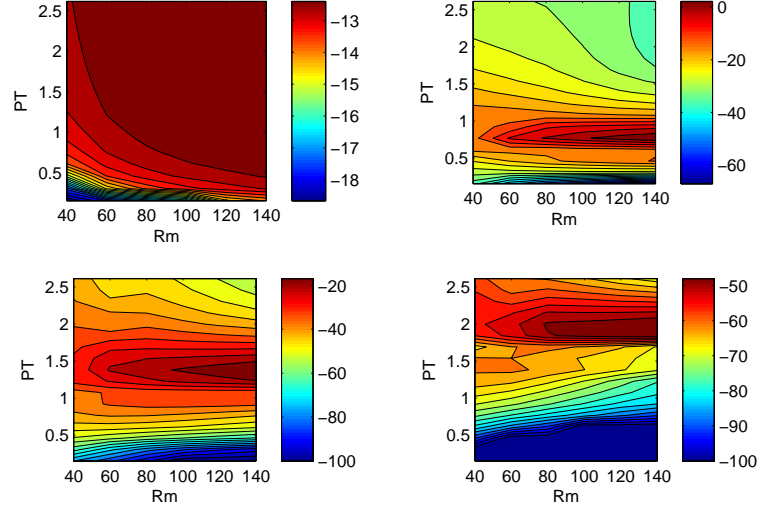


Figura 5.10: Valores de la tasa de crecimiento para  $\vec{V}_{Sim}$  al variar  $Rm$  y  $PT$  para los modos  $n_\theta = 0, 1, 2, 3$  (de izq. a der. y de arriba a abajo).

Modo $n_\theta$	$\vec{V}_N$		$\vec{V}_{Sim}$	
	Max. rel.	Max. abs.	Max. rel.	Max. abs.
1	0.6	1.0	0.7	1.0
2	1.1	2.0	1.2	1.8
3	1.6	2.8	1.9	2.5

Tabla 5.2: Posición de los máximos absolutos y relativos de la tasa  $\sigma_{n_\theta}$  de los campos  $\vec{V}_N$  y  $\vec{V}_{Sim}$  a  $Rm = 100$ . Los valores mostrados son relativos a los valores  $PT_{opt}$  de la tabla 5.1.

portamiento como

$$PT_{MAX}(n_\theta) = PT_{opt} \cdot n_\theta \quad (5.3)$$

$$PT_{max}(n_\theta) = \frac{1}{2} PT_{opt} \cdot n_\theta \quad (5.4)$$

en donde  $PT_{MAX}$  se refiere al máximo absoluto y  $PT_{max}$  al secundario.

Este resultado está relacionado con la advección de los elementos del fluido a través de una trayectoria cerrada. Si se parte de una posición en la que el campo de velocidades es óptimo para la creación de campo magnético, ese elemento de volumen se desplazará siguiendo las líneas de corriente, y arrastrando consigo el campo magnético. Si la trayectoria es cerrada el elemento de volumen volverá a la posición en la que la creación de  $\vec{B}$  es máxima, y si el campo magnético de ese elemento de volumen no se ha modificado notablemente, se producirá una realimentación que favorecerá el crecimiento de la energía magnética. Si la trayectoria no se cierra, esa realimentación no se produce, y la efectividad se reduce.

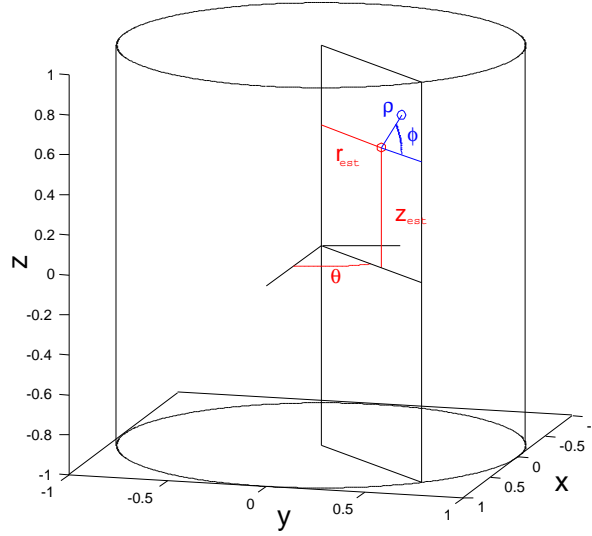


Figura 5.11: Definición de las coordenadas  $r, \theta, z$ , en un sistema cilíndrico, y las coordenadas polares  $\rho$  y  $\phi$ , tomando como origen el punto de estancamiento del cuadrante norte.

Para estudiar la relación entre el ratio  $PT$  y las trayectorias del campo de velocidades se acude de nuevo a la división en componentes poloidal y toroidal. En el plano poloidal, las líneas de corriente en cada cuadrante son líneas cerradas que rodean al punto de estancamiento correspondiente. Si se toma ese punto como origen se puede definir la posición en el plano con las variables  $\{\rho, \phi\}$ , siguiendo el esquema de la figura 5.11 [53]. Para obtener una trayectoria cerrada en el volumen, se debe exigir una relación racional entre el número de vueltas recorrido alrededor del eje  $Z$  ( $\Delta\theta = 2\pi m_\theta$ ) y el número de vueltas en el plano poloidal ( $\Delta\phi = 2\pi m_\phi$ ). Se define esa relación como el *Twist number*:

$$Tw = \frac{\Delta\phi}{\Delta\theta} = \frac{m_\phi}{m_\theta} \quad (5.5)$$

En la figura 5.12 se representan varias trayectorias dentro del campo  $\vec{V}_{Sim}$  para los valores de  $PT$  resonantes, detallados en la tabla 5.2. En estos casos, un  $Tw$  entero produciría una resonancia en los modos  $n_\theta = Tw - 1$ . Debido a la amplia variedad de combinaciones posibles, se ha restringido el análisis a trayectorias con  $Tw$  entero, aunque trayectorias con otras combinaciones de  $m_\phi, m_\theta$  podrían explicar los picos secundarios que se obtienen a valores más bajos de  $PT$ .

Sin embargo, esta variable no explica por sí sola las resonancias de la figura 5.8. El twist number depende tanto de la línea de corriente como del ratio  $PT$ , encontrándonos una variación continua tal como muestra la figura 5.13 para el campo  $\vec{V}_{Sim}$ . En la primera figura se representa la variación del  $Tw$  para las líneas de corriente que cruzan el eje  $\phi = \pi$ , con  $PT/PT_{opt} = 1$ . Se observa que para este valor de  $PT$  (óptimo para el modo  $n_\theta = 1$ ) existen dos órbitas cerradas, a  $r = 0.5$ , y a  $r = 0.64$ , con  $Tw = 2, 3$ , respectivamente. Manteniendo la posición radial constante y variando el factor  $PT$  también se consigue

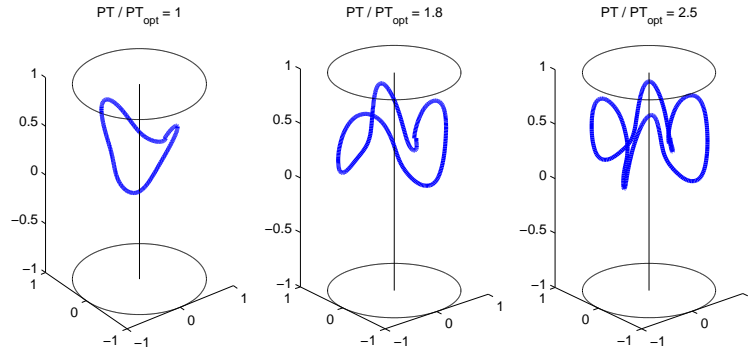


Figura 5.12: Trayectorias cerradas en el campo  $\vec{V}_{Sim}$  para distintos valores de  $PT$ . El  $Tw$  (ec. 5.5) está relacionado con el modo excitado ( $Tw = 2, 3, 4$  con  $n_\theta = 1, 2, 3$ , respectivamente).

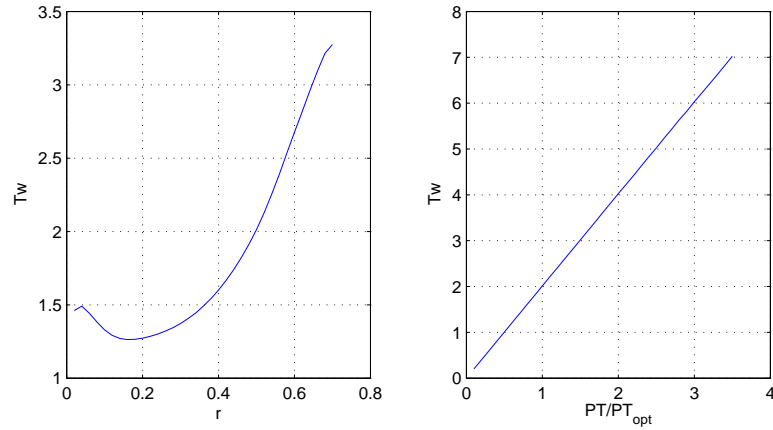


Figura 5.13:  $Tw$  para el campo  $\vec{V}_{Sim}$ , a  $Rm = 100$ , para (a)  $r = 0 \rightarrow r_{est}$ ,  $z = z_{est}$ ,  $PT/PT_{Opt} = 1$  y (b)  $r = 0.5$ ,  $z = z_{est}$ ,  $PT/PT_{Opt} = 0.1 \rightarrow 3.5$

acceder a distintas órbitas, como muestra la figura 5.13b. En la figura 5.15a se representa el comportamiento global.

Debido a que es posible encontrar dos trayectorias cerradas con distintos  $Tw$  combinando adecuadamente la línea de corriente con el factor  $PT$ , se debe añadir más condiciones para explicar la resonancia de las tasas de energía. Una posible explicación es la cantidad de flujo que arrastra cada línea de corriente (proporcional a  $\rho$ ), lo que aumentaría la importancia de las órbitas para  $\rho$  grandes. Otro factor a tener en cuenta sería la helicidad media a lo largo de una línea de corriente,

$$\mathcal{H} = \frac{1}{T} \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot (\nabla \times \vec{V}) dt \quad (5.6)$$

con  $\Gamma$  la línea de corriente y  $T$  el periodo temporal de la órbita.

Si bien la resonancia se podría explicar argumentando que es necesario tanto que la línea

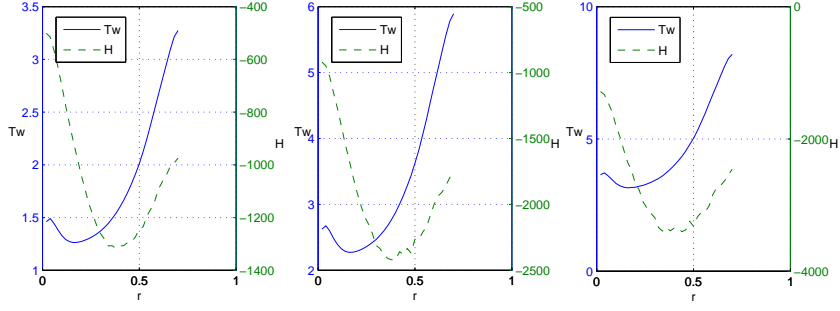


Figura 5.14:  $Tw$  y  $\mathcal{H}$  para el campo  $\vec{V}_{Sim}$ , a  $Rm = 100$ , para  $r = 0 \rightarrow r_{est}$ ,  $z = z_{est}$ , para valores resonantes de  $PT$ :  $PT/PT_{opt} = 1, 1.8, 2.5$

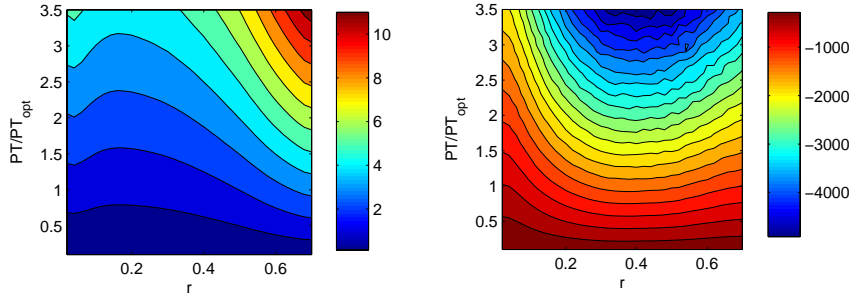


Figura 5.15: (a)  $Tw$  y (b)  $\mathcal{H}$  para el campo  $\vec{V}_{Sim}$ , a  $Rm = 100$ , para  $r = 0 \rightarrow r_{est}$ ,  $z = z_{est}$ , y  $PT/PT_{opt} = 0.1 \rightarrow 3.5$ . Los trazos gruesos en (a) identifican las posiciones con  $Tw \in \mathbb{N}$ .

de corriente sea una órbita cerrada con  $Tw = n_\theta + 1$ , como que además esta órbita lleve asociada una helicidad máxima, la combinación de ambas condiciones no contribuye con una respuesta determinante, aunque si indica un camino a estudiar. En la figura 5.14 se representa el  $Tw$  y la helicidad para todas las órbitas, en los valores de  $PT$  resonantes. Se observa cómo las órbitas que tienen  $Tw$  entero se acercan a posiciones con  $|\mathcal{H}|$  máximo, y que el modo excitado en cada caso cumple que  $n_\theta = Tw - 1$ . En la figura 5.14b se representa el comportamiento global de  $\mathcal{H}$ .



## 5.4 Efectos de la dependencia temporal del campo medio de velocidades en $\sigma$

Para modelar el efecto de las distintas escalas temporales al comportamiento MHD se introdujo una perturbación periódica en el campo de velocidades,

$$\vec{V}_\omega(t) = \vec{V}_{Sum} + \mathcal{A}\vec{V}_{Dif} \cos(\omega t) = \frac{\vec{V}_A + \vec{V}_B}{2} + \mathcal{A} \frac{\vec{V}_A - \vec{V}_B}{2} \cos(\omega t) \quad (5.7)$$

estudiándose la dependencia de las tasas con los parámetros  $\omega$ ,  $\mathcal{A}$  y  $Rm$  para combinaciones de distintos campos  $\vec{V}_A, \vec{V}_B$ .

En primer lugar se evalúa la tasas de crecimiento de los campos sin dependencia temporal,  $\vec{V}_A, \vec{V}_B$ , y  $\vec{V}_{Sum}$ , obteniendo que el modo con mayor tasa de nuevo es el modo del modo  $n_\theta = 1$ .

Una vez caracterizados los campos estáticos, se estudia el campo  $\vec{V}_\omega(t)$ , variando el parámetro  $\omega$  entre  $[10^{-1}, 10^3]$ . Un ejemplo para frecuencias medias se muestra en la figura 5.16, en donde el campo  $\vec{V}_\omega$  ha sido generado con el campo  $V_{Sim}$  y el campo  $VKB2$ <sup>1</sup>. En ella se observa el mismo tipo de dinámica (un periodo de relajación del orden de 1 u.t., seguido de una evolución característica), salvo que al tener campos variables en el tiempo la evolución de la energía no es exponencial, sino que sigue una modulación con frecuencia  $\omega$ .

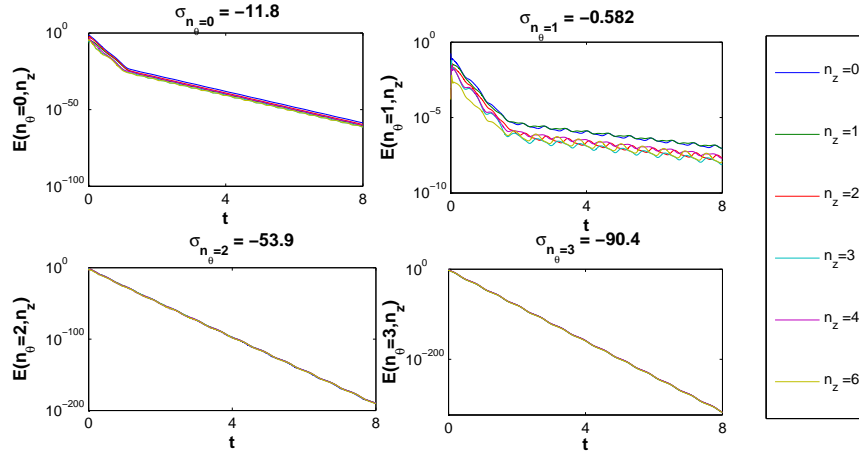


Figura 5.16: Evolución de la energía para los campos  $VKB2$  y  $\vec{V}_{Sim}$  para  $Rm = 80$  y  $\omega = 10$ , modos  $n_\theta = 0, 1, 2, 3$ .

La tasa de crecimiento por lo tanto también depende del tiempo. Por ejemplo, en el modo  $n_\theta = 1$  de la fig. 5.16 se puede observar como la tasa se vuelve temporalmente positiva. Por lo tanto, durante una parte del periodo el sistema presenta efecto dinamo, aunque al tener en cuenta la evolución a lo largo de un ciclo se ve como la energía, globalmente, decae.

<sup>1</sup>Este último campo proviene del campo  $VKBaf$  obtenido en otros experimentos, pero adaptado a nuestra configuración.

Debido a esto para poder caracterizar el campo de velocidades es más adecuado definir una tasa promedio:

$$\langle \sigma_{n_\theta, n_z} \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \sigma_{n_\theta, n_z}(t) dt \quad \text{con} \quad \sigma_{n_\theta, n_z}(t) = \frac{\partial \text{Log}(E_{n_\theta, n_z})}{\partial t} \quad (5.8)$$

Como se explicó en el capítulo anterior, aunque los campos originales estén renormalizados a un  $Rm$  y  $PT$  determinados, los campos construidos a partir de ellos no tienen por qué estarlos. Si bien su  $Rm_{efec}$  es siempre menor (estando por tanto en desventaja con los campos  $\vec{V}_{A,B}$ ) el factor  $PT$  no está determinado, y lo que es más importante, el valor  $PT_{opt}$  tampoco. Este efecto se observaba en la sección 5.3 con los campos  $\vec{V}_N$  y  $\vec{V}_{Sim}$ , pero puede ocurrir que durante el recorrido a lo largo de un periodo se encuentre un campo  $\vec{V}_\omega(t_i)$  para el que la tasa de crecimiento sea superior a la de cualquier otro campo.

#### 5.4.1 Alternancia entre campos con simetría $R_\pi$

En primer lugar se evaluará el efecto de variar entre dos campos de velocidades que mantienen la simetría  $R_\pi$ , y en donde las diferencias vienen marcadas por la diferente posición del punto de estancamiento en el plano poloidal, o por la posición de la máxima velocidad toroidal. Los resultados presentados a continuación corresponden a utilizar como campos generadores dos campos  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$ , simetrizados a partir de los campos experimentales  $VKB2$  y  $\vec{V}_N$ . En la figura 5.17 se presenta el módulo de los campos  $\vec{V}_{Sim}$  y  $\vec{V}_{Dif}$ , cumpliéndose que  $\bar{V}_{Dif} = 0.22\bar{V}_{Sum}$ . Las diferencias entre  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$  se desarrollan principalmente en pequeños dominios de tamaño  $L_{Dif} \sim 0.4R$ .

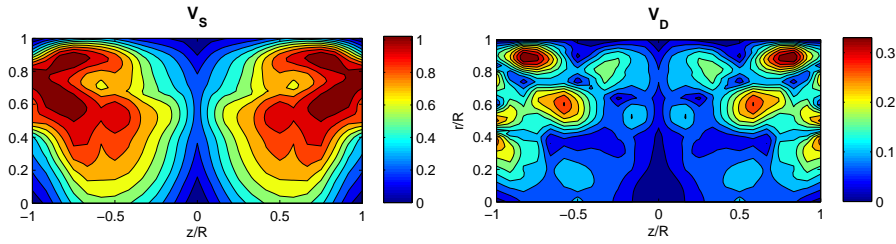


Figura 5.17: Módulo de los campos (a)  $\vec{V}_{Sum}$  y (b)  $\vec{V}_{Dif}$ , generados a partir de los campos  $VKB2$  y  $\vec{V}_{Sim}$  (ambos con simetría  $R_\pi$ ), según ec. 5.7.

Los resultados para un barrido de la variable  $\omega \in [1, 10^3]$  se detallan en la figura 5.18. En ella se distinguen tres zonas bien diferenciadas. En la primera zona ( $LF \equiv (\omega < 100)$ ) la tasa se muestra independiente de la frecuencia. Esta tasa se puede aproximar con los valores de las tasas de los campos estáticos, teniendo en cuenta que, dentro de un ciclo, el campo  $\vec{V}_\omega$  evoluciona lentamente siguiendo el esquema  $\vec{V}_A \rightarrow \vec{V}_{Sim} \rightarrow \vec{V}_B \rightarrow \vec{V}_{Sim} \rightarrow \vec{V}_A$

$$\langle \sigma_{LF} \rangle \simeq \frac{1}{4}(\sigma_A + \sigma_B + 2\sigma_{Sum}) \quad (5.9)$$

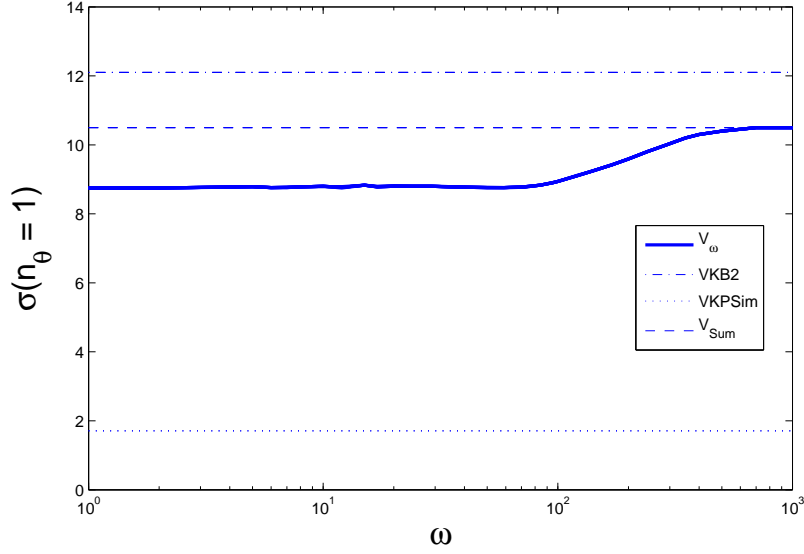


Figura 5.18: Tasa del modo  $n_\theta = 1$  del campo  $\vec{V}_\omega$  vs  $\omega$  para  $Rm = 100$ , para dos campos con simetría  $R_\pi$ . Los trazos mas gruesos indican la diferencia entre las tasas para  $n_z = 0, \dots, 5$ . El campo no se comporta como el campo promedio hasta  $\omega \sim 400$ .

Este resultado se interpreta teniendo en cuenta que la evolución del campo de velocidades es lo suficientemente lenta como para que el campo magnético se adecúe al campo  $\vec{V}_\omega(t)$  en ese instante.

Al aumentar la frecuencia esta adaptabilidad se empieza a perder, entrando en la zona de frecuencias medias ( $MF \equiv \omega \in [100, 400]$ ) en la que la tasa varía rápidamente con la frecuencia. Este rango de frecuencias se puede estimar teniendo en cuenta el tiempo de difusión del campo magnético en las zonas en las que  $\vec{V}_D$  es más importante. El tamaño típico de esas zonas es de  $L_{Dif} \sim 0.4R$ , y el tiempo necesario para que  $\vec{B}$  se difunda en ese dominio es de

$$T_D = \mu_0 \sigma L_{Dif}^2 \quad (5.10)$$

que convenientemente adimensionalizado llevaría a una frecuencia crítica

$$\omega_c = \frac{2\pi}{(L_{Dif}/2R)^2} = 140 \quad (5.11)$$

Si la frecuencia sigue aumentando se entraría en la zona de altas frecuencias,  $HF \equiv \omega > 400$ , en donde el campo magnético es incapaz de seguir las fluctuaciones del campo de velocidades, y la tasa de crecimiento de la energía viene determinado por la del campo medio  $\vec{V}_{Sum}$ .

Es por tanto en esta zona de altas frecuencias en la que es posible despreciar las fluctuaciones del campo de velocidad. Recuperando la dimensionalización de la frecuencia, ésta mostraría que fluctuaciones con frecuencias típicas por debajo de los 800 rad/s no pueden ser

ignoradas, pues afectan a la evolución del campo magnético. Dentro de este rango estarían ambas escalas lentas encontradas en nuestro experimento.

Estos resultados pueden verse con más detalle en la gráfica 5.19, en la que se representa la evolución de la energía y de la tasa de crecimiento para  $\omega \in LF$  y  $HF$ . Para frecuencias bajas se observa cómo la tasa instantánea sigue la evolución del campo de velocidades, aproximándose a la tasa del campo correspondiente. Cuando se sube la frecuencia, la energía no es capaz de evolucionar tan rápido, haciendo que la tasa instantánea oscile alrededor de un valor, precisamente el valor de la tasa del campo medio  $\vec{V}_{Sum}$ .

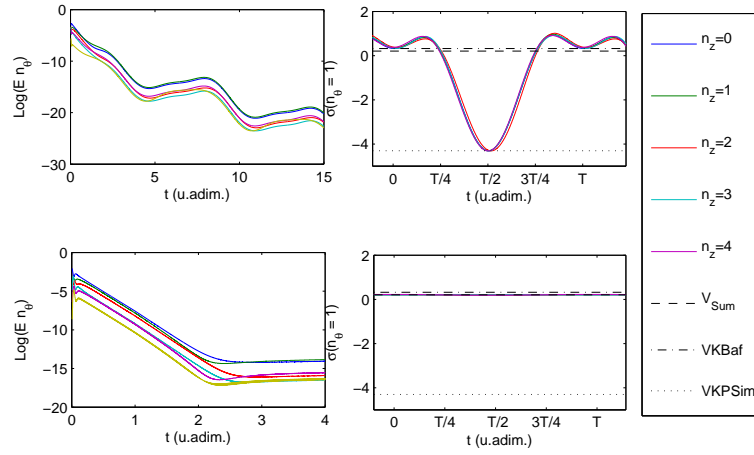


Figura 5.19: Evolución de la energía y de la tasa instantánea del campo  $\vec{V}_\omega$  generado por dos campos con simetría  $R_\pi$  a  $Rm = 60$ . **(a)**  $\omega = 1$  **(b)**  $\omega = 10^3$ . Mientras que para frecuencias bajas la tasa evoluciona entre las tasas de los campos estáticos, para frecuencias altas la tasa solo puede oscilar alrededor del valor del campo medio.

Por último, en la figura 5.20 se muestra la evolución de  $\langle \sigma \rangle$  frente a  $\omega$  para varios  $Rm$ , encontrando un comportamiento muy similar.

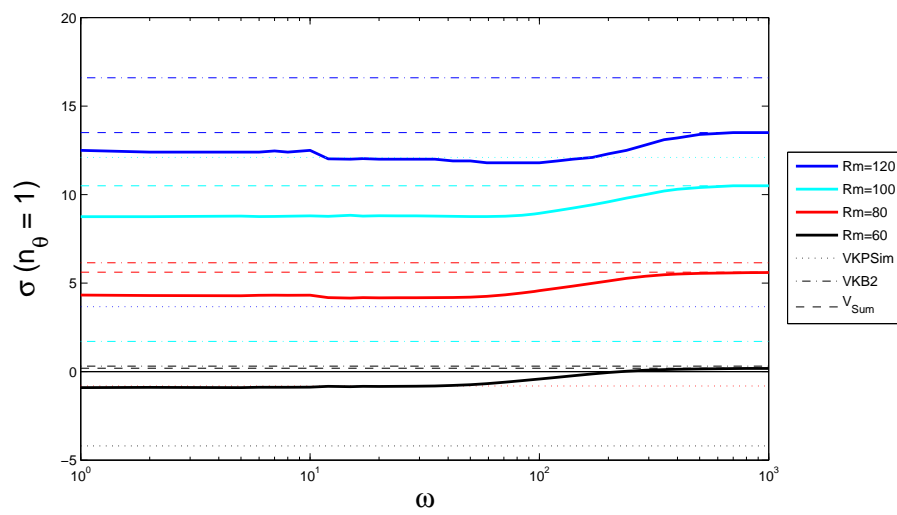


Figura 5.20: Tasa  $\sigma(n_\theta = 1)$  del campo  $V_\omega$  vs  $\omega$  para varios  $Rm$ , para dos campos con simetría  $R_\pi$ . El comportamiento es análogo al incrementar el  $Rm$ .

### 5.4.2 Alternancia entre campos sin simetría $R_\pi$

El siguiente estudio fue realizado con campos asimétricos obtenidos experimentalmente, tal como se explicó en el capítulo 3. Los campos  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$  son reflejo especular, de tal manera que el campo  $A$  representa el estado norte ( $N$ ) y el campo  $B$  el sur ( $S$ ). En este caso, el campo  $\vec{V}_{Sum}$  se corresponde al campo con simetría  $R_\pi$ ,  $\vec{V}_{Sim}$ . El esquema de la evolución temporal se detalla en la figura 5.21. En este caso, las diferencias entre uno y otro campo son mucho más importantes que en el apartado anterior. Como se puede observar en la figura 5.22 las diferencias topológicas se concentran en el ecuador con un tamaño típico  $L_{Dif} = 1.16 R$ . En módulo se cumple que  $\bar{V}_{Dif} = 0.39\bar{V}_{Sum}$ , aproximadamente el doble que en el caso presentado anteriormente.

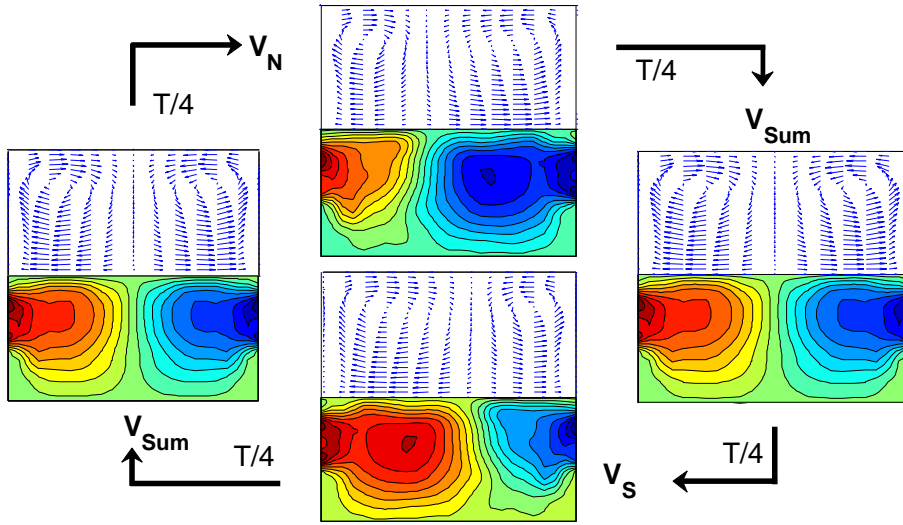


Figura 5.21: Evolución del campo de velocidades asimétricos.  $T$  es el periodo.

Variando entre los campos  $\vec{V}_N$  y  $\vec{V}_S$  se simularán las inversiones entre estados observadas experimentalmente. Aunque la modelización más adecuada sea el de una onda cuadrada (debido a que el tiempo necesario para una inversión es mucho menor que el tiempo de residencia en cada estado), se optó por estudiar transiciones más suaves, para poder realizar estudios comparativos con las transiciones entre campos con simetría  $R_\pi$ .

Procediendo de igual manera que en el apartado anterior, se evaluará en primer lugar las tasas de los campos estáticos. Como era de esperar, las tasas de los campos  $N$  y  $S$  son iguales (para  $Rm = 100$ ,  $\sigma_N = \sigma_S = -6.14$ ), mientras que la tasa del campo promedio  $\vec{V}_{Sum} \equiv \vec{V}_{Sim}$  es, en este caso, superior a las tasas de los campos asimétricos (para  $Rm = 100$ ,  $\sigma_{Sum} = -2.71$ ).

Para el campo de velocidades dinámico se observa un comportamiento similar al apartado anterior (figura 5.23). A bajas frecuencias la tasa se encuentra en la media de la tasa de los campos estáticos,

$$\sigma|_{LF} \sim \frac{1}{4}(\sigma_N + \sigma_S + 2\sigma_{Sum}) = \frac{1}{2}(\sigma_N + \sigma_{Sum}) \quad (5.12)$$

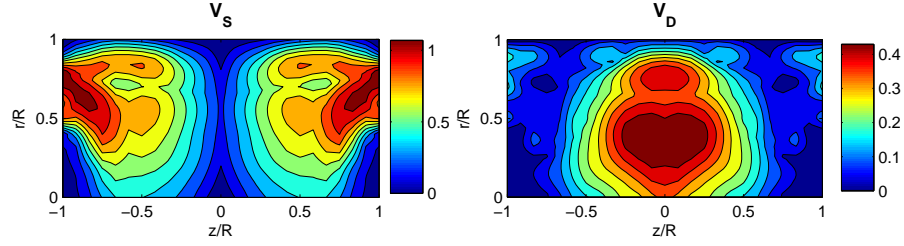


Figura 5.22: (a) Módulo del campo  $\vec{V}_{Sum}$  (b) Módulo del campo  $\vec{V}_{dif}$ . Las perturbaciones son importantes en la zona del ecuador, mientras que serían despreciables en los extremos del cilindro.

mientras que a altas frecuencias la tasa tiende a la del campo promedio,

$$\sigma|_{HF} \sim \sigma_{Sum} \quad (5.13)$$

Sin embargo la transición no resulta tan brusca como en casos anteriores, encontrando un incremento suave entre  $\omega = 10, 200$ . Si se realiza un análisis análogo al del apartado anterior, se observa cómo la escala de cambio es del orden de  $L_{Dif} \sim 1.16 R$ , lo que conduce a una frecuencia crítica adimensional de

$$\omega_c = \frac{2\pi}{(L_{Dif}/2R)^2} = 19 \quad (5.14)$$

Esta frecuencia resulta mucho menor que la encontrada para los campos con simetría  $R_\pi$ , y nos conduce a que inversiones con frecuencias menores que 40 rad/s deben de tenerse en cuenta para predecir correctamente el valor umbral del efecto dinamo.

Otro resultado destacable es la resonancia que se observa en los alrededores de  $\omega = 100$ . Aunque ninguno de los campos estáticos está por encima del  $Rm^c$  (es decir, ninguno tiene  $\sigma > 0$ ), el campo  $\vec{V}_\omega$  supera el umbral, mostrando efecto dinamo. Hay que destacar que este efecto es debido a la dinámica del campo  $\vec{V}_\omega$  y no a características de los campos estáticos; ningún campo de velocidades obtenido variando la fase de la expresión 5.7 muestra esa tasa.

La resonancia podría producirse por un acople entre las líneas de corrientes y el movimiento periódico de la frontera. Para frecuencias bajas el elemento de fluido recorre varias trayectorias antes de que la posición de la frontera cambie apreciablemente, mientras que para frecuencias altas la trayectoria promedia las fluctuaciones. Sin embargo en la frecuencia de resonancia, cuando el elemento de fluido llega a la zona en la que oscila la frontera ( $z \in \pm z_0$ ), el tiempo que le lleva recorrer esa altura ( $t \sim 2z_0/V_z$ ) es el tiempo que tarda la frontera en recorrer esa misma distancia.

Explicar este comportamiento a partir de trayectorias resulta mucho más complicado que para los campos estáticos,  $\vec{V}_{N,Sim}$ . Mientras que para estos es simple definir líneas de corriente, para un caso dinámico no se ha encontrado una descripción adecuada a partir

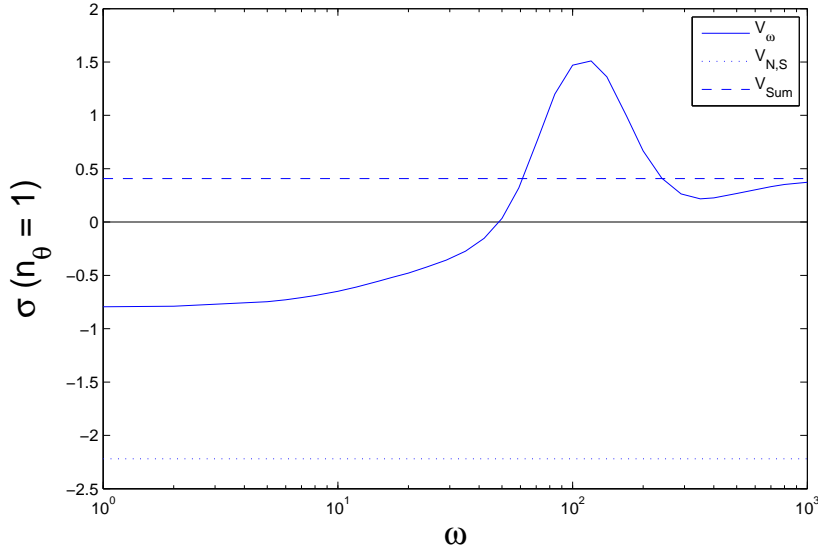


Figura 5.23: Tasas de crecimiento del modo  $n_\theta = 1, n_z = 1, \dots, 5$  a  $Rm = 100$  para la simulación con campos  $N$  y  $S$ . Aunque ninguno de los campos  $N$ ,  $S$  ni  $SUM$  está por encima del  $Rm^c$ , se encuentra una región en  $\omega \sim 100$  en la que se obtendría efecto dinamo.

de la cual definir una trayectoria cerrada. Estas trayectorias no solo deberían incluir una relación entre el ángulo azimutal recorrido  $\Delta\theta$  y el recorrido en el plano poloidal  $\Delta\phi$ , sino también una relación con la fase de la perturbación temporal  $\omega\Delta t$ . Esta última condición, por otro lado, no tiene la misma importancia en todos los casos debido a la distribución espacial de  $V_{Diff}$  (ver figura 5.22); mientras que este efecto es determinante si la trayectoria se acerca al ecuador, para el resto del volumen no tiene tanto peso. Aún así es posible observar trayectorias atrapadas en la frontera en casos determinados. En la figura 5.24 se dibujan las trayectorias para  $\omega = 1, 100$  y  $1000$ . En la primera figura se observa cómo la trayectoria se vuelve caótica mientras que en la segunda figura ésta sigue un movimiento oscilatorio en los alrededores del ecuador. Finalmente, en la tercera figura las variación de la velocidad es tan rápida que la trayectoria es la misma que la que se obtendría en el campo medio.

Al variar el  $Rm$  se observa que tanto la posición del máximo como la altura relativa de la resonancia dependen de este factor (figura 5.25). La dependencia de  $\omega_{res}$  con el  $Rm$  se explica al considerar que un aumento en el  $Rm$  produce una mayor velocidad, y por lo tanto es necesario acelerar el movimiento de la frontera para mantener al elemento de fluido atrapado. El aumento de la amplitud de resonancia es debido al aumento típico del factor de inducción frente al de difusión.

Por último, se ha estudiado la dependencia de la tasa al variar el parámetro  $\mathcal{A}$  de la ecuación 5.7. Este factor hará que la asimetría de los campos extremos (es decir,  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$ ) varíe uniformemente, afectando tanto al valor de  $\sigma_{A,B}$  (y por lo tanto, a  $\sigma_{LF}$ ) como a la



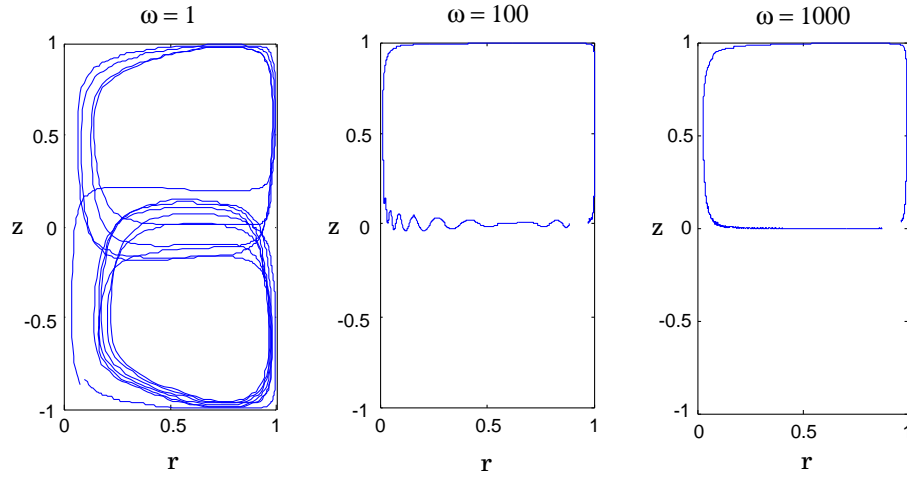


Figura 5.24: Trayectorias en el plano poloidal para frecuencias **(a)**  $\omega = 1$  **(b)**  $\omega = \omega_{res}$  **(c)**  $\omega = 10^3$  a  $Rm = 100$ . El acople entre la trayectoria y el desplazamiento de la frontera produce la trayectoria en zig-zag en la figura central. Este acople sería responsable de la resonancia encontrada en  $\vec{V}_\omega$ .

resonancia encontrada. De nuevo, debido a las características del programa de simulación, son los campos  $\vec{V}_A$  y  $\vec{V}_B$  los que están normalizados a un  $Rm$  determinado, mientras que el campo  $\vec{V}_{Sum}$  se encuentra a un  $Rm_{efec} < Rm$ . Este  $Rm_{efec}$  dependerá del valor de  $\mathcal{A}$ , con lo que, si se mantiene el  $Rm$  fijo para los campos extremos, el valor de  $\sigma_{Sum} = \sigma_{HF}$  dependerá del factor de asimetría. Para evitar esto último, en la figura 5.26 se representa el comportamiento de  $\vec{V}_\omega$  para varios  $\mathcal{A}$ , pero ajustando el  $Rm$  para que el valor del  $Rm_{efec}$  del campo simétrico sea el mismo, de tal manera que  $\sigma_{HF} \neq f(\mathcal{A})$ . En la figura se observa cómo la resonancia crece con  $\mathcal{A}$ , afianzando la hipótesis de que ésta es debida al desplazamiento de la frontera. También se observa, como era de esperar, que  $\sigma_{LF} \rightarrow \sigma_{Sim}$  cuando  $\mathcal{A} \rightarrow 0$ .

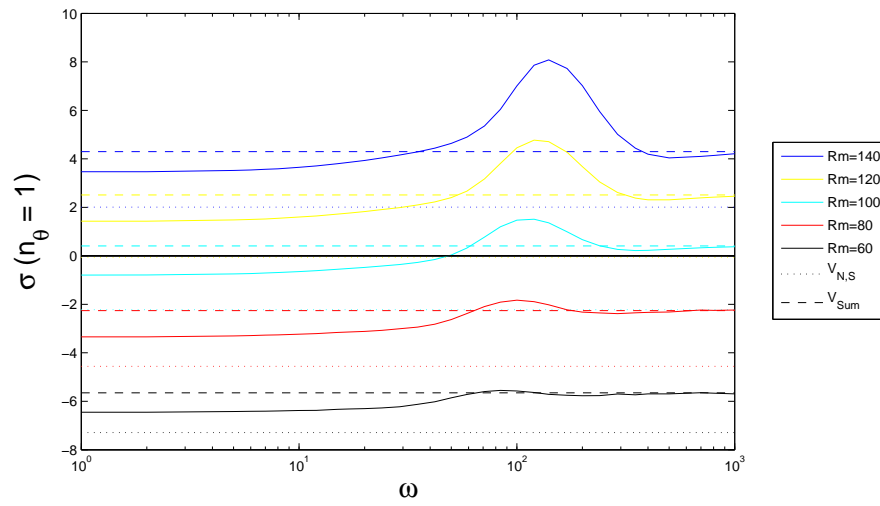


Figura 5.25: Tasas de crecimiento del modo  $n_\theta = 1, n_z = 1, \dots, 5$  a  $Rm = 60, 80, 100, 120, 140$

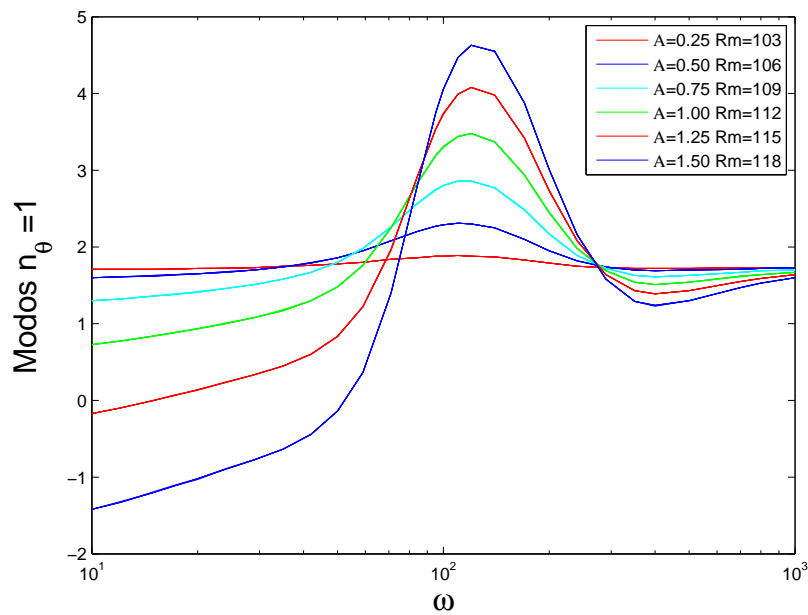


Figura 5.26: Tasas de crecimiento del modo  $n_\theta = 1$  frente a  $\omega$  para distintos valores de  $\mathcal{A}$ .

# Conclusiones y perspectivas

## Conclusiones

Siendo esta la primera tesis en la línea de investigación de Magnetohidrodinámica de este grupo, gran parte de ésta se ha dedicado al diseño y configuración, tanto en el apartado experimental como el numérico.

Se ha construido un sistema experimental hidrodinámico, sistema que ha sufrido varias modificaciones hasta alcanzar una configuración robusta y estable. En él es posible realizar distintos tipos de mediciones de velocimetría óptica (PIV o LDA), permitiendo modificar parámetros tales como la relación de aspectos del cilindro  $\Gamma$ , la velocidad de rotación de los propulsores (y con ella el número de Reynolds) o romper la simetría introduciendo una diferencia en la frecuencia de giro de los dos propulsores. También se ha configurado el sistema para que, tanto la velocidad de los propulsores como la adquisición de medidas se puedan controlar de forma centralizada y remota.

Se han diseñado los protocolos con los que realizar las distintas mediciones, así como desarrollado los programas necesarios para el análisis de resultados.

En cuanto a la parte numérica, se ha adaptado un código de simulación de dinamo cinemática ya existente a las necesidades de la investigación. Entre otras modificaciones, el nuevo código permite la introducción de campos de velocidades dependientes del tiempo. Igualmente, se han desarrollado los protocolos y las herramientas de análisis de los distintos tipos de simulaciones.

Los resultados obtenidos han sido cuantiosos, tanto en el apartado experimental como en el numérico. Se ha reportado, por primera vez en un flujo de von Kármán, una biestabilidad en el sistema que produce que los vórtices ecuatoriales se desplacen con una velocidad angular  $\Omega_z$  distinta de cero. Cada uno de los estados observados es estable, con tiempos de vida que alcanzan los  $10^5$  s. Sin embargo, es posible observar como el sistema cambia entre estados espontáneamente, invirtiendo el valor de  $\Omega_z$ . Estas inversiones siguen una distribución estadística exponencial, típica de los sistemas biestables en presencia de ruido. Se han caracterizado los tiempos de vida medios, encontrándose que la biestabilidad no solo está presente en el caso de contrarrotación simétrica, sino que ésta también se encuentra cuando se introduce una diferencia en la rotación de los propulsores, para una pequeña ventana de  $|\Delta| < 4 \cdot 10^{-3}$ . Fuera de esta ventana no se produce ninguna inversión, estando el sistema anclado al estado favorecido por la diferencia de rotación en los propulsores.

La biestabilidad se refleja en el campo medio de velocidades, observándose dos estados, reflejo especular el uno del otro, que rompen la simetría  $R_\pi$ , una de las características de este tipo de flujo. Esta asimetría puede ser descrita mediante distintas variables: energía de la parte simétrica y antisimétrica del campo de velocidades, posición en  $z$  en la que la velocidad azimutal es nula ( $z_0$ ), o velocidad media azimutal en el ecuador ( $V_\theta^{eq}$ ). Se ha descrito la dependencia de la asimetría con el  $Re$ , con la diferencia de rotación en los propulsores,  $\Delta$ , o con la forma de éstos.

No se ha encontrado, en todo el rango de los parámetros  $Re$  y  $\Delta$  explorados, ningún estado en el que se recupere la simetría. La única forma de recuperarla es aumentando la escala temporal hasta que abarque la escala en la que se producen las inversiones de estado. En ese caso obtendríamos de nuevo un campo de velocidades simétrico con una distribución de velocidades no gaussiana, sino de doble joroba, fruto de la superposición de los perfiles de cada estado asimétrico.

Otra posibilidad para recuperar la simetría es mediante un forzado periódico exterior. Utilizando un forzado armónico, se ha aumentado la frecuencia de las inversiones hasta los 0.05 Hz, dos órdenes de magnitud superior al natural. De nuevo obtendríamos un perfil simétrico, pero como superposición de dos estados con perfiles opuestos. Es decir, en ningún momento se conseguiría que el vórtice mostrara una velocidad angular  $\Omega_z = 0$ . Aumentar la frecuencia hace que el sistema pierde la sincronización con la señal externa, aún para amplitudes de forzado grandes.

En cuanto a la parte magnetohidrodinámica, se ha estudiado el efecto de la ruptura de la simetría  $R_\pi$  en el comportamiento magnético, encontrándose que esta asimetría aumenta el umbral del efecto dinamo. Además, se ha detallado el efecto de introducir un campo de velocidades con una modulación armónica. Los resultados muestran cómo la tasa de crecimiento depende de la frecuencia de dicha modulación, distinguiéndose dos zonas. En una primera zona, las fluctuaciones en el campo de velocidad son lo suficientemente lentas como para que el campo magnético se adecúe a ellas, resultando en una fluctuación suave de la tasa de crecimiento. Cuando las variaciones se vuelven más rápidas, el campo magnético es incapaz de seguir las, resultando en un comportamiento similar al del campo de velocidades sin modulación. La frontera entre ambos dominios está relacionada con el tiempo de difusión del campo magnético en la escala de las diferencias topológicas de los campos de velocidades. De esta manera, podemos concluir que mientras que las fluctuaciones en la velocidad a alta frecuencia (como por ejemplo, las turbulentas) pueden ser despreciadas para caracterizar el comportamiento magnetohidrodinámico, las fluctuaciones más lentas (como las debidas al vórtice o a las inversiones) deben ser tenidas en cuenta.

Por último, se ha estudiado el efecto del factor Poloidal-Toroidal en el umbral de la dinamo. Estudios anteriores muestran la existencia de un valor óptimo de este factor, en el que la tasa de crecimiento del principal modo azimutal del campo magnético es máxima. Los resultados presentados muestran que también es posible optimizar la tasa de crecimiento de los modos superiores variando el factor  $PT$ , y que estos valores están relacionados entre si.

Esta relación puede estar relacionada con la aparición de trayectorias cerradas en el flujo, encontrándose una relación entre el número de vueltas realizadas en el plano poloidal con el modo magnético excitado.

## Perspectivas

La variedad en los resultados obtenidos deja muchas cuestiones aún sin responder, lo que permitirá desarrollar nuevas investigaciones en varias direcciones.

En la parte experimental sería deseable la caracterización de la bifurcación del flujo medio. Debido a las limitaciones en el rango de velocidades de los propulsores no es posible reducir el  $Re$  del flujo por debajo de  $Re = 1.7 \cdot 10^3$ . Sin embargo, extrapolando, se espera que para valores de  $Re \sim 10^3$  el campo de velocidades muestre la simetría  $R_\pi$ . Es posible disminuir el  $Re$  mediante el uso de otros fluidos tales como la glicerina, pero para poder realizar una buena caracterización de la bifurcación sería necesario añadir un regulador de temperatura, debido al efecto que ésta tiene sobre la viscosidad.

Otra cuestión sería determinar si esta asimetría se puede anular modificando la geometría de los propulsores, ya que el ángulo  $\beta$  formado por las palas afecta tanto a la relación  $PT$  como a la asimetría del flujo. En este experimento se observa cómo el flujo para los propulsores con  $\beta = 30^\circ$  es más asimétrico que el de los propulsores con  $\beta = 20^\circ$ , con lo que es posible que un menor ángulo pueden mostrar un campo simétrico.

También sería interesante caracterizar la estructura tridimensional del vórtice, y de esta manera poder explicar la distribución de la velocidad ecuatorial. Actualmente se está desarrollando una técnica para realizar mediciones  $PIV$  en una superficie curvada  $r = r_0$  mediante el reflejo de la hoja láser en espejos cónicos. Esto permitiría la medición simultánea de las componentes  $v_\theta, v_z$ .

Por último, es necesario establecer los factores que producen que un estado sea más probable que otro cuando  $\Delta = 0$ . La razón más probable es la influencia de los flujos que se desarrollan detrás de los propulsores, que vendrían determinados a su vez por la distancia entre propulsor y tapa, o por flujos a través de los espacios alrededor de los ejes de los propulsores.

En cuanto al apartado magnetohidrodinámico, la principal cuestión remanente es encontrar un fundamento teórico a la relación entre las trayectorias cerradas en el flujo y la excitación de los modos magnéticos. Otra cuestión sería la de evaluar cómo la existencia de los vórtices ecuatoriales afectan al umbral del efecto dinamo, debido a la ruptura que producen en la axisimetría del flujo.



# Bibliografía

- [1] A. Kolmogorov. *The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds' number*. Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. **32**, (1941), pp. 16–18.
- [2] A. Kolmogorov. *Dissipation of energy in the locally isotropic turbulence*. Comptes rendus (Doklady) de l'Académie des Sciences de l'U.R.S.S. **32**, (1941), pp. 16–18.
- [3] U. Frisch. *Turbulence - The legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge University Press, New-York (1995).
- [4] P. Holmes, J. L. Lumley, G. Berkooz. *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge (1996).
- [5] J.-F. Pinton, R. Labbé. *Correction to the Taylor hypothesis in swirling flows*. J. Phys. II France **4** (9), (1994), pp. 1461–1468.
- [6] H. Alfven. *Existence of electromagnetic-hydrodynamic waves*. Nature **150**, (1942), pp. 405–406.
- [7] M. Faraday. *The Bakerian lecture: Experimental researches in electricity. second series*. Phil. Trans. Roy. Soc. A **122**, (1832), pp. 163–194.
- [8] J. Hartmann. *Hg-dynamics I. Theory of the Laminar Flow of an Electrically Conductive Liquid in a Homogeneous Magnetic Field*. (1937).
- [9] J. Hartmann. *Hg-dynamics II. Experimental investigation on the flow of mercury in an homogeneous magnetic field* (1937).
- [10] J. Larmor. *How could a rotating body such as the Sun become a magnet?* Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci. pp. 159–60.
- [11] W. Elsasser. *Induction effects in terrestrial magnetism*. Phys. Rev. **69**, (1946), pp. 106–16.
- [12] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*. Courier Dover Publications (1981).

- [13] F. Plunian, P. Marty, A. Alemany. *Kinematic dynamo action in a network of screen motions; application to the core of a fast breeder reactor*. J. Fluid Mech. **382**, (1999), pp. 137–154.
- [14] K. Miyamoto. *Plasma physics for nuclear fusion*. Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA (1980).
- [15] S. Asai. *Metallurgical aspects of electromagnetic processing of materials*. Springer Science & Business (1989).
- [16] E. Buckingham. *On physically similar systems; illustrations of the use of dimensional equations*. Phys. Rev. **4** (4), (1914), pp. 345–376.
- [17] I. B. Zeldovich, A. A. Ruzmaikin, D. D. Sokolov. *Magnetic fields in astrophysics*. In *The Fluid Mechanics of Astrophysics and Geophysics*, vol. 3 (1983).
- [18] L. Marié, F. Pétrélis, M. Bourgoïn, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton. *Open questions about homogeneous fluid dynamos: the VKS experiment*. Magnetohydrodynamics **38**, (2002), pp. 156–169.
- [19] M. Bourgoïn, L. Marié, F. Pétrélis, C. Gasquet, A. Guigon, J. B. Luciani, M. Moulin, F. Namer, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton. *Magnetohydrodynamics measurements in the von Karman sodium experiment*. Phys. Fluids **14** (9), (2002), pp. 3046–3058.
- [20] M. D. Nornberg, E. J. Spence, R. D. Kendrick, C. M. Jacobson, C. B. Forest. *Measurements of the magnetic field induced by a turbulent flow of liquid metal*. Phys. of Plasmas **13** (5), (2006), p. 055901.
- [21] M. Bourgoïn, R. Volk, N. Plihon, P. Augier, P. Odier, J.-F. Pinton. *An experimental Bullard-von Kármán dynamo*. New Journal of Physics **8** (12), (2006), p. 329.
- [22] R. Volk, F. Ravelet, R. Monchaux, M. Berhanu, A. Chiffaudel, F. Daviaud, P. Odier, J.-F. Pinton, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis. *Transport of magnetic field by a turbulent flow of liquid sodium*. Phys. Rev. Lett. **97** (7), (2006), p. 074501.
- [23] R. Volk, P. Odier, J.-F. Pinton. *Fluctuation of magnetic induction in von Kármán swirling flows*. Phys. Fluids **18** (8), (2006), p. 085105.
- [24] P. Davidson. *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Cambridge Texts in Applied Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, U.K.; New York, U.S.A. (2001).
- [25] F. Cattaneo, E.-J. Kim, D. W. Hughes. *Suppression of chaos in a simplified nonlinear dynamo model*. Phys. Rev. Lett. **76**, (1996), p. 2057.



- [26] B. Dubrulle, P. Blaineau, O. Lopes, F. Daviaud, J.-P. Laval, R. Dolganov. *Bifurcations and dynamo action in a Taylor-Green flow*. *New Journal of Physics* **9** (8), (2007), p. 308.
- [27] T. Cowling. *The magnetic field of sunspots*. *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.* **94**, (1933), pp. 39–48.
- [28] E. Parker. *The formation of sunspots from the solar toroidal field*. *Astrophys. J.* **121**, (1955), pp. 491–507.
- [29] F. Busse. *Magnetohydrodynamics of the Earth's dynamo*. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **10** (1), (1978), pp. 435–462.
- [30] R. T. Merrill, M. W. McElhinny, P. L. McFadden. *The magnetic field of the Earth: paleomagnetism, the core, and the deep mantle*. Academic Press (1996).
- [31] S. Chandrasekhar. *On cosmic magnetic fields*. In *Geophysics Symposium on Solar and Terrestrial Relationships*. PNAS (1961).
- [32] G. Glatzmaier, P. Roberts. *A three-dimensional self-consistent computer simulation of a geomagnetic field reversal*. *Nature* **377**, (1995), pp. 203 – 209.
- [33] M. Berhanu, R. Monchaux, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, L. Marié, F. Ravelet, M. Bourgoïn, P. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk. *Magnetic field reversals in an experimental turbulent dynamo*. *Europhys. Lett.* **77**, (2007), p. 59001.
- [34] F. Pétrélis, S. Fauve. *Chaotic dynamics of the magnetic field generated by dynamo action in a turbulent flow*. *J. Phys.: Condensed Matter* **20** (49), (2008), p. 494203.
- [35] R. T. Merrill, P. L. McFadden. *Secular variation and the origin of geomagnetic field reversals*. *J. Geophys. Res.* **93** (B10), (1988), pp. 11589–11597.
- [36] A. Gailitis, O. Lielausis, E. Platacis, S. Dement'ev, A. Cifersons, G. Gerbeth, T. Gundrum, F. Stefani, M. Christen, G. Will. *Magnetic Field Saturation in the Riga Dynamo Experiment*. *Phys. Rev. Lett.* **86**, (2001), pp. 3024–3027.
- [37] S. A. Balbus, J. F. Hawley. *A powerful local shear instability in weakly magnetized disks. I - Linear analysis. II - Nonlinear evolution*. *Astrophys. J.* **376**, (1991), pp. 214–233.
- [38] F. Stefani, A. Gailitis, G. Gerbeth. *Magnetohydrodynamic experiments on cosmic magnetic fields*. *Z. Angew. Math. Mech.* (88), (2008), pp. 930–954.
- [39] D. R. Sisan, N. Mujica, W. A. Tillotson, Y.-M. Huang, W. Dorland, A. B. Hassam, T. M. Antonsen, D. P. Lathrop. *Experimental Observation and Characterization of the Magnetorotational Instability*. *Phys. Rev. Lett.* **93** (11), (2004), p. 114502.

- [40] F. Stefani, T. Gundrum, G. Gerbeth, G. Rudiger, M. Schultz, J. Szklarski, R. Hollerbach. *Experimental Evidence for Magnetorotational Instability in a Taylor-Couette Flow under the Influence of a Helical Magnetic Field*. Phys. Rev. Lett. **97** (18), (2006), p. 184502.
- [41] H. Moffatt. *Magnetic field generation in electrically conducting fluids*. Cambridge University Press (1978).
- [42] G. E. Backus, S. Chandrasekhar. *On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos*. Proc. Nat. Acad. of Science **42** (3), (1956), pp. 105–109.
- [43] E. C. Bullard, H. Gellman. *Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism*. Phil. Trans. Roy. Soc. A **247**, (1954), p. 213.
- [44] G. E. Backus. *A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos*. Ann. Phys. **4**, (1958), p. 372.
- [45] J. J. Love, D. Gubbins. *Dynamos driven by poloidal flow exist*. Geophys. Res. Letters **23**, (1996), pp. 857–860.
- [46] S. Childress. *A class of solutions of the magnetohydrodynamic dynamo problem*. Interscience (1969).
- [47] T. Rikitake. *Oscillations of a system of discs dynamos*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **54**, (1958), pp. 89–105.
- [48] A. E. Cook, P. Roberts. *The Rikitake two-disc dynamo system*. Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **68**, (1970), pp. 547–569.
- [49] S. Childress, A. Gilbert. *Stretch, Twist, Fold: The fast dynamo*. Springer Verlag (1995).
- [50] G. O. Roberts. *Dynamo Action of Fluid Motions with Two-Dimensional Periodicity*. Phil. Trans. Roy. Soc. A **271** (1216), (1972), pp. 411–454.
- [51] F. Plunian, K.-H. Rädler. *Subharmonic dynamo action in the Roberts flow*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **96** (115), (2002), p. 115.
- [52] Y. B. Ponomarenko. *Theory of the hydromagnetic generator*. J. Appl. Mech. Tech. Phys. **14**, (1973), p. 775.
- [53] A. Gilbert, Y. Ponty. *Dynamos on stream surfaces of a highly conducting fluid*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **93**, (2000), pp. 55–95.
- [54] V. Archontis, S. B. F. Dorch, A. Nordlund. *Numerical simulations of kinematic dynamo action*. Astron. & Astrophys. **397**, (2003), p. 393.

- [55] M. E. Brachet. *Direct simulation of three-dimensional turbulence in the Taylor-Green vortex*. Fluid Dyn. Res. **8 (1-4)**, (1991), pp. 1–8.
- [56] C. Nore, M. E. Brachet, H. Politano, A. Pouquet. *Dynamo action in the Taylor-Green vortex near threshold*. Phys. of Plasmas **4 (1)**, (1997), pp. 1–3.
- [57] Y. Ponty, H. Politano, J.-F. Pinton. *Simulation of induction at low magnetic Prandtl number*. Phys. Rev. Lett. **92 (14)**, (2004), p. 144503.
- [58] Y. Ponty, J.-P. Laval, B. Dubrulle, F. Daviaud, J.-F. Pinton. *Subcritical dynamo bifurcation in the Taylor-Green flow*. Phys. Rev. Lett. **99 (22)**, (2007), p. 224501.
- [59] L. Marié, J. Burguete, F. Daviaud, J. Léorat. *Numerical study of homogeneous dynamo based on experimental von Karman type flows*. Eur. Phys. J. B **33 (4)**, (2003), pp. 469–485.
- [60] P. Odier, J.-F. Pinton, S. Fauve. *Advection of a magnetic field by a turbulent swirling flow*. Phys. Rev. E **58 (6)**, (1998), pp. 7397–7401.
- [61] J.-P. Laval, P. Blaineau, N. Leprovost, B. Dubrulle, F. Daviaud. *Influence of turbulence on the dynamo threshold*. Phys. Rev. Lett. **96 (20)**, (2006), p. 204503.
- [62] F. Stefani, A. Gailitis, A. Alemany, G. Gerbeth, P. Marty, J. Thibault. *Velocity profile optimization for the Riga dynamo experiment*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1999).
- [63] R. Kaiser, A. Tilgner. *Kinematic dynamos surrounded by a stationary conductor*. Phys. Rev. E **60**, (1999), p. 2949.
- [64] R. Avalos-Zúñiga, F. Plunian. *Influence of electromagnetic boundary conditions onto the onset of dynamo action in laboratory experiments*. Phys. Rev. E **68**, (2003), p. 066307.
- [65] M. Bourgoin, P. Odier, J.-F. Pinton, Y. Ricard. *An iterative study of time independent induction effects in magnetohydrodynamics*. Phys. Fluids **16 (7)**, (2004), pp. 2529–2547.
- [66] R. Laguerre, C. Nore, J. Léorat, J.-L. Guermond. *Effects of conductivity jumps in the envelope of a kinematic dynamo flow*. Comptes Rendus Mécanique **334 (10)**, (2006), pp. 593–598.
- [67] A. Giesecke, F. Stefani, G. Gerbeth. *Kinematic simulation of dynamo action by a hybrid boundary-element/finite-volume method*. Magnetohydrodynamics **44 (3)**, (2008), pp. 237–252.
- [68] F. Stefani, G. Gerbeth, F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, J. Léorat, M. Xu. *Ambivalent effects of added layers on steady kinematic dynamos in cylindrical geometry: application to the VKS experiment*. Eur. J. Mech. B **25 (6)**, (2006), pp. 894–908.

- [69] C. Gissinger, A. Iskakov, S. Fauve, E. Dormy. *Effect of magnetic boundary conditions on the dynamo threshold of von Kármán swirling flows*. *Europhys. Lett.* **82** (2), (2008), p. 29001.
- [70] A. Gailitis, O. Lielausis, F. Stefani, E. Platacis, G. Gerbeth. *Colloquium: Laboratory experiments on hydromagnetic dynamos*. *Rev. Mod. Phys.* **74**, (2002), p. 973.
- [71] B. Lehnert. *An experiment on axisymmetric flow of liquid sodium in a magnetic field*. *Ark. Fys.* (13), (1958), pp. 109–116.
- [72] F. J. Lowes, I. Wilkinson. *Geomagnetic dynamo: An improved laboratory model*. *Nature* **219**, (1968), pp. 717–718.
- [73] A. Gailitis, O. Lielausis, S. Dement'ev, E. Platacis, A. Cifersons. *Detection of a flow induced magnetic field eigenmode in the Riga dynamo facility*. *Phys. Rev. Lett.* **84**, (2000), p. 4365.
- [74] R. Stieglitz, U. Müller. *Experimental demonstration of a homogeneous two-scale dynamo*. *Phys. Fluids* **13**, (2001), p. 561.
- [75] R. Monchaux, M. Berhanu, M. Bourgoïn, M. Moulin, P. Odier, J.-F. Pinton, R. Volk, S. Fauve, N. Mordant, F. Pétrélis, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle, C. Gasquet, L. Marié, F. Ravelet. *Generation of magnetic field by dynamo action in a turbulent flow of liquid sodium*. *Phys. Rev. Lett.* **98**, (2007), p. 044502.
- [76] H.-C. Nataf, T. Alboussière, D. Brito, P. Cardin, N. Gagnière, D. Jault, J.-P. Masson, D. Schmitt. *Experimental study of super-rotation in a magnetostrophic spherical Couette flow*. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **100**, (2006), pp. 281–298.
- [77] D. Schmitt, T. Alboussière, D. Brito, P. Cardin, N. Gagnière, D. Jault, H.-C. Nataf. *Rotating spherical Couette flow in a dipolar magnetic field: experimental study of magneto-inertial waves*. *J. Fluid Mech.* **604** (1), (2008), pp. 175–197.
- [78] T. von Karman. *Über laminare und turbulente reibung*. *Z. Angew Math. Mech.* **1** (4), (1921), pp. 233–235.
- [79] G. K. Batchelor. *Note on a class of solutions of the Navier-Stokes equations representing steady rotationally-symmetric flow*. *Q J Mechanics Appl Math* **4** (1), (1951), pp. 29–41.
- [80] P. J. Zandbergen, D. Dijkstra. *Von Karman swirling flows*. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **19**, (1987), pp. 465–491.
- [81] K. Stewartson. *On the flow between two rotating coaxial disks*. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **49** (02), (1953), pp. 333–341.

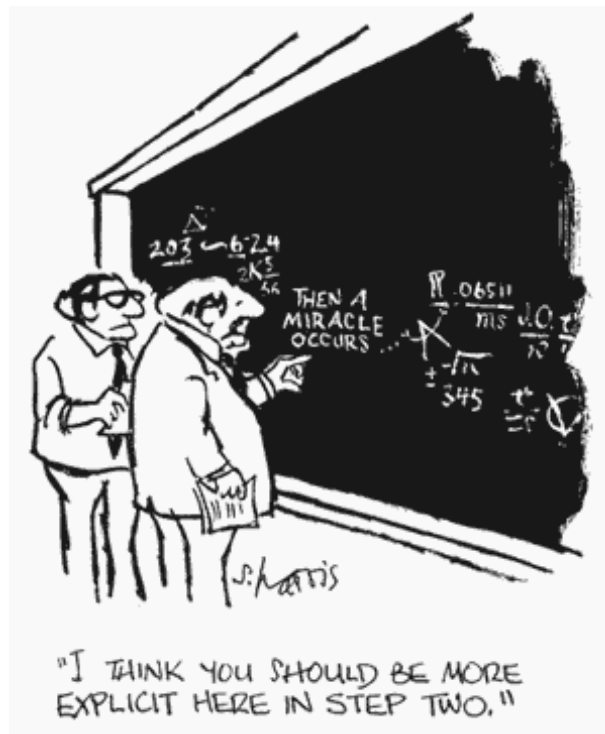
- [82] F. Pétrélis, M. Bourgoïn, L. Marié, J. Burguete, A. Chiffaudel, F. Daviaud, S. Fauve, P. Odier, J.-F. Pinton. *Nonlinear magnetic induction by helical motion in a liquid sodium turbulent flow*. Phys. Rev. Lett. **90** (17), (2003), p. 174501.
- [83] J. Léorat. *Numerical simulations of cylindrical dynamos: Scope and method*. Prog. Ser. Am. Inst. Astronautics and Aeronautics **162**, (1994), p. 282.
- [84] S. Douady, Y. Couder, M. E. Brachet. *Direct observation of the intermittency of intense vorticity filaments in turbulence*. Phys. Rev. Lett. **67** (8), (1991), pp. 983–986.
- [85] S. Fauve, C. Laroche, B. Castaing. *Pressure fluctuations in swirling turbulent flows*. J. Phys. II France **3** (3), (1993), pp. 271–278.
- [86] O. Cadot, Y. Couder, A. Daerr, S. Douady, A. Tsinober. *Energy injection in closed turbulent flows: Stirring through boundary layers versus inertial stirring*. Phys. Rev. E **56** (1), (1997), pp. 427–433.
- [87] F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud, J. Léorat. *Toward an experimental von Karman dynamo: Numerical studies for an optimized design*. Phys. Fluids **17** (11), (2005), p. 117104.
- [88] C. Nore, L. S. Tuckerman, O. Daube, S. Xin. *The 1 : 2 mode interaction in exactly counter-rotating von Karman swirling flow*. J. Fluid Mech. **477**, (2003), pp. 51–88.
- [89] C. Nore, M. Tartar, O. Daube, L. S. Tuckerman. *Survey of instability thresholds of flow between exactly counter-rotating disks*. J. Fluid Mech. **511**, (2004), pp. 45–65.
- [90] E. Crespo Del Arco, J. J. Sánchez-Álvarez, E. Serre, A. de la Torre, J. Burguete. *Numerical and experimental study of the time-dependent states and the slow dynamics in a von Kármán swirling flow*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **103** (2), (2009), pp. 163 – 177.
- [91] F. Ravelet, A. Chiffaudel, F. Daviaud. *Supercritical transition to turbulence in an inertially driven von Kármán closed flow*. J. Fluid Mech. **601**, (2008), pp. 339–364.
- [92] M. Bourgoïn, J.-F. Pinton, P. Odier, R. Volk, P. Frick, S. Kripchenko. *Induction mechanisms in von Kármán swirling flows of liquid gallium*. Magnetohydrodynamics **40** (1), (2004), pp. 13–31.
- [93] N. L. Dudley, R. W. James. *Time-dependent kinematic dynamos with stationary flows*. Proc. Roy. Soc. Lond. A **425**, (1989), pp. 407–429.
- [94] A. de la Torre, J. Burguete. *Slow dynamics in a turbulent von Kármán swirling flow*. Phys. Rev. Lett. **99**, (2007), p. 054101.

- [95] A. Willis, D. Gubbins. *Kinematic dynamo action in a sphere: Effects of periodic time-dependent flows on solutions with axial dipole symmetry*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **98** (6), (2004), pp. 537–554.
- [96] L. Marié. *Transport de moment cinétique et de champ magnétique par un écoulement tourbillonnaire turbulent: Influence de la Rotation*. Ph.D. thesis, UMCP Université Denis Diderot - Paris VII (2003).
- [97] C. Nore, F. Moisy, L. Quartier. *Experimental observation of near-heteroclinic cycles in the von Karman swirling flow*. Phys. Fluids **17** (6), (2005), p. 064103.
- [98] F. Durst, A. Melling, J. Whitelaw. *Principles and Practice of Laser-Doppler Anemometry*. Academic Press, London (1976).
- [99] P. Buchhave, W. K. George, J. L. Lumley. *The measurement of turbulence with the Laser-Doppler Anemometer*. Ann. Rev. Fluid Mech. **11** (1), (1979), pp. 443–503.
- [100] W. Merzkirch. *Flow Visualization*. Academic Press (1987).
- [101] C. Doppler. *On the coloured light of the double stars and certain other stars of the heavens*. Royal Bohemian Society of Sciences p. 465.
- [102] N. Mordant, J. Delour, E. Lèveque, A. Arnéodo, J.-F. Pinton. *Long time correlations in lagrangian dynamics: A key to intermittency in turbulence*. Phys. Rev. Lett. **89** (25), (2002), p. 254502.
- [103] N. Mordant, P. Metz, J.-F. Pinton, O. Michel. *Acoustical technique for Lagrangian velocity measurement*. Rev. of Scientific Instruments **76** (2), (2005), p. 025105.
- [104] Y. Yeh, H. Z. Cummins. *Localized fluid flow measurements with an He-Ne laser spectrometer*. App. Phys. Lett. **4** (10), (1964), pp. 176–178.
- [105] D. K. McLaughlin, W. G. Tiederman. *Biasing correction for individual realization of laser anemometer measurements in turbulent flows*. Phys. Fluids **16** (12), (1973), pp. 2082–2088.
- [106] J. L. Herrin, J. C. Dutton. *An investigation of LDV velocity bias correction techniques for high-speed separated flows*. Experiments in Fluids **15**, (1993), pp. 354–363.
- [107] E. Robert V., M. James F. *An overview of particle sampling bias*. Tech. rep. (1984).
- [108] F. Ravelet. *Bifurcations globales hydrodynamiques et magnétohydrodynamiques dans un écoulement de von Kármán turbulent*. Ph.D. thesis, École doctorale de l'École Polytechnique (2005).
- [109] E. Li, K. Tieu, M. Mackenzie. *Interference patterns of two focused gaussian beams in an LDA measuring volume*. Optics and Lasers Eng. **27** (4), (1997), pp. 395–407.

- [110] F. Marqués. *On boundary conditions for velocity potentials in confined flows: Application to Couette flow*. Phys. Fluids A: Fluid Dynamics **2** (5), (1990), pp. 729–737.
- [111] D. R. Lide. *Handbook of chemistry and physics*. Chemical Rubber Pub. Co (2005).
- [112] P. Cortet, P. Diribarne, R. Monchaux, A. Chiffaudel, F. Daviaud, B. Dubrulle. *Normalized kinetic energy as a hydrodynamical global quantity for inhomogeneous anisotropic turbulence*. Phys. Fluids **21** (2), (2009), p. 025104.
- [113] S. Pope. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press (2008).
- [114] E. Knobloch. *Symmetry instability in rotating hydrodynamic magnetohydrodynamic flows*. Phys. Fluids **8**, (1996), p. 1446.
- [115] R. E. Hewitt, A. L. Hazel. *Midplane-symmetry breaking in the flow between two counter-rotating disks*. J. Eng. Math. **57**, (2007), pp. 273–288.
- [116] F. Ravelet, L. Marié, A. Chiffaudel, F. Daviaud. *Multistability and memory effect in a highly turbulent flow: Experimental evidence for a global bifurcation*. Phys. Rev. Lett. **93** (16), (2004), p. 164501.
- [117] H. A. Kramers. *Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions*. Physica A **7**, (1940), pp. 284–304.
- [118] P. Hänggi, P. Talkner, M. Borkovec. *Reaction-rate theory: fifty years after Kramers*. Rev. Mod. Phys. **62** (2), (1990), pp. 251–341.
- [119] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung, F. Marchesoni. *Stochastic resonance*. Rev. Mod. Phys. **14** (1), (2002), pp. 3046–3058.
- [120] A. V. Chechkin, V. Y. Gonchar, J. Klafter, R. Metzler. *Barrier crossing of a Lévy flight*. Europhys. Lett. **72** (3), (2005), pp. 348–354.
- [121] P. Kloeden, E. Platen. *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Springer Verlag (1992).
- [122] L. Marié, C. Normand, F. Daviaud. *Galerkin analysis of kinematic dynamos in the von Karman geometry*. Phys. Fluids **18** (1), (2006), p. 017102.
- [123] W. Z. Shen, J. Norensen, J. Michelsen. *Numerical study of swirling flow in a cylinder with rotating top and bottom*. Phys. Fluids **18**, (2006), p. 064102.
- [124] C. Normand. *Modal versus energy stability analysis of kinematic dynamos in cylindrical configurations*. Phys. Fluids **20** (8), (2008), p. 084105.
- [125] A. Courvoisier, Y. Ponty. *Dynamo action in flows with cat’s eyes*. Geophys. Astrophys. Fluid Dyn. **99** (5), (2005), pp. 413–429.

- 
- [126] K.-H. Radler. *Can the highly axisymmetric magnetic field of saturn be maintained by a dynamo?* Adv. Space Res. **12** (8), (1992), pp. 281–284.
- [127] C. Normand. *Ponomarenko dynamo with time-periodic flow.* Phys. Fluids **15** (6), (2003), pp. 1606–1611.
- [128] S. Fauve, F. Pétrélis. *The dynamo effect.* In *Peyresq Lectures on Nonlinear Phenomena*, vol. Vol. II. J.-A. Sepulchre Ed., World Scientific, Singapore (2003).
- [129] M. Peyrot, F. Plunian, C. Normand. *Parametric instability of the helical dynamo.* Phys. Fluids **19** (5), (2007), p. 054109.









ISBN 978-84-692-6376-1